

Title	圖式力學への寄與 : Cremona 力線図の描法
Author(s)	三木, 鉄夫
Editor(s)	
Citation	Bulletin of the Naniwa University. Series A, Engineering and natural science. 1952, 1, p.1-43
Issue Date	1952-03-25
URL	http://hdl.handle.net/10466/7650
Rights	

A Contribution to the Graphic Statics; How to Draw the Cremona Diagram?

The Cremona diagrams are very powerful weapons for the structural engineers. However, its application is limited only to a truss with the external forces acting on the circumferential joints. The purpose of this work is to extend the Cremona diagram method to all of the statically determinate trusses.

Consider a simple truss at first. When there are crossed members, the crossing points of two members will be counted as the joints. When more than two members cross at one point, the crossing point is replaced by an infinitely small polygon, and the crossing points of each two are considered to be the joints. When the external forces act on the joints inside the truss, it is proposed to shift the force on its line of action until its point of application reaches the outside member and to put an imaginary member in between.

By analysing the reciprocal force diagram, and by considering spatially after Maxwell, an easier method to solve a highly complicated truss is obtained.

Then, consider a plane complex truss next. The author has extended the solution of the complex truss of the first order, which is already established, to that of the second order. Here the order is defined as the numbers of the substituted members. Since the order of the complex truss is decreased in a symmetrical truss, it is possible to solve a complex truss of the order of more than two. The characteristics of the radially symmetrical trusses are discussed.

The author proposes a new method of solving a statically determinate complex truss. The statically determinate truss diagram including the external forces is considered to be a statically indeterminate truss of the first order. The magnitude of the force in one member is assumed arbitrarily. If the truss thus obtained is a simple one, then the Cremona diagram can be drawn. The magnitude of the resulting external force will decide the scale of the forces, and its sense indicates how to go around the joint on the Cremona diagram. This process is applicable to a truss with three and four external forces. However, the external forces should act on a hinge of a tetragon which has no diagonal, or should act on a hinge which has a diagonal but which lacks an outside edge.

When more than four forces act, you have to start from the force in one member, to find out a point to which converges the polygon of the external forces, and then to draw the diagrams assuming two similar polygons of the external forces.

Next, the author shows how to solve the case of a joint with no external forces. The method of inserting a triangle is extended to that of

inserting a polygon. When a complex truss of the first order has the properties of a complex truss of the substantially second order, it becomes impossible to continue drawing the diagram in some special cases, even if you start from the force in one member. If it happens, then you assume the force in another member arbitrarily and continue drawing a polygon through. Here you can insert a polygon into the diagram you have already drawn. This is a generalisation of the idea proposed originally by Föppl and others. If you form an imaginary joint making use of a joint with no load, and transform a complex truss into a simple one, the latter will be solved. In this case it will be possible to translate the solution of the simple truss thus transformed into that of the original truss, if you do not replace the members which meet at the joint on which the external forces act.

The above is discussed for the general case. The author illustrates the special cases such as parallel forces, parallel members, members on a same straight line, several concurrent forces, funicular polygons, and critical forms. When four forces act on each of the four joints of a tetragon, and when the tetragon itself is a funicular polygon of the external forces, the forces in the members inside the tetragon become zero. The method proposed by the author makes the polygon of the external forces converge to one point for a truss of the critical form, in other words, the external forces vanish. As a special case, the force in a member becomes infinitely great for a finite value of the external forces. Those special cases are discussed in detail.

與 寄 の 學 力 式 圖

—Cremona 力線圖の描法—

三 木 鉄 夫

緒 論

この論文の目的は静定トラスの Cremona 力線圖の描き方を系統的に記述しようとするものである。トラス内部に外力の作用する場合の Cremona 力線圖は従来取扱われていない。また非単純静定トラスの図式解法を系統的にまとめたものはこれ迄にないようである。著者はこれ等の問題を解決し、進んで構材力より出発する非単純トラスの Cremona 力線圖の描き方を考案した。

Cremona 力線圖を取上げている研究はあまりないようである¹⁾。これは可なり古典的問題であって既に解決済みで、不明の事が残されていないように考えられている。併し少し複雑な問題に遭遇すると、普通の教科書に書いてある事だけ知ったのでは解けない。Föppl や Müller-Breslau はその著書の中に断片的に解の困難なものに対する説明を試みている。また Cremona 力線圖の画法が必ずしも機械的に出来ないことを暗示している。

この論文は学問的よりもむしろ技術的に貢献するものである。この論文により特に面倒な場合（例えば非対称な3次以上の非単純）を除いて如何なる平面静定トラスに対しても Cremona 力線圖を引くことが出来る。全文は必ずしも著者の考案になるものではないが昔の専門家の著書に散在している注意書き等を整理して解法に対する系統的の指示を与えている。従ってこの論文の方法により困難なく Cremona 力線圖が描けるようになっている。またこの論文で最も重要な所は節点数に対して外力の数の少ない場合である。これは与えられた荷重に対する構造の設計としては当を得ないように見えるが、構造物の設計は必ずしも外力の要求だけからされるものではない。また走行荷重の場合は荷重の動く範囲に構造物が必要である。また航空機のように色々の飛行状態や降着等の「荷重の場合」に適するように設計するものがある。従って甲の場合の荷重は或る構材を必要とするが、乙の場合の荷重に対してはその構材は必ずしも必要でなくなるものである。従って節点数に対して外力の数の少ない場合の研究も決して無駄ではない。

本論文により図式力学に対し多少たりとも寄与し得れば幸である。

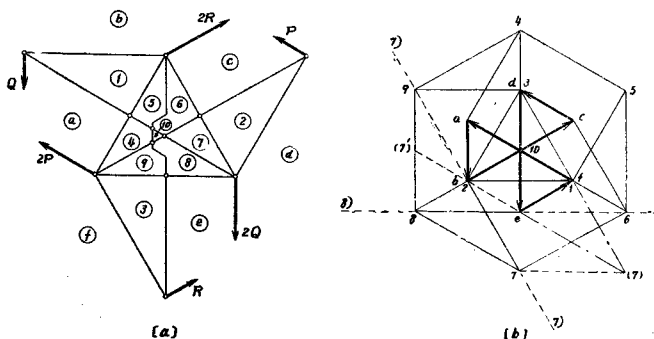
I. 単 純 ト ラ ス

§ 1.1 平 面 単 純 ト ラ ス

構材が交叉していないで外力がトラス平板外周の節点に掛っている場合はどんな教科書にでもあるから問題にならない。交叉部材が2本で一組ある場合は Föppl が取扱っていて交叉点を1つの節点

1) Herber, K. H.: Vereinfachte Cremonapläne, das Kraftstrahl-Verfahren, VDI. Bd. 91, Nr. 20, 15, Okt. 1949 は従来の方法を応用するための便宜的な注意書きの程度である。

と考へても差支えないことを証明している¹⁾。著者も亦この主張に従つて2本1組の交叉点を1つの節点と見做すことにした。静定であるトラスに節点を1つ追加すれば2本の構材が不足する。元來1本づつの構材が交叉点を節点とすることにより2本づつに分割されるから交叉点を節点と考へること



オ 1 図

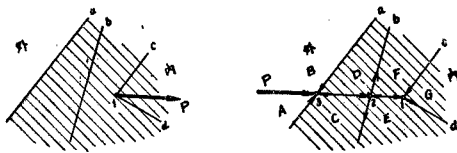
により2本の構材が追加されて出来てくる。即ち2本しか必要でなかつたのが4本になるから、剰余の2本が新しい節点に対するものと考えれば全体の静定性は害されない。併し3本が一点に交っている場合はこれを1つの節点と考へるのは明らかに間違ひである。元來所要数の3本が各2本ずつに分割されて合計6本になり、新節点用の2本と元來必要なる3本との合計5本に対して1本過剰になる。即ち交叉点を節点に置き換えられるのは2本交叉の場合に限るのである。3本以上の場合は交叉点を少しずらして考へ各2本を交らせその点を節点と考へればよい。例へば3本の場合は各2本を交らせると新しい節点から成る小さい3角形が出来て各構材は3本に分割されるから、全部で $3 \cdot 3 = 9$ 本の構材となり、元來の3本と新しい3つの節点のための $3 \cdot 2 = 6$ 本と合計9本で数が合うから静定性は害されない。一般に n 本交わる時は n 角形を考へれば、新しい節点のために $2n$ 本の構材が必要で元來の n 本を加えると $3n$ 本となる。1本は各3本に分割されるから $3n$ 本となり勘定が合うことになる。併し、4本以上の場合は交点が増して1本が4本以上に分割されるが n 本交る所の微小 n 角形を先づ考へ、他の交点の所は順次節点にして行くと考へればよい。兎に角3本以上の交点を1つの節点と考へず、いつでも2本の交点を假想節点として行けばよい。

第1図の例で Bow の記号を使い右まわりを守るとすれば、外力は第1図(b)の太線の形になる。この作図で1, 2, 3の点は直ぐ出るが、次へ進めない。併し例へば $2Q$ の作用点では $2d, de=2Q$ の外に87が $1a$ と等しいことがわかっているから、不明構材力は $e8$ と 72 との2つだけである。そこでベクトルの順序を無視して既知の力 $87=1a$ を $2d-de$ の次に並べて未知の構材力 72 と $e8$ の大きさを出す。この際 e から引く $87=1a$ のベクトルの向きに注意する。この場合は $e(7')$ でなく $e(7)$ の向きに引かねばならぬ。その大きさがわかれば、ベクトルの並べ換えをすればよい。(b)図に於ける7の点は2を通り(a)図の 72 に平行線を引いた線上にある。また8の点は(b)図で e 点を通り(a)図の $e8$ に平行に引いた線上になければならぬ。この条件に合致するように今出したベクトルの平行移動をやればよい。こうして7, 8点が決定すると、これから後は普通の作図法を困難なしにや

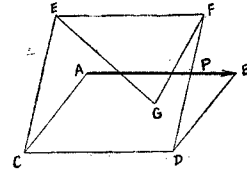
1) Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik, II. Graphische Statik, 7. Auflage S-50

つて行くことが出来る。

次に Cremona 力線図で一番厄介な、図形内部に外力が掛っている時の解法である。これは一般に取扱っていない。この場合はその外力をトラスの外部迄引き出して考える。例えば第2図 [a] で図形の内部で1のような節点に力 P が作用する場合はこの力を第2図 [b] のように外部へ引き出し、節点1迄に仮想構材 12、及び 23 を入れて考える。図形は節点が2つ増すが、 a, b 構材は各2分されるから2本が4本に増加して2本の剰余材が出来る。新構材 12、23 を加えて合計4本の増加になるから節点が2つ増しても静定性を失わず、且つまた構材力に変化を与えない。一般に外力を外部に引き出すのに n 本の構材を切るとすれば、これ等の交点を節点と考えると構材が n 個増し、外力と交る n 本の構材が夫々2分されるから結局 n 個の節点と $2n$ 本の構材とが増した事になり静定性が保たれる。第



[a] [b] 第 2 図



第 3 図

2 図に対する Cremona 力線図を第3図に示す。 a を圧縮材 b を引張材と假定して作図してある。外力 P はその大きさも向きも全然変化なく、途中の2つの仮想構材に P だけの圧縮を与えて、1 点に伝えられることになる。また a, b 材の構材力にも何等影響していないことがわかる。外力を外側へ引き出す時に2構材或はそれ以上の構材の交わる節点を通る場合は假りにこれを避けて通るものと考え。これは交叉材の取扱いの場合と同様である。

§ 1.2 Cremona 力線図の引き方

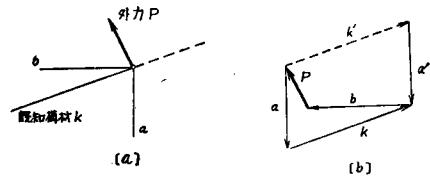
Cremona 力線図の引き方には節点周回法と Bow の記号法とある。Bow の記号法は節点周回を自動的に行っているの節点を一定方向に回転することには変りがない。この論文の記述には主として Bow の記号法を使う事にしたが、場所によっては節点周回法を混用している。ここでは節点周回法を基礎的であると考えて次にその描き方を説明する。

- 1) 外力を全部一連の力線図に描く。力の配列は図形を一定回転方向に従って順次に置く。トラス内部に作用する外力を構材に交らせて外部迄引き出し、その交叉点を1つの節点と見做す。この際なるべく構材を少く切る側へ出す方がよい。
- 2) 外力はその位置を固定し、Cremona 力線図の完成する迄、その作用線上を移動させてはいけない。
- 3) 外力及び構材は節点のまわりに一定回転方向、第1項の外力の順序をつけた回転方向と同じ回転方向に従って順次番号をつける。これは節点に交わる外力及び構材力を力の多角形に描き出す時のベクトル配列の順序になるものである。普通は右まわり、即ち時計の針のまわりの方向にきめている。外力から初まって右まわりに番号をつける。
- 4) 外力の外に構材が2本しか交っていない節点から力線図を描き初める。外力のベクトルの矢先

に1の番号の構材に平行線を引き、ベクトルの矢のついていない方の端から2の番号のついている構材に平行線を引いて1と2とを交わらせる。節点をまわる順序が $P-1-2$ であつて力の三角形も亦 $P-1-2$ の順序にベクトルが配列されねばならぬ。

- 5) 最初の節点では今描いた力の三角形により P の矢の方向が分っているから、 P から初まってこの三角形を $P-1-2$ と廻る方向に1, 2の各辺に矢印をつける。この矢印をトラスの節点の近くその構材端に近く書き写す。節点に向つて接近する方向に矢印のついた構材は圧縮を受け、節点に尻を向けて遠ざかる矢印のついた構材は引張りを受けることになる。
- 6) これが済むと次の節点に移る。初めの2本の構材だけしか交っていない節点に若し外力が作用していなければ、前項の1, 2の構材の構材力は零で Cremona 力線図には表われない。今出した1或は2が次の節点に関連し、その外に内力未知の構材が2本しか交っていない節点が次に進むべき節点である。内力未知構材が3本以上、即ち1或は2を合わせると4本以上の構材の交っている節点へは進めないから、何処か外にこの条件に合う場所を探してこれを第2番目の計算箇所にする。1或は2の構材の他端が1或は2の構材の外に2構材しか交っていない時は1或は2の矢印を反対に向けて、これをあたかも外力のように見なして初めと同様に三角形を描く。この時も初めと同様に同じ回転方向にベクトルを配列する。
- 7) この第2の節点に未知構材の外に外力(既知)はいくら掛つていても差支えない。たゞこの場合は構材であっても外力であっても同一回転方向にベクトルを配列せねばならない。場合によっては既知構材を2本の未知構材が挟んでいて更にその外に外力が掛っているような場所へ進まねばならぬ事がある。この場合は假りに既知構材の構材力を移動して(第4図の k' ように)作図し ($P-k'-a'-b$)、その後でベクトルの並べ換えをすればよい。 ($P-a-k-b$)

- 8) 追つて同様にして次々と節点をまわつて行く。段々に既知構材が増すと、多くの構材の集っている節点へ進んで行くが、いつもベクトル配列の順序を乱してはいけない。



オ 4 図

- 9) 構材が交叉している所は、これを假りに節点と考へて進む。初めに外力を配列して外力だけの力の多角形を作つた時、外力がトラス内部の節点に作用するものを外部迄引き出して考へると必ず1本以上の構材を切るから、その点も亦節点と考へて計算を進める。
- 10) Cremona 力線図が段々終りに近づき最後になると未知構材が1本でその節点に集る外の構材が全部既知になる。その時は未知構材の次の既知構材から初めてベクトルを所定の回転方向に従つて配列して順次ベクトルを追つて行くと未知構材の前の既知ベクトルで終る折線が出来る。その折線の終りと初めとを結ぶ線が未知構材のベクトルになる。若しこの線が未知構材に平行しなければ計算に誤りがあることになる。

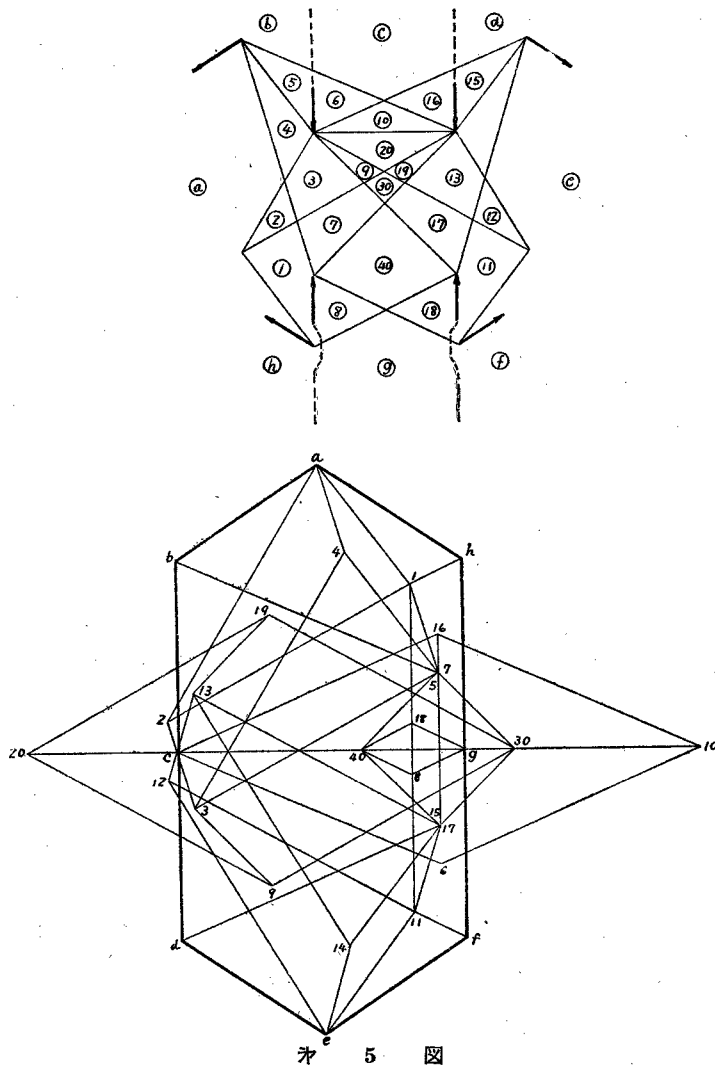
以上は普通行われている Cremona 力線図の描き方を一般化したものである。外力を入れたトラス線図と Cremona 力線図とは可逆性を持ち、お互に一方の多角形が他方の節点になっている事から Bow の記号法が工夫された。この方法の利点は外力の回転方向だけ決定すれば各節点は同じ回転方

向に自然にベクトルが配列され、故意に各節点毎に回転方向を顧慮する必要がない。併しこれは作図上に考慮が省けるだけで根本概念としては回転方向を考えないと応用が利かない。

Bow の記号法は非常に便利であるから本論文では主としてこれを使う事にする。この方法を適用する場合に便宜上次のような記号と規約とを使うことにする。

- 1) 外力は既述の方法と同様にトラス外部へ引き出し、外力を境とする区間には (a), (b), (c), ... の符号を使う。
- 2) トラス内部の区間は ①, ②, ③, ... の符号を使い交叉点は全部節点と見なす。
- 3) 特に断っていない時は右まわりを原則とする。

上述の方法による1例を次に示す(第5図)。



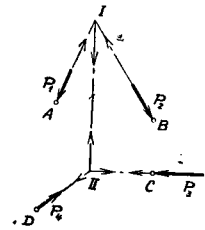
§ 1・3 相反力線図の検討

静定トラスに釣合外力の掛っている図を力の位置線図と考え、これに対する力の釣合線図を相反力

線図或は Cremona 力線図と名付けられている。Cremona 力線図はこれを逆にトラスに外力の掛った力の位置線図と考えれば元のトラスと釣合外力の図はその Cremona 力線図になっている事から Cremona 力線図のことを元のトラス線図の相反力線図という¹⁾。次に力の位置線図と相反力線図とを比較対照して検討し、相反力線図の描法を研究して見よう。

トラスの構材はトラスに於ける2つの面(構材で囲まれた多角形)の交わる線であつて相反力線図ではやはり2つの面(多角形)の交りとなって現われる。トラスに於ける1つの節点は相反力線図では1つの面に対応する。2つの節点を結ぶ線即ち構材は、その節点に対応する2面の交線である。即ち相反力線図をトラスと見なせば1本の構材になる。逆にトラスに於ける1つの面(多角形)は相反力線図では1つの節点に対応する(相反力線図を1つのトラスと見なした場合)。トラスに於て1つの節点に集る構材は相反力線図では1つの閉じた多角形を形成する。トラスの1つの節点に平行でない構材が2本だけしか集っていない(外力を含めて)ときは相反力線図で構材を決定する2つの節点は一致することになり、構材の長さが零になる。即ちその構材に対応する構材は相反力線図には存在しない。そしてトラスに於てその構材が境界をなす2つの面は一致する。

元来相反力線図の考え方はトラスそのものを力の位置線図と見なしたものである。従つて構材そのものも力の位置を表わしたものであつて、その性質に於ては何等外力と変りがない。トラスの構材は必らずその両端が節点につながり、一方の端がそれにつながつた節点に及ぼす力は他の端がその節点に及ぼす力とは向きが反対になっている。従つて一本の構材内で力が釣合っているものである。外力はその群としては釣合っているがそのうちの1つをとり出すと単独であるから構材と比較して違つた性質になる。そこで2力の交点からその合力線図を引き、次の力と交らせ、更にその合力線図を引いて次の力を合計するように作図して行くと、その力線図はトラス線図と同様の性質を持つことになる。例えば第6図は $ABCD$ の4つの節点に各力が作用して全体として釣合っている場合である。 $P_1 P_2$ は I の点で交わりその合力は $I II$ の方向になる。これに P_3 を II で交らせた時に $P_1 P_2 P_3$ の合力は ID の方向になる。4力が釣合っているからこの方向は P_4 の方向でなければならぬ。この作図で $I II$ を假想節点と考えると、この力の位置線図は全くトラスの構材と同じ性質を持つ事になる。 A に作用する力は P_1 で I 点に作用する力はこれと大きさが等しく向きが反対である。また B に作用する力は P_2 で、 I に作用する力はこれと反対の向きと考える。この2力から假想節点 I の釣合いを出すと $I II$ の假想構材の I の点に作用する力は $I II$ の方向になる。これは $P_1 P_2$ の合力と同じものである。 II の節点に就ても P_3 及び P_4 から同様な事がいえる。従つてこの全体の図をトラスと考へても何等不合理はない。



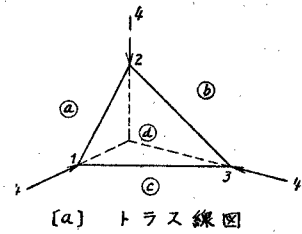
第 6 図

尙具体的にトラスと相反力線図とを考へるには次のようにするのが便利である。

- 1) トラスに作用する外力の力線はすべて無限遠点で交わる構材と考へられる(第7図[a])。
- 2) トラスの外部の面は2本の外力の力線と構材とで決定される。即ち相反力線図の節点には2つの外力が交わる。

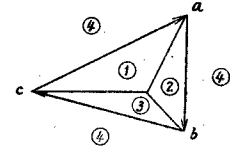
1) Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik, II. Graphische Statik S-12

3) トラスと外力または相反力線図は全体を平面的に考えなくても、それらの節点及び構材（外力も含めて）で構成されている立体枠組の平面への射影と考えるても差支えない。（トラスと相反力線図の両射影が必要な平行性さえ保っていれば宜しい。）従って構材を決定する面も、立体枠組の稜線により囲まれた面（一般に平面ではない）として考えを進めても差支えない。即ち外力及びトラスの構材は同一平面上にないと考えて面を決定してもよい。



[a] トラス線図

4) 2つの面の出会う線（立体的には2つの面の決める稜線）または2つの節点を結ぶ線（節点は同一の高さになくてもよい。立体的には2つの頂点となる）として、1つの構材が決定されなければならない。また1つの面は稜線の囲む面として決定されなければならない。



[b] Cremona 力線図
オ 7 図

5) 上述のように考えた立体的なトラスによる枠組と相反力線図による枠組との面と頂点及び稜線と稜線とが1対1に対応しなければならない。

6) 従ってトラスと外力の力線図を相反力線図に描き得るためには、上のように立体的に考えて

a) 1つの稜線に3つ或はそれ以上の面が出会ってはいけない。但し稜線以外の所では如何様にも面が交叉していても差支えない。

b) 従ってこのように考えた面（外力線と構材の決定する半無限遠に達する面も含めて）は連続して次々に連ってなければならぬ。即ちこれ等の面全体は連って無限大に拡ってなければならぬ。面の一部が有限に終ってはいはならぬ。

c) 以上の事から、このような面は表と裏を持つ面と考えることが出来る。表裏いづれかの側の面上に在る点はその面上でどんな通路を通っても、その面を貫かない限り反対側の面上へ出ることは出来ない。従って稜線の長さ及び頂角を自由に変え得るとしたときに、稜線及び頂点の相対的な面上の順序を変えずに（即ち面を切り放なす事なしに）そのまま引伸ばして全空間を全く2つに分けるような一枚の面にする事が出来る。

d) またトラス線図を立体的に考えて上に示すような面に全構材を含ませる事が出来るならば、以上の事を逆に考えて、必ず相反力線図を描くことが出来る。

7) 外力をトラスの外部で無限遠に伸びる構材と考えずに、先づ2つの外力線の交りから、その合力の方向に力線を引き、これと次の外力との交点からまたその合力の方向に力線を引くという様にして行けば最後にくる外力線はそれまでの合力線と一致する。この様にして描いた一連の力線を構材と見なせば、このトラスを立体的に見て、一つの枠組と考えると、その面は前項と同様に考えて、

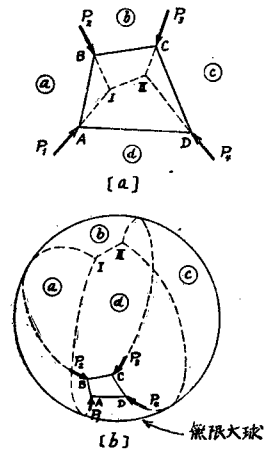
a) 一つの閉じた多面体を形成していなければならぬ。

b) 従って前項 c) のように考えて、そのまま適当に引伸ばしてこの面を全空間を内部と外部のたゞ2つに分ける閉じた1つの面にする事が出来る。

8) 普通のように平面的に考えた場合にトラス線図の各節点に集る構材が Cremona 力線図に於て

閉じた多角形をなすが、その相応する構材がトラス線図の節点のまわりに配列される順序と Cremona 力線図の多角形で配列される順序が一定の回転方向を有する事は面を立体的に見た場合に、常にその面の一方の側から見れば、その関係が保たれる。

トラス外部に外力を配置すると、外力を内部に置いて多面体を假想する場合との関連性を次のように考えることが出来る。トラス線図を立体的に見た時にその各面の相關性は各構材の長さと同角を自由に変更しても変わらない(次項 § 1.4, 第13頁参照)。今第8図 [a] のように4角形の外廓を持つトラスに P_1 から P_4 迄の4つの釣合外力が掛っている例をとって考える。外力をトラスの外周へ置くとトラス内部はトラスを構成する構材だけとなり、これがこの4角形の内部で立体的の面を形成する。外部は外力とトラス外周の構材とで半無限遠に達する面を形成して空間を区切っている。一方力を内部に入れた場合に、力の釣合図を紙面の上に浮かせ、トラスの構材を紙面より下に考えて節点を沈ませると紙面の上下に描かれた多面体となる。今この多面体の力の釣合線図を残してトラスを無限遠に持って行く。即ち IA , IB 及び IC , ID を無限大に引きのばす。その無限遠へ持って行くのを無限大球の対蹠点へ持って行ったと考えると(第14図 [b]) その場所には力をトラス外周に持って来た場合の図が出来る。



オ 8 図

相反力線図の立体的な考え方は Timoshenko¹⁾ が Clerk Maxwell の着想である事を指摘している。併し、之を適用して複雑な問題にまで及ぼす事は実際には不可能であると書いている。

静定トラスの場合の多面体の頂点数、稜の数、面の数の関係

1. 任意の閉多面体の頂点数を k , 稜の数を n , 面の数を f とすれば次の関係がある。

$$n = k + f - 2. \quad (\text{Euler の公式}) \quad \dots\dots(1)$$

2. 静定トラスに働く外力を7)項のように構材に置き換えると全体としてこれは一次不静定トラスとなるから、節点数 k , 構材数 n の間には次の関係がある。

$$n = 2k - 2. \quad \dots\dots(2)$$

従ってこれを立体的に多面体と考えると (1)(2) 式より

$$k = f, \quad n = 2f - 2. \quad \dots\dots(3)$$

3. 面は3角形, 4角形, 5角形, ……等より成るからその数を夫々次のように表はす。

- 3角形 p_3 個,
- 4角形 p_4 個,
- ……, ……,
- s 角形 p_s 個,

そうすると $f = p_3 + p_4 + p_5 + \dots + p_s \quad \dots\dots(4)$

4. 閉多面体では稜には面は2つだけしか交っていないから、次の関係がある。

1) Timoshenko and Young: Theory of Structure, 1945, P-58.

$$n = \frac{1}{2}(3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots + sp_s). \quad \dots\dots(5)$$

また1つの頂点には3本以上の稜が交っていなければならぬ(2つのみのときはその2つの稜を取去って考えを進めて差支えない)から

$$3k \leq 2n. \quad \dots\dots(6)$$

5. (4)(5)式を(3)式に入れて

$$\frac{1}{2}(3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots + sp_s) = 2(p_3 + p_4 + p_5 + \dots + sp_s) - 2,$$

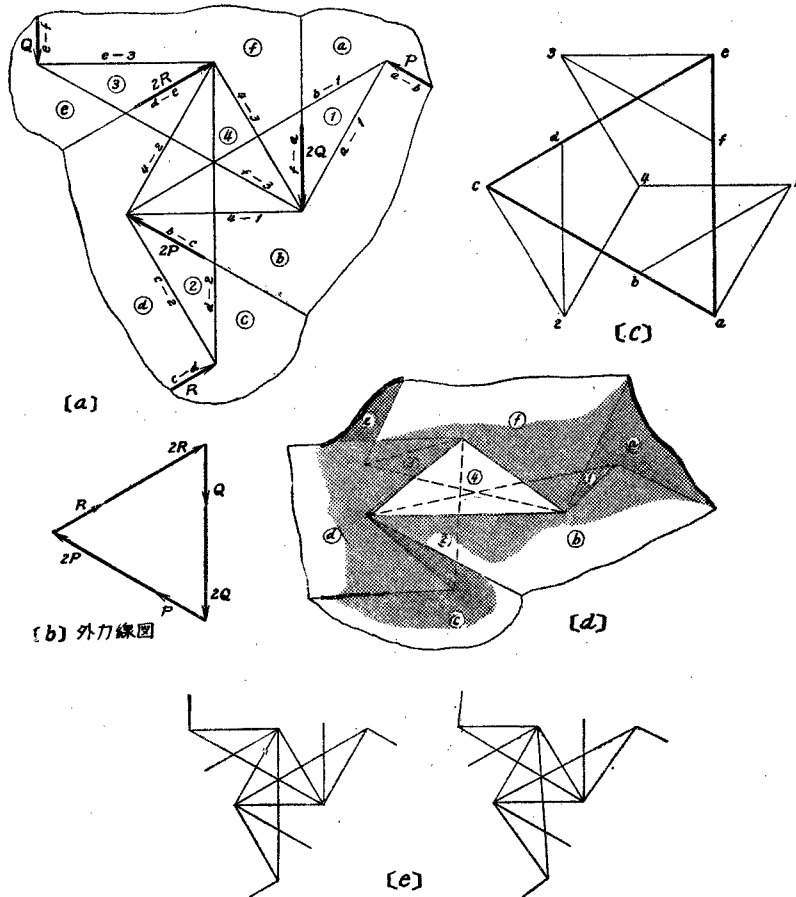
$$p_3 - 4 = p_5 + 2p_6 + 3p_7 + 4p_8 + \dots + (s-4)p_s \geq 0. \quad \dots\dots(7)$$

従って $p_3 \geq 4$.

即ち3角形は4個またはそれ以上なければならぬ。そして4個以上の数は(7)式の右辺の数となる。

§ 1.4 立体観念による相反力線図の描き方

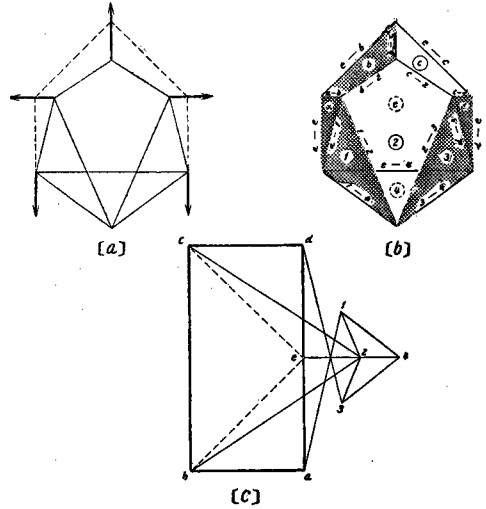
前項で述べた平面トラスと外力の考え方によると相反力線図を根拠のある系統的な考え方で描くこ



才 9 図

とが出来る。またトラス内部に外力が作用する場合の相反力線図の描法として外力をトラスの外部迄引き出し、その途中に仮想構材を入れなければいけない場合の生ずる事が証明出来る。

S1・2に述べた相反力線図の描法は単純トラスの如何なる図形に対しても機械的に描くことが出来るから特に頭を使う必要がない。併し場合によっては相反力線図そのものを不必要に複雑にするが前項の立体的観念を使えば相反力線図を要領よく簡単にまとめることが出来る。この描法は立体的の図形の考え方に頭を使はねばならぬから、この欠陥を除去して描法を明瞭にするために展開法を工夫した。



オ 10 図

立体的の観念は三面図を描くと判然するが、元来が立体でないものを立体の投影と考えるのであるから三面図は少し行き過ぎのように思われる。そこでステレオスコープ式の図を考えることにした。本式のステレオスコープを使わないでも一対の図を紙背をみつめるような氣持で眺めていると

1つの図でしかも立体に浮び上って見える。少し慣れると容易に立体が見えるので本論文ではこの形式を採用することにした。

先づ第1図の例について説明する。

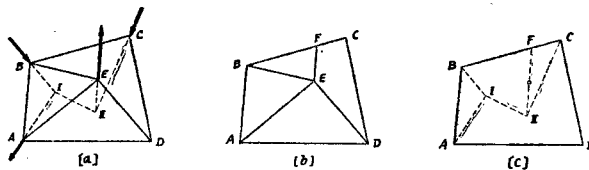
此の例は立体化が少し複雑であるから、ステレオスコープの図(第9図[e])と斜に見た図第9図[d])とを添えて置いた。①②③の面は丁度1点で出合ったような形になっているが、その出合点を少し開いて考える。立体化がわかれば相反力線図は簡単に引ける。 $\frac{a}{b} > 1, \frac{c}{d} > 2, \frac{e}{f} > 3$, 1-4, 2-4, 3-4は1点4で交はる。

次に外力を構材とみて図形を多面体と考える解き方の例を出して見よう。第10図は6節点トラス平板に5力の掛っている場合である。同図[a]はトラスと外力及びその釣合位置線図である。[b]図はこれを9面体に見た図である。3角形の面は①③④②②の5ヶである。4角形は②⑥⑥の3ヶ、5角形は⑥1ヶである。従って第(7)式

$$p_4 - 4p_5, 5 - 4 = 1$$

が成立する。 $\frac{b}{c} > 2, \frac{2}{a} > 1, \frac{2}{d} > 3, \frac{1}{3} > 4, e-4$ は検算に使える(第10図[c])。

進んでトラス平板内部に外力の作用する場合を考察する。第11図[a]はABCDE5節点の単純トラスに4力が掛って釣合っているものである。ABCDを紙面としE点を紙面から浮上らせI、I点



オ 11 図

を紙面の下に沈めて考える。このまゝでは、どうしても EII が邪魔になって全構材を1つの多面体と考えることは出来ない。そこで EII の力線の BC と交る点から E 迄の間に1構材を追加し(第11図(b))この点から II の点へ力が作用するものとする。 E 点は投影図では EII 線上(第11図(c))にくる。こうすると多面体が成立する。3角形は5つで5角形は1つ($AEIICD$)であるから(7)式を満足する。またこの様に考えることによって BC 構材の構材力を変化することはない。これは §1.1 で外力をトラス外部に引き出して途中で仮想構材を入れなければ相反力線図を描けないことを証明した事になる。

トラス線図を立体的に見て各面をきめる事は簡単なものでは容易に出来るが、図形が複雑になると、各面が錯雑して面の決定に相当頭を使わねばならぬ。併し場合によっては、§1.3(6)c)で述べた性質を使って面の決定を簡単化することが出来る。

§1.2 の Cremona 力線図の引き方の過程を見ると Cremona 力線図を描くことは、トラス線図に於ける面に対応する点を Cremona 力線図上にその位置を決定して行くことに他ならぬ。そしてその位置を決定するには次の2つの規準に従うことになる。即ち、

- a) 未知の1つの面が既知の2つの面と出合っている場合に未知の面を決め得る事。
- b) 実際に Cremona 力線図上に於てその点を求めるには既知の面に対応する点よりトラス線図に於ける未知の面と既知の面との交線に平行線を引き、その交点が未知の面の Cremona 力線図の位置である事。

になる。このうち a) は未知の面を決定して行く順序を指示するもので面と面との相対的な連結順序だけが関係し、b) は Cremona 力線図とトラス線図との相対応する構材の平行性を規定するもので、トラス線図の各構材の方向と、それが如何なる面の交線であるかということが各構材に就てわかっていればよく、面そのものゝ位置はわかっていなくともよい。従つて a) b) 2つの規準を1つのトラス線図に具体的に表示する代りに、a) を与えるものと b) を与えるものと2つに分けても、その間の関連に矛盾が起らなければ、それで差支えない。

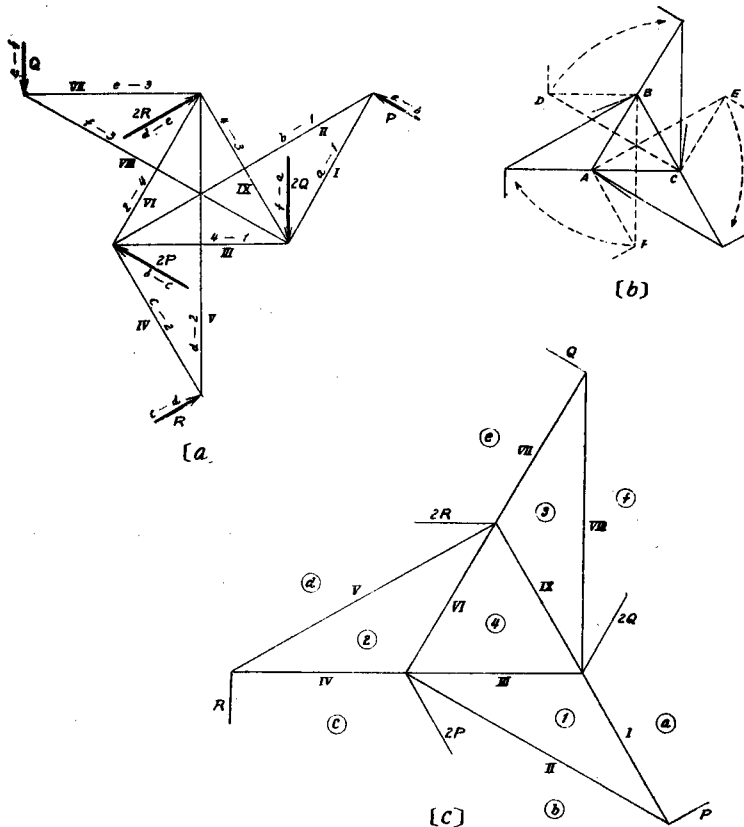
そこで次の様に考えて見る。元のトラス線図を立体的に見て必要な面を決定し得たとするとき、これを §1.3(6)c) で述べた様に構材の長さ、頂角が自由に変えられるものとすれば、これを面を切断することなしに一枚の無限に拡がる平面に引き伸ばす事が出来る。こうして出来た平面内の各面分の界は元の構材に相当する線で、勿論元のトラス線図に於ける構材とは平行にはなっていないが、その面の相対的な連結順序は変っていない筈である。且つ今の面の構材と元の構材とは対応する面と面との交線として1:1の対応をなす。このように引き伸ばして平面化した線図を假に変形トラス線図と名づける。

今この変形トラス線図を描いたとすると、この面の各多角形の面が平面的に連なっているので、容易に指定することが出来る。そして各構材がどの面の交線であるかという事も容易に指定出来る。このように指定した後この変形トラス線図を元のトラス線図にもどすとすれば、面はたとえ立体的に錯雑して、その位置が見分けにくいにしても、とにかく §1.3(6)b) の性質を持っていることは確かだ、各構材が如何なる面の交線であるかは変形トラス線図に於て対応する構材を見ればわかる。従つて上述の a) b) により Cremona 力線図を描く場合、先づ a) は変形トラス線図を用いて、その順

序を決め、b) には元のトラス線図によって構材の方向と、対応する面を構材から知ればよい。この様にして描いた Cremona 力線図の多角形を形成する各構材の配列順序はトラス線図の面をいつも一方の側から見て節点のまわりに一定方向の構材の配列順序となる等である。結局これは変形トラス線図に於て紙面に描かれたそのまゝの節点のまわりの配列順序になる。トラス線図と変形トラス線図とはトラスの本質としては同一の図である。

以上の方法を用いた描法の 1 例を次に示す。第 9 図と同じ例をとって変形トラス線図を作る。第 12 図で [a] はトラス線図である。D 点に外力 Q を持ったまゝ 3 角形 DBC を BC (Ⅹ) を蝶番のように考えて折りかえす。同様に 3 角形 AEC を AC を蝶番とし、また 3 角形 ABF を AB を蝶番として夫々折りかえすと第 12 図 [c] のような変形トラス線図が出来る。面の符号は第 9 図と全く同じであつて、Cremona 力線図は第 9 図 [c] と同じものになる。

以上の例より判るよう変形トラス線図を作るには、トラス線図の各構材(外力線も含む)の長さ、



第 12 図

方向を自由に変え得るとして、節点に於て構材を切りはなす事なく、節点を適当に相互にずらせて、各構材が互に交叉しない様な図形にもってくればよい。若しどんなにずらせてもどれかの構材が交叉する時は元のトラス線図に於てそのまゝでは §1.3 6) b) に表すような連続した面を決める事が出来ないことを意味し、適当にいくつかの交叉点を節点と見なさねばならぬ。この場合元のトラス線図に

於けるすべての交叉点を節点とする必要はなく、変形トラス線図を作る時にどうしても交叉する最小限度の交叉点を節点と見なせばよい。

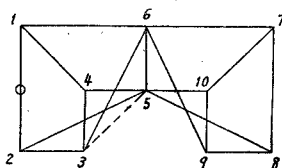
II. 平面非単純トラス

§ 2.1 平面静定トラス

平面静定トラスは静力学的に力の釣合条件から必ず解けるトラスである。即ち力の釣合のために必要で且つ十分な構材数を持っている。そのうち単純トラスは前章で取扱ったが本章では静定ではあるが非単純なトラスを論じる。

以下の記述を簡単にするため次のような定義をする。1本の構材だけを置き換えて単純トラスに移行するような非単純トラスを1次非単純トラスと名付ける。 n 本の構材を置換しないと単純トラスに変わらないものを n 次の非単純と名付けよう。また静定トラスに必要な構材数よりも n 本構材の多いトラスを n 次の不静定というの是一般に用いられている言葉である。逆に静定に必要な構材数より1本構材の少い不安定なトラスのことを1次不安定トラスといい静定よりも n 本構材の少い不安定トラスのことを n 次の不安定トラスと名付ける。

非単純トラスの図式解法としては Müller-Breslau が簡単な場合に就て幾何学的解法の示唆を与えている。著者はこの幾何学的の方法を用いて2次非単純トラスの解法迄進んだ。一方非単純トラスを根本的に検討して可なり簡単な解法を作った。之は次章で記述する。



オ 13 図

2次以上の非単純トラスが非単純トラス平板(Scheibe)の組合せによって構成される場合がある、この時は或る構材1本を取外した後、次々と節点に集った2構材を分解して行くと、1本の構材が孤立して残って分解が進めなくなる。即ちこの孤立材が残りのトラスにつながった形になる。例えば第13図のような10節点17構材の2次非単純トラスは1次非単純トラスが2つ56を共通構材として組合せられたものである。その判定は次のようにする。 $\overline{12}$ を外すと $\overline{14}$ 、 $\overline{16}$ と $\overline{23}$ 、 $\overline{25}$ は分解出来る。次の節点は3或は4であって、 $\overline{34}$ 、 $\overline{36}$ を分解すると $\overline{45}$ が孤立する。 $\overline{45}$ 、 $\overline{43}$ を分解すると $\overline{36}$ が1本孤立する。即ちこのようなトラスは純粹の2次非単純トラスでなくて $\overline{56}$ から左が独立した1つの1次非単純トラスで、残りがまた別の1つの1次非単純トラスである。 $\overline{12}$ を外せば、例えば $\overline{35}$ を入れないと左半分は不安定トラスになる。このような組合せ非単純トラスは一般の非単純トラスとは別に取扱うことが出来る。分解して孤立する構材迄が以下のトラスに取付いているもの、平板或は地面にこの構材が取付けられているものと考えて解けばよい。

§ 2.2 幾何学的解法

これは外力から出発する方法である。Müller-Breslau は3構材の集っている節点への進み方としてこれを説明している¹⁾。この方法で2次非単純トラスの図式解法を説明する。

第14図のような10節点17構材の2次非単純トラスの外周上の4つの節点に外力が掛っている場合

1) H. Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd I. S-262-264

を例にとって説明しよう。

先ず外力の多角形 $abcd$ を描く。 $a1$ 線上に 1 に対する点を 2 点 (1) と $\widehat{1}$ とを任意に決定する。 (1) 及び $\widehat{1}$ より各 (6) (5) 及び $\widehat{6}$ $\widehat{5}$ の点が決定される。 $\widehat{1} > \widehat{6} > (5)$, $\widehat{1} > \widehat{6} > (5)$ 併しこれ以上に進行出来ない。そこで今 1 つ $b3$ 上に 3_1 及び 3_2 の 2 点を更に任意に決定する。 (5) と 3_1 とから $(4)_1$ がきまり、 (5) と 3_2 とから $(4)_2$ がきまる。同様に $\widehat{5}$ と 3_1 とから $\widehat{4}_1$ 、 $\widehat{5}$ と 3_2 とから $\widehat{4}_2$ がきまる。以下 2 点ずつの組合せにより 1 組 4 点ずつ決定して行く。図の順序は 1, 3 より 2, 1, 2 より 7, 6, 7 より 10 がきまる。但しこれ等の点は $()$, $\widehat{ }$ 及び 1, 2 のついた点であって本統の点ではない。

8 の点を出すには、2, 3 からと 3, 4 からと 2, 10 からと 3 通りある。これを各 23, 34, 210 という符号をつける。これ等の点が各 4 点ずつ出るから $\textcircled{8}$ に対し合計 12 の点が出る。

そこで $(23)_1$ と $(23)_2$ とを結んだ線と $(34)_1$ と $(34)_2$ とを結んだ線の交点は $(8)_{234}$ となる。また $(23)_1$ と $(23)_2$ とを結んだ線と $(34)_1$ と $(34)_2$ とを結んだ点との交点は $\widehat{8}_{234}$ となる。同様に $(23)_1$ と $(23)_2$ とを結んだ線と $(210)_1$ と $(210)_2$ とを結んだ線との交点は $(8)_{2310}$ となる。また $(23)_1$ と $(23)_2$ とを結んだ線と $(210)_1$ と $(210)_2$ とを結んだ線との交点は $\widehat{8}_{2310}$ となる。 $(8)_{234}$ と $\widehat{8}_{234}$ 及び $(8)_{2310}$ と $\widehat{8}_{2310}$ を各々結ぶ。その交点が求める 8 の点である。この場合 2 組しか使っていないから別に $(8)_{34210}$ と $\widehat{8}_{34210}$ とを出してもよい。 $(8)_{234} - \widehat{8}_{234}$, $(8)_{2310} - \widehat{8}_{2310}$, $(8)_{34210} - \widehat{8}_{34210}$ の 3 つの直線は同一点 8 で交わる。

8 は $abcd$ の外力多角形に対する本統の 8 の点である。 $\overline{83}$, $\overline{b3}$ より 3, $\overline{32}$, $\overline{82}$ より 2, $\overline{21}$, $\overline{a1}$ より 1, $\overline{16}$, $\overline{d6}$ より 6, $\overline{65}$, $\overline{c5}$ より 5, $\overline{84}$, $\overline{34}$ より 4 が出る。この 4 の点が正しければ 4, 5 を結ぶと $\textcircled{4}$ $\textcircled{5}$ に平行になる。更に 7, 10, 9 点は容易に出せる。またこれ等の点を出した時に、あとでつなぐ線が図形の線に平行しているかどうかにより、作図の正確度が判明する。

§ 2.3 対称図形と対称荷重

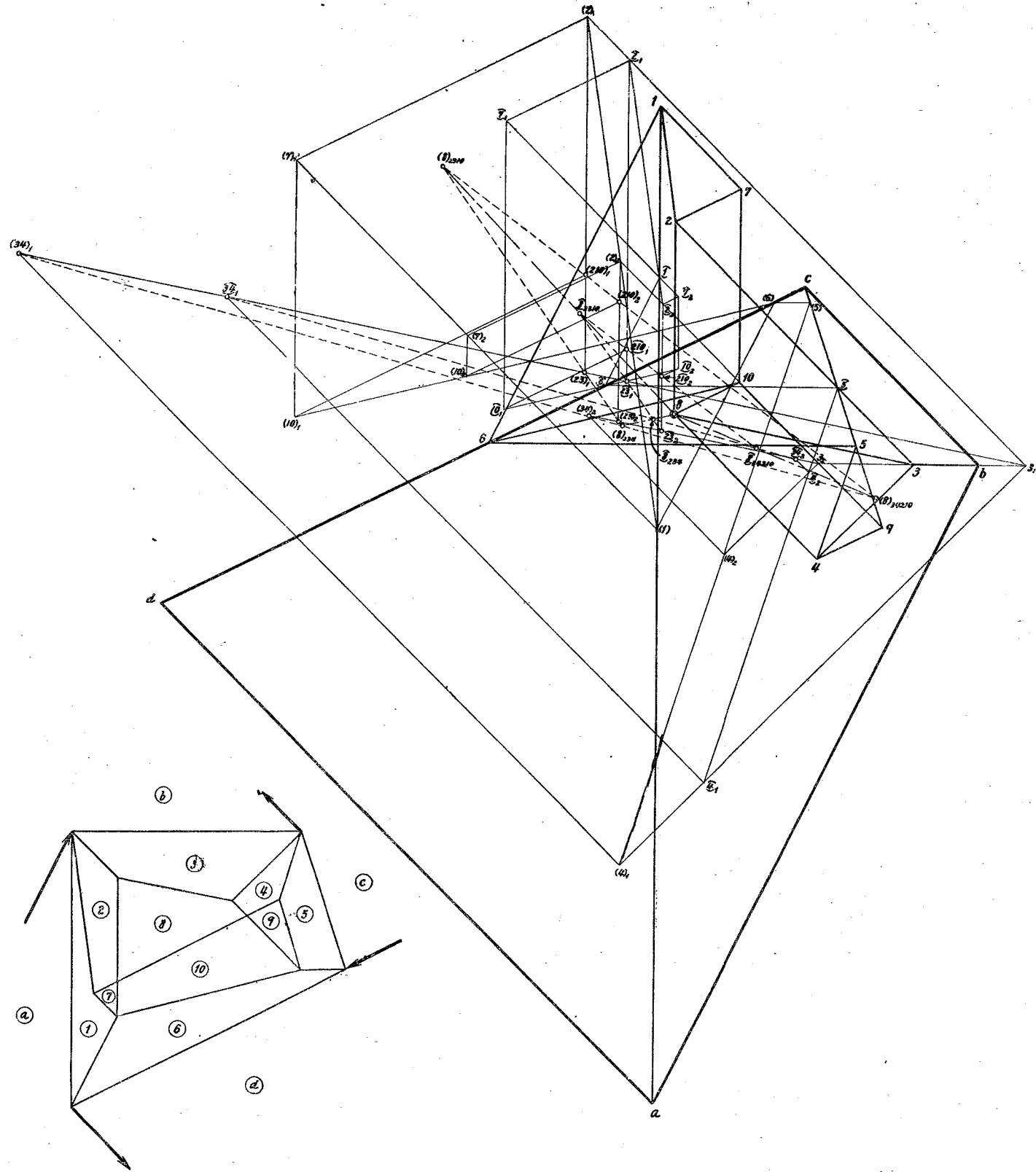
我々の作る構造物には対称形のものが非常に多い。出来上った全体が対称形でない場合でも部分的に対称形になっている事もある。元来人間を初め殆んど総ての動物の形態が左右対称であることから、この形態を好んで選ぶようになったのかも知れない。併し実際に物を作る場合に中心線に対して対称なものは事実作り易し、出来上ったものが使い易く、修理、保守にも便利である。

本項では対称平面トラスの相反力線図の性質を研究する。図形平面内の 1 つの中心線に対して、その両側が互に相当する形を持ったもの、即ちその線で図形を折りかえすと片側の半分の図形が他方の半分に一致するような形を線対称と名づけその中心線を対称軸という。図形によっては直角に交わる 2 軸の両方に対して各対称形を示す場合がある。これを 2 重対称という。

次に図形面に立てた一定の垂直線を軸に持つ対称図形がある。これを点対称という。対称軸は図形面では 1 点になり。その点から任意の節点へ引いた放射線を 180° 回転すると相当節点が存在する。

又 1 つの図形が線対称であり、同時にまた点対称にもなっているものがある。

対称形トラスには除外例の場合 (Ausnahmefall) になることが多いから注意する必要がある。逆に対称形を非対称の形に歪ませると Ausnahmefall が解消するものである。



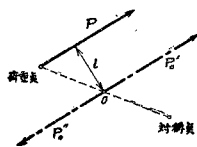
対称形としてはまだこの外にない事もないが、普通实用にされてゐる構造物では上記2種類が重要である。対称形トラスに任意の外力が掛る場合に、この外力を対称荷重と逆対称荷重とに分けて考えると問題が容易に解ける。別々に出た結果を重ね合わせれば全体の結果が出る。

普通対称図形というのはこゝで所謂線対称図形であつて、一般に点对称図形はあまり取扱われていない。併し点对称図形にも非常に面白い性質があつて、これを利用すれば線対称図形と同様に問題が簡単に解ける。

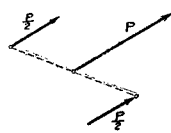
この場合も元の荷重の大きさの半分を掛けていた節点に残し、対称点に対しては同じ半分の大きさのものを掛ける。対称中心と荷重の掛っている節点とを結ぶ放射線と荷重との角度を固定して中心のまわりにこの放射線を 180° 回転すると、対称点の対称荷重の方向が出る。

対称荷重群でも逆対称荷重群でも相当点の2つの力は平行している。対称荷重群では向きが逆で、逆対称群では同じ向きの力をかけることになる。

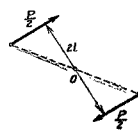
次にこの場合の力の釣合を考える。対称群と逆対称群とを重ね合わせると元の荷重になることは線対称図形の時と全く同様である。各群の別々の力の釣合は次のようになる。対称荷重群では各一对の相当節点に掛る力は偶力を形成している。逆対称群では全く同じ半分の大きさの荷重が同じ方向を向いているので、その一对の力の合力は中心を通ることになる。従つて全部一对を各皆加えると中心で交わる合力が出る。各々の合力は各節点に作用している荷重であるから、結局全部の荷重を中心に集めたものになる。全荷重の合力は零であるから、この一点に集る力の群の合力もまた零になる。



オ 15 図



オ 16 図



オ 17 図

或る点に作用している力を移動させるには次のような考え方をするのが普通である。荷重節点に作用する力を P とし (第15図) 対称中心を O とする。 O に P と大きさ及び方向の等しい力を2つ P_0' 及び P_0'' を考える。 P_0' 及び P_0'' は同一直線上に在つて互に逆の向きを持っていればその和は零になる。 P_0' を P と同じ向きで P と大きさ方向共に等しければ、これが P の O への移動と考えられる。併し力は無条件に移動出来ない。 P, P_0', P_0'' の力の一群を P と $P_0'+P_0''=0$ と考える代わりに P_0' と $P-P_0''$ の偶力 Pl とを考えてもよい。

P_0' を荷重点に $\frac{P}{2}$, 対称点に $\frac{P}{2}$ を掛けたのが逆対称荷重である (第16図)。 Pl を $\frac{P}{2} \cdot 2l$ 即ち荷重点に $\frac{P}{2}$ を掛け、対称点にこれと大きさが等しく向きの反対の $-\frac{P}{2}$ を掛けたのが対称荷重である。 (第17図)。即ち対称荷重群は偶力群である。上述の説明で偶力の大きさは Pl 即ち対称中心のまわりの荷重のモーメントである。外力は元来釣合つていて偶力が残っていないから $\sum Pl=0$ 。即ち対称中心のまわりにとつた荷重モーメントの総和は零になる。従つて対称荷重群も釣合つていなければならぬ。

線対称トラスの相反力線図の性質：——対称トラスに対称荷重及び逆対称荷重の掛つた時の相反力線図の性質を一まとめに表示すると次のようになる。

	対 称 荷 重	逆 対 称 荷 重
形 状	図形の対称軸に直角な軸を持つ対称形。	図形の対称軸と同じ方向即ち平行な軸を持つ対称形。
多 角 形	図形中心線上の多角形は相反力線図中心線の点となる。 図形中心線に対し対称の多角形は相反線図では軸に対し対称な点となる。	同 左 同 左
構 材 力	図形で対称構材は等しい大ききで同じ性質（圧縮ならどちらも圧縮，引張りならどちらも引張り）の構材力を持つ。 中心線上の構材力は零にならず一般に一定の値を持つ。	図形で対称材は大ききは等しいが反対の性質（片方が圧縮なら他方は引張り，片方が引張りなら他方は圧縮）の構材力を持つ。 図形の中心線上にある構材または中心線を切つて左右の対称点を結ぶ構材の構材力は零である。

点对称トラスの相反力線図の性質：—— 点对称トラスは紙面に直角な軸を持っている。静定トラスの構材数は必ず奇数でなければならないが、対称形の成立するためには少なくとも1本の構材（場合によっては3本或は5本で奇数の構材）が軸を通らねばならぬ。線対称トラスの時のように点对称トラスに対称荷重及び逆対称荷重が掛った時の相反力線図の性質を次に表示する。

	対 称 荷 重	逆 対 称 荷 重
形 状	点对称形	図形全部が二重点より成る。 対称形にはならない。
多 角 形	トラスの中心には軸点を内部に含むような多角形を持ち得ない。トラスの総ての多角形は相反力線図では1対の点になつて現われ、その1対の点を結ぶ直線は軸を通り軸から各反対側で等距離にある。	軸を通る構材の構材力が零になるから非単純次数が一段ずつ少くなる。1次非単純トラスは単純トラスになる。
構 材 力	軸を通る構材の構材力は一般に有限の値を持ち相反力線図でもその軸を通る。 1対の対称構材は等しい大ききで同性質（圧縮ならどちらも圧縮，引張りならどちらも引張り）の構材力を持つ。	軸を通る構材の構材力は零になる。 1対の対称構材は大ききは等しいが反対の性質の構材力を持つ。
外 力	点对称となり、その軸が相反力線図全体の軸になる。	対称点が同一点に重なつて二重点となる。

§ 2.4 高次非単純トラス

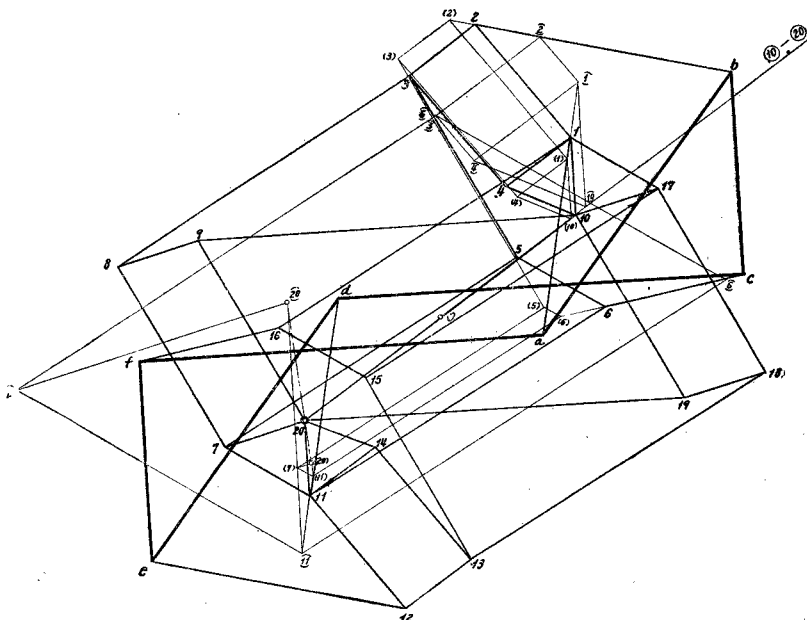
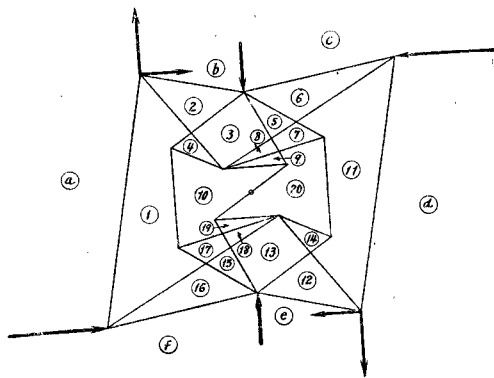
3次或はそれ以上の一般形の非単純トラスは図式に解けない事はないが作図が非常に錯雑してくるから計算でやった方が賢明である。併し対称図形のもの解法が簡略化するから3次或は4次の非単純トラスに対しても図式の方法が採用出来る。前述のように一般構造物は対称形のものが大部分であるから、大部分の実用構造物に対しては3次或は4次の非単純トラスが比較的簡単に図式に解けることになる。

点对称高次非単純トラスの例を挙げる。

第18図は3次非単純トラスに対称荷重の掛った場合である。

- 1) 外力の多角形を描くと対称軸の点0が決定する。トラスの軸点を通る構材の内力は Cremona 力線図でもその軸点を通る。
 - 2) $a1$ に対して2つ即ち $a(1)$, $a\bar{1}$ を假定する。 $(1)\bar{1}$ の対応点として $(11)\bar{1}\bar{1}$ が決定する。
- 以下図によって解法がわかる。

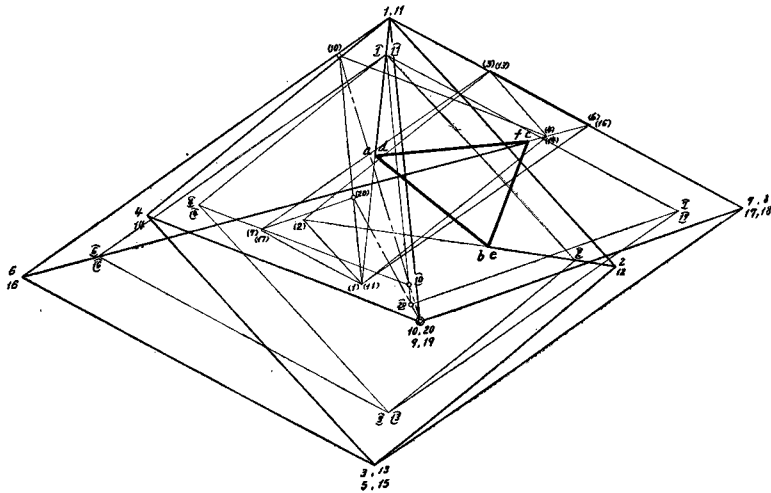
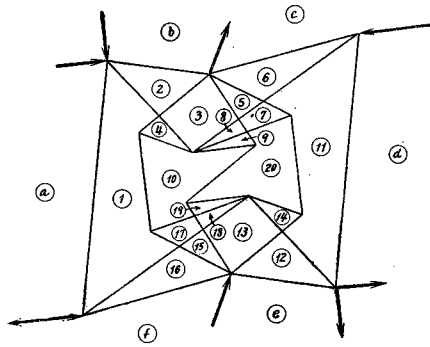
第19図は同一のトラスに逆対称荷重の掛った時の例である。点对称トラスに逆対称荷重の掛る場



オ 18 図

合の特性として、対応点が同一点に重なり、軸を通る構材の内力は零になる、即ち $10-20=0$ であるから $910=78=35=1920=1718=1315=0$ となる。Cremona 力線図の描き方は次の順序による。

- 1) 外力の多角形を描くと各頂点は2重点となり、6角形が3角形になる。
- 2) $a1$ を2つ假定する。即ち $a(1)$, $a\bar{1}$ をきめると、 $d(11)$, $d\bar{1}\bar{1}$ と合致する。



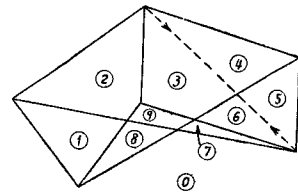
オ 19 図

III. 非単純トラスの新解法

§ 3.1 簡単な非単純トラスに1対の釣合外力の掛っている場合

トラスに平衡外力の掛っている図形は第6図のように力の位置線図を引くと外力を構材と見ることが出来る。

外力が1対の釣合力である場合は外力をトラスに入れると1本構材を追加したことになり、それによつて1次の不静定トラスになっている。このトラスで追加構材の構材力だけが既知である。しかし、この既知構材力を Cremona 力線図に描く時は一定の縮尺をきめて表わさねばならぬ。従つてその大きさは任意にきめることが出来る。この既知構材に限らず、任意の他の構材の構材力を勝手にきめてもかまわない。非単純トラスを解く場合外力から出発するから解けないので、適当な他の構材から



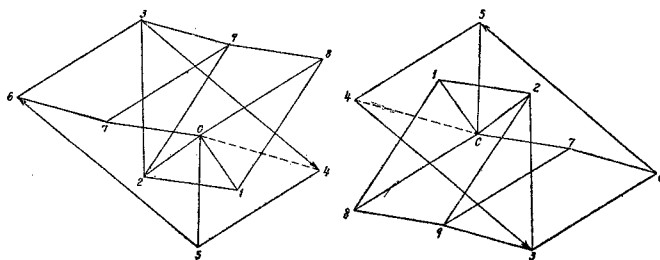
オ 20 図

出発すれば問題は簡単に解ける。結果として出て来た外力は構材力のような形式になるが、その大きさが既知であるから図に現われた寸法を与えられた力の縮尺と見る。他の構材の構材力は全部これに

比例することになる。

今第20図の例で③④、⑥⑤を外力とする。この外力を構材と見なし、⑥①の構材力を適宜に決定してこれから出発すると問題は容易に解ける。出て来た Cremona 力線図、例えば第21図をみる時に力の釣合を考へて向きを決定する。第20図では外力⑥⑤の作用している節点は外力が $\overrightarrow{56}$ であるから第21図の Cremona 力線図は左まわりになる。即ち $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 0 \rightarrow 5$ 、同様に③④に対しても左まわりで、 $3 \rightarrow 4 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 、これを普通の右まわりにするためには初めの01を逆に10とすればよい(第22図)。しかし作図の最初は⑥①構材は引張りか圧縮がわからないから、結果として出て来た Cremona 力線図を読む時に外力の鍵によつて右まわり或は左まわりを決定する。

この方法は Henneberg 及び Müller-Breslau の構材置換法と同じ意味を持つものである。即ち



オ 21 図

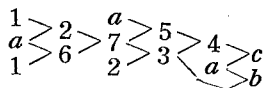
オ 22 図

外す構材が出発の時に構材力を假定する構材で、新しく挿入する構材が1対の外力になつているだけのことである。従つて外力を構材に置き換へた1次不静定トラスの1本の構材を外した残りの静定トラスが単純トラスになつていなければならぬ。出発の構材を選ぶ時に最後迄分解出来るように注意することが必要である。

§ 3.2 平衡3外力及び4外力の場合

非単純静定トラスの3つの節点に各1つの外力が作用して、これが釣合っている時はこの3力の作用線は1点で交わらなければならぬ。例えば第23図で ABCDEF のトラスに ABC のような外力が作用している場合に ABC が釣合うためには1点 I で交わる。この外力を構材に代えて考えると、I の節点追加により3構材を入れているから元のトラスが静定なら新しいトラスは1次不静定になる。この例で例えば ED 構材を1本取外すと単純静定トラスになるから容易に解ける。

第24図でこの解法を示す。1a を任意に決定する。1a より 2,6 が直ぐ出せる。2,6 から 7, 7, a から 5。2,7 から 3。3,5 から 4, 4, a から c。3, a から b が出る。c, b を結んだ線は⑥①に平行する筈である。



外力は必ずしも図形の外になくともよい。即ち I が図形の中にはいつて来ても差支えない。

この例のような簡単な非単純トラスは3つの釣合外力がどの節点に作用していても解けるが、少し

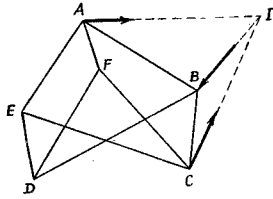


図 23

複雑なトラスになると必ずしもこのように簡単には解けない。一般的にいえばトラスを構成する対角線のない4辺形の任意の3頂点に3力が作用する時に解が可能である。また3角形の任意の頂点につながる1本の構材の先と3角形そのものの任意の2頂点とを組合せた3点に釣合3力が作用する場合もまた解ける。この場合、3角形の3頂点に外力が作用してもよいが、3角平板だけに内力が作用し外の構材の内力は零になるから問題にならない。

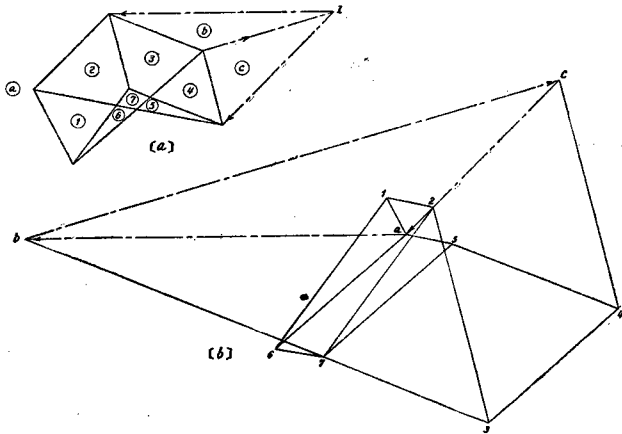


図 24

上記の場合に対しては釣合4力でも多くの場合は解が可能である。これを一般的にいえば対角線のない4辺形(第25図(a))の頂点、或は対角線はあるがどれか1辺が欠けている4辺形(第25図(b))の頂点に釣合力の作用している多くの場合は解ける。即ち外力をトラスの一部と見なした1次不静定トラスのどれか一つの構材を外してその代りに第25図の点線の様な構材を追加して出来たトラスが単純トラスになれば解けるわけである。複雑なトラスでは解けないものがあるが、その場合第IV章の無荷重節点の取扱ひ法を応用すればよい。例えば第26図のようなトラスでは4辺形 $ABCG$, $AGEF$, $GCDE$, $FBDE$ のうちどれか1つの4辺形の頂点に作用する釣合3外力或は4外力の場合は

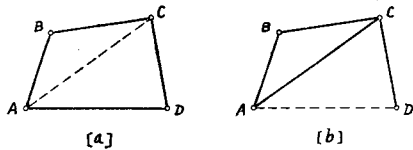
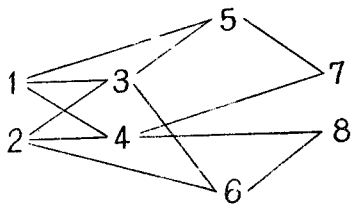


図 25

解ける。その外に $\triangle ABF$ と $\triangle BCD$ のうちどちらかにつながる構材端、例えば $\triangle ABF$ をとると F 点でつながる FE の端 E と、 ABF の頂点に力の作用する場合もまた解ける。従ってこのようなトラスは7つの節点から4つを取った組合せは殆んど全部解が可能になる。この例では BGE の3点に外力が作用する場合だけが不可能である。

4力のかゝっている例として先ず4辺形の外周を持つトラスの外周の4節点に釣合外力の作用するものを挙げる(第27図),この解は中央の構材12から初める。①②に平行に任意の長さの12をとれば3及び4が直ぐに決定される。2,3



から6。1,3から5がきまる。4,5から7がきまり、4,6から8がわかる。

a は5を通り、⑤②に平行に引いた $5a$ 線にくる筈である。同様に6を通して⑥④に平行線 $6b$ を引くと b のある線がわかり、8を通り⑧③に平行に行いた線 $8c$ はその線の上に c のあるべき線である。また7を通り、⑦①の平行線 $d7$)

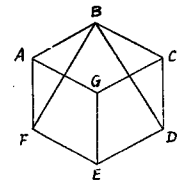
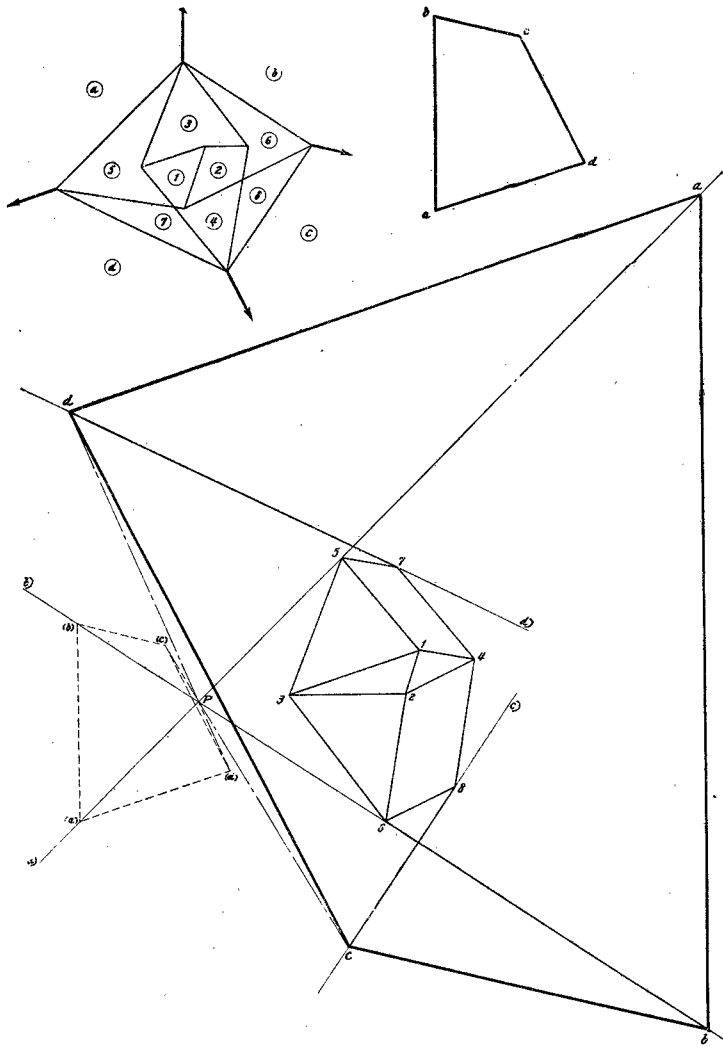


図 26

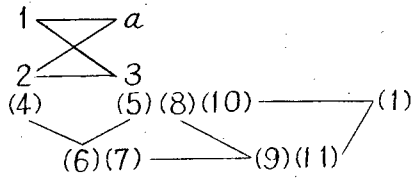
を引くと、 d はこの線上にくる。これで a, b, c, d の位置はまだわからないが夫々その点がある上にある筈の線がわかつたことになる。力の4辺形に相似な4辺形で (a) と (b) だけが各その線上にくるような多角形 $(a)(b)(c)(d)$ は容易に描くことが出来る。 $(a)5$ と $(b)6$ との交点 P と (c) とを結んだ線が $8c$ と交わる点が求むる外力の多角形の1点 c である。 P と (d) とを結んだ線が $7d$ と交わる点が求むる他の1点 d 点である。 c 或は d のいずれかが求まると力の4辺形 $a b c d$ が描ける。この例では結果が左まわりに出ている。



オ 27 図

4点荷重の第2例第28図は3角形の頂点とその1つにつながる1本の構材端に外力のかかっている場合、所謂対角線があって1辺のない4辺形の頂点に負荷されたものである。12を假定してこれから出発する。

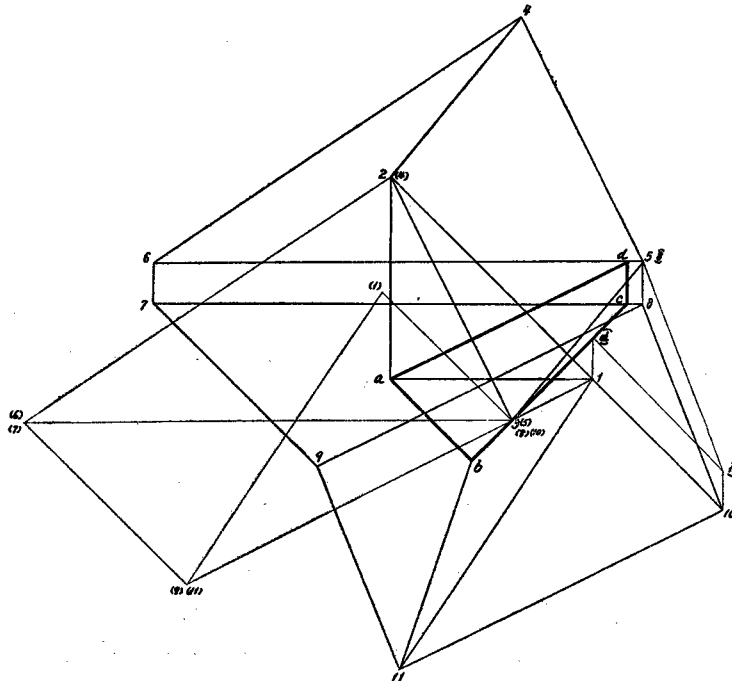
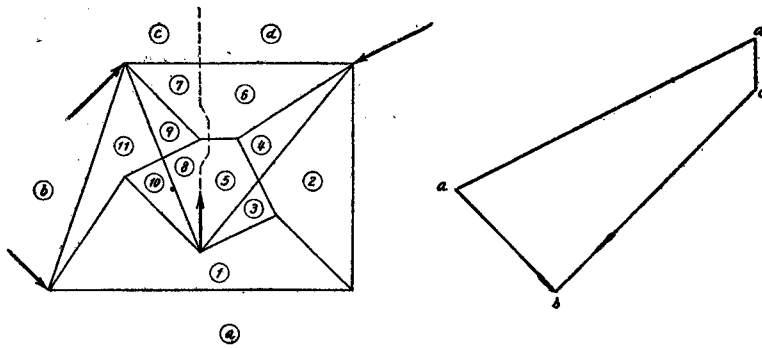
1) 12 を決定し



1,2から a 及び 3 を出す。2,3 は (4), (5) と同じだから、これから (6) を出せば (6), (5) は (7), (8) と同じになるから、これから (9) が出る。(8) を (10), (9) を (11) とみると (1) が出る、

2) (1) が 1 に合致するように移すと 10 及び 11 の点が出る。

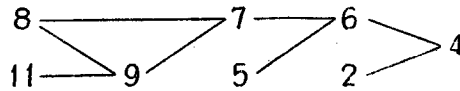
3) $\frac{a}{11} > b$ が出ると $abcd a$ が決定する。



4) 第IV章の特殊の場合の平行の性質を利用すれば8の点が直ぐきまる。しかし既述の方法でも進める。

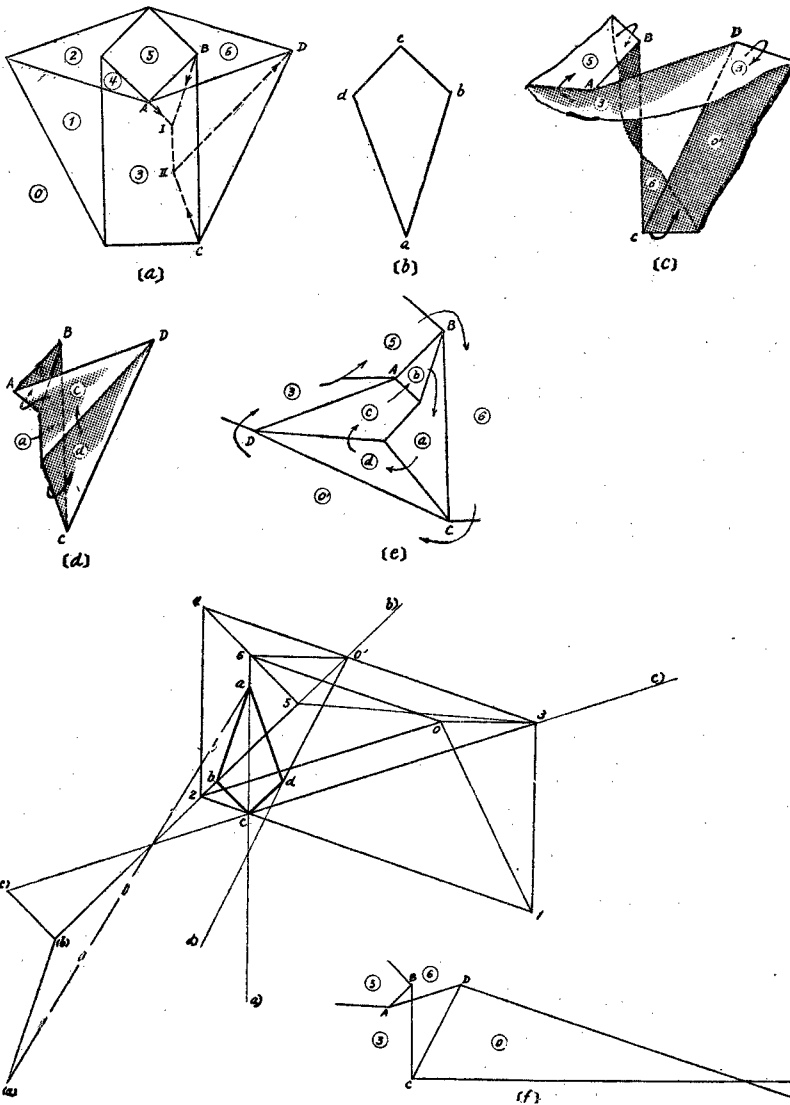
5) $(5)(8)=cd$ を図形の下の方から節点にかけて $1\overline{d}$ とすれば $\overline{d10}=1.10$ だから $31\overline{d108}$ 3の多角形が出来る。力の並べ換えをすると $3.1.10.8.5.3$ が決定する。

6) 以下は簡単である。



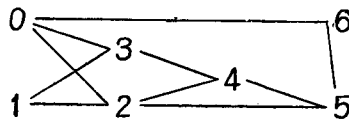
7) $c7, d6, 54$ 等は検算に使えばよい。

トラスの中に含まれている対角線のない4辺形がねじれてX型になっている場合は少し厄介であ



る。この時は図形全体を立体化すると面倒だからX型4辺形だけを立体化する。この4辺形の境までは平面的に解いて行って4辺形の4辺を除いた4辺形の頂点につながる構材の内力を全部出してから4辺形の4辺になつている構材内力を出す。4辺形がねぢれているためにその3辺が境になつている面は平面的に解いた位置と変らないが1つの辺だけが平面的に出した面の位置と違って来る。しかしその面の位置は既に求められている位置を移動して簡単にこれを決定することが出来る。以下例を挙げて説明しよう。

第29図は8節点13構材の1次非単純トラスであつて、X型4辺形 $ABCD$ の4頂点に外力が掛つている。01を決定して、これから出発する。



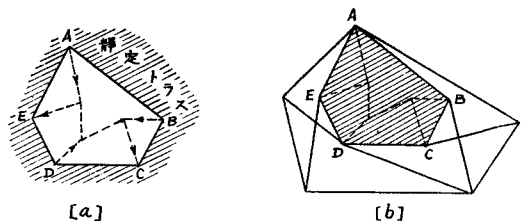
このように0から6迄決定される。3-4-5を3-5に置きかえると4辺形 $ABCD$ の各頂点に1本づつ構材がついていることになる。 \overline{AD} を③の面の境と考え、⑥の面は \overline{AB} 、⑥の面は \overline{BC} を境とみなす。 \overline{CD} は①の面の境にならないことに注意せねばならぬ。29図[f]でわかるように③⑥はAを、⑥⑥はBをそれぞれ右まわりにまわつている。⑥からCを右まわりにまわつて達する面は①でなくて①である。そこで0.3.6から O' を平行移動で出す。 AC を軸にして ADC を折りかえしてD点を AC の左側へもつて行くと①面は①面と1つの面になる。①面は \overline{CD} を境に持つている。

立体化した図を第29図[c][d]に示す。[e]は変形トラス線図である。4辺形 $ABCD$ 内の面を右まわりにまわつて外力の多角形を描くと同図[b]のようになる。3から AD に、5から AB に、6から BC に、 O' から CD に各平行線を引いて、それぞれ3c), 5b), 6a), $O'd$)を求める。この線上に外力の多角形に相似な多角形 $abcd$ を入れると問題は解けたことになる。この場合 Od だけが $O'd$ になる。

§ 3.3 多くの力が作用する場合

5角形或はそれ以上の多角形を輪廓に持つトラスの各頂点に力の作用する場合、即ち5力或はそれ以上の釣合外力の作用する場合は上述の方法では解けない。例えば対角線のない5角形の各頂点に力の作用する場合に外力を構材と見なせば元来の静定トラスとこの外力の構材とで1次不静定トラスを形成する。この外力も構材と見なした全体とト

ラスを静定トラスに移行させるためには構材1本を取外すことが許されるだけである。対角線のない5角形を静定にするには2本の不足構材を外部で挿入しなければならぬ。従つて外部の構材1本を取外したのでは外部にはまだ1本余分の構材があつて最後まで分解することは出来



ネ 30 図

ない。即ち構材力1つを決定して解く方法では解けないことになる。今これを次に詳述する。

元の静定トラスの構材数	n_1
元の静定トラスの節点数	k_1
外力の数	p
多角形の辺の数	q
外力を構材に置換えた時の追加構材の数	n_2
外力を構材に置換えた時の追加節点数	k_2
元のトラスに外力を構材と見なして追加した全体のトラスの構材数	n
〃 〃 〃 〃 〃 節点数	k
多角形の輪廓と外力を構材と見なしたものの構成するトラスの構材数	n_3
〃 〃 〃 〃 〃 節点数	k_3
〃 〃 〃 〃 〃 不安定次数	t

とすると

$$n_2 = 2p - 3, \quad k_2 = p - 2,$$

元のトラスでは

$$n_1 = 2k_1 - 3,$$

$$n = n_1 + n_2 = 2(k_1 + p) - 6,$$

$$k = k_1 + k_2 = (k_1 + p) - 2.$$

従って

$$n = 2k - 2. \quad \dots\dots\dots(1)$$

即ち全体のトラスは1次不静定になる。また

$$n_3 = n_2 + q = 2p + q - 3,$$

$$k_3 = k_2 + q = p + q - 2.$$

このトラスの不安定次数を t とすると

$$n_3 = 2k_3 - 3 - t,$$

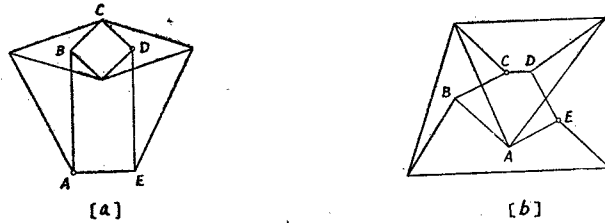
上式を入れると

$$t = q - 4. \quad \dots\dots\dots(2)$$

即ち多角形の輪廓と外力で形成するトラスは4辺形だけが安定になることがわかる。3角形は1次不静定となる。5角形は1次不安定、6角形は2次不安定、7角形は3次不安定となる。4角形のトラスでは n を静定にするためには構材1本を外せばよい。 n_3 以外の1本を外して分解可能にしたのが前項の解法である。3角形の3頂点に外力の掛る場合はその3角形だけで解決されるから問題にならない。5角形では n_3 が1次不安定であるから、 n は1次不静定を静定にするために外部で1本構材を外しても内部で不足している1本が外部にあるから分解不能である。6角形になると更に今1本余分になって解けなくなる。例えば第30図のような9節点15構材のトラスで5角形 $ABCDE$ の各頂点に外力の掛っている場合外力を構材とみると $n=22, k=12$ となり、1次不静定である。これを5角形 $ABCDE$ を残すまで分解する目的で1本の構材の取外しだけを許されても分解は不可能である。即ち5角形 $ABCDE$ の1次不安定を補うために尙1本の構材が外部に設けられている。

2力、3力或は4力の作用する場合に簡単な解法が不可能な時でも外力から出発して、1次非単純

トラスの解法を用いれば勿論解が可能である。一般に外力の数が多くない時でも構材1本を取りはずして残りのトラスの分解が進まないものは前項の簡単な解法を応用することは出来ないから進行出来



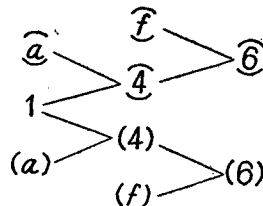
オ 31 図

なくなつた先は1次非単純トラスの幾何学的解法を適用する。例えば第31図(a)で5角形 ABCDE の A 点と D 点に1対の釣合外力が掛っている場合、或は同図(b)で5角形 ABCDE の C 点と E 点に外力の作用する場合は両方共に簡単には解けない。

多くの節点に力の作用する場合は1対の釣合力から4力迄の釣合力群になるように力を分解して解の可能な数個の問題に分割すればよい。その各個の問題は既述の解法に従って解き、それを組合せる。たゞこの時に各釣合力群毎に出てくる尺度が違って来るから、これを同一尺度に換算して各構材力を決定する必要がある。この方法は4力或はそれ以下の釣合力群に分けるのに手数が掛るから最初から外力が釣合力群の組合せから成立っている場合以外は応用しない方がよい。

一般の場合は第I章で説明した幾何学的の方法を利用すればよいが、本章のように構材力から出発しても解ける。出来るだけ無荷重節点を利用して、出発した構材力から多くの構材力が決定出来るようにするのがよい。しかし節点の全部に荷重が掛っている場合は出発の構材力1つだけしか最初に決定出来ない。

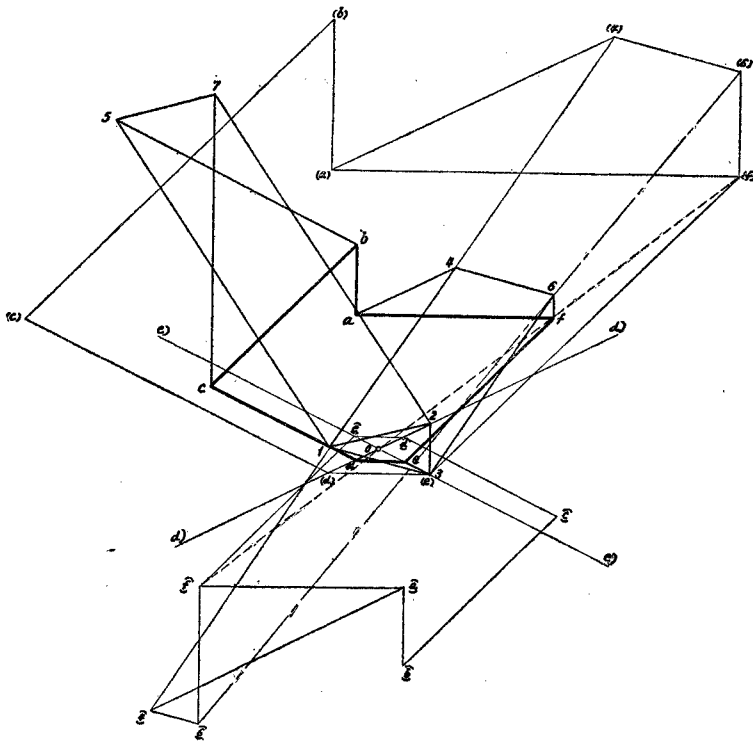
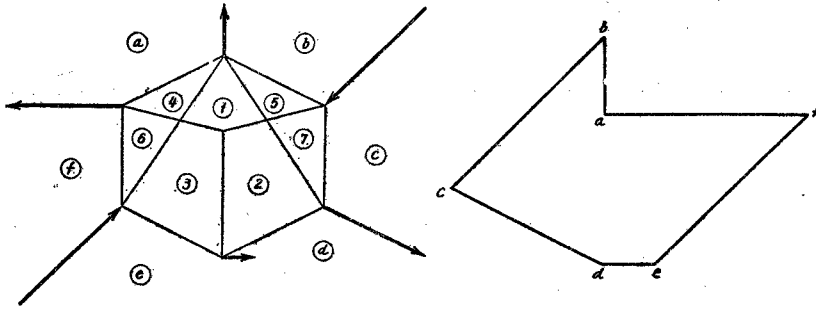
第32図の例は7節点6力であって1つだけ無荷重節点がある。12を假定すれば3は直ぐ出る。2からd点の存在する直線2d)が引けるし、3からe点の存在すべき直線3e)が引ける。2d)と3e)の交点は極Oであって外力の多角形はこの点で収斂する。(d)(e)及びd̂êを任意に0d)及び0e)線上に決定する。勿論この場合外力の多角形deに各(d)(e), d̂êが平行になっていなければならぬ。(d)(e)及びd̂êより外力の多角形を2つ完成する。即ち(a)(b)(c)(d)(e)(f)及びabĉd̂êfを描く。



(6)6)を結ぶ線と、3から③6)に平行に引いた線との交点が6になる。

6と(f)0)よりf点が出て、feを外力の方に引くと0e)の交点からeが出るから、外力の多角形abĉd̂êfを描ける。6/a > 4を出し、この4の点が4)1(4)線上に来ていけばよい。以下の

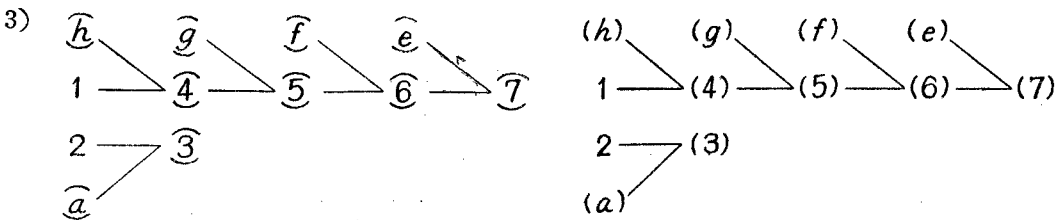
Cremona 力線図は容易である。



第 32 図

第33図は10節点の2次非単純トラスの全節点に外力の作用している例である。12を決定して外力の多角形を2つ假定して解く順序を次に説明する。

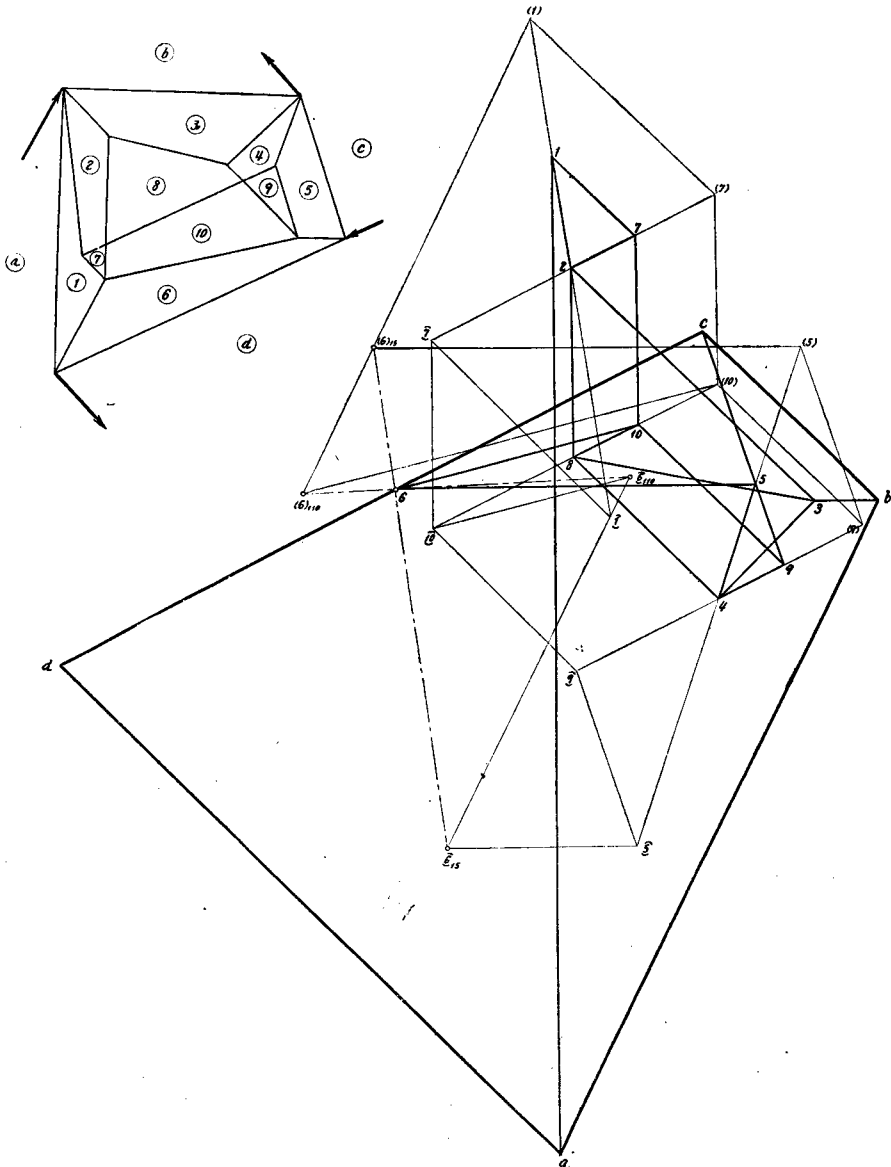
- 1) 12 を決定する。これより極 O が定まる。
- 2) 外力の多角形 $(a)(b)(c)(d)(e)(f)(g)(h)(k)(l)(a)$ と $\overbrace{a b c d e f g h k l a}^{\circ}$ を描く。

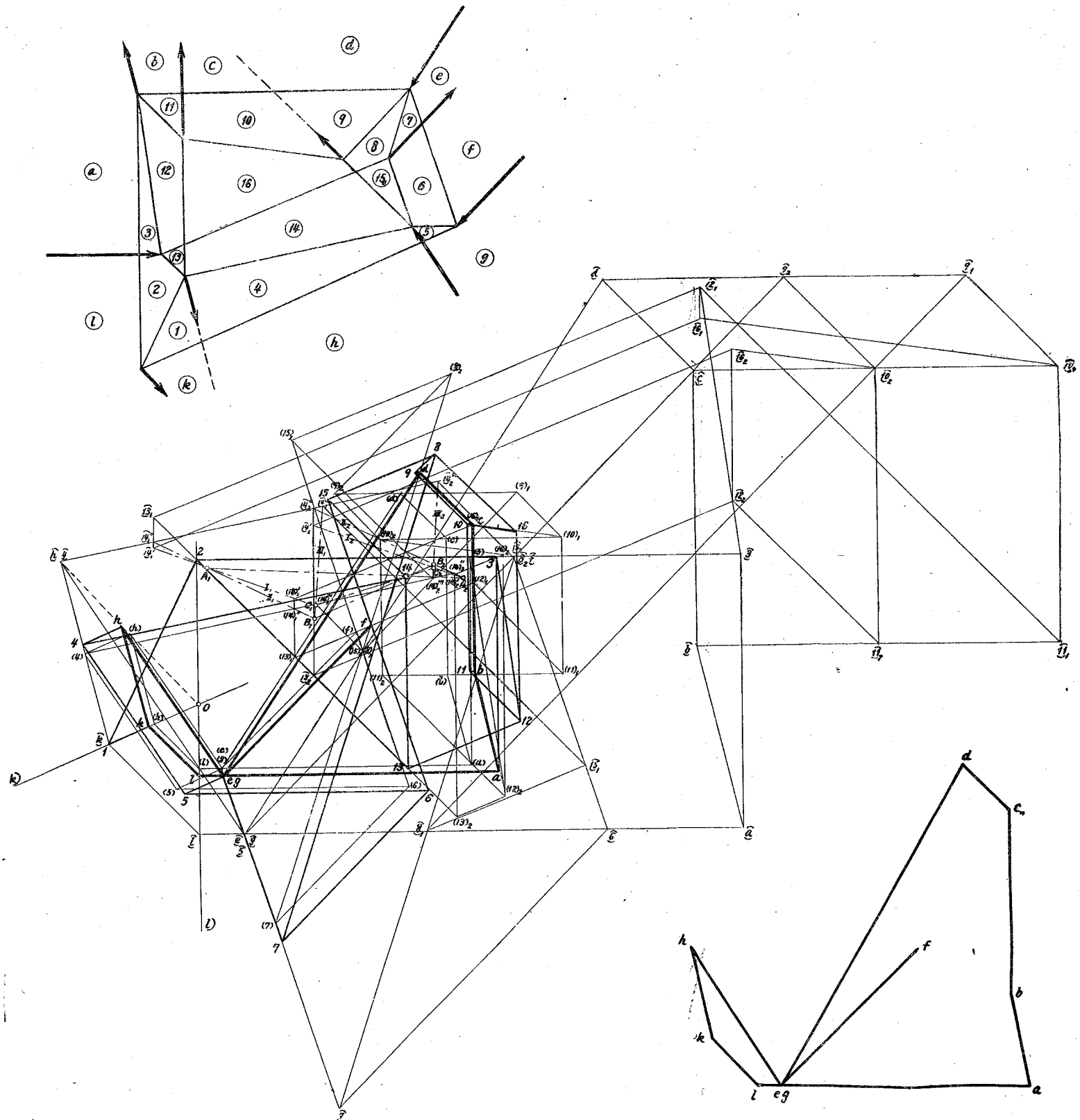


- 4) $(7)(8)$ を2つ, $\overbrace{78}$ を2つ假定する. 即ち $(7)(8)_1, (7)(8)_2,$ 及び $\overbrace{78}_1, \overbrace{78}_2$ をきめる.
 ただし $(7)(8)_1 = \overbrace{78}_1, (7)(8)_2 = \overbrace{78}_2$ とせねばならぬ.
- 5) これから14の点が12個出る.
- 6) $(14)_1' - \overline{14}_1', (14)_1'' - \overline{14}_1'', (14)_1''' - \overline{14}_1''',$ 及び $(14)_2' - \overline{14}_2', (14)_2'' - \overline{14}_2'', (14)_2''' - \overline{14}_2'''$
 $\text{I}_1 \qquad \text{II}_1 \qquad \text{III}_1 \qquad \text{I}_2 \qquad \text{II}_2 \qquad \text{III}_2$

を夫々結ぶ.

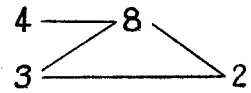
7) I_1 と II_1 の交点を A_1, II_1 と III_1 の交点を B_1, III_1 と I_1 との交点を C_1 とし, I_2 と II_2 の交点を A_2, II_2 と III_2 との交点を B_2, III_2 と I_2 との交点を C_2 とすれば, A_1 と A_2, B_1 と B_2, C_1 と C_2 とを結んだ線は1点で交る筈である. この点が14になる.





上述の例は2次非単純トラスであるが、これを解くために外力の多角形を任意に2つ描いて進む。この外力の多角形は極Oに対して同じ側にある時は（この2つの例は両方共同側になっている）、回り勝手が同じである。即ち右まわりならどちらも右まわり、左まわりならどちらも左まわりになる。従って第33図の(7)(8)と(7)8、のとり方は同じ向きになっている。若し2つの多角形のうち1つが極の片側にあつて、他の1つが極を越して反対側に描かれている時は回り勝手が逆になる。即ち片側が右まわり、他の側は左まわりになる。従って()符号のものと○符号のものは向きを逆にとらねばならぬ。

第33図のように外力が多く掛らないで、4辺形の各項点だけに外力が作用する場合は2次非単純トラスでも1次非単純トラスと同様に簡単に解ける。第Ⅱ章16附頁の例をとって説明しよう。第34図で43を決定してこれから出発する。8及び2は直ぐ決まる。これから先へ進めなから2-1上に(1)1の点を任意に假定する。以下の作図より6の点が4つ出る。(6)₁₅ (6)₁₅を結ぶ線Iと(6)₁₀ (6)₁₀を結ぶ線IIとの交点が6である。



IV. 無荷重節点の取扱い及び特殊の場合

この研究は節点の数に比較して荷重の数の少ない場合を多く取扱っている。従って無荷重節点が多いものである。荷重の作用していない節点は色々便宜的な取扱いが出来る。これを先人の考えた多角形挿入法や、假想関節を利用して相反力線図を描くことを説明する。

また前章迄はトラス及び荷重の対称のもの以外は主として一般的のものを取扱つて来たが、本章では平行力や1点で交わる力、一直線上の力等の特殊の場合を抜き出して論じてこの論文の粗足をする。

§ 4-1 幾何学的方法及び多角形挿入法

Cremona 力線図を描いて行って非単純の基礎図形 (Grundfigur) 等に衝き当って作図の進行が出来なくなった時の打開法として、Müller-Breslau は幾何学的方法¹⁾を、Föppl は多角形挿入法²⁾を提唱している。幾何学的方法は第Ⅱ章で詳述したが、これは力学的にいえば不明の構材力を任意に2つ假定して全体の釣合条件に合うように内挿法または外挿法を用いて目的の構材力を決定することである。

多角形挿入法は著者の提案する構材力より出発する Cremona 力線図の描法の根拠になるものである。第35図[a] は7節点11構材の非単純トラスであつて外周になっている4辺形の頂点に釣合外力が作用している。外力の多角形を同図 [b] のように *abcd* とし、これは既知とする。このトラス内部には外力が掛っていないから14構材の内力を決定して、 のように作図すれば、1 2 3 4 5 がわかる (第35図[c])。4辺形の外周を境とし、 外の面も内の面もわかったが、内外面を関係づけないと境界の4辺形の4辺に相当する構材内力が不明である。これを [e] 図

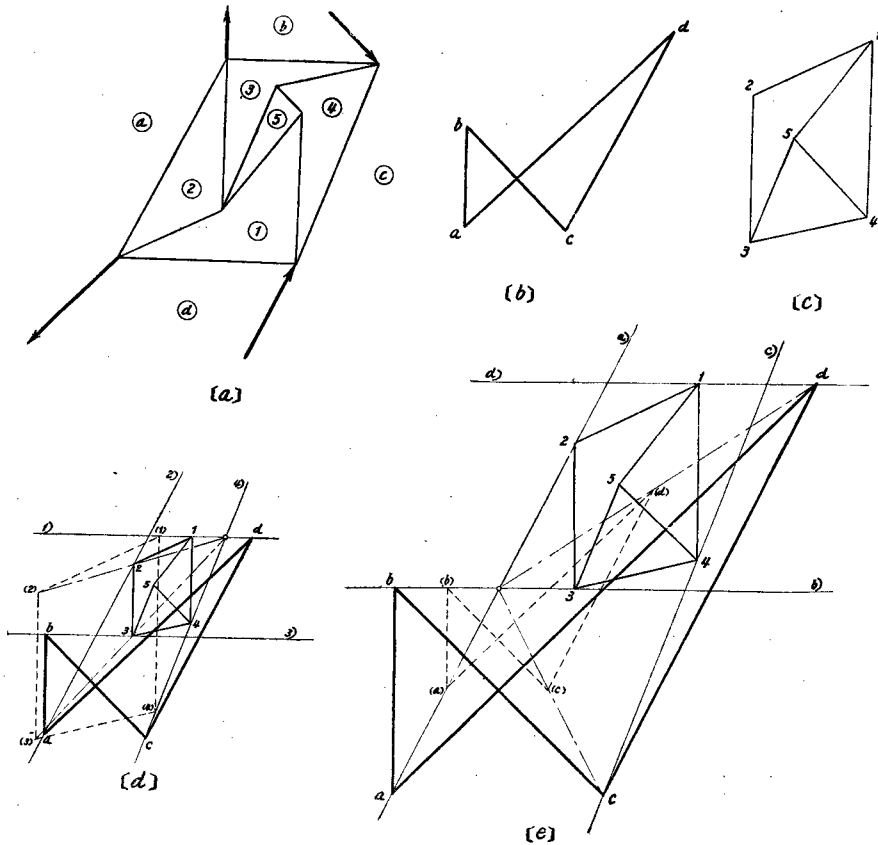
1) 15頁の脚註参照

2) Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik, I. Bd. Graphische Statik, 6. Auflage S-41

のように解いて外力の多角形に相似な多角形を描くのが第Ⅲ章の解法である。第35図〔d〕のように外力の多角形を初め描いて、1 2 3 4の4辺形をこれに嵌め込んでも問題は解ける。この作図は次の目的を同時に達成している。

- 1) 多角形 $abcd$ と 1 2 3 4 の相対位置の決定、即ち外力の掛っている4辺形の各辺の構材力の決定
- 2) 多角形 $abcd$ と多角形 1 2 3 4 との尺度の同調
- 3) 図形の回り勝手の決定

このうち 1) の方は1つの多角形に他の多角形を嵌め込む時に、外力のかゝっている4辺形の4辺に平行線を引くことによって目的が達せられる。第 2) の方は嵌め込まれた多角形の大きさによって定まる。外力の多角形を初めに引いて置けば〔d〕図の場合、その尺度は初めから既知であるから、後から嵌め込まれた多角形はこの尺度に合致する大きさにされて嵌まることになる。外力の多角形に相似な多角形があとから嵌め込まれる時は〔e〕図の場合、与えられた外力の多角形と結果として出て来た多角形との比例常数が尺度になる。第 3) の図形のまわり勝手は〔d〕の場合は普通の通りであるが、〔e〕の場合は結果として出て来た外力の多角形が決定の鍵となる。

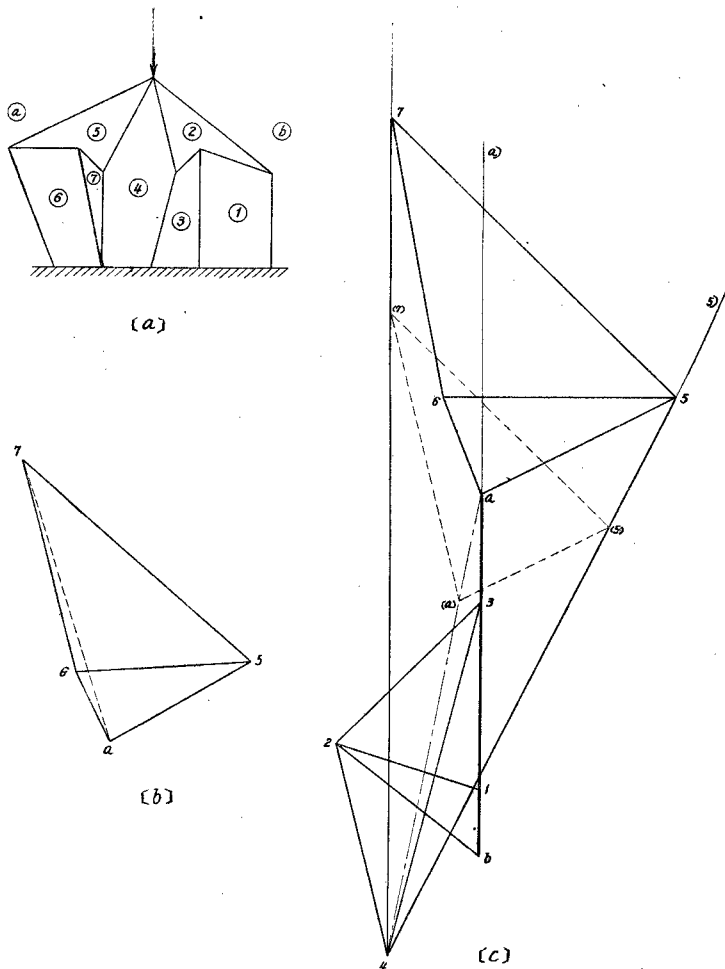


第 35 図

多角形挿入法は Cremona 力線図の作図進行の方法として既に提唱されているもので著者の考案によるものではない。著者はたゞこれに無荷重節点の利用法として考え方を別の方向から持って行った

だけである。Föppl は 3 角形の挿入を説明しているが、著者はこれを一般化して多角形を挿入する事にした。しかしこれは求める 3 角形を多角形を描くことによって得ると考えれば Föppl の 3 角形の挿入法に帰着する。以下の例によって、この方法で作図の行き詰りが如何にうまく打開出来るかということを知ることが出来る。

第36図は 6 節点を 12 構材で地面に結合したトラスに単一外力の掛っているものである。元来は 1 次非単純トラスであるが、外力の位置の関係で構材力より出発しても簡単には解けない。これに無荷重節点を利用して多角形挿入法を応用するとうまく解ける。12 を決定してこれから出発する。〔c〕図、1・2 から 3 及び b がきまり、3・2 から 4 までは決定するが、これから先が進めない。そこで別に 56 を任意の大きさにきめて、7 及び a を決定した 4 辺形 $a675$ (第 36 図〔b〕) を描く。〔c〕図で 4 から 47), 45) を、 b から ba) を引くことが出来るから、3 角形 $a57$ をこれに挿入すればよい。



第 36 図

§ 4.2 假想関節によるトラスの変形

トラス内の平板或は構材そのものに対して假想関節を作ると、節点を変更され、トラスを変形する

ことが出来る。勿論この場合に荷重の掛っている節点の位置を換えてはいけませんが、無荷重節点は作図の手段として便宜変更してもよい。この方法によれば非単純トラスを単純トラスに変形出来る場合が有って解法が容易になる。

第37図は第36図と同じものである。仮想関節を利用して次のように解ける。先ず構材5を平板と見なして、仮想関節I, IIを出す(同図〔b〕参照)。△126はIIと3の交点IIIと力の作用点とを結ぶ代用構材aに転換される。また△91011はIVになり、△81213はIVと14の交点VとO点とを結ぶ代用構材bに転換される。従って結局の図形は第37図〔c〕のやうな単純トラスとなり容易に解ける。

こゝで注意することは仮想関節が地面の下へ来て、構材が下方へ延長された時の取扱い方である。

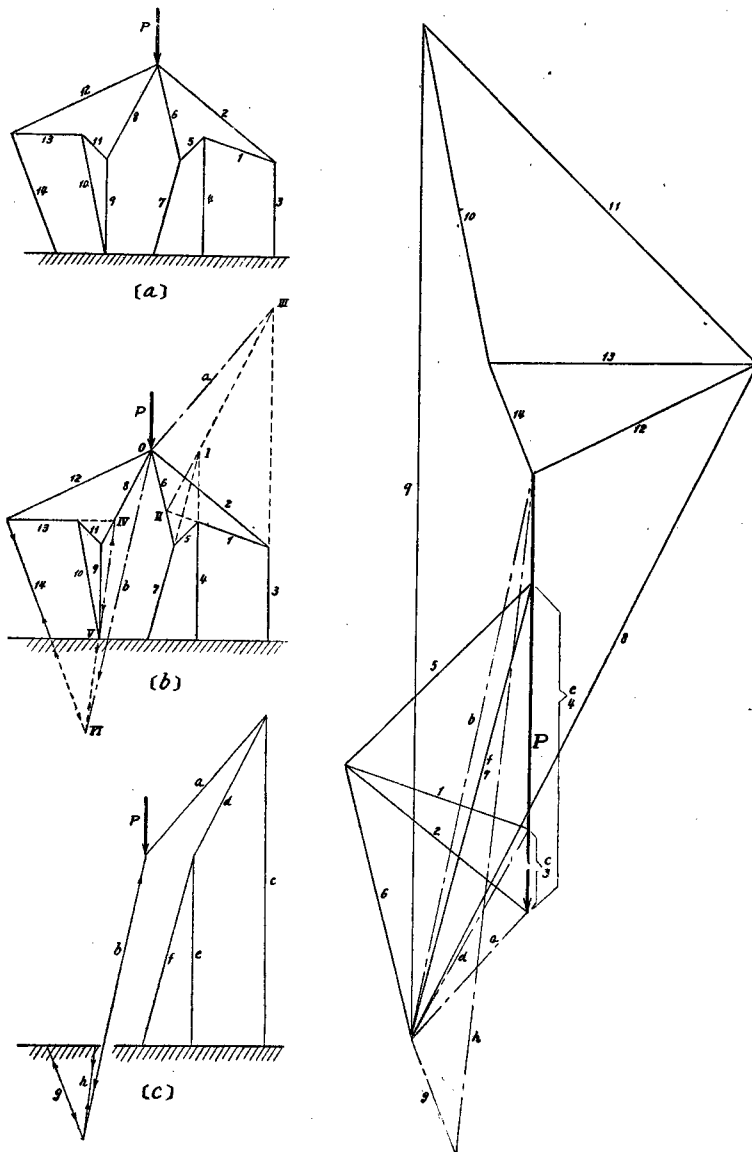
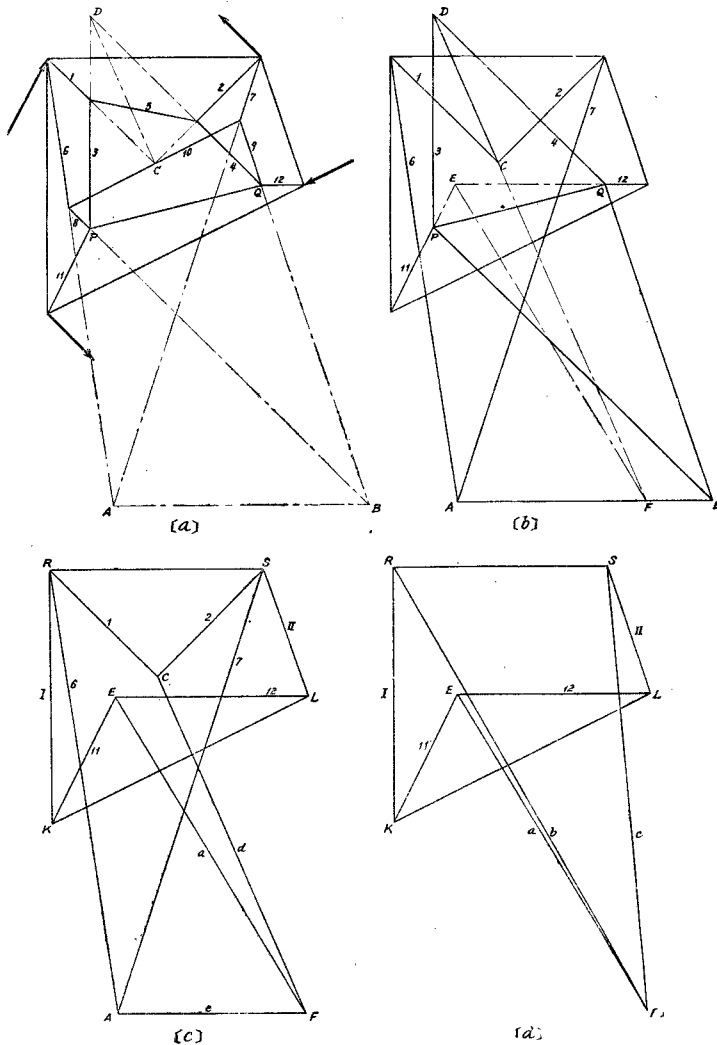


図 37

仮想構材 g と h は地面線の上下で引張と圧縮とが変換する。地面に加える力或は地面の反力は便宜上地面の下へ構材を仮想してもその方向が変ってはいけない。即ち仮想構材 g は圧縮で、地面に斜上向き of 力を与える。これと同じ力を地面に与えるためには構材14は引張りでなければならぬ。また仮想構材 h は引張りで地面に斜下向き of 力を与える。これと同じ力を与えるためには IV V は圧縮でなければならぬ。これを機械的にやるには地面線を横切る構材は地面線で矢印が節点の場合と違って同方向でつながるようにすればよい。

更に仮想関節の考え方を徹底させてもつと面倒な場合に適用して見よう。

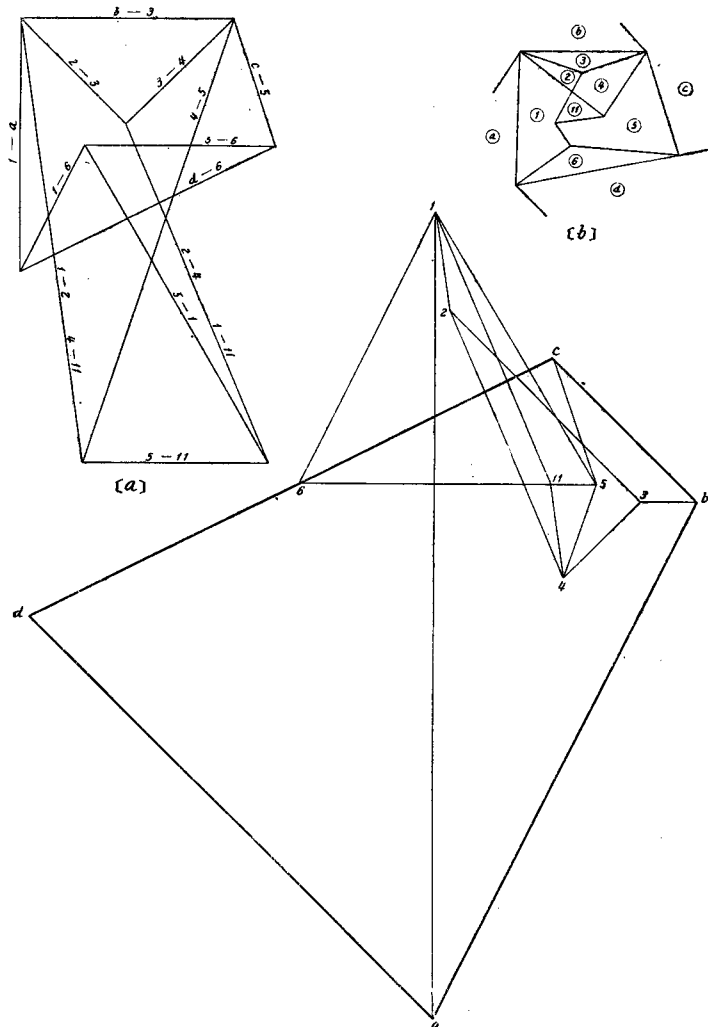
第38図は第II章(附頁)及び第III章(30頁)で取扱った2次非単純トラスに4外力の掛っているものである。いま無荷重節点を利用してトラスの描き換えをやる。第38図[a]・5は12, 34の4本で支えているから、12の交点を C , 34の交点を D として5を CD に置きかえる。また10は67と89とで支えているから67の交点を A , 89の交点を B として、10を AB に置きかえると [a] 図は [b]



第 38 図

図のようになる。この〔b〕図では平板 $PDQB$ は $11 \cdot 12$ 及び $DC \cdot AB$ の4本で支えられているから、 $11 \cdot 12$ の交点を E とし、 $DC \cdot AB$ の交点を F とすれば平板は EF で置き換えられる。〔b〕図は〔c〕図の形になる。〔c〕図を見ると平板 $ARSCF$ と平板 KEL とを IaI の3本で連結したものになっている。更にこれを簡単にして、平板 $ARSCF$ を $\triangle RSF$ に置きかえると、〔d〕図のように2つの3角形 KEL と RSF とが IaI で連結されたものになる。この〔d〕図まで所理すると R 及び S の両頂点に集る構材が変化するから、〔c〕図まで変形したものを解くと、要領がよい。

第39図〔a〕は第38図〔c〕と同じもので、これを変形トラス線図にしたのが第39図〔b〕である。各面の符号を第14図（16附頁）のものと同じにして置いた。56を決定してこれから出発すると直ぐ解ける。しかし、この解から問題の第38図〔a〕へ帰らねばならない。



第 39 図

以上は仮想関節を利用して Cremona 力線図を描く方法の説明であるが、トラスを転換して簡単すると、除外例 (Ausnahmefall) の判定が出来る。上の例で最後まで変形された形は確かに Aus-

nahmefall になっていないことがわかる。

§ 4.3 特殊の場合

この論文では架構そのものゝ性質を研究する事はその目的ではない。従って大体に於ては一般的のトラス及び一般的の外力を取扱った。併し実際に起つて来るものに例えば平行外力や同一線上の構材のような特殊のものが多い。従つてこれ等に対する検討をして置くのも無駄ではない。また著者の考案した方法を使つて解を出す時に予期しない事が起つて来て判断に迷うかも知れない。特に Ausnahmefall は非常に特異な性質を持つものである。以下特殊の場合を吟味して相反力線図の性質に及ぼす影響を研究してみよう。

4.3.1 平行力と1点で交わる外力 一般的に取扱った外力は次々とその合力を出して行きその位置線図を引くと、トラス線図に対して第I章第(7)式(11頁)のような関係が成立する。しかし

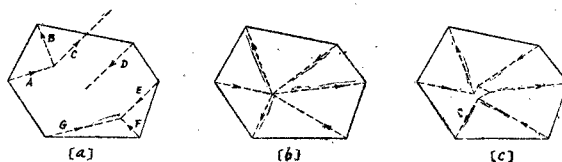


図 40

特殊の場合として外力が平行していると多角形を構成しないし、1点で交わる場合はこの公式が成立しない。外力全部が平行する場合もあるし、外力の一部が平行することもある。第40図[a]では AB の合力は C になり、 C に平行な適当な大きさの D の力を C に加えると平行力 E になるようにすることが出来る。 E と FG が釣合えば全部の力は釣合状態になる。この場合 CDE は平行力であるが力の合成の順序をかえて平行力にならないように出来る。1点に交わる力も第40図[b]のように全部が1点で交わる場合もあるし、3つ或はそれ以上の力が交わつて全部が交わらない場合もある。平行力は後述するように考えて多角形にすることが出来る。3力以上(外力として3力だけしかない場合を除く)1点で交わっている場合は交点を少しづつ、ずらせて考えて、2力づつ交わっているようにすれば第40図[c]のように3角形の集りでなく3角形と4角形或はそれ以上の多角形と考える事が出来る。このように假定すると第I章第(7)式が成立する。

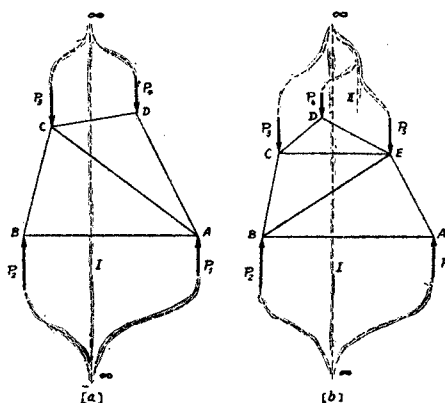


図 41

平行力に対しては図式力学では Seileck を利用して解決している。平行力を便宜的に無限遠で交わると考えて処理してもよい。例えば第41図[a]で $ABCD$ のようなトラス平板に P_1 から P_4 迄の釣合平行外力が作用していると假定する。 P_1 と P_2 の合力は I 線上に作用するとすれば、 P_3 と P_4 の合力もまた同一線上に作用しこの線が合力線となる筈である。 $P_1 P_2$ を無限遠で I と交わらせて考え

ると P_1-AB-P_2 は下方無限遠に頂点を持ち斜辺が無限遠迄行っている3角形と考えることが出来る。 $P_3-\overline{CD}-P_4$ も同様に上方無限遠に頂点を持つ3角形である。 $P_3-\overline{CB}-P_2-I$ 及び $P_4-\overline{DA}-P_1-I$ は各4辺形と考えられる。また第41図〔b〕で $ABCDE$ のようなトラス平板に5つの平行力が作用して釣合っていると假定する。 P_1 と P_2 の合力線を I とし、 P_1 及び P_2 と下方無限大で交わるとすると $P_1-\overline{AB}-P_2$ は前と同様に3角形と考えられる。 $P_1 P_2$ の合力と P_3 との合力を I の線上に作用するとすれば、 P_4 と P_5 の合力もまたこの線上に来なければ釣合が成立しない筈である。 $P_4-\overline{DE}-P_5$ もまた3角形と考えられる。 $I-P_2-\overline{BC}-P_3$ 及び $P_3-\overline{CD}-P_4-I$ は4辺形、 $P_1-I-I-P_5-\overline{EA}$ は5辺形と考えられる。トラスに掛る外力が平行力と任意の方向の力と混っている場合も上記と同じような考え方で解決出来る。

4・3・2 平行構材と1直線上の構材 トラス線図の平行構材は Cremona 力線図では一直線上に来るし、トラス線図の一直線上の構材は Cremona 力線図では平行力になって現われる場合がある。このどちらも特殊の場合であって、Bowの記号法により或る平面の隣りの平面の位置が既知でもその平面の位置を決定することが出来ないという不便があるが、その特殊性を利用して境界線を2つもとび越えて進行し、うまく Cremona 力線図を描くことが出来る。

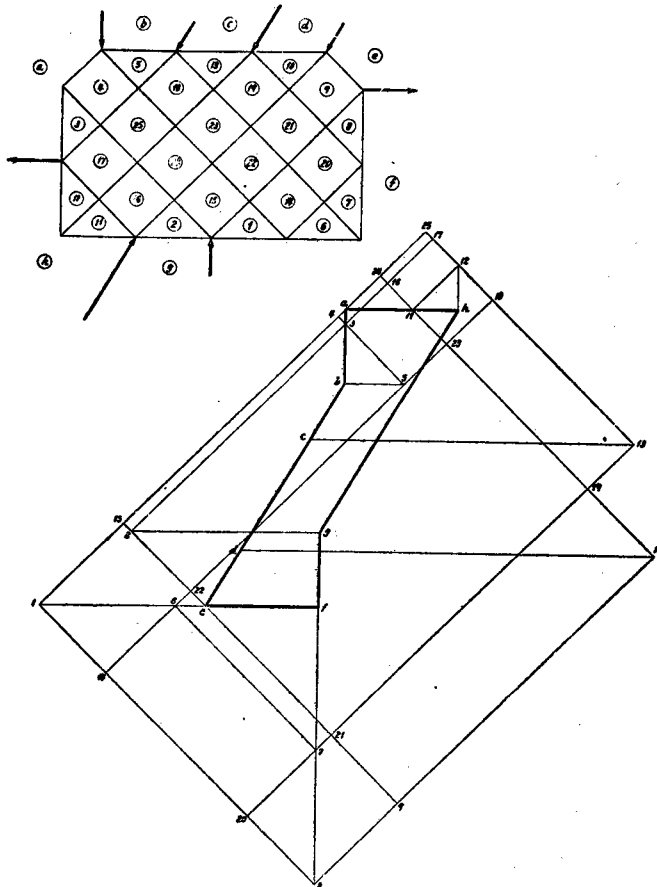


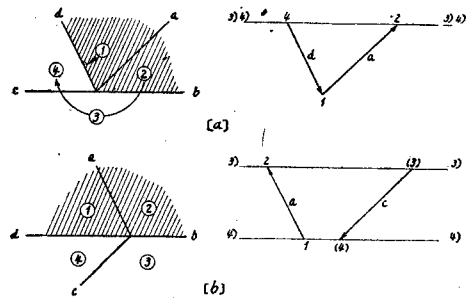
図 42 図

Bow の記号法によれば、平行している構材は隣接区劃を飛び越えて内部の区劃へ進める。A の区劃の隣りのB区劃との境界線と、Bの更に次の区劃Cとの境の線が平行し、更にCとDとの境もまた平行する時は、相反力線図ではAを通り、これ等のトラスの平行線に平行な線を引くと、B、C、D等は皆この線上来なければならぬ。相反力線図では先づA点を通りAB境界線に平行な線を引くと、Bはこの線に在ることはこの描法の基本である。B点の位置はまだ判明しないが、そのB点を適宜その線に假定してBの隣りのC点の位置はこのB点を通りBCの境界線に平行な線に在る筈である。AB、BCの境界線は假定により平行しているから、AB、BCの線は1本の線に合致する。以下何本でも平行線で次々と境して居れば皆同一線上来る筈である。次に簡便法を例示しよう。

第42図は多くの平行線を持つ1次非単純トラスであるが、構材の平行性を利用すれば単純トラスと同様に解ける。先づ外力の多角形から出発する。①から⑤迄の5本の構材は全部平行しているから、aを通してこれ等の線に平行な線を引けば、この線に1が存在する筈である。従ってfを通る水平線とこの線との交点が1になる。同様にしてeとgから2が出る。

この解法は次のように解釈することが出来る。①から⑦迄トラスを横切る Ritter の切断法を行えば②、④、⑤、⑥、⑦が切られる。この切断の左側に作用する力は fgha 即ち fa である。これを5本の平行線と①⑦の水平方向に力を分けることが出来る。a1 は5本の構材内力の合計であるが $\vec{1f}$ は①⑦構材内力を示す(引張り)。同様に⑧⑨間を切断すると、⑧⑨の構材内力がわかる。

同一線上の力——2つの力が同一作用線上にある時は次のような便法が講じられる。第一に外力を含めて3構材が1つの節点に集っていて、そのうち2つが同一線上にあれば、残りの1本に若し有限の内力が存在すれば同一線上の構材の内力は無限大となり Ausnahmefall となる。Ausnahmefall にならないで、このような場合が可能であるためには同一線上にある構材の内力は等しく、他の1本の構材の内力は零になる。

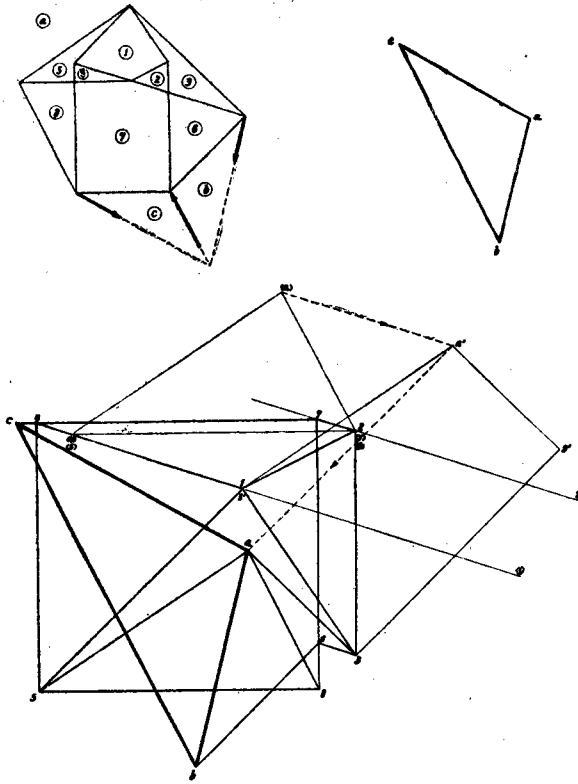


オ 43 図

4 構材が1つの節点に集っていて、そのうちの2本が同一線上にある場合には、同一線上にない2本の内力の和が同一線上の2構材の内力の和に等しくならねばならぬ。従って同一線上にない構材のうち1本の構材内力がわかれば他の1本の内力は出てくる。例えば a b c d の4構材が1節点に集っていて(第43図)、[a]図のように b c の2構材が同一線上にあって他の2構材 a d がその片側にある時は構材 a の内力 12 が既知の場合に Cremona 力線図では d 構材力 14 の位置と大きさがわかる。しかし [b] 図のように b d の2構材が同一線上にあって他の2構材 a と c がこの線の両側に別れている時は、a の構材力 12 が既知の場合に他の1つ即ち c の構材力 34 は出るが Cremona 力線図での 3, 4 の位置はわからない。b と d とは平行力になる。[a] 図で 12 の既知のベクトルを描くと 3 の点は 23) 上の何処かにあって、そこから 34) を引くと同一直線になるから、結局この線に 4 の点に来る筈である。従って 1 から 14 を引いてこの線との交点を求めると 14 のベクトルは決定する。即ち 4 の点はきまる。第43図 [b] では既知ベクトル 12 を引くと 3 の点は 23) 線上に在り、4 の点は 23)

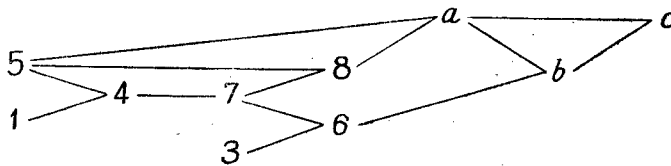
に平行な 14) 線上に在る。③④に平行な (3) (4) のベクトルを描くとこれが c のベクトルになるがその位置はきまらない。即ち 23, 41 は平行力になる。

次に例を挙げて説明しよう。第44図は 9 節点の 1 次非単純トラスであるが荷重の掛り方が不都合な節点であるために 2 次非単純トラスとして解く筈のものである。しかし①④②⑦が 1 直線であるために簡単化する。12 から出発すると 3 が出てこれでもう次へ進めなくなる。しかし 47 は (14), 27) の平行線の間にあるから、その大きさが (4)(7) のようにきまる。(4)(7) は (5) (8) と同じ構材である。(5)(8) から a が出る。31 の次へ (5)(a) のベクトルを置くと、 $a3, 15$ がわかる。そこで 31



第 44 図

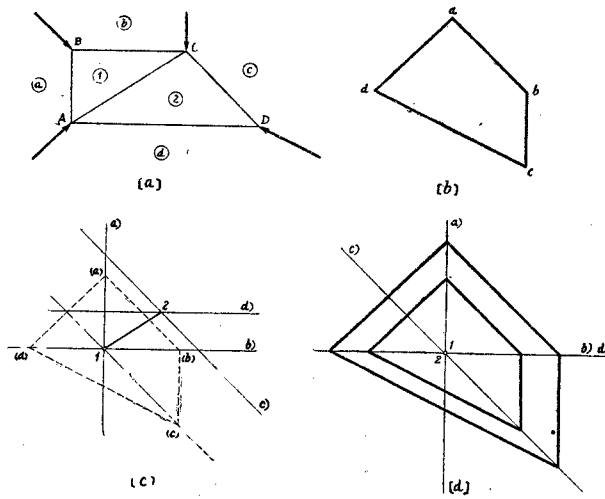
の次へ $15-5a-a3$ とベクトルの並べ換えをすると、 $5a$ の点がわかる。



$c-7$ 等を検算に使う。

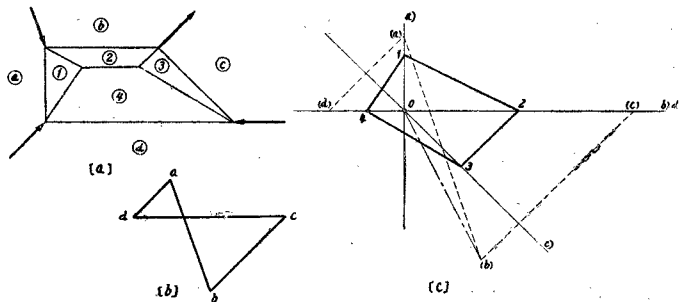
4-3-3 Seileck と Ausnahmefall 多角形のトラス平板で、多角形の各頂点に外力が作用し、多角形を構成する各辺の構材以外の構材内力が零になるような多角形をその外力の Seileck という。これは一つの特殊な場合であって著者の工夫した相反力線図の描法では次のような性質を示す。

第45図で $ABCD$ をトラス平板とし、その頂点 $ABCD$ に夫々図示のような外力が作用して釣合っていると考え、構材 AC の内力を假定し a, b, c, d 点の来るべき直線を引くと 1 より $1a), 1b)$ がわかり、2 より $2c), 2d)$ が引ける。与えられた力の多角形 $abcd$ は力が無限大にならないとこの線上に乗らない。しかし、与えられた外力は有限値を持っているから、逆に構材 AC の内力は零にならねばならぬ。即ち 12 は 1 点に乗る。 $\bar{12} = 0$ として力の多角形の頂点の来る線を出すと第45図 [d] のようになる。 12 点は多角形の極となり与えられた多角形に相似でさえあればどんな大きさのものでも当てはまる。即ち不定である。 $\bar{12} = 0$ になっているから力の尺度はきまっていない。多角形でこれをきめるとトラスの多角形の周辺の構材内力は決定する。



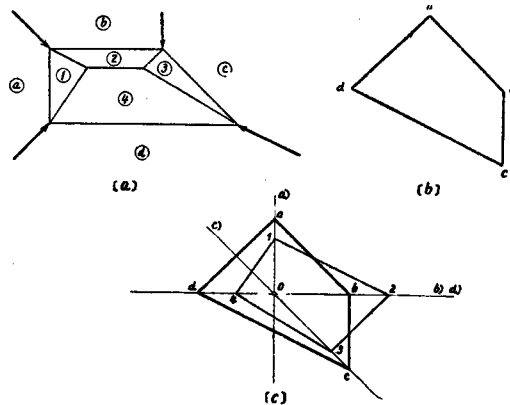
オ 45 図

次に第46図のようなトラスを考えて、これを解いてみよう。 12 を假定すると $3, 4$ が出て内部の4構材の内力は決定する。 $1, 2, 3, 4$ 点より各 $1a), 2b), 3c), 4d)$ 線を引くと、これ等の線は1点 O で交わる。これに外力の多角形 $abcd$ を嵌めると、この多角形は O に収斂してしまう。即ち外力が零になる。しかし実際外力は有限であるとすれば構材内力が無限大になる筈である。外力が実際零であっても $1, 2, 3, 4$ の点が出て、外を0とすると全構材に内力の存在し得ることがわかる。これが *Ausnahmefall* の性質を示す。



オ 46 図

同じトラスに第47図〔b〕のような外力の掛っている場合を考える。トラス内部の12を假定し1234を決定して1a), 2b), 3c), 4d)を引く。これ等の線は第45図と同様に1点Oで交わる。これに同図〔b〕のような外力の多角形を挿入すると、この多角形はどんな大きさでも嵌まる。即ち外力は不定になる。極端な場合外力が0に収斂し得て、しかもトラスの構材には内力が有限の値が存在し得ることになる。これは Ausnahmefall のトラスの多角形の外廓が外力の Seileck になっている場合である。この場合は外力による4辺形外周の構材の内力の外に、構材に初期内力が存在し得ることにな



オ 47 図

る。外力が零でも内力が存在し得る。即ち初期内力があり得ることになる。初期内力の外に外力があれば輪廓の構材には初期内力と外力による内力とが重なって起る。

綜 括

Cremona 力線図は静定トラスに外力の掛っている場合に構材力を出す図式解法である。静定トラスは一般に非単純であって、単純トラスは静定トラスの特別の場合である。従来 Cremona 力線図はこの単純トラスにだけ適用出来るもので、しかも内部の節点には外力が作用しないでトラス外周にだけ作用する特別な場合にしか使えないものであった。従って極く普通の典型的な構造に対して便利に使われて来た。この Cremona 力線図が工学的に有効であるために技術者は構造そのものまでなるべく単純トラスにしたい意欲を持つようになる。勿論構造を故意に面倒なものにする事は邪道であるが、解法が簡単な事に設計そのものが制肘されてはいけない。

この論文の目的は、静定トラスなら如何なる形のトラスに如何ように外力が掛っていてもその Cremona 力線図を描き得て、しかも出来るだけ簡単な描法を探求する事であった。しかしその目的は不幸にして完全には達成されていない。しかし或る程度 Cremona 力線図の適用範囲を拡げ得たと思う。

説明には総て例題を提示してその解を出す形式を採用した。従って一見問題解法の鍵、或は教科書の詳解のようなものになったので著者としては非常に飽き足りない気がする。しかし、この論文で取扱っているようなテーマでは抽象的な議論は理解が困難なので具体的の例を出して初めて納得出来る

ものである。

以下本論文に対する綜括をする。

- 1) 交叉構材のある平面トラスを立体化することにより Cremona 力線図は簡単になる。しかし立体観念はその描写が困難なので変形トラス線図を工夫して再び平面化し立体と同じ効果が得られる。
- 2) トラス内部の節点に外力が作用する場合は力をその作用線にそって外部まで引き出し、途中で仮想構材を挿入すれば Cremona 力線図が引ける。
- 3) トラス線図は力の位置線図で相反力線図はその力の釣合力線図であるから、トラスに掛る外力も構材の形式に書き換えると一貫性が出来るから取扱い易い。この時外力は一群となってその力の多角形が既知であるが、構材はそのうち1本の内力を假定して進行し、外力と矛盾することのないように、外力の作用する構材の多角形の内力を決定することが出来る。
- 4) 非単純トラスは幾何学的方法によって Cremona 力線図が描けるが、4外力の場合は1本の構材力を假定して出発すると前項のような考え方で簡単に解ける。Henneberg の構材置換法の図式解法ともいふべき画法を考案した。
- 5) 対称トラスの性質を系統的に研究した。対称トラスはその性質を利用して3次或は4次の非単純でも比較的容易に Cremona 力線図が描ける。
- 6) トラスの節点に外力の掛っていないものに対しては便宜的に仮想関節を利用してトラスを描き換え、または多角形挿入法が利用出来て Cremona 力線図が引ける。
- 7) 平行構材及び1直線上の構材は Cremona 力線図では1直線または平行力となって現われるから、この性質を利用すれば作図法が簡単になる。
- 8) Ausnahmefall のトラスでは構材力から出発する描法によると、外力の多角形が1点に収斂する。これは一定の有限外力に対しトラスの構材力が無限大になることを意味する。
- 9) 外力の作用する多角形が外力の Seileck になっておれば、他の構材力は零になるから、構材力から出発する方法では問題が解けない。この場合は外力の多角形を挿入しようとする外に無限大になることから判断出来る。
- 10) その頂点に外力の作用する多角形が外力の Seileck になっていてトラスが Ausnahmefall になっていれば、構材力より出発する作図法では外力が不定になる。この種の Ausnahmefall のトラスには初期内力が作用し得て、しかも Seileck には外力による構材力が初期内力に重ね合わされることになる。

最後に本論文を草するに当り献身的の援助を与えられた松岡健次君に心から謝意を表す。また浮書を引受けられた中川憲治君や、複写その他について援助され、また色々有益な注意を頂いた渡辺嘉三、中島衆男、宮井善弘の諸君に感謝する。