Patrizia Agati, Luisa Stracqualursi

Algoritmi computazionali per l'aggregazione di informazioni "esperte"

Serie Ricerche 2001, n.4

Dipartimento di Scienze Statistiche "Paolo Fortunati"
Università degli Studi di Bologna

Il lavoro è frutto della ricerca comune delle Autrici. La trattazione dei singoli capitoli è da attribuire come segue.
capitoli 1, 2: P. Agati
capitoli 3, 4, 5: L. Stracqualursi

Il CD allegato contiene i software presentati nel lavoro.

Finito di stampare il 30 Settembre 2001
presso le Officine Grafiche Tecnoprint
Via del Legatore 3, Bologna

Indice

1
Introduzione

I software illustrati nel presente lavoro e contenuti nel CD allegato sono predisposti per essere adoperati da chiunque – in un contesto di personale incertezza su una grandezza aleatoria θ – intenda combinare in una personale distribuzione di sintesi informazioni provenienti da una pluralità di fonti, anche eterogenee, comunemente etichettate come "esperti".

L'algoritmo implementato è quello bayesiano di P. A. Morris (1977), che suggerisce di aggregare le informazioni, codificate in termini di distribuzioni di probabilità su θ, in una densità-sintesi individuata come densità a posteriori. Tale impostazione è caratterizzata da una "funzione di calibrazione" che può essere modellizzata adoperando l'argomento fiduciale fisheriano (Monari, Agati, 2001) e stimando le varianze degli indicatori di performance attraverso il metodo Delta (Monari, Stracqualursi, 2001).

Il software, adoperato dalle Autrici per studiare il comportamento del modello aggregativo bayesiano-fiduciale al variare dei parametri che lo caratterizzano, implementa sia l'acquisizione e aggregazione simultanea delle funzioni di densità fornite dagli esperti, sia un processo sequenziale (Agati, 2001) governato da opportuni criteri di stop e di scelta dell'esperto da consultare a ogni stadio.

2
Il modello aggregativo: un programma in Mathcad

Mathcad unisce l'interfaccia di un foglio elettronico con l'interfaccia di un programma per il trattamento di testi. Consente di calcolare e trattare qualunque funzione matematica: dagli operatori più semplici, come integrali e derivate, alle funzioni più complesse, anche parametriche (ad esempio, funzioni di densità di probabilità e funzioni di ripartizione), definite dal programmatore o dall'utente nel foglio stesso.

Grazie a queste caratteristiche, Mathcad è strumento adeguato alla programmazione di calcoli complessi, e si rivela molto semplice da usare. Una volta assegnato un valore ai parametri delle funzioni e agli estremi del campo di variazione delle variabili, il calcolo delle funzioni – effettuato da Mathcad nell'ordine in cui esse compaiono definite nel foglio – produce risultati e grafici di immediata leggibilità.

Qualsiasi cambiamento nei valori assegnati o nelle funzioni da calcolare comporta la ripetizione di ogni passo, con il conseguente aggiornamento dei risultati e dei grafici. Qualora si effettuino simulazioni ripetute, questo tipo di procedura d'aggiornamento rende Mathcad meno efficiente rispetto ad altri *software*, come ad esempio *Excel*.

Il programma costruito per l'aggregazione di informazioni fornite da esperti implementa l'aggiornamento della densità a priori dell'aggregatore alla luce delle densità fornite da 1 solo esperto, da 2 esperti, … fino a 5 esperti simultaneamente. È sufficiente che l'utente assegni valori alle quantità seguenti:

- θm, θM: estremi, inferiore e superiore rispettivamente, del campo di variazione di θ;
- mA, vA: media e varianza della personale distribuzione a priori dell'aggregatore (ipotizzata gaussiana);
- m1, v1: media e varianza della distribuzione (gaussaiana) dell'esperto 1;
- t1, s1: parametri della funzione fiduciale di calibrazione relativa all'esperto 1 (Monari, Agati, 2001).

I risultati che il programma restituisce esprimono:

– quantità sintetiche della funzione di verosimiglianza normalizzata (prima colonna della sezione "Risultati"), interpretabile come densità a posteriori derivante da una densità a priori uniforme. In particolare:
  - integv1: integrale della funzione, sempre uguale a 1 per costruzione (è un risultato di mero controllo);
  - mov1: moda;
  - mv1: media aritmetica;
  - sv1: scarto quadratico medio;
  - varv1: varianza;
  - curv_lnverosim1: curvatura della logverosimiglianza nel suo punto di massimo;
– quantità sintetiche della densità a posteriori ottenuta dalla densità a priori gaussiana (seconda colonna della sezione "Risultati"):
  - integp1: integrale della funzione, sempre uguale a 1 per costruzione;
  - mop1: moda;
  - mp1: media aritmetica;
  - sp1: scarto quadratico medio;
  - varp1: varianza;
  - kullback1: divergenza di Kullback-Leibler della densità a posteriori rispetto alla densità a priori;

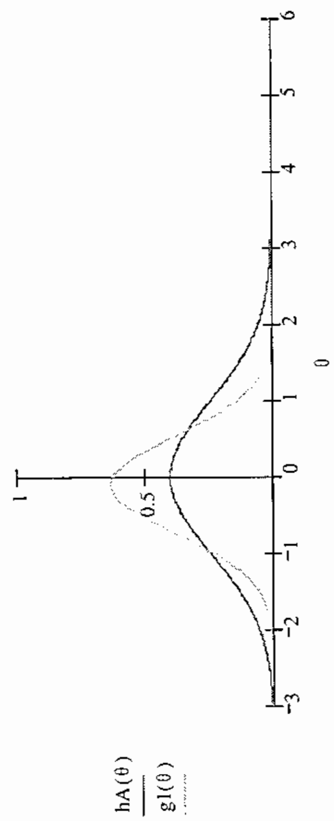
Passando a 2 o più esperti, l'utente deve specificare, oltre a parametri analoghi a quelli indicati per un esperto soltanto, anche il valore dei parametri r_{ij} di correlazione lineare tra coppie di esperti consultati: tra le quantità sintetiche della densità a posteriori è inserita anche la divergenza di Kullback_Leibler tra densità a posteriori di stadi contigui (ad esempio, il risultato "kullback2_1" esprime la divergenza della densità a posteriori derivante dalla consultazione di due esperti rispetto alla densità a posteriori ottenuta dalla consultazione di un solo esperto).

Il programma in Mathcad è riportato di seguito, con esempi di risultati e grafici ottenuti dalla consultazione di un numero di esperti compreso tra uno e cinque.

	Aggregatore	Esperto 1	
$\theta m := -8$ $\theta M := 11$	$mA := 0$	$m1 := -0.1$	*media e varianza della densità dell'esperto 1*
	$vA := 1$	$v1 := 0.4$	
$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M$		$t1 := 0.6$	*parametri della funzione di calibrazione*
		$s1 := \sqrt{2.591330}$	

$$hA(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot vA}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2 \cdot vA} \cdot (\theta - mA)^2\right]$$

$$g1(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v1}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2 \cdot v1} \cdot (\theta - m1)^2\right] \qquad G1(\theta) := \int_{-\infty}^{\theta} g1(u)\,du$$



$$b(\theta) := \ln\left(\frac{G1(\theta)}{1 - G1(\theta)}\right) - \ln\left(\frac{t1}{1 - t1}\right)$$

$$\mathrm{verosim1}(\theta) := \frac{1}{\mathrm{GI}(\theta)\cdot(1-\mathrm{GI}(\theta))}\cdot\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left[\frac{1}{s1^2}\cdot(b(\theta))^2+\frac{1}{v1}\cdot(\theta-m1)^2\right]\right]$$

funzione di verosimiglianza

$$k1 := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{verosim1}(\theta)\,d\theta$$

costante di normalizzazione della verosimiglianza

$$\mathrm{verosimk1}(\theta) := \frac{\mathrm{verosim1}(\theta)}{k1}$$

funzione di verosimiglianza normalizzata

$$\mathrm{poster1}(\theta) := \mathrm{verosimk1}(\theta)\cdot hA(\theta)$$

"densità" a posteriori NON normalizzata

$$kp1 := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{poster1}(\theta)\,d\theta$$

costante di normalizzazione della densità a posteriori

$$\mathrm{posterk1}(\theta) := \frac{\mathrm{poster1}(\theta)}{kp1}$$

densità a posteriori (normalizzata)

$$\mathrm{integv1} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{verosimk1}(\theta)\,d\theta \qquad mv1 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot\mathrm{verosimk1}(\theta)\,d\theta \qquad varv1 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta-mv1)^2\cdot\mathrm{verosimk1}(\theta)\,d\theta \qquad sv1 := \sqrt{varv1}$$

$$\mathrm{integp1} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk1}(\theta)\,d\theta \qquad mp1 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot\mathrm{posterk1}(\theta)\,d\theta \qquad varp1 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta-mp1)^2\cdot\mathrm{posterk1}(\theta)\,d\theta \qquad sp1 := \sqrt{varp1}$$

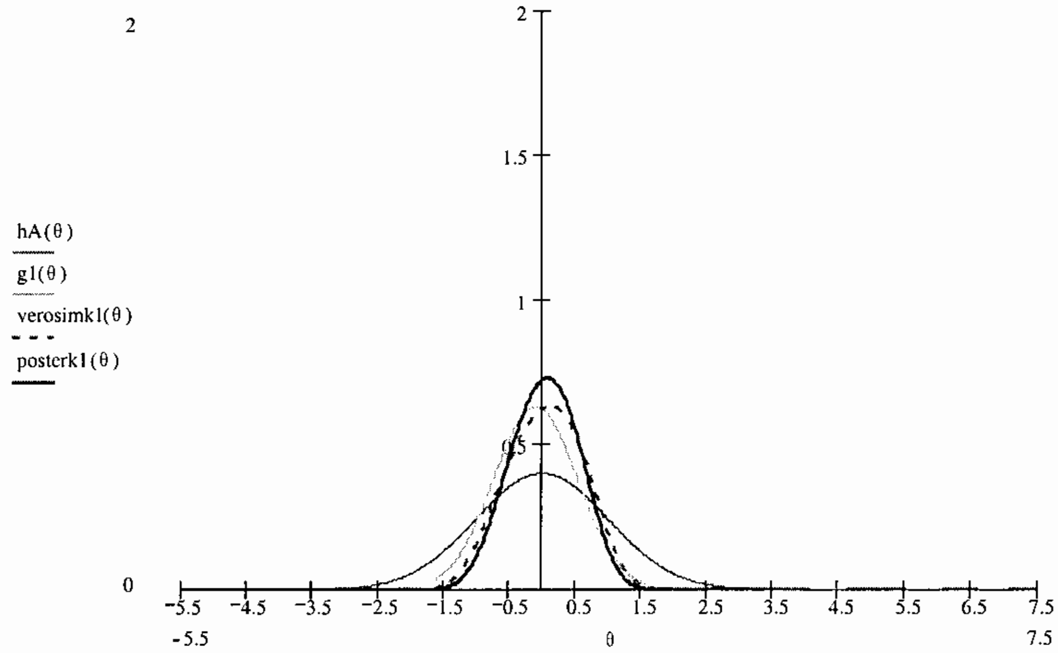
$\theta := 0.5$ $\qquad$ $mov1 := \mathrm{Maximize}(\mathrm{verosim1}, \theta)$ $\qquad$ $mop1 := \mathrm{Maximize}(\mathrm{posterk1}, \theta)$

$\theta := mov1$ $\qquad$ $\mathrm{curv\_lnverosim1} := -\frac{d^2}{d\theta^2}\ln(\mathrm{verosim1}(\theta))$

$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M$ $\qquad$ $\mathrm{kullback1} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk1}(\theta)\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{posterk1}(\theta)}{hA(\theta)}\right)d\theta$

Risultati

integv1 = 1	integp1 = 1
mov1 = 0.118	mop1 = 0.077
mv1 = 0.046	mp1 = 0.04
sv1 = 0.579	sp1 = 0.514
varv1 = 0.335	varp1 = 0.265
curv_lnverosim1 = 1.909	kullback1 = 0.302



Esperto 2

$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M$

$m2 := 2$

$v2 := 0.9$

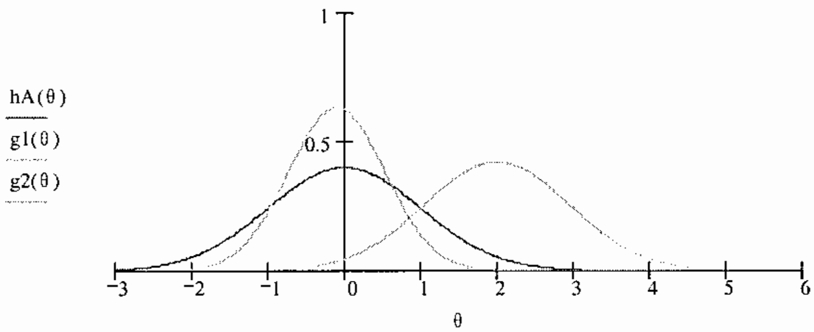
$t2 := 0.35$

$s2 := \sqrt{2.650798}$

$r12 := 0.2$

$g2(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v2}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2 \cdot v2} (\theta - m2)^2\right]$

$G2(\theta) := \int_{-\infty}^{\theta} g2(u)\,du$



$c(\theta) := \ln\left(\frac{G2(\theta)}{1 - G2(\theta)}\right) - \ln\left(\frac{t2}{1 - t2}\right)$

$$VarCov := \begin{bmatrix} s1^2 & r12 \cdot s1 \cdot s2 \\ r12 \cdot s1 \cdot s2 & s2^2 \end{bmatrix} \qquad Inv := (VarCov)^{-1} \qquad bb := Inv_{0,0} \quad bc := Inv_{0,1} \quad cc := Inv_{1,1}$$

$$prova(\theta) := (b(\theta))^2 \cdot bb + (c(\theta))^2 \cdot cc + 2 \cdot b(\theta) \cdot c(\theta) \cdot bc$$

$$prod(\theta) := \frac{1}{G1(\theta) \cdot (1 - G1(\theta)) \cdot G2(\theta) \cdot (1 - G2(\theta))}$$

$$sum(\theta) := \frac{1}{v1} \cdot (\theta - m1)^2 + \frac{1}{v2} \cdot (\theta - m2)^2$$

$$verosim2(\theta) := prod(\theta) \cdot \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot (prova(\theta) + sum(\theta))\right]$$

$$k2 := \int_{\theta m}^{\theta M} verosim2(\theta)\, d\theta$$

$$verosimk2(\theta) := \frac{verosim2(\theta)}{k2}$$

$$poster2(\theta) := verosimk2(\theta) \cdot hA(\theta)$$

$$kp2 := \int_{\theta m}^{\theta M} poster2(\theta)\, d\theta$$

$$posterk2(\theta) := \frac{poster2(\theta)}{kp2}$$

$$integv2 := \int_{\theta m}^{\theta M} verosimk2(\theta)\, d\theta \qquad mv2 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta \cdot verosimk2(\theta)\, d\theta \qquad varv2 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mv2)^2 \cdot verosimk2(\theta)\, d\theta \qquad sv2 := \sqrt{varv2}$$

$$integp2 := \int_{\theta m}^{\theta M} posterk2(\theta)\, d\theta \qquad mp2 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta \cdot posterk2(\theta)\, d\theta \qquad varp2 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mp2)^2 \cdot posterk2(\theta)\, d\theta \qquad sp2 := \sqrt{varp2}$$

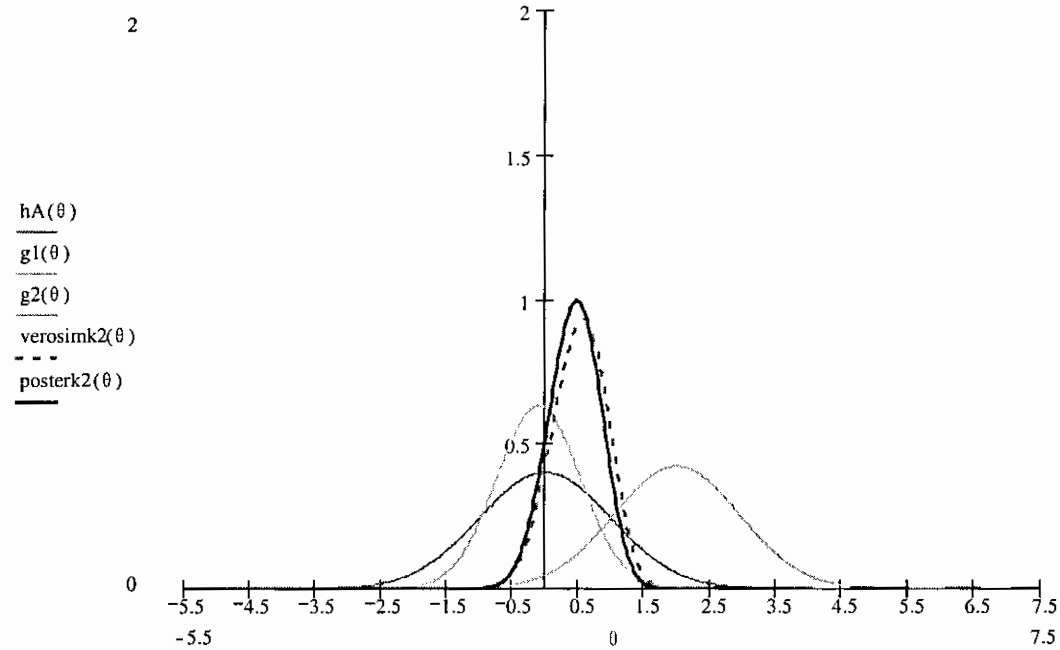
$$\theta := 0.5 \qquad mov2 := Maximize(verosim2, \theta) \qquad mop2 := Maximize(posterk2, \theta)$$

$$\theta := mov2 \qquad curv\_lnverosim2 := -\frac{d^2}{d\theta^2} \ln(verosim2(\theta))$$

$$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M \qquad kullback2 := \int_{\theta m}^{\theta M} posterk2(\theta) \cdot \ln\left(\frac{posterk2(\theta)}{hA(\theta)}\right) d\theta \qquad kullback2\_1 := \int_{\theta m}^{\theta M} posterk2(\theta) \cdot \ln\left(\frac{posterk2(\theta)}{posterk1(\theta)}\right) d\theta$$

Risultati

integv2 = 1	integp2 = 1	
mov2 = 0.569	mop2 = 0.475	
mv2 = 0.523	mp2 = 0.448	
sv2 = 0.417	sp2 = 0.392	
varv2 = 0.174	varp2 = 0.153	
curv_lnverosim2 = 5.229	kullback2 = 0.616	kullback2_1 = 0.362



$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M$

Esperto 3

$m3 := 1$

$v3 := 2$

$t3 := 0.42$

$s3 := \sqrt{2.574917}$

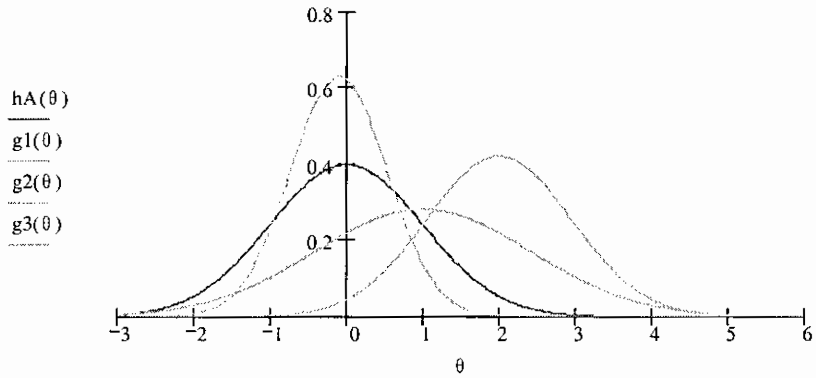
$r12 = 0.2$

$r13 := -0.1$

$r23 := 0.6$

$$g3(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v3}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2 \cdot v3} (\theta - m3)^2\right]$$

$$G3(\theta) := \int_{-\infty}^{\theta} g3(u)\,du$$



$$d(\theta) := \ln\left(\frac{G3(\theta)}{1 - G3(\theta)}\right) - \ln\left(\frac{t3}{1 - t3}\right)$$

$$\mathrm{VarCov} := \begin{bmatrix} s1^2 & r12\cdot s1\cdot s2 & r13\cdot s1\cdot s3 \\ r12\cdot s1\cdot s2 & s2^2 & r23\cdot s2\cdot s3 \\ r13\cdot s1\cdot s3 & r23\cdot s2\cdot s3 & s3^2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Inv} := (\mathrm{VarCov})^{-1}$$

$bb := \mathrm{Inv}_{0,0}$ $\quad bc := \mathrm{Inv}_{0,1}$ $\quad bd := \mathrm{Inv}_{0,2}$

$cc := \mathrm{Inv}_{1,1}$ $\quad cd := \mathrm{Inv}_{1,2}$

$dd := \mathrm{Inv}_{2,2}$

$$\mathrm{prova}(\theta) := (b(\theta))^2\cdot bb + (c(\theta))^2\cdot cc + (d(\theta))^2\cdot dd + 2\cdot b(\theta)\cdot c(\theta)\cdot bc + 2\cdot b(\theta)\cdot d(\theta)\cdot bd + 2\cdot c(\theta)\cdot d(\theta)\cdot cd$$

$$\mathrm{prod}(\theta) := \frac{1}{G1(\theta)\cdot(1-G1(\theta))\cdot G2(\theta)\cdot(1-G2(\theta))\cdot G3(\theta)\cdot(1-G3(\theta))}$$

$$\mathrm{sum}(\theta) := \frac{1}{v1}\cdot(\theta - m1)^2 + \frac{1}{v2}\cdot(\theta - m2)^2 + \frac{1}{v3}\cdot(\theta - m3)^2$$

$$\mathrm{verosim3}(\theta) := \mathrm{prod}(\theta)\cdot \exp\left[\frac{-1}{2}\cdot(\mathrm{prova}(\theta) + \mathrm{sum}(\theta))\right]$$

$$k3 := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{verosim3}(\theta)\,d\theta$$

$$\mathrm{verosimk3}(\theta) := \frac{\mathrm{verosim3}(\theta)}{k3}$$

$$\mathrm{poster3}(\theta) := \mathrm{verosimk3}(\theta)\cdot hA(\theta)$$

$$kp3 := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{poster3}(\theta)\,d\theta$$

$$\mathrm{posterk3}(\theta) := \frac{\mathrm{poster3}(\theta)}{kp3}$$

$$\mathrm{integv3} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{verosimk3}(\theta)\,d\theta \qquad mv3 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot\mathrm{verosimk3}(\theta)\,d\theta \qquad varv3 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mv3)^2\cdot\mathrm{verosimk3}(\theta)\,d\theta \qquad sv3 := \sqrt{varv3}$$

$$\mathrm{integp3} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk3}(\theta)\,d\theta \qquad mp3 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot\mathrm{posterk3}(\theta)\,d\theta \qquad varp3 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mp3)^2\cdot\mathrm{posterk3}(\theta)\,d\theta \qquad sp3 := \sqrt{varp3}$$

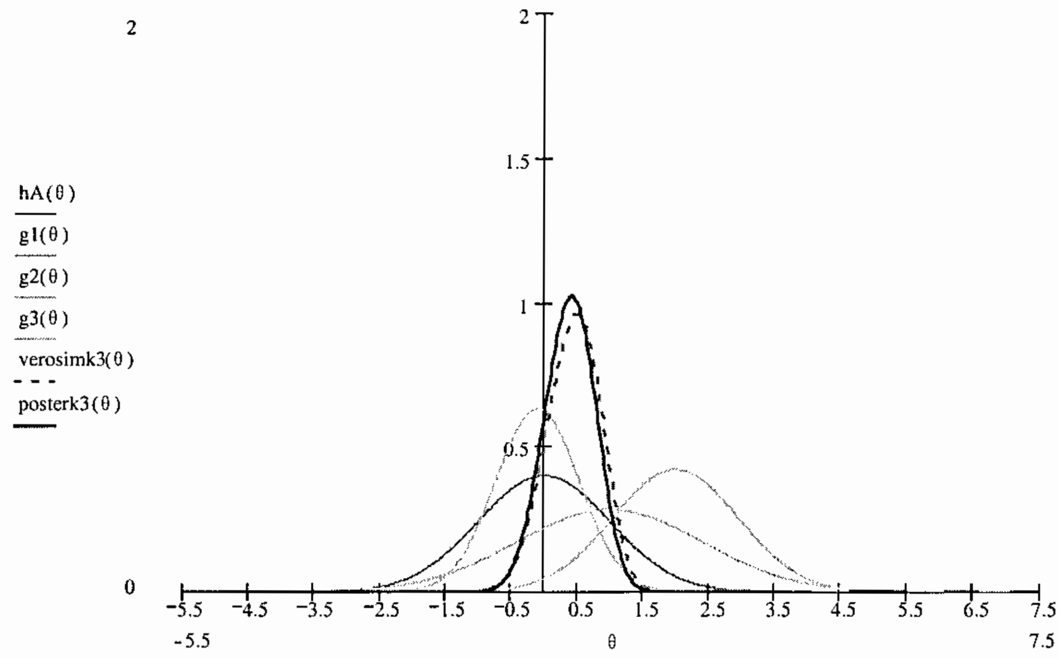
$\theta := 1.5$ $\qquad mov3 := \mathrm{Maximize}(\mathrm{verosim3}, \theta)$ $\qquad mop3 := \mathrm{Maximize}(\mathrm{posterk3}, \theta)$

$\theta := mov3$ $\qquad \mathrm{curv\_lnverosim3} := -\frac{d^2}{d\theta^2}\ln(\mathrm{verosim3}(\theta))$

$$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M \qquad \mathrm{kullback3} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk3}(\theta)\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{posterk3}(\theta)}{hA(\theta)}\right)d\theta \qquad \mathrm{kullback3\_2} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk3}(\theta)\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{posterk3}(\theta)}{\mathrm{posterk2}(\theta)}\right)d\theta$$

Risultati

integv3 = 1	integp3 = 1	
mov3 = 0.49	mop3 = 0.413	
mv3 = 0.449	mp3 = 0.388	
sv3 = 0.405	sp3 = 0.381	
varv3 = 0.164	varp3 = 0.145	
curv_lnverosim3 = 5.521	kullback3 = 0.614	kullback3_2 = 0.013



Esperto 4

$m4 := 1.5$

$v4 := 2.25$

$t4 := 0.54$

$s4 := \sqrt{2.553503}$

$r14 := 0$

$r24 := 0$

$r34 := 0$

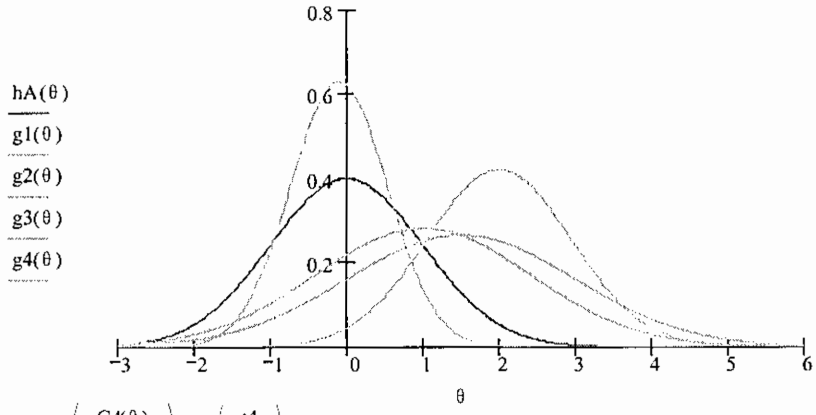
$$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M$$

$r12 = 0.2$ $r13 = -0.1$

$r23 = 0.6$

$$g4(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v4}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2 \cdot v4} (\theta - m4)^2\right]$$

$$G4(\theta) := \int_{-\infty}^{\theta} g4(u)\, du$$



$$e(\theta) := \ln\left(\frac{G4(\theta)}{1 - G4(\theta)}\right) - \ln\left(\frac{t4}{1 - t4}\right)$$

$$\mathrm{VarCov} := \begin{bmatrix} s1^2 & r12\cdot s1\cdot s2 & r13\cdot s1\cdot s3 & r14\cdot s1\cdot s4 \\ r12\cdot s1\cdot s2 & s2^2 & r23\cdot s2\cdot s3 & r24\cdot s2\cdot s4 \\ r13\cdot s1\cdot s3 & r23\cdot s2\cdot s3 & s3^2 & r34\cdot s3\cdot s4 \\ r14\cdot s1\cdot s4 & r24\cdot s2\cdot s4 & r34\cdot s3\cdot s4 & s4^2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Inv} := (\mathrm{VarCov})^{-1}$$

$bb := \mathrm{Inv}_{0,0}$ $\quad bc := \mathrm{Inv}_{0,1}$ $\quad bd := \mathrm{Inv}_{0,2}$ $\quad be := \mathrm{Inv}_{0,3}$

$cc := \mathrm{Inv}_{1,1}$ $\quad cd := \mathrm{Inv}_{1,2}$ $\quad ce := \mathrm{Inv}_{1,3}$

$dd := \mathrm{Inv}_{2,2}$ $\quad de := \mathrm{Inv}_{2,3}$

$ee := \mathrm{Inv}_{3,3}$

$$\mathrm{prova}(\theta) := (b(\theta))^2\cdot bb + (c(\theta))^2\cdot cc + (d(\theta))^2\cdot dd + (e(\theta))^2\cdot ee + 2\cdot b(\theta)\cdot c(\theta)\cdot bc + 2\cdot b(\theta)\cdot d(\theta)\cdot bd + 2\cdot b(\theta)\cdot e(\theta)\cdot be + 2\cdot c(\theta)\cdot d(\theta)\cdot cd + 2\cdot c(\theta)\cdot$$

$$\mathrm{prod}(\theta) := \frac{1}{G1(\theta)\cdot(1-G1(\theta))\cdot G2(\theta)\cdot(1-G2(\theta))\cdot G3(\theta)\cdot(1-G3(\theta))\cdot G4(\theta)\cdot(1-G4(\theta))}$$

$$\mathrm{sum}(\theta) := \frac{1}{v1}\cdot(\theta - m1)^2 + \frac{1}{v2}\cdot(\theta - m2)^2 + \frac{1}{v3}\cdot(\theta - m3)^2 + \frac{1}{v4}\cdot(\theta - m4)^2$$

$$\mathrm{verosim4}(\theta) := \mathrm{prod}(\theta)\cdot \exp\left[\frac{-1}{2}\cdot(\mathrm{prova}(\theta) + \mathrm{sum}(\theta))\right]$$

$$k4 := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{verosim4}(\theta)\,d\theta$$

$$\mathrm{verosimk4}(\theta) := \frac{\mathrm{verosim4}(\theta)}{k4}$$

$$\mathrm{poster4}(\theta) := \mathrm{verosimk4}(\theta)\cdot hA(\theta)$$

$$kp4 := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{poster4}(\theta)\,d\theta$$

$$\mathrm{posterk4}(\theta) := \frac{\mathrm{poster4}(\theta)}{kp4}$$

$$\mathrm{integv4} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{verosimk4}(\theta)\,d\theta \qquad mv4 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot \mathrm{verosimk4}(\theta)\,d\theta \qquad varv4 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mv4)^2\cdot \mathrm{verosimk4}(\theta)\,d\theta \qquad sv4 := \sqrt{varv4}$$

$$\mathrm{integp4} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk4}(\theta)\,d\theta \qquad mp4 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot \mathrm{posterk4}(\theta)\,d\theta \qquad varp4 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mp4)^2\cdot \mathrm{posterk4}(\theta)\,d\theta \qquad sp4 := \sqrt{varp4}$$

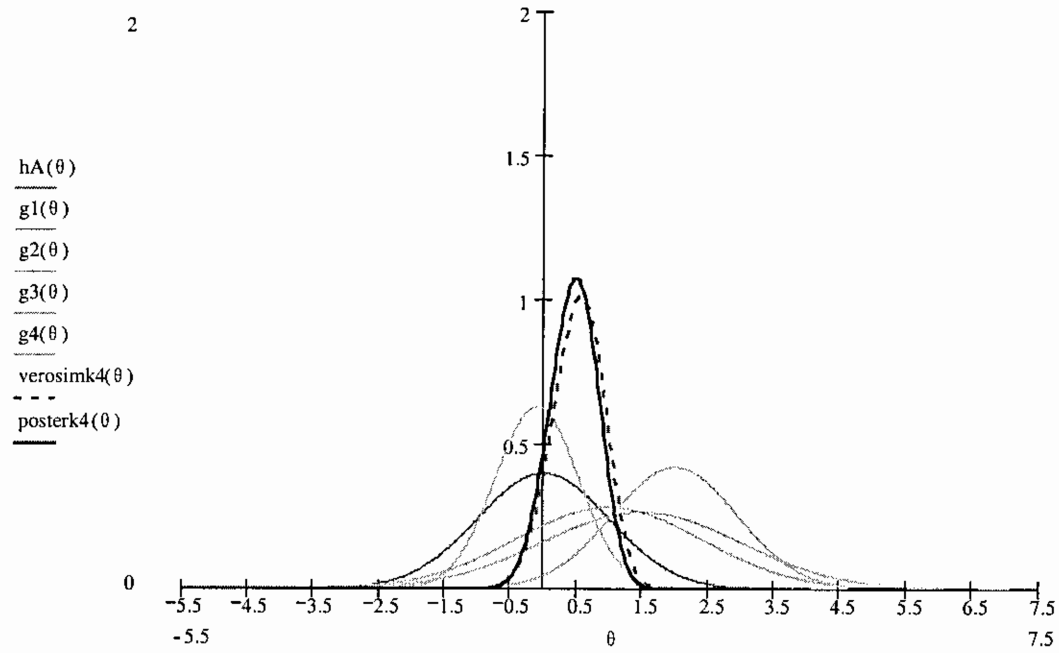
$\theta := 1.5$ $\qquad mov4 := \mathrm{Maximize}(\mathrm{verosim4}, \theta)$ $\qquad mop4 := \mathrm{Maximize}(\mathrm{posterk4}, \theta)$

$\theta := mov4$ $\qquad \mathrm{curv\_lnverosim4} := -\frac{d^2}{d\theta^2}\ln(\mathrm{verosim4}(\theta))$

$$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M \qquad \mathrm{kullback4} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk4}(\theta)\cdot \ln\left(\frac{\mathrm{posterk4}(\theta)}{hA(\theta)}\right)d\theta \qquad \mathrm{kullback4\_3} := \int_{\theta m}^{\theta M} \mathrm{posterk4}(\theta)\cdot \ln\left(\frac{\mathrm{posterk4}(\theta)}{\mathrm{posterk3}(\theta)}\right)d\theta$$

Risultati

integv4 = 1	integp4 = 1	
mov4 = 0.562	mop4 = 0.483	
mv4 = 0.524	mp4 = 0.458	
sv4 = 0.385	sp4 = 0.365	
varv4 = 0.149	varp4 = 0.133	
curv_lnverosim4 = 6.23	kullback4 = 0.681	kullback4_3 = 0.018



Esperto 5

$m5 := 1.3$

$v5 := 2.25$

$t5 := 0.5$

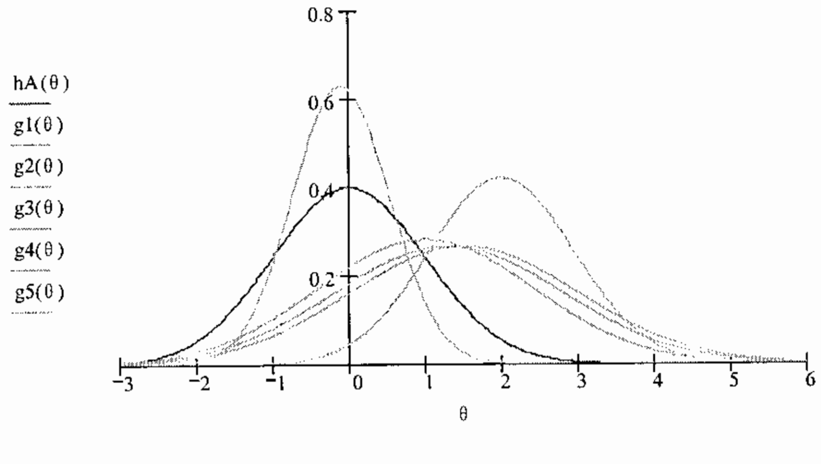
$s5 := \sqrt{2.546479}$

$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M$

$r12 = 0.2$	$r13 = -0.1$	$r14 = 0$	$r15 := 0$
	$r23 = 0.6$	$r24 = 0$	$r25 := 0$
		$r34 = 0$	$r35 := 0$
			$r45 := 0$

$$g5(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v5}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2 \cdot v5} (\theta - m5)^2\right]$$

$$G5(\theta) := \int_{-\infty}^{\theta} g5(u)\, du$$



$$f(\theta) := \ln\left(\frac{G5(\theta)}{1-G5(\theta)}\right) - \ln\left(\frac{t5}{1-t5}\right)$$

$$VarCov := \begin{bmatrix} s1^2 & r12\cdot s1\cdot s2 & r13\cdot s1\cdot s3 & r14\cdot s1\cdot s4 & r15\cdot s1\cdot s5 \\ r12\cdot s1\cdot s2 & s2^2 & r23\cdot s2\cdot s3 & r24\cdot s2\cdot s4 & r25\cdot s2\cdot s5 \\ r13\cdot s1\cdot s3 & r23\cdot s2\cdot s3 & s3^2 & r34\cdot s3\cdot s4 & r35\cdot s3\cdot s5 \\ r14\cdot s1\cdot s4 & r24\cdot s2\cdot s4 & r34\cdot s3\cdot s4 & s4^2 & r45\cdot s4\cdot s5 \\ r15\cdot s1\cdot s5 & r25\cdot s2\cdot s5 & r35\cdot s3\cdot s5 & r45\cdot s4\cdot s5 & s5^2 \end{bmatrix}$$

$Inv := (VarCov)^{-1}$ $\quad bb := Inv_{0,0}$ $\quad bc := Inv_{0,1}$ $\quad bd := Inv_{0,2}$ $\quad be := Inv_{0,3}$ $\quad bf := Inv_{0,4}$

$cc := Inv_{1,1}$ $\quad cd := Inv_{1,2}$ $\quad ce := Inv_{1,3}$ $\quad cf := Inv_{1,4}$

$dd := Inv_{2,2}$ $\quad de := Inv_{2,3}$ $\quad df := Inv_{2,4}$

$ee := Inv_{3,3}$ $\quad ef := Inv_{3,4}$

$ff := Inv_{4,4}$

$$prova(\theta) := (b(\theta))^2\cdot bb + (c(\theta))^2\cdot cc + (d(\theta))^2\cdot dd + (e(\theta))^2\cdot ee + (f(\theta))^2\cdot ff + 2\cdot b(\theta)\cdot c(\theta)\cdot bc + 2\cdot b(\theta)\cdot d(\theta)\cdot bd + 2\cdot b(\theta)\cdot e(\theta)\cdot be + 2\cdot b(\theta)\cdot f(\theta)\cdot t$$

$$prod(\theta) := \frac{1}{G1(\theta)\cdot(1-G1(\theta))\cdot G2(\theta)\cdot(1-G2(\theta))\cdot G3(\theta)\cdot(1-G3(\theta))\cdot G4(\theta)\cdot(1-G4(\theta))\cdot(G5(\theta)\cdot(1-G5(\theta)))}$$

$$sum(\theta) := \frac{1}{v1}\cdot(\theta-m1)^2 + \frac{1}{v2}\cdot(\theta-m2)^2 + \frac{1}{v3}\cdot(\theta-m3)^2 + \frac{1}{v4}\cdot(\theta-m4)^2 + \frac{1}{v5}\cdot(\theta-m5)^2$$

$$verosim5(\theta) := prod(\theta)\cdot \exp\left[\frac{-1}{2}\cdot(prova(\theta) + sum(\theta))\right]$$

$$k5 := \int_{\theta m}^{\theta M} verosim5(\theta)\,d\theta$$

$$verosimk5(\theta) := \frac{verosim5(\theta)}{k5}$$

$$poster5(\theta) := verosimk5(\theta)\cdot hA(\theta)$$

$$kp5 := \int_{\theta m}^{\theta M} poster5(\theta)\,d\theta$$

$$posterk5(\theta) := \frac{poster5(\theta)}{kp5}$$

$integv5 := \int_{\theta m}^{\theta M} verosimk5(\theta)\,d\theta$ $\quad mv5 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot verosimk5(\theta)\,d\theta$ $\quad varv5 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mv5)^2\cdot verosimk5(\theta)\,d\theta$ $\quad sv5 := \sqrt{varv5}$

$integp5 := \int_{\theta m}^{\theta M} posterk5(\theta)\,d\theta$ $\quad mp5 := \int_{\theta m}^{\theta M} \theta\cdot posterk5(\theta)\,d\theta$ $\quad varp5 := \int_{\theta m}^{\theta M} (\theta - mp5)^2\cdot posterk5(\theta)\,d\theta$ $\quad sp5 := \sqrt{varp5}$

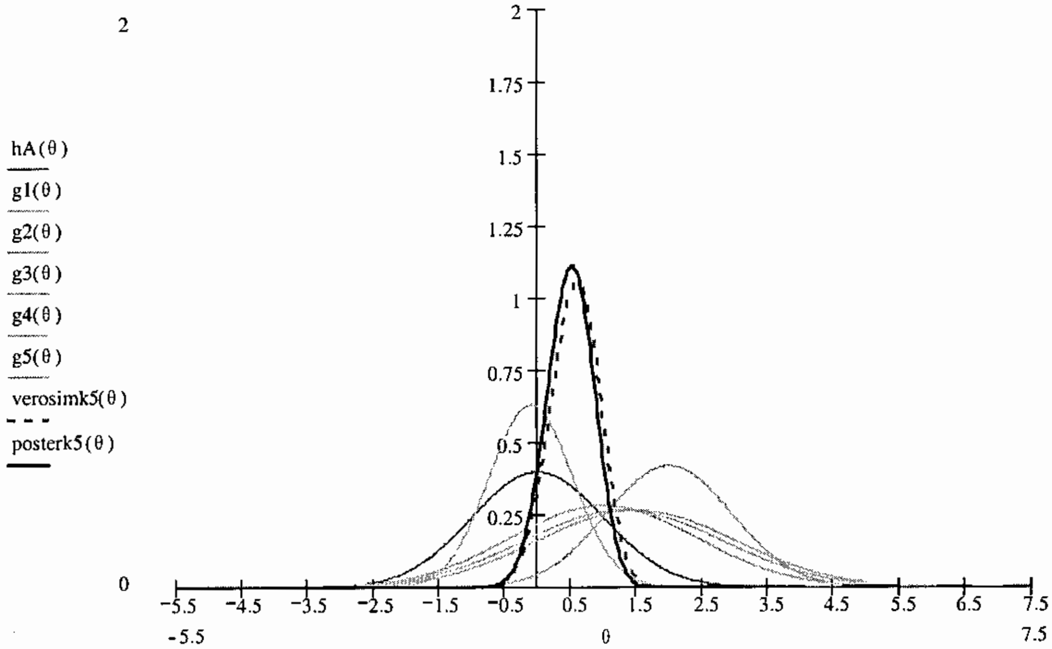
$\theta := 1.5$ $\quad mov5 := Maximize(verosim5, \theta)$ $\quad mop5 := Maximize(posterk5, \theta)$

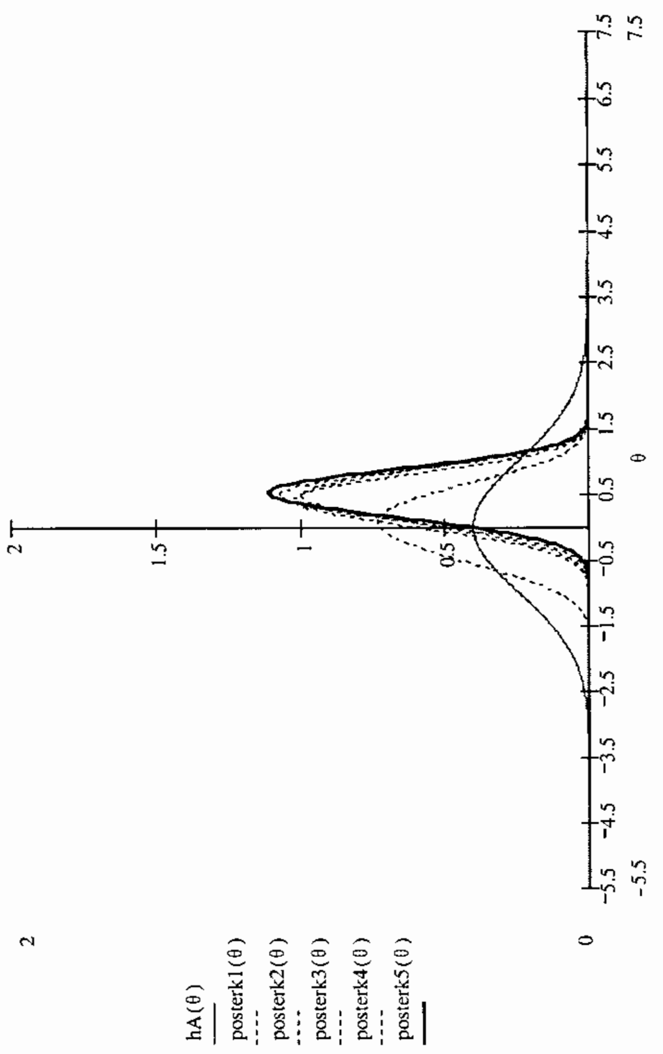
$\theta := mov5$ $\quad curv\_lnverosim5 := -\frac{d^2}{d\theta^2}\ln(verosim5(\theta))$

$\theta := \theta m, \theta m + \frac{19}{1000} .. \theta M$ $\quad kullback5 := \int_{\theta m}^{\theta M} posterk5(\theta)\cdot \ln\left(\frac{posterk5(\theta)}{hA(\theta)}\right) d\theta$ $\quad kullback5\_4 := \int_{\theta m}^{\theta M} posterk5(\theta)\cdot \ln\left(\frac{posterk5(\theta)}{posterk4(\theta)}\right) d\theta$

Risultati

integv5 = 1	integp5 = 1	
mov5 = 0.6	mop5 = 0.522	
mv5 = 0.565	mp5 = 0.498	
sv5 = 0.371	sp5 = 0.353	
varv5 = 0.138	varp5 = 0.125	
curv_lnverosim5 = 6.769	kullback5 = 0.728	kullback5_4 = $6.81 \cdot 10^{-3}$





3

Aggregazione simultanea: un programma in Excel

Adoperando il programma Mathcad, si è osservato – da un punto di vista prettamente computazionale – che la modifica del valore anche di un solo parametro comporta il ricalcolo di tutte le funzioni, e quindi un aggravio nei tempi di elaborazione di circa 40 –50 minuti.[1]

Di qui l'esigenza di creare un nuovo *software* per implementare il modello aggregativo, basato su un programma che – come *Microsoft Excel* – operi semplicemente per celle e con poche funzioni pre-

[1] Si pensi, ad esempio, che Mathcad ricalcola ogni volta gli integrali, ricontrollandoli poi uno ad uno con il metodo dei trapezi. Per simulazioni di problemi complessi come l'algoritmo aggregativo bayesiano-fiduciale per più di 2 esperti, ciò comporta l'aggravio di ore nei tempi di elaborazione.

impostate, in modo da poter definire ogni singola funzione manualmente e in modo personalizzato.

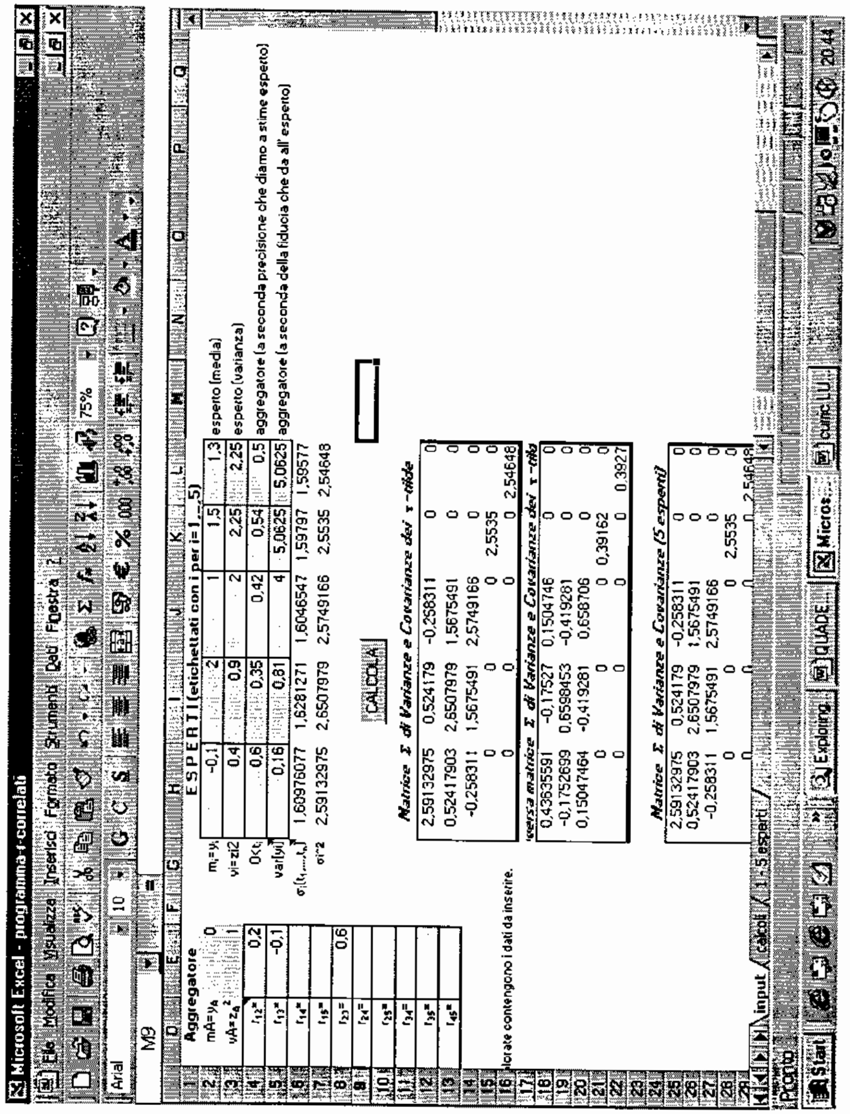
Un intenso lavoro di programmazione in *Excel* ha portato alla creazione di un *software* in grado di generare, nel giro di pochi secondi, risultati praticamente identici a quelli di Mathcad. Gli errori d'apporssimazione nei risultati, infatti, si sono rivelati inferiori a un centesimo e pertanto accettabilissimi.

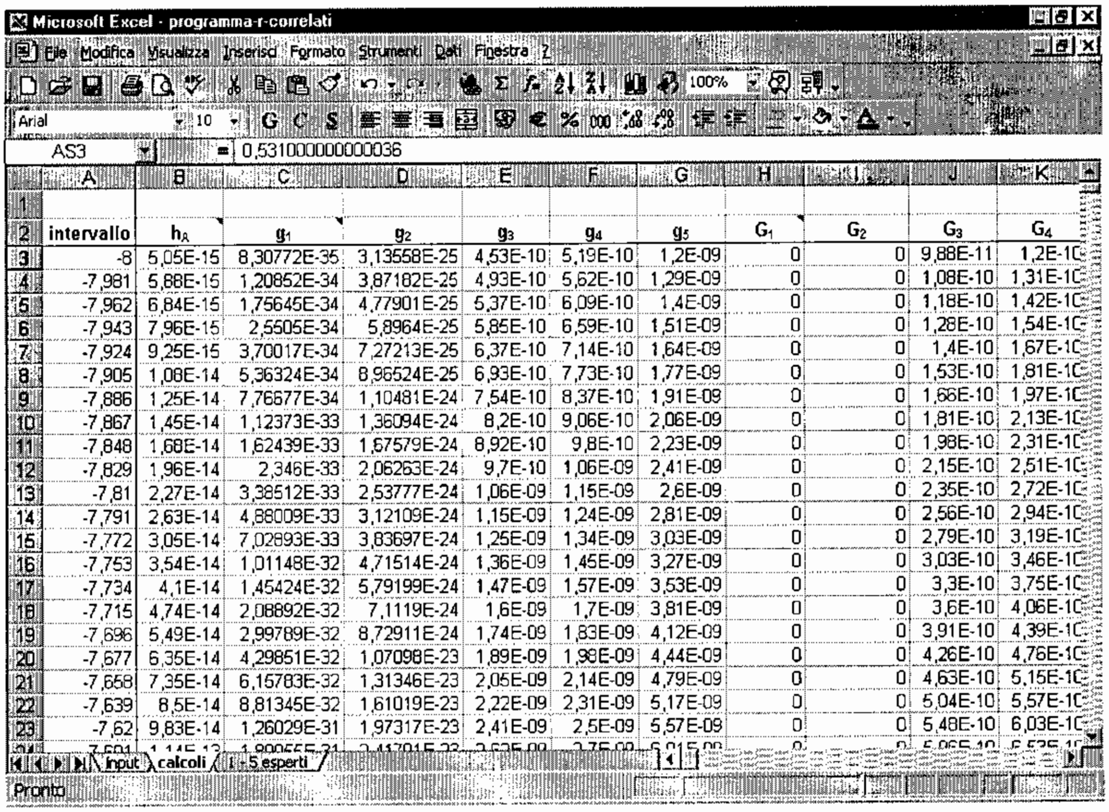
Le problematiche incontrate nella fase di programmazione, tuttavia, sono state notevoli. Si pensi ad esempio al calcolo integrale, che Excel non effettua: tale problema è stato superato attraverso l'approssimazione con somme di Riemann; o ancora, alle difficoltà riscontrate nel calcolo dei valori della funzione di verosimiglianza, o nel calcolo della moda della funzione di densità a posteriori: per ogni problema è stata individuata una soluzione ad hoc oppure si è ricorsi a *macro* in grado di effettuare tali calcoli.

Il software ottenuto si presenta a livello d'interfaccia utente come un semplice file di Excel, composto di tre fogli: input, calcoli e output.

La possibilità di comporre opinioni esperte con un semplice file di Excel consente oggi di sfruttare appieno, nei più diversi settori della ricerca, le potenzialità dei modelli aggregativi.

Di seguito si riportano alcune immagini del file Excel, per simulazioni fino ad un massimo di cinque esperti.

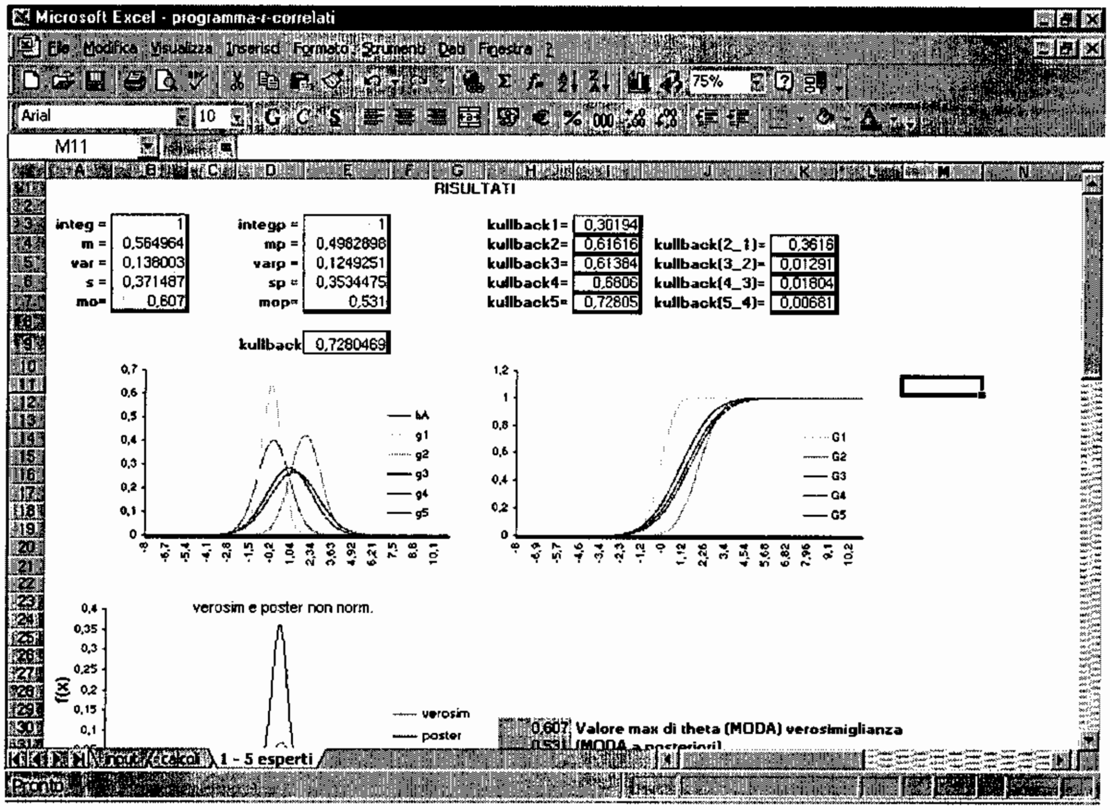



Microsoft Excel - programma-r-correlati

AS3 = 0,531000000000036

intervallo	h_A	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	G_1	G_2	G_3	G_4
-8	5,05E-15	8,30772E-35	3,13558E-25	4,53E-10	5,19E-10	1,2E-09	0	0	9,88E-11	1,2E-1
-7,981	5,88E-15	1,20852E-34	3,87182E-25	4,93E-10	5,62E-10	1,29E-09	0	0	1,08E-10	1,31E-1
-7,962	6,84E-15	1,75645E-34	4,77901E-25	5,37E-10	6,09E-10	1,4E-09	0	0	1,18E-10	1,42E-1
-7,943	7,96E-15	2,5505E-34	5,8964E-25	5,85E-10	6,59E-10	1,51E-09	0	0	1,28E-10	1,54E-1
-7,924	9,25E-15	3,70017E-34	7,27213E-25	6,37E-10	7,14E-10	1,64E-09	0	0	1,4E-10	1,67E-1
-7,905	1,08E-14	5,36324E-34	8,96524E-25	6,93E-10	7,73E-10	1,77E-09	0	0	1,53E-10	1,81E-1
-7,886	1,25E-14	7,76677E-34	1,10481E-24	7,54E-10	8,37E-10	1,91E-09	0	0	1,66E-10	1,97E-1
-7,867	1,45E-14	1,12373E-33	1,36094E-24	8,2E-10	9,06E-10	2,06E-09	0	0	1,81E-10	2,13E-1
-7,848	1,68E-14	1,62439E-33	1,67579E-24	8,92E-10	9,8E-10	2,23E-09	0	0	1,98E-10	2,31E-1
-7,829	1,96E-14	2,346E-33	2,06263E-24	9,7E-10	1,06E-09	2,41E-09	0	0	2,15E-10	2,51E-1
-7,81	2,27E-14	3,38512E-33	2,53777E-24	1,06E-09	1,15E-09	2,6E-09	0	0	2,35E-10	2,72E-1
-7,791	2,63E-14	4,88009E-33	3,12109E-24	1,15E-09	1,24E-09	2,81E-09	0	0	2,56E-10	2,94E-1
-7,772	3,05E-14	7,02893E-33	3,83697E-24	1,25E-09	1,34E-09	3,03E-09	0	0	2,79E-10	3,19E-1
-7,753	3,54E-14	1,01148E-32	4,71514E-24	1,36E-09	1,45E-09	3,27E-09	0	0	3,03E-10	3,46E-1
-7,734	4,1E-14	1,45424E-32	5,79199E-24	1,47E-09	1,57E-09	3,53E-09	0	0	3,3E-10	3,75E-1
-7,715	4,74E-14	2,08892E-32	7,1119E-24	1,6E-09	1,7E-09	3,81E-09	0	0	3,6E-10	4,06E-1
-7,696	5,49E-14	2,99789E-32	8,72911E-24	1,74E-09	1,83E-09	4,12E-09	0	0	3,91E-10	4,39E-1
-7,677	6,35E-14	4,29851E-32	1,07098E-23	1,89E-09	1,98E-09	4,44E-09	0	0	4,26E-10	4,76E-1
-7,658	7,35E-14	6,15783E-32	1,31346E-23	2,05E-09	2,14E-09	4,79E-09	0	0	4,63E-10	5,15E-1
-7,639	8,5E-14	8,81345E-32	1,61019E-23	2,22E-09	2,31E-09	5,17E-09	0	0	5,04E-10	5,57E-1
-7,62	9,83E-14	1,26029E-31	1,97317E-23	2,41E-09	2,5E-09	5,57E-09	0	0	5,48E-10	6,03E-1

input | calcoli | 1 - 5 esperti



4

Aggregazione sequenziale: un programma in Mathematica

Sebbene la semplicità e l'efficienza del *software* in *Excel* sia fondamentale a livello simulativo, la precisione nei risultati raggiungibile attraverso il *software* di Mathcad è rilevante ovunque sia necessario un buon grado di precisione nei risultati.

La complessità dei calcoli richiesti in un modello aggregativo sequenziale ha tuttavia costretto a volgere l'attenzione a un programma come *Mathematica*, caratterizzato non solo da un ottimo grado di precisione nei calcoli, ma anche di un'elevatissima potenza di calcolo: certo, la programmazione è poco immediata, facendo riferimento ad una procedura non ad oggetti.

Il problema aggregativo sequenziale può essere così schematizzato.

Con l'obiettivo di accrescere il proprio patrimonio conoscitivo, in modo da ridurre l'incertezza personale su una grandezza aleatoria θ, un soggetto A interpella *sequenzialmente* esperti del fenomeno, ognuno dei quali fornisce una propria personale densità $g(\cdot)$ su θ, univocamente identificata da un parametro di locazione e da un parametro di scala.

Nell'impostazione sequenziale, a ogni stadio j del processo sequenziale il soggetto A si trova a dover scegliere se terminare l'acquisizione di informazioni o procedere all'osservazione di un $(j+1)$-esimo risultato sperimentale.Scegliere di acquisire un $(j+1)$-esimo risultato sperimentale comporta per A l'ulteriore scelta dell'esperto da interpellare tra quelli non ancora consultati.

La definizione di criteri di stop e di selezione dell'esperto da consultare a ogni stadio discende dalla definizione di un'appropriata misura della quantità d'informazione rilevante su θ portata dalle risposte degli esperti. La misura scelta è la divergenza di Kullback-Leibler tra densità a posteriori di due stadi contigui, che quantifica l'apporto informativo del j-esimo risultato sperimentale misurando il cambiamento da questo prodotto sulla densità a posteriori ottenuta allo stadio precedente. Il processo sequenziale ha termine allo stadio j^* tale che, per ogni esperto Q non ancora consultato l'incremento atteso della quantità d'informazione derivante dall'osservazione (j^*+1)-esima è non superiore a un valore α prefissato.

Di seguito si riporta il programma in Mathematica, che prevede la risoluzione di tale problema per un numero qualunque di esperti.


```
(* Programma per il calcolo delle Kullback attese condizionate di un numero qualunque di esperti*)
(* Il PROGRAMMA AUTOMATICO SI ARRESTA SE NESSUN ESPERTO DA' UN INCREMENTO
  DI KULLBACK ATTESA CONDIZIONATA, SUPERIORE AD UN CERTO VALORE ALFA PREFISSATO *)

<<Statistics`NormalDistribution`;

PDF[NormalDistribution[mu_, sigma_], x_] :=
  1/(sigma*Sqrt[2 Pi]) Exp[-((x-mu)/sigma)^2 / 2];

CDF[NormalDistribution[mu_, sigma_], x_] :=
  (Erf[(x-mu)/(Sqrt[2] sigma)] + 1) / 2;

(*  Dati iniziali da inserire. Nell'ordine vanno inseriti:
    le medie degli esperti, le varianze, i valori di ti, le stime delle varianze
   - ottenute dal foglio excel -    *)

Datainiz = {{2, -0.1, 1, 1.5, 1.3}, {0.9, 0.4, 2, 2.25, 1.8},
  {0.35, 0.6, 0.42, 0.54, 0.5}, {3.92711, 4.85874, 1.80244, 1.10967, 1.65050}};

(*  Mentre R è la matrice di correlazione: nell'orinde avremo il primo vettore riga
    dato da r11 (correl del 1° esp con se stesso),
    r12 (eventuale correl tra 1° e 2° esperto), ecc..   *)

R = {{1, 0.2, -0.1, 0, 0},
  {0.2, 1, -0.6, 0.3, 0.1}, {-0.1, -0.6, 1, 0, 0}, {0, 0.3, 0, 1, 0}, {0, 0.1, 0, 0, 1}};

(*  inserire alfa, ossia il limite inferiore di incremento della Kullback,
    al di sotto del quale non conviene più considerare altri esperti,
    poi inserire media e varianza dell'aggregatore, theta-min e theta-max, e il numero di esperti
    *)
 alfa = 1.4;
 v0 = 1; m0 = 0;
 mmin = -8; mmax = 11; livmax = 5;
```

```
(*  posizioni iniziali  *)

 numespert = Dimensions[Datainiz][[2]];
  espert = Table[k, {k, numespert}];

Matdata = Transpose[Join[{{esp, m, v, t, s2}}, Transpose[Join[{espert}, Datainiz]]]];
{rin, sin} = Dimensions[Matdata];

 M = Datainiz[[1]]; V = Datainiz[[2]];
 T = Datainiz[[3]]; S = Datainiz[[4]];
Cova = Table[Sqrt[ S[[i]] * S[[j]] ] * R[[i, j]], {i, numespert}, {j, numespert}];

succmax = Table[0, {i, livmax}];
succ[n_] := Table[succmax[[j]], {j, n - 1}];
succpiu[n_, k_] := Join[succ[n], {k}];
mattV[n_] := Table[V[[succpiu[n, k]]], {k, numespert}];
mattT[n_] := Table[T[[succpiu[n, k]]], {k, numespert}];
mattM[n_] := Table[M[[succpiu[n, k]]], {k, numespert}];
mattS[n_] := Table[S[[succpiu[n, k]]], {k, numespert}];
mattCova[n_] := Table[Cova[[succpiu[n, k], succpiu[n, k]]], {k, numespert}];
Covamin[n_] := Table[Cova[[succ[n], succ[n]]]];
succH = Table[0, {i, livmax}];

g[x_, i_] := PDF[NormalDistribution[0, Sqrt[mattV[n][[k]][[i]]]], x]

G[x_, i_] := CDF[NormalDistribution[0, Sqrt[mattV[n][[k]][[i]]]], x]

g0[x_] := PDF[NormalDistribution[m0, Sqrt[v0]], x]

MatrixForm[Matdata]
```


esp	1	2	3	4	5
m	2	-0.1`	1	1.5`	1.30000000000000004`
v	0.9`	0.4`	2	2.25`	1.8`
t	0.35`	0.6`	0.420000000000000017`	0.540000000000000035`	0.5`
s2	3.92710999999999987`	4.85874000000000005`	1.80243999999999999`	1.10966999999999993`	1.65050000000000007`

```
(*  Programma per il calcolo del vettore Kullback al
  primo passo *)

Attesa1 := (n = 1;  Print["livello", "  ", n];
 Kull = Table[0, {k, numespert}];
 For[k = 1, k <= numespert, k++, Kull[[k]] =
  NIntegrate[(F1[m] - H1[m] * Log[H1[m]]) / K1[m], {m, -5, 8}] /
        NIntegrate[H1[m] / K1[m], {m, -5, 8}];
  Print[Kull[[k]] ];
  ];
 MatKull = Join[Matdata, {Join[{K}, Kull]}];
 max = Position[Kull, Max[Kull]][[1, 1]]; k = max; H11 = H1[M[[max]]];
 succmax[[1]] = max; succH[[1]] = H11;
 Return[MatrixForm[MatKull]]
 )
```

```
verosiml[x_, m_] := Block[{G1x, g0x, B1x, cx, gaux, fattx},

  G1x = CDF[NormalDistribution[0, Sqrt[V[[k]]]], x];
  g0x = PDF[NormalDistribution[m0, Sqrt[v0]], x];
  B1x = (G1x + 10^-20) / (1 - G1x + 10^-20) * (1 - T[[k]]) / T[[k]];
  cx = Log[B1x];

  gaux =  Exp[-1 / 2 * (1 / S[[k]] * cx^2 + 1 / V[[k]] * x^2)];
  fattx = 1 / (( G1x + 10^-20) (1 - G1x + 10^-20));
  veroK1 = gaux * fattx;
  veroH1 = veroK1 * g0x * Exp[-1 / 2 * m^2 * 1 / v0 - ((x - m0) / v0) * m];
  veroF1 = veroH1 * Log[veroK1];

  Return[{veroK1, veroH1, veroF1}]
    ]
K1[m_] := NIntegrate[verosiml[x, m][[1]], {x, mmin - m, mmax - m}]
H1[m_] := NIntegrate[verosiml[x, m][[2]],
     {x, mmin - m, mmax - m}]
 F1[m_] := NIntegrate[verosiml[x, m][[3]], {x, mmin - m, mmax - m}]
```



```
(*  programma per il calcolo del vettore Kullback al generico passo " liv "   *)

AttesaKull[liv_] := (n = Rationalize[liv]; Print["livello", "   ", n];
  rig = Dimensions[MatKull][[1]];
If[rin + n - rig > 1, Print["livello precedente non eseguito"]; Break[]];
rignum = Delete[MatKull[[rig]], 1];
max = Position[rignum, Max[rignum]][[1, 1]];
  If[n == 2, Hprec = H11,
k = max; n = n - 1;  matrainv = Inverse[mattCova[n][[k]] ];
     Cov = Inverse[Covamin[n]];
   Hprec = H[M[[max]], n] ; succmax[[n]] = max; succH[[n]] = Hprec; n = n + 1];
 kulback = Table[0, {k, numespert}];
 For[k = 1, k <= numespert, k++, If[Abs[Det[mattCova[n][[k]]]] > 10^-6,
     matrainv = Inverse[mattCova[n][[k]] ];
     Cov = Inverse[Covamin[n]];

  den = NIntegrate[H[m, n] / K[m, n], {m, -5, 8}];
  num =   NIntegrate[F[m, n] * H[m, n] / K[m, n], {m, -5, 8}];
  kulback[[k]] = num / den;
   ]; Print[ kulback[[k]] ];
   MatKull = Join[MatKull, {Join[{K}, kulback]}];

  Return[MatrixForm[MatKull]]
  )
```

```
verosim[x_, m_, liv_] := (

  vetG = Join[Table[G[x + m - mattM[n][[k]][[i]], i], {i, n - 1}], {G[x, n]}];
  vetg = Join[Table[g[x - mattM[n][[k]][[i]], i], {i, n - 1}], {g[x, n]}];
  vetB = Table[(vetG[[i]] + 10^-20) / (1 - vetG[[i]] + 10^-20) *
     (1 - mattT[n][[k]][[i]]) / mattT[n][[k]][[i]], {i, n}];
  vetC = Log[vetB];
  forma = -1 / 2 * vetC . matrainv . vetC;
  espo = forma -
    Sum[(m^2 / 2 * 1 / mattV[n][[k]][[i]] + m * (x - mattM[n][[k]][[i]]) / mattV[n][[k]][[i]]), {i, n - 1}];
  fatt = Product[vetg[[i]] / ((vetG[[i]] + 10^-20) * (1 - vetG[[i]] + 10^-20)), {i, n}];
  verosimK = Exp[espo] * fatt;
  verosimH = verosimK * Exp[-1 / 2 * m^2 * 1 / v0 - m * (x - m0) / v0] * g0[x];
    vetridC = Delete[vetC, n];

  espogam = forma + 1 / 2 * vetridC . Cov . vetridC;
    Gam = vetg[[n]] / ((vetG[[n]] + 10^-20) * (1 - vetG[[n]] + 10^-20)) * Exp[espogam];
     Return[{verosimK, verosimH, Gam}]
  )
```



```
H[m_, n_] := NIntegrate[verosim[x, m, n][[2]], {x, mmin - m, mmax - m}]
K[m_, n_] := NIntegrate[verosim[x, m, n][[1]], {x, mmin - m, mmax - m}]
F[m_, n_] := (
  Hm = H[m, n]; Fliv = 1 / Hm *
  NIntegrate[verosim[x, m, n][[2]] * Log[verosim[x, m, n][[3]]], {x, mmin - m, mmax - m}] -
    Log[Hm / succH[[n - 1]] ] ; Return[Fliv]
 )

Kullmax[livel_] := (Attesa1;
  massi = {Position[Kull, Max[Kull]][[1, 1]], Max[Kull]};
  MaxKull = massi;
  Print["Kmax :", massi];
  For[n = 2, n <= livel, n++, AttesaKull[n] ;
  massi = {Position[kulback, Max[kulback]][[1, 1]], Max[kulback]};
  Print["valore di alfa :", alfa]; Print["Kmax ", massi];
    If[massi[[2]] - Max[Kull] < alfa, Break[], MaxKull = massi];
  ]; passa = n - 1;
  Return[{MatrixForm[MatKull], passa, MaxKull}]
  )
```

```
Kullmax[livmax]

livello  1
0.34379040678391477`
0.522441752588167851`
0.303349679192836418`
0.378548090343905929`
0.344515889385194107`
Kmax :{2, 0.522441752588167851`}

livello  2
1.59970141189844827`
0
1.88082104002129586`
1.58912108985512716`
1.58135024392632272`
valore di alfa :1.39999999999999991`
Kmax {3, 1.88082104002129586`}
```


esp	1	2	3	4	5
m	2	-0.1`	1	1.5`	1.30000000000000004`
v	0.9`	0.4`	2	2.25`	1.8`
t	0.35`	0.6`	0.420000000000000017`	0.540000000000000035`	0.5`
s2	3.92710999999999987`	4.85874000000000005`	1.80243999999999999`	1.10966999999999993`	1.65050000000000007`
K	0.34379040678391477`	0.522441752588167851`	0.303349679192836418`	0.378548090343905929`	0.344515889385194107`
K	1.59970141189844827`	0	1.88082104002129586`	1.58912108985512716`	1.58135024392632272`

```
,{2, 0.522441752588167851`}}
  (*  FINE  *)
```

5

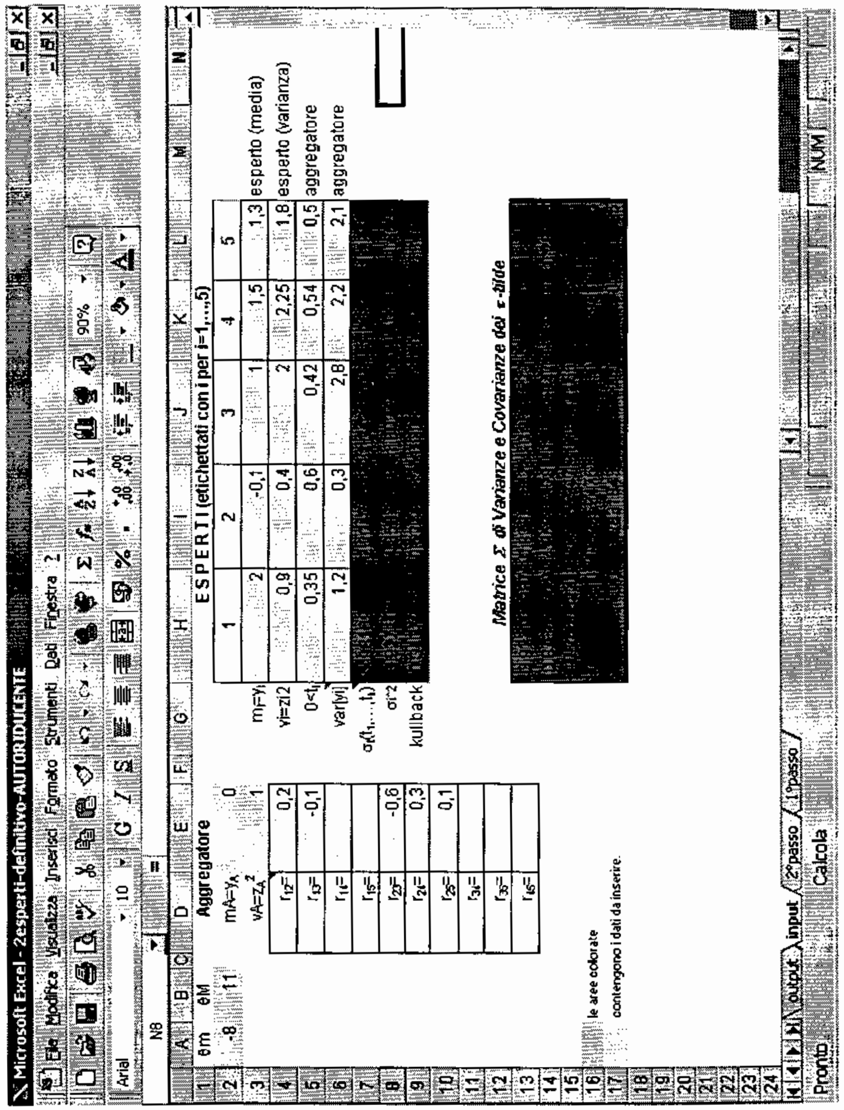
Aggregazione sequenziale: un programma in Excel

Al crescere del numero degli esperti consultati, il programma in *Mathematica* che implementa l'algoritmo sequenziale (cap. 4) presenta un notevole aggravio nei tempi di elaborazione, addirittura di ore.

Si è pensato, pertanto, di tentare una soluzione in *Excel*: tuttavia, data la complessità nei calcoli, *Excel* riesce a risolvere velocemente il problema soltanto per i primi due esperti da introdurre nel modello, ossia seleziona l'esperto che, tra i cinque considerati, presenta la maggiore Kullback attesa; entrato questo nel modello, il programma passa al secondo stadio, individuando l'esperto che offre il maggior incremento di Kullback attesa rispetto alla densità a posteriori ottenuta dopo la consultazione effettuata al primo stadio.

L'elaborazione richiede pochi minuti, ma non è stato possibile, purtroppo, andare oltre il secondo stadio: il programma può essere adoperato per effettuare pre-simulazioni e per la scelta dei dati da inserire nel modello completo.

Il programma si presenta come un semplice file di *Excel*, composto da quattro fogli di calcolo: input, 1° passo, 2° passo e output.



Microsoft Excel - 2esperti-definitivo

PASSO 1 - 2 - Output

Ordinamento esperti al ***passo 1*** *(ingresso primo esperto)*

	2	**4**	**5**	**1**	**3**	sequenza di entrata degli esperti
$m_i = y_i$	-0,1	1,5	1,3	2	1	esperto (media)
vi=zi2	0,4	2,25	1,8	0,9	2	esperto (varianza)
$0<t_i$	0,6	0,54	0,5	0,35	0,42	aggregatore (a seconda precisione che da a stime esperto)
var[yi]	0,3	2,2	2,1	1,2	2,8	aggregatore (a seconda della fiducia che da all' esperto)
$\sigma_i(t_1,\dots,t_n)$	2,20425572	1,053408865	1,284716197	1,981693	1,34255	
σi^2	4,858743277	1,109670236	1,650495706	3,927108	1,802442	
Kullback	**0,522444818**	0,376579638	0,344533814	0,343796	0,303358	
Correl.ord.		0,3	0,1	0,2	-0,6	
Kullback secondo passo		1,592941961	1,584597053	1,602494	1,882904	

Valori

Matrici di correlazione 2X2		Matrici inverse	
4,858743277	0,696594754	0,226169821	-0,14198
0,696594754	1,109670236	-0,14197796	0,990295
4,858743277	0,283184302	0,207893472	-0,03567

output / input / 2°passo / 1°passo

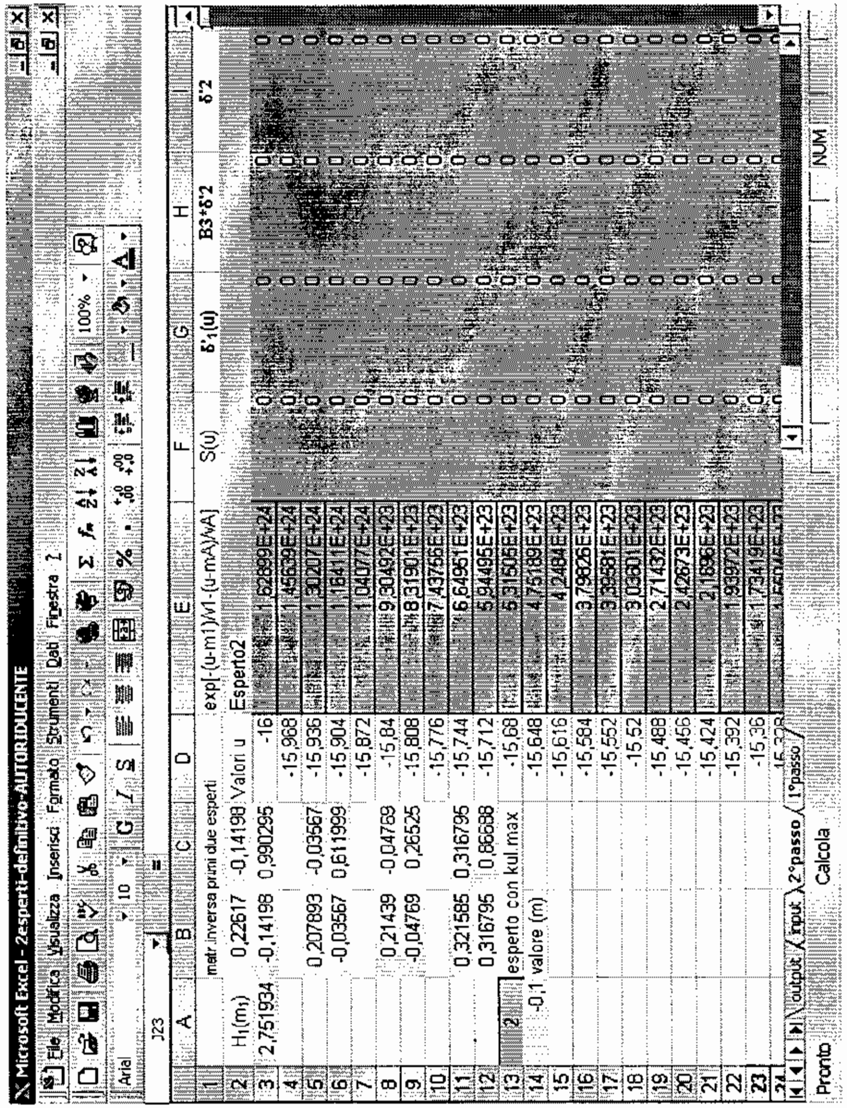
Pronto Calcola

Microsoft Excel - 2esperti-definitivo-AUTORIDUCENTE

m min	*m* max								
-5	8		**Valori u**	$h_A(u)$	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	g'_5
		-5	-16	1,026E-56	7,20216E-63	6,69E-140	4,52427E-29	5,22743E-26	3,89144E-32
		-4,987	-15,968	1,711E-56	1,2714E-62	2,4E-139	5,84274E-29	6,56169E-26	5,17035E-32
		-4,974	-15,936	2,851E-56	2,24184E-62	8,61E-139	7,54158E-29	8,23276E-26	6,86565E-32
		-4,961	-15,904	4,746E-56	3,94852E-62	3,08E-138	9,72939E-29	1,03247E-25	9,11165E-32
		-4,948	-15,872	7,89E-56	6,94657E-62	1,1E-137	1,25455E-28	1,29423E-25	1,20855E-31
		-4,935	-15,84	1,311E-55	1,22071E-61	3,9E-137	1,61683E-28	1,62162E-25	1,60209E-31
		-4,922	-15,808	2,175E-55	2,14269E-61	1,38E-136	2,08268E-28	2,03089E-25	2,12256E-31
		-4,909	-15,776	3,604E-55	3,75676E-61	4,89E-136	2,68137E-28	2,54231E-25	2,81052E-31
		-4,896	-15,744	5,968E-55	6,57919E-61	1,73E-135	3,45039E-28	3,18106E-25	3,71934E-31
		-4,883	-15,712	9,873E-55	1,1509E-60	6,08E-135	4,43769E-28	3,97849E-25	4,91924E-31
		-4,87	-15,68	1,631E-54	2,01099E-60	2,13E-134	5,70459E-28	4,97355E-25	6,50255E-31
		-4,857	-15,648	2,693E-54	3,50983E-60	7,47E-134	7,32941E-28	6,21466E-25	8,59058E-31
		-4,844	-15,616	4,441E-54	6,11884E-60	2,61E-133	9,4122E-28	7,76195E-25	1,13426E-30
		-4,831	-15,584	7,316E-54	1,06551E-59	9,09E-133	1,20807E-27	9,69006E-25	1,49678E-30
		-4,818	-15,552	1,204E-53	1,85333E-59	3,16E-132	1,54977E-27	1,20916E-24	1,97404E-30
		-4,805	-15,52	1,98E-53	3,21997E-59	1,09E-131	1,98712E-27	1,50815E-24	2,60199E-30
		-4,792	-15,488	3,251E-53	5,58803E-59	3,78E-131	2,54658E-27	1,88021E-24	3,42775E-30
		-4,779	-15,456	5,334E-53	9,68659E-59	1,3E-130	3,26187E-27	2,343E-24	4,51299E-30
		-4,766	-15,424	8,742E-53	1,67722E-58	4,48E-130	4,17595E-27	2,91836E-24	5,93846E-30
		-4,753	-15,392	1,431E-52	2,90077E-58	1,54E-129	5,34344E-27	3,63336E-24	7,80973E-30
		-4,74	-15,36	2,341E-52	5,01121E-58	5,26E-129	6,83383E-27	4,52148E-24	
		-4,727	-15,328	3,826E-52	8,64725E-58	1,8E-128	8,73545E-27	5,62412E-24	

output / input / 2°passo / 1°passo

Pronto Calcola NUM



Riferimenti bibliografici

P. Agati (2001), *Combining information from several experts*, Book of Short Papers, CLADAG2001, Palermo, pp. 129-132.

P. Monari, P. Agati (2001), *Fiducial inference in combining expert judgements*, Journal of the Italian Statistical Society (accettato per la pubblicazione, in corso di stampa).

P. Monari, L. Stracqualursi (2001), *La calibrazione fiduciale nel problema degli esperti: una proposta di stima delle varianze degli indicatori di performance*, Statistica, n.3

P. A. Morris (1977), *Combining expert judgments: a bayesian approach*, Management Science, 23, pp. 679-693