UNIVERZA V MARIBORU
EKONOMSKO-POSLOVNA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

POMEN DIVERZIFIKACIJE NALOŽB ZA DONOSNOST PORTFELJA
FINANČNEGA POSREDNIKA

Kandidat: Tomaž Lampelj
Študent izrednega študija
Številka indeksa: 82154033
Program: univerzitetni
Študijska smer: denarništvo in finance
Mentor: dr. Dušan Zbašnik, izr.prof.

Ljubljana, september 2004

UNIVERZA V MARIBORU
Ekonomsko-poslovna fakulteta

IZJAVA

Kandidat Tomaž Lampelj,
absolvent študijske smeri: DENARNIŠTVO IN FINANCE, študijski program: UNIVERZITETNI
izjavljam, da sem avtor tega diplomskega dela, ki sem ga napisal

pod mentorstvom dr. Dušana Zbašnika in uspešno zagovarjal 15.10.2004.

Zagotavljam, da je besedilo diplomskega dela v tiskani in elektronski obliki istovetno in brez virusov. Ekonomsko-poslovni fakulteti dovolim objavo diplomskega dela v elektronski obliki na spletnih straneh knjižnice. Hkrati dovoljujem, da ga lahko bralci uporabijo za svoje izobraževalne in raziskovalne namene s povzemanjem posameznih misli, idej, konceptov oziroma delov teksta iz diplomskega dela ob upoštevanju avtorstva in korektnem citiranju.

V Ljubljani, dne 15.10.2004 Podpis:__________________________________

PREDGOVOR

Diverzifikacija je osnovni princip zavarovanja proti tveganju in investitorji so ta princip intuitivno uporabljali že dolgo časa preden je Markowitz leta 1952 predlagal formalni opis v modelu sredina-varianca.

Vsak model je seveda samo približni opis stvarnosti in ima svoje omejitve in pomanjkljivosti, ki so jih ostali raziskovalci poskušali odpraviti v novih modelih. Modele delimo v statične in dinamične; posebno slednji zahtevajo poglobljeno znanje matematike in statistike, zato so v tem delu opisani osnovni, enostavnejši modeli.

Model sredina-varianca, ki ga je razvil Harry Markowitz leta 1952, je bil prvi model, ki je formalno opisal neločljivo dvojico donos- tveganje; pričakovani donos tveganega vrednostnega papirja je izrazil s povprečno vrednostjo pričakovanega donosa, tveganje donosa pa je izrazil z varianco (standardnim odklonom). Princip diverzifikacije naložb je postal jasen – kovariance oziroma korelacijski koeficienti med donosi vplivajo na donos in tveganje portfelja. Model sredina-varianca se ni prijel med praktiki zaradi zahtevnega računanja kovarianc – računalniki so bili namreč leta 1952 zelo redki in dragi.

William Sharpe je leta 1963 na Markowitzov predlog razvil poenostavljen enofaktorski model, naslednje leto pa je predstavil Capital Asset Pricing - CAPM, s katerim je moč določiti ravnotežni donos vrednostnega papirja glede na njegovo tveganje. Investitorji so tako dobili pomembno orodje za presojanje investicij. Pomembna postavka je tudi pojem tržnega portfelja, ki je po modelu najbolj učinkovit tvegan portfelj in je za vse investitorje enak – v ravnotežju je seštevek vseh posameznih kapitalskih vrednosti tveganih vrednostnih papirjev.

Nerealne predpostavke CAMP so bile vzrok za nastanek Arbitrage Pricing Theory - ATP, ki jo je leta 1976 razvil Stephen Ross. Model ima osnovo v večfaktorskih modelih in predvideva, da za ravnotežje cen skrbi možnost (tvegane) arbitraže – dva portfelja, ki imata popolnoma enako občutljivost na tveganje morata imeti tudi popolnoma enaki pričakovani donos, kajti drugače lahko pride od arbitraže. Seveda ima model tudi svoje slabosti, predvsem to, da ne določa faktorjev, ki vplivajo na ravnotežni donos vrednostnega papirja.

Obravnavani modeli so bili razviti za upravljanje s portfeljem, omejenim na eno državo. Portfelj pa lahko sestavimo iz tudi iz tujih vrednostnih papirjev – govorimo o mednarodni diverzifikaciji, kjer pa se srečamo z dodatnima tveganjema: politično tveganje in tveganje deviznih tečajev. Poleg tega je potrebno preseči težave glede različnih kultur, jezika, drugačnih zakonov in regulative, večje stroške – toda vseeno je priporočljivo v analizi upoštevati tudi tuje vrednostne papirje, kajti možno je doseči res globalno učinkovite portfelje. Pri analizi se srečamo s problemom izbire pravega modela – model sredina-varianca se izkaže za uporabnega, APT že v osnovi upošteva več faktorjev, problem nastopi pri CAPM in enofaktorskih modelih, ki pa jih moramo razširiti z dodatnimi faktorji.

KAZALO

1 UVOD

1.1 Opredelitev oziroma opis problema

Osebnostne lastnosti finančnega posrednika oblikujejo slog trgovanja na trgu vrednostnih papirjev. Kot špekulant neprestano išče podcenjene delnice, s pomočjo tehnične analize spremlja gibanje trga in išče signale, ki naj bi najavili bodisi padec bodisi dvig cene vrednostnega papirja. Lahko pa kot investitor poskuša sestaviti tak portfelj, ki bo na dolgi rok prinesel dobiček, seveda z ustreznim upravljanjem tveganja. Diverzifikacija naložb je morda ena od najbolj učinkovitih metod upravljanja tveganja.
Sama metoda je sicer bila potrjena v praksi (naivna diverzifikacija), ni pa imela matematične podlage - vse do leta 1952, ko je Harry M. Markowitz v matematičnem modelu povezal prihodnje (pričakovane) donose in tveganje, ki ga je kvantificiral ter matematično opisal pomen kovariance med naložbenimi spremenljivkami. S tem modelom je pokazal, da je možno z diverzifikacijo zmanjšati tveganje portfelja.

Vsak model je seveda samo približni opis stvarnosti in ima svoje omejitve in pomanjkljivosti, ki jih ostali raziskovalci poskušajo odpraviti v novih modelih.

V diplomskem delu se bom lotil tudi mednarodne diverzifikacije in njen pomen na donosnost portfelja.

Diplomska naloga bo razdeljena na tri dele. V prvem delu bom opisal zgodovino razvoja modelov in osnovne pojme, ki so pomembni za razumevanje tematike. V drugem delu bom teoretično opisal nekatere modele, ki jih lahko razdelimo v ravnotežne in neravnotežne. V tretjem delu bom opisal mednarodno diverzifikacijo in modele, ki jih pri tem uporabljamo.

1.2 Namen, cilji in trditve (teze) diplomskega dela

1.2.1 Namen

Namen diplomskega dela je prikazati diverzifikacijo kot metodo upravljanja tveganja in njen pomen na donosnost portfelja finančnega posrednika. To bom storil z opisom različnih finančnih modelov, tako modelov, ki opisujejo diverzifikacijo na domačih trgih kakor tudi modelov, ki obravnavajo mednarodno diverzifikacijo.

1.2.2 Cilji

V diplomski nalogi bom opisal različne finančne modele, ki opisujejo diverzifikacijo. Omejil sem bom na statične modele, pri vsakem bom opisal njegove prednosti in slabosti. Ne bom se lotil matematičnega dokazovanja o pravilnosti ali nepravilnosti posameznega modela.

1.2.3 Trditve

Diverzifikacija tveganih vrednostnih papirjev omogoča izgradnjo portfelja, ki ima lahko manjše tveganje kot posamezni vrednostni papirji. S povečevanjem števila različnih vrednostnih papirjev lahko nesistematično tveganje občutno zmanjšamo. Z investiranjem na tujih trgih pa lahko tveganje še dodatno zmanjšamo.

1.3 Predpostavke in omejitve raziskave

Vrednostne papirje bom omejil na delnice in obveznice, ter ne bom uporabljal izvedenih finančnih instrumentov.

1.4 Predvidene metode raziskovanja

V diplomski nalogi bom kot vrsto ekonomske raziskave uporabil poslovno raziskavo. Gre za raziskavo pomena diverzifikacije na donosnost portfelja investitorja.
Pri raziskavi predvidenih in dejanskih rezultatov finančnih modelov bom uporabil statično metodo; na začetku investicije bom skozi izbrani model izračunal predvideni rezultat in ga po koncu investicijskega obdobja primerjal z dejanskim rezultatom.

Pri metodi raziskovanja bom uporabil deskriptivni pristop.
S pomočjo tuje in domače literature bom opisal posamezne finančne modele in pomen diverzifikacije skozi obravnavani model. Pri primerjanju modelov bom uporabil komparativno metodo, kjer bom primerjal posamezne predpostavke in omejitve modelov.
Finančni modeli niso nastali istočasno; pomanjkljivosti ali nedorečenosti nekega modela so bile vzrok za nastanek novega. Zgodovinsko metodo bom uporabil za časovni prikaz raziskav in člankov, ki so vodili do nastanka določenega modela.

2 ZGODOVINA RAZVOJA MODELOV

1738 Daniel Bernoulli v eseju "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis" predlaga rešitev St. Petersburškega paradoxa – uvede pojem koristnost ter z njo povezano funkcijo koristnosti, kar se šteje za začetke teorije koristnosti

1921 Frank H. Knight definira tveganje in negotovost.

1929 se zgodi zlom trga vrednostnih papirjev. Obvladovanje tveganja pritegne večjo pozornost raziskovalcev.

1944 John von Neumann in Oskar Morgenstern v knjigi *Theory of Games and Economic* teoretično (z aksiomi) izrazita Bernoullijevo delo, ter tako razvijeta teorijo pričakovanih koristnosti – osnovo teorij odločanja v pogojih negotovosti.

1952 Harry M. Markowitz v članku "Portfolio Selection" opiše model sredina-varianca in matematično prikaže pomen diverzifikacije na donos portfelja. Definira učinkovito mejo portfelja, sestavljenega iz tveganih vrednostnih papirjev.

1958 James Tobin v članku "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk" analizira likvidnostno preferenco kot vedenje v pogojih tveganja. Za analizo vzame model sredina-varianca, kjer prikaže kombinacijo tveganih sredstev (vrednostnih papirjev) in netveganih sredstev (denarja). Netvegana sredstva nato razširi na netvegane vrednostne papirje (obveznice).

1959 Harry M. Markowitz v knjigi "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments" opiše temelje in principe na katerih sloni model sredina-varianca. Markowitz se šteje za očeta moderne premoženjske teorije, za kar je dobil tudi Nobelovo nagrado. Sam model ne privabi pozornosti praktikov – izračun kovarianc med vsemi izbranimi vrednostnimi papirji zahteva veliko računskih operacij, kar predstavlja velik zalogaj za tedanjo računalniško tehnologijo.

1963 William F. Sharpe v članku "A Simplified Model for Portfolio Analysis" opiše poenostavljen model, ki ima osnovo v modelu sredina-varianca. Model postane znan pod imenom eno indeksni model.

1964 William F. Sharpe v članku "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk" razširi analizo sredina-varianca in položi temelje CAPM. Neodvisno od njega tudi John Lintner leta 1965 razvije podobno teorijo. Praktiki začno model zaradi enostavnosti uporabljati.

Z razširjenostjo teorije CAPM se pokažejo tudi njene pomanjkljivosti. Leta **1973** Robert C. Merton objavi Intertemporal CAPM (ICAPM), kjer CAPM, ki je originalno eno periodni model, razširi na več obdobji. Model je večfaktorski.

1979 Douglas Breeden ponudi alternativo CAPM, ko objavi Consumption CAPM, ki je razširi ICAPM in ima osnove v porabi. V modelu uporabi izsledke Roberta Lucasa (**1978**).

1971 se zlomi bretton-woodski sistem, začne se obdobje fleksibilnih tečajev. Pojavijo se tečajna tveganja; da bi se zavarovali pred njimi se na trgu kapitala pojavijo izvedeni finančni instrumenti – opcije in terminske pogodbe.

1973 Fischer Black in Myron Scholes objavita Option Pricing Model, s katerim določamo cene opcij.

1974 Bruno Solnik objavi mednarodni CAPM – ICAPM, ker po zlomu bretton-woodskega sistema in vpeljavi fleksibilnih tečajev domači CAPM ne velja več.

1976 pojavi se alternativa CAPM, ko Richard Ross objavi Arbitrage Pricing Theory. Pri tej teoriji je vzrok za ravnotežje cen arbitraža in ne analiza sredina-varianca. Pričakovana donosnost je odvisna od več faktorjev. Sama teorija ne določa kateri so ti faktorji, najti jih moramo sami.

3 PREGLED POJMOV

3.1 Tveganje in negotovost

Čeprav ljudje sprejemamo odločitve v pogojih tveganja in negotovosti, sta se v razvoju ekonomske teorije pojma tveganje in negotovost pojavila razmeroma pozno. Šele Frank H. Knight[1] je leta 1921 v knjigi *Risk, Uncertainty, and Profit*[2] natančno definiral pojma. Nek dogodek je tvegan, če mu lahko matematično prisodimo verjetnosti izidov – poznamo njegovo verjetnostno porazdelitev. Primer je met poštenega kovanca – da pade grb je verjetnost 1/2. Dogodek je negotov, če njegovim izidom ne moremo določiti verjetnosti. Primer je možnost ponovnega izbruha nasilja na Balkanu –ne vemo, kakšna je verjetnost.

V ekonomski teoriji se pojma velikokrat enači, v diplomski nalogi bom izbral Knightovo definicijo, zato bodo vse odločitve v pogojih tveganja. Donosom vrednostnih papirjev moramo namreč določiti verjetnostno porazdelitev, saj drugače analiza portfelja ni mogoča. Seveda pa se postavlja vprašanje, ali smo izidom določili pravo verjetnostno porazdelitev, zato je enačenje pojmov na nek način smiselno.

3.2 Pričakovana koristnost

Za razumevanje subjektivnega odločanja v pogojih tveganja je potrebno poznavanje teorije pričakovane koristnosti, ki trenutno še vedno velja za enega od temeljev ekonomske znanosti.
Eden od začetnikov teorije je Daniel Bernoulli, ki je leta 1783 predlagal rešitev St.Petersburškega paradoksa: v igri na srečo mečemo pošten kovanec toliko časa, dokler v n-metu ne pade glava in se igra zaključi. Izplačilo je odvisno od števila metov v igri in sicer 2^n dukatov. Vprašanje je, koliko naj posameznik vplača za igranje igre. Paradoks je, da je pričakovano izplačilo neskončno dukatov. Matematično upanje vseh možnih izidov igre je:

$$\begin{aligned} E(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}(\mathrm{w}_n)\mathrm{w}_n = \sum_{i=1}^{\infty} (1/2^{\mathrm{n}})\cdot 2^{\mathrm{n}} = \\ &= (1/2)\cdot 2 + (1/4)2^2 + (1/8)2^3 + \ldots = 1+1+1+\ldots = \infty \end{aligned} \qquad (3.1).$$

Čeprav je pričakovano izplačilo neskončno, ni pričakovati, da bi bil v realnem svetu posameznik pripravljen vplačati neskončno mnogo denarja. Bernoulli je ugotovil: 1.) posameznikova koristnost ne narašča linearno z velikostjo bogastva – *w*, ampak narašča pojemajoče (za opis je uporabil logaritmično funkcijo); 2.) posameznikova ocena koristnosti tveganega podviga (investicije) ni *pričakovana vrednost donosa,* ampak

[1] Gonçalo L. Fonseca in Leanne Ussher. 2001. Risk, Uncertainty and Expected Utility.*The History Of Economic Thought* [online]. Dostopno na: http://homepage.newschool.edu/het/essays/uncert/intrisk.htm#risk [1.9.2004).

[2] Celotna knjiga je dosegljiva v elektronski obliki: Frank H. Knight. (1921). Risk, Uncertainty, and Profit. *The Library of Economics and Liberty.* [online] Dostopno na: http://www.econlib.org/library/Knight/knRUP.html [1.9.2004).

pričakovana koristnost tega podviga. Po Bernoullijevi logiki moramo pri izračunu pričakovanih donosov upoštevati pričakovano koristnost posameznika:

$$E[U(w)] = \sum_{i=1}^{\infty}(1/2^{n})\mathrm{U}(2^{n}) = (1/2)\mathrm{U}(2) + (1/4)\mathrm{U}(2^{2}) + (1/8)\mathrm{U}(2^{3}) + ... < \infty \qquad (3.2).$$

Teorija je zaživela, ko sta John von Neumann in Oskar Morgenstern leta 1944 izdala delo *Theory of Games and Economic Behavior*. Čeprav je formalno enaka Bernoullijevi hipotezi, se razlikuje v pomembnih postavkah. Teorijo sta postavila na temelju aksiomov in dokazala, da se posameznikove preference oblikujejo na podlagi verjetnosti izidov neke igre (v teoriji imenovane loterije) in ne na izidu igre (bogastvo), kar trdi Bernoulli[3].

Enačba pričakovane koristnosti je:

$$E[U(x)] = \sum_{x \in Supp(p)} p_i U(x_i) \qquad (3.3),$$

kjer je:
i – število izidov loterije
x_i – izid loterije
p_i – verjetnost izida
$U(x_i)$ – von Neumann-Morgensternova funkcija koristnosti za i-ti izid
$x \in Supp(p)$ – označuje, da so izidi loterije množica s končnim številom elementov, ki imajo vsi definirane verjetnosti, za katere velja $p_i > 0$

Po aksiomaciji funkcije koristnosti (hipoteza je dobila matematične temelje) so ekonomisti ugotovili njeno uporabnost pri izbiri portfeljev, zavarovanj in podobno.

Pri uporabi teorije pričakovane koristnosti v ekonomiji je loterija slučajna spremenljivka R, ki ima realne vrednosti. V primeru, da je R zvezno porazdeljena, dobi enačba 3.3 obliko[4]:

$$E[U(R)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(R)U(R)dR \qquad (3.4),$$

kjer je:
$U(R)$ –funkcija koristnosti za R
$p(R)$ – gostota verjetnosti

[3] Po Bernoulliju je funkcija koristnosti odvisna od bogastva – *U(w)*, von Neumann – Morgensternova funkcija koristnosti pa je odvisna od loterije – *U(x),* kar pomeni, da jo je možno aplicirati na različne primere. Več o teoriji koristnosti na: Gonçalo L. Fonseca in Leanne Ussher. 2001. Risk, Uncertainty and Expected Utility. *The History Of Economic Thought* [online]. Dostopno na: http://cepa.newschool.edu/het/essays/uncert/choicecont.htm [16.7.2004].

[4] Gonçalo L. Fonseca in Leanne Ussher. 2001. Risk, Uncertainty and Expected Utility.*The History Of Economic Thought* [online]. Dostopno na: http://cepa.newschool.edu/het/essays/uncert/aversion.htm [16.7.2004] in Tobin (1958,75).

V primeru, da je slučajna spremenljivka R diskretno porazdeljena, dobi enačba 3.4 znano obliko:

$$E[U(R)] = \sum_{i=1}^{n} p_i U(R_i) \qquad (3.5).$$

Vsak racionalen posameznik, ne glede ali je previden ali išče tveganje, poskuša maksimirati pričakovano koristnost:

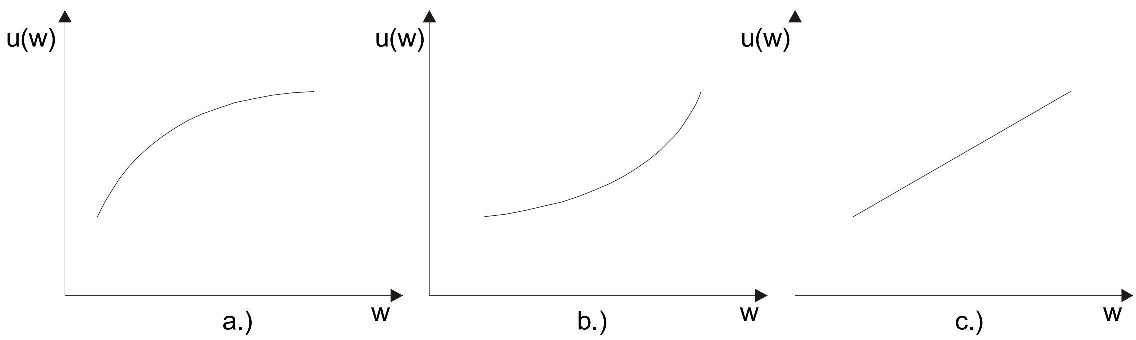
$$\max(E[U(R)]) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} p_i U(R_i)\right) \qquad (3.6).$$

3.3 Odnos do tveganja

V prejšnjem poglavju smo si bežno ogledali teorijo pričakovane koristnosti, ki pojasnjuje, kako naj bi se ljudje odločali v pogojih tveganja – z maksimiranjem osebne pričakovane koristnosti. Dotaknili pa smo se novega vprašanja, ki se tiče odnosa do tveganja. Posameznik je lahko previden, lahko išče tveganje, ali pa je do tveganja ravnodušen. V moji diplomski nalogi se predvideva, da se posamezniki zavedajo tveganja.

Najbolj nadzorna prestavitev odnosa do tveganja prikaže spodnja slika:

SLIKA 1: OBLIKE KRIVULJ PRIČAKOVANE KORISTNOSTI



Vir: Ramachandran (2004, 138).

Primer a.) prikazuje osebo, ki se zaveda tveganja (risk averse), primer b.) osebo, ki išče tveganje (risk lover), c.) pa prikazuje osebo, ki je ravnodušna do tveganja (risk neutral).

4 MODEL SREDINA-VARIANCA

4.1 STANDARNI MODEL SREDINA-VARIANCA

Harry M. Markowitz je model opisal leta 1952 v članku "Portfolio selection" in tako postavil temelje moderni premoženjski teoriji.

Proces izbire portfelja se lahko deli v dve stopnji (Markowitz 1952, 77):

1.) Na nek način določiti verjetnostne približke bodočih vrednosti in tveganje vrednostnih papirjev
2.) Zbrane podatke vključiti v model in izbrati optimalni portfelj glede na preference investitorja

Model opisuje drugo stopnjo – optimizacija in izbira portfelja.

Markowitz je model razvil postopoma:

N – število vrednostnih papirjev
r_{it} – pričakujoč donos v času t na 1 denarno enoto, investirano v vrednostni papir i
d_{it} – diskontna stopnja, s katero diskontiramo donos i-tega vrednostnega papirja na današnji čas
ω_i – relativni deleži investirani v i- ti vrednostni papir

Velja:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \tag{4.1}$$

V modelu ni dovoljena prazna prodaja[5] (short sales), zato velja

$$\omega_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots N \tag{4.2}$$

Diskontirani pričakovani donos portfelja je

$$r_P = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} d_{it} r_{it} \omega_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(\sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right) \tag{4.3}$$

Izraz v oklepaju je diskontiran pričakovani donos i-tega vrednostnega papirja.

Markowitz v tej točki meni, da je bolj prikladno dinamični model smatrati za statičnega. Namesto časovnih vrst donosnosti i-tih vrednostnih papirjev bomo govorili o toku donosov (r_i) i-tega vrednostnega papirja.

[5] Prodaja vrednostnega papirja, katerega nismo lastniki. Vrednostni papir si izposodimo (kar za nas uredi borzni posrednik) in ga prodamo v prepričanju, da bo cena padla. Papir moramo namreč čez čas kupiti in vrniti lastniku.

Donos i-tega vrednostnega papirja je nominalni donos in ga izračunamo kot:

$$r_i = \frac{W_{iT} + d_i - W_{i0}}{W_{i0}} \qquad (4.4),$$

kjer je:
W_{i0} – vrednost investicije v i-ti vrednostni papir v času t=0
W_{iT} – vrednost investicije v i-ti vrednostni papir po nekem času držanja investicije t=T
d_i – vrednost vseh izplačanih dividend iz naslova i-tega vrednostnega papirja v obdobju držanja investicije

Enačbo 4.3 lahko zapišemo kot:

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i \qquad (4.5).$$

Pričakovanega (bodočega) donosa *i*-tega vrednostnega papirja (r_i) žal ne moremo določiti natančno, soočeni smo s problemom negotovosti (in tveganja). Je slučajna spremenljivka, ki jo opišemo z zalogo vrednosti in gostoto verjetnosti.

Markowitz v modelu predlaga meri s katerima lahko matematično izrazimo pričakovani (bodoči) donos in za tveganje.

Za pričakovani donos *i*-tega vrednostnega papirja vzamemo matematično upanje (aritmetično sredino) donosa *i*- tega vrednostnega papirja (r_i):

$$\mu_i = E(r_i) \qquad (4.6),$$

za tveganje i-tega vrednostnega papirja (r_i) pa vzamemo varianco (povprečni kvadratni odklon od srednje vrednosti) - predstavlja razpršenost verjetnostne porazdelitve okoli aritmetične sredine.

$$V_i = \sigma_i^2 = E\left[\left(r_{i(t)} - E(r_i)\right)^2\right] = E(r_i^2) - E^2(r_i) \qquad (4.7).$$

kjer je:
$r_{i(t)}$ – trenutni donos i-tega tveganega vrednostnega papirja v obdobju t (imamo časovno serijo donosov)

Analizirajmo vpliv donosov in tveganj posameznih vrednostnih papirjev na donos in tveganje portfelja.

Pričakovani srednji donos celotnega portfelja (na 1 denarno enoto) je seštevek[6] posameznih pričakovanih donosov pomnoženih z relativnimi deleži v *i*-ti vrednostni papir:

$$R_P = E(r_P) = E\left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_{ii}\right) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i \qquad (4.8).$$

Varianca pričakovanega srednjega donosa portfelja (tveganje) je:

$$V_P = \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \operatorname{cov}(r_i, r_j) \qquad (4.9),$$

kjer je cov(r_i,r_j) kovarianca med r_i in r_j:

$$\operatorname{cov}(r_i, r_j) = c_{ij} = E\left[\left(r_{i(t)} - \mu_i\right)\left(r_{j(t)} - \mu_j\right)\right] \qquad (4.10).$$

Po definiciji je kovarianca simetrična:

za vse $i \neq j$ velja $c_{ij} = c_{ji}$ (4.11).

Diagonalne kovariance, kjer je $i = j$ pa so pravzaprav variance :

$$c_{ii} = \sigma_i^2 \qquad (4.12).$$

4.1.1 Portfelj dveh tveganih vrednostnih papirjev

Grafična ponazoritev portfelja dveh vrednostnih papirjev slikovito prikaže pomen kovarianc med spremenljivkami na relacijo pričakovani donos – tveganje portfelja.

Imamo dva tvegana vrednostna papirja p_1 in p_2 s pričakovanima donosoma in variancama: μ_1, ω_1 in μ_2, ω_2 . Analizirali bomo vpliv kovarianc na donosnost in tveganje portfelja.

Enačbi za pričakovani donos portfelja (enačba 4.8) in varianco portfelja (enačba 4.9) z upoštevanjem lastnosti kovarianc (enačba 4.11 in 4.12):

$$R_P = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 \qquad (4.13),$$

$$V_P = \omega_1\omega_1 c_{11} + \omega_1\omega_2 c_{12} + \omega_2\omega_1 c_{21} + \omega_2\omega_2 c_{22} = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2 c_{12} \qquad (4.14).$$

Absolutna vrednost kovariance $|c_{12}|$ se veča, čim bolj dosledno se z velikostjo r_1 veča tudi velikost r_2 (kovarianca ima pozitivni predznak) ali čim bolj dosledno r_1 pada, ko r_2 raste (kovarianca ima negativni predznak). Kadar je kovarianca nič, pravimo, da sta r_1 in r_2 nekorelirani. Velikost kovariance je odvisna tudi od tega, kako sta slučajni spremenljivki r_1 in r_2 razpršeni: ob enaki stopnji odvisnosti je $|c_{12}|$ tem večja, čim bolj sta r_1 in r_2 razpršeni.

[6] Uporabimo lastnost matematičnega upanja (Jamnik 1987, 132): $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Vpliv razpršenosti odstranimo, če vpeljemo pojem korelacijski koeficient med slučajnima spremenljivkama, ki ima obliko:

$$r_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \qquad (4.15).$$

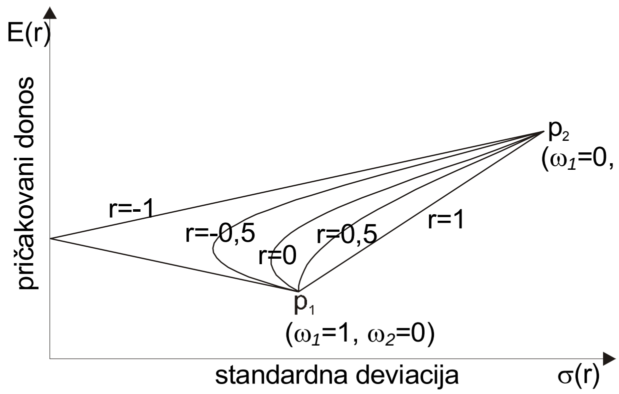
Korelacijski koeficient ima vrednosti med –1 in 1.

Varianca celotnega portfelja tako dobi obliko:

$$V_P = \sigma_P^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2 r_{12} \qquad (4.16).$$

Analizirajmo[7] enačbi, spreminjamo ω_1 od 0 do 1 z majhnimi koraki, pri različnih vrednostih korelacije. Pri posamezni vrednosti korelacije dobimo množico portfeljev, ki predstavljajo neprekinjeno krivuljo (v modelu vrednosti ω_1 spreminjamo zvezno). Glede na posamezne vrednosti korelacije dobimo različne krivulje portfeljev, ki jih skupaj prikažemo v sliki 2[8]:

SLIKA 2: KRIVULJE MNOŽIC PORTFELJEV DVEH TVEGANIH PAPIRJEV PRI RAZLIČNI KORELACIJI c_{12}



Vir: lastni izračun.

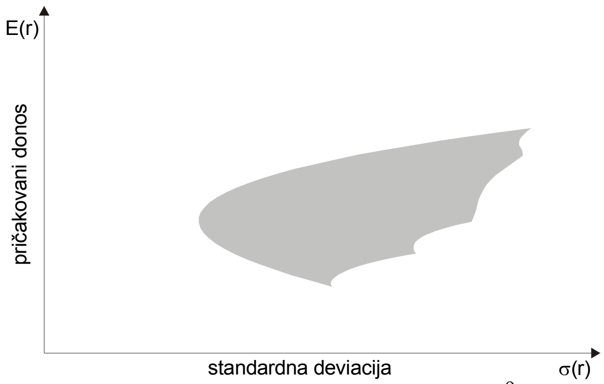
Kadar sta vrednostna papirja popolnoma pozitivno korelirana ($r_{12} = 1$; ko raste r_1, raste tudi r_2), dobimo linearno množico možnih portfeljev in v tem primeru **diverzifikacija nima želenega učinka**. V primeru negativne korelacije (r_{12} = -0,5; ko pretežno r_1 raste, r_2 pretežno pada), pa lahko dobimo portfelj, ki ima celo manjšo varianco kot posamezna vrednostna papirja. V primeru popolne negativne korelacije (r_{12} = -1; ko r_1 raste, r_2 pada), pa bi celo dobili portfelj, ki ima varianco nič – portfelj ni tvegan.

[7] Uporabil sem Excel.
[8] V slikah in na splošno avtorji uporabljajo standardnim odklonom kot merilo tveganja, variacija pa se uporablja predvsem v izračunih.

4.1.2 Možna množica portfeljev in učinkovita meja

V primeru z dvema vrednostnima papirjema smo dobili množico možnih portfeljev, ki so tvorili krivuljo. Če pa portfelj sestavimo iz treh ali več vrednostnih papirjev dobimo omejeno ploskev možnih portfeljev, ki je prikazana na sliki 3:

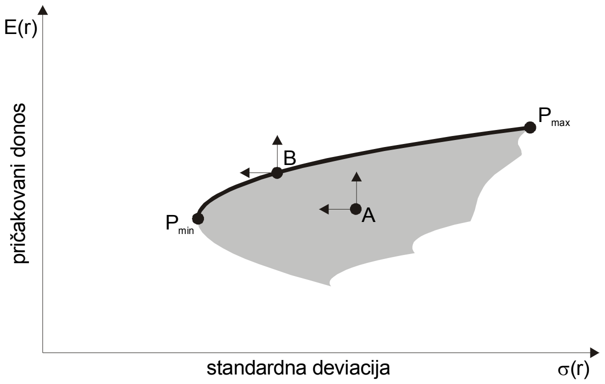
SLIKA 3: MNOŽICA MOŽNIH PORTFELJEV



Vir: Sharpe (1970, 54) in lastni izračun[9].

Poiščimo portfelje, ki so iz dane množice najbolj učinkoviti - imajo največji donos ob najmanjšem tveganju. Markowitz v modelu predvideva, da je investitor racionalen; med dvema portfeljema z enakim pričakovanim donosom bo izbral tistega, ki ima manjše tveganje – standardni odklon. Izbiro predstavlja slika 4 :

SLIKA 4: UČINKOVITA MEJA - MNOŽICA UČINKOVITIH PORTFELJEV

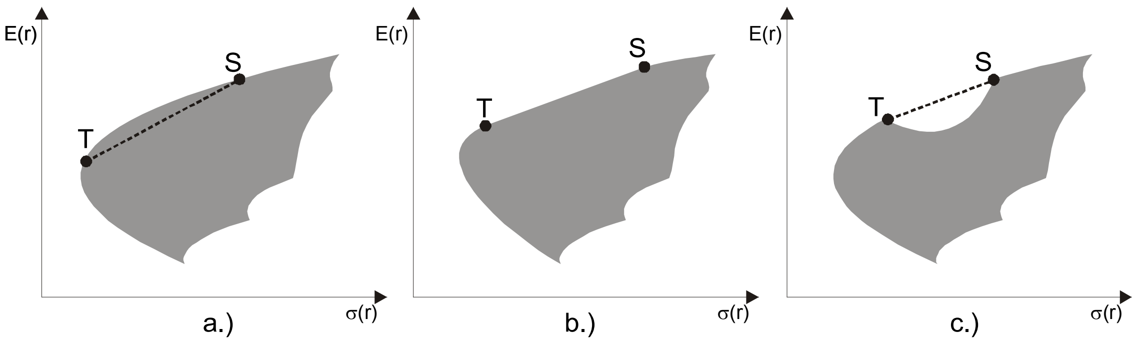


Portfelj A ni najbolj učinkovit portfelj, ker z zgornjim postopkom izbire najdemo tudi portfelj B, ki pa je eden od najbolj učinkovitih portfeljev. Tako pridemo do podmnožice učinkovitih portfeljev, ki se nahajajo na **učinkoviti meji**. Tvori jo krivulja med portfeljem P_{min} z najmanjšim tveganjem (standardnim odklonom) in portfeljem P_{max}, ki je ga sestavlja samo vrednostni papir z največjim pričakovanim donosom in največjim standardnim odklonom. Portfelja P_{min} in P_{max} imenujemo mejna portfelja.

[9] Uporabil sem Excel dokument z izgrajenimi makri za izračun množice portfeljev: Mike's Excel VBA Pages: [online]. Dostopno na: www.geocities.com/mikesvba/PortfolioVBA.xls [20.7.2004).

Krivulja, ki prestavlja učinkovito mejo, je vedno konveksna. Konveksnost pomeni, da na daljici med dvema portfeljema, ki ležita na učinkoviti meji, vedno leži vsaj eden portfelj. Slika 5 prikazuje mogoče in nemogoče množice na učinkoviti meji:

SLIKA 5: MOGOČA IN NEMOGOČA UČINKOVITA MEJA



Vir: Sharpe (1970, 53).

Primer a.) kaže najbolj pogosto obliko učinkovite meje (meja je mogoča). Na daljici med točkama T in S je moč najti portfelje, saj daljica leži znotraj mogoče množice portfeljev. Primer b.) tudi prikazuje mogočo obliko učinkovite meje. Daljico portfeljev bi dobili s kombinacijo portfeljev T in S, ki imata korelacijo z vrednostjo 1 (o pomenu korelacij na obliko krivulje med T in S glejte poglavje 4.1.1.). Primer c.) je popolnoma nemogoč, saj sta skrajni vrednosti korelacije –1 in 1. V skrajnem primeru, ko bi bila portfelja T in S popolnoma korelirana (korelacija z vrednostjo 1) bi dobili ravno črto možnih portfeljev, ki je označena s črtkano daljico.

4.1.3 Analiza sredina-varianca in izbira portfelja

Za sprejem odločitev v modelu sta dovolj dva statistična momenta: sredina – pričakovani donos in varianca – tveganje. Porazdelitev, ki jo ta dva momenta popolnoma opišeta je normalna porazdelitev $N(\mu,\sigma)$ (Jamnik 1987, 80), vendar tvegani vrednostni papirji niso vedno normalno porazdeljeni (Bodie, Kane in Marcus 1999, 138 ; Sharpe 1970, 146) in njihove porazdelitve imajo višje momente kot so: asimetričnost in sploščenost (Jesenko 2001, 83-85). Pogoj za veljavnost analize sredina – varianca sta: donos tveganega vrednostnega papirja mora biti normalno porazdeljen ali katerakoli druga dvo-parametrična porazdelitev in/ali funkcija koristnosti mora biti kvadratična, na primer $U(R) = (1+R)^{1/2}$, kajti tu višji momenti ne vplivajo na analizo (Tobin 1958, 75). Markowitz je ustreznost modela dokazal samo s kvadratično funkcijo koristnosti (Markowitz 1987, 52), z Levyem pa sta dokazala, da analiza sredina-varianca dovolj dobro velja tudi za ostale funkcije koristnosti (na primer: $U(R) = \log(1+R)$). Seveda približek velja samo v nekem omejenem obsegu: {R – x , R + y}.

Markowitz je uporabil dva metodi za iskanje približka pričakovane koristnosti E(U). Obe temeljita na razvoju funkcije v Taylorjevo vrsto (Markowitz 1987, 60):

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)(x - x_0)^2/2! + y'''(x_0)(x - x_0)^3/3! + ... \quad (4.17).$$

Prva metoda temelji na razvoju E(U) v Taylorjevo vrsto pri vrednosti R = 0 , druga pa pri vrednosti R = E. Levy in Markowitz sta s testi pokazala, da je druga metoda ustreznejša pri izražanju približka za funkcije koristnosti:

$$U_E(R) \cong U(E) + U'(E)(R-E) + 0{,}5U''(E)(R-E)^2 \tag{4.18}$$

kjer znak ≅ pomeni "približno enako". Če na obeh straneh enačbe 4.18 vzamemo matematično upanje, dobimo funkcijo, ki je odvisna od matematičnega upanja E in variance V:

$$f_E(E,V) = E[U_E(R)] = U(E) + 0{,}5U''(E)V \tag{4.19}$$

Če ima investitor na primer funkcijo koristnosti:

$$U(R) = \log_e(1+R) \tag{4.20}$$

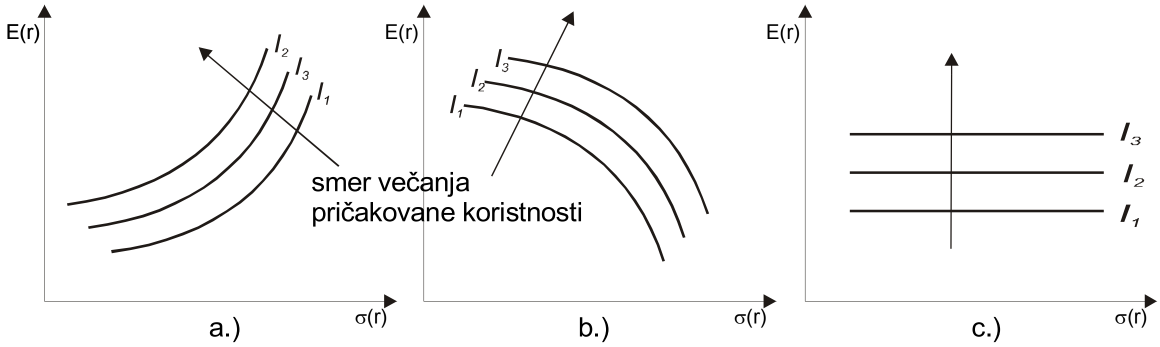
bo v analizi sredina-varianca imela obliko:

$$f_E(E,V) = \log_e(1+E) - \frac{V}{2(1+E)^2} \tag{4.21}$$

Potrebno je poudariti, da ima vsak investitor svojo funkcijo koristnosti. V poglavju 3. so grafično prikazane nekatere izmed njih.

Sedaj lahko s pomočjo funkcijo pričakovane koristnosti v analizi sredina-varianca $f_E(E,V)$ opišemo indiferenčne krivulje koristnosti. Indiferenčna krivulja je krivulja, kjer je funkcija pričakovane koristnosti konstantna $f_E(E,V) = C_i$ (Tobin 1958, 77).
Za posamezne vrednosti C_i pričakovane koristnosti izračunamo posamezne indiferenčne krivulje. Krivulje najlepše opišemo s sliko 6:

SLIKA 6: INDIFERENČNE KRIVULJE ZA RAZLIČNE ODNOSE DO TVEGANJA



Vir: Tobin (1958, 78).

V primeru a.) so prikazane indiferenčne krivulje I_1, I_2, I_3 za osebo, ki se zaveda tveganja (risk averse). Krivulje so obrnjene navzgor, oseba želi za večje tveganje tudi večji pričakovani donos. Primer b.) prikazuje indiferenčne krivulje osebe, ki išče tveganje (risk seeking) – za večje tveganje so pripravljeni sprejeti manj. Primer c.) pa prikazuje za tveganje nevtralno osebo (risk neutral), pri investicijah jo zanima samo pričakovani donos, do tveganja je ravnodušna. Potrebno je poudariti, da je med indiferenčnima krivuljama I_1 in I_2 še nešteto mnogo indiferenčnih krivulj, saj za konstanto C_i lahko vzamemo poljubno realno število (ki seveda mora biti v mejah {R – x , R + y}, kjer velja približek).

Model sredina-varianca predvideva, da se investitor zaveda tveganja in je racionalen – želi maksimirati svojo funkcijo koristnosti.

4.1.4 Izbira optimalnega portfelja

Izbira optimalnega portfelja je odvisna od investitorjevih preferenc. V modelu sredina – varianca se predvideva, da se investitor zaveda tveganja (risk averse). Izmed dveh portfeljev, ki imata isti pričakovan donos bo izbral tistega, ki ima manjše tveganje; izmed dveh portfeljev, ki imata isto varianco, bo izbral tistega, ki ima večji pričakovan donos.

Pri maksimizaciji pričakovane koristnosti moramo poznati obliko investitorjeve funkcije koristnosti. Problem iskanja portfelja je tako opisan kot:

$$\max[E(U(R))] = \max[f_E(E,V)] \qquad (4.22).$$

V primeru, da ima investitor funkcijo koristnosti $U(R) = \log_e(1+R)$ (enačba 4.20), bi dobili naslednji optimizacijski model:

$$\max[E(U(R))] = \max[f_E(E,V)] = \log_e(1+E) - \frac{V}{2(1+E)^2} = \log_e(1+R_P) - \frac{V_P}{2(1+R_P)^2} \qquad (4.23),$$

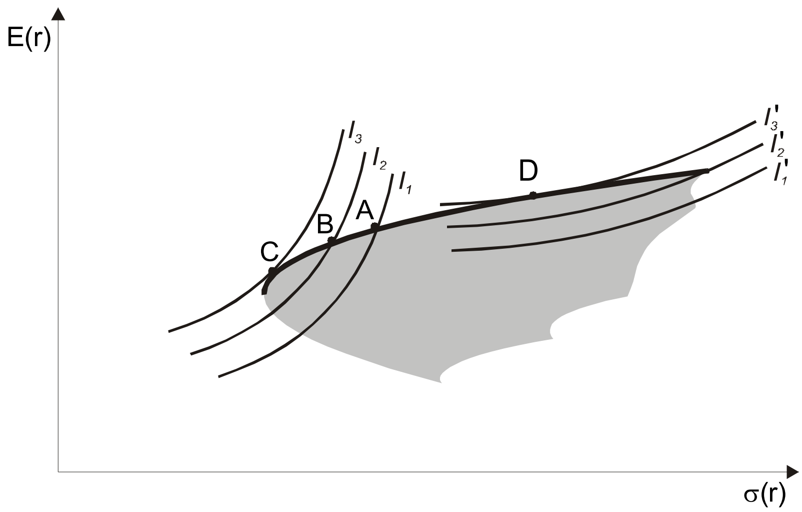
pri omejitvah:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \qquad (4.24),$$

$$\omega_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots N \qquad (4.25).$$

Problem iskanja optimalnega portfelja rešimo s kvadratičnim programiranjem. Slika 7 prikazuje postopek iskanja portfelja, ki prinaša maksimalno koristnost.

SLIKA 7: IZBIRA OPTIMALNEGA PORTFELJA Z MAKSIMIRANJEM PRIČAKOVANE KORISTNOSTI



Vir: Bodie, Kane in Marcus (1999, 228).

Investitor, katerega funkcijo koristnosti lahko prikažemo z indiferenčnimi krivuljami I_1,I_2,I_3, bo maksimiral pričakovano koristnost če bo izbral portfelj C, ker se bo v tej točki indiferenčna krivulja ravno še dotikala učinkovite meje. Portfelja A in B, ki sicer tudi ležita na učinkoviti meji, investitorju ne nudita maksimalno pričakovano koristnost.
Drugi investitor, katerega funkcijo koristnosti lahko prikažemo z indiferenčnimi krivuljami I'_1,I'_2,I'_3, pa bo maksimiral pričakovano koristnost če bo izbral portfelj D.

Seveda se pri tej metodi postavlja vprašanje, ali investitor sploh pozna svojo funkcijo koristnosti oziroma na kakšen način bi jo ugotovil.

Učinkovito mejo lahko najdemo tudi s pomočjo nepristranske funkcije, ki ima obliko (Sharpe 1963, 278):

$$\Phi = \lambda R_P - V_P = \lambda \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \operatorname{cov}(r_i, r_j) \qquad (4.26).$$

Optimizacijski problem ima obliko:

izberi takšno kombinacijo deležev tveganih vrednostnih papirjev: ω_i, i=1…N

kjer je:

$$\max\left[\lambda R_P - V_P\right] = \max\left[\lambda \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \operatorname{cov}(r_i, r_j)\right] \qquad (4.27),$$

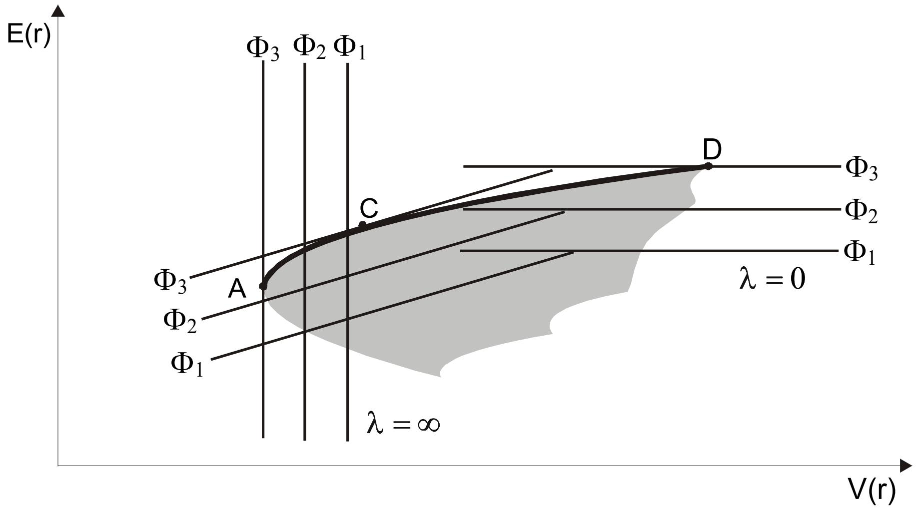
pri omejitvah:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \qquad (4.28),$$

$$\omega_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, N \qquad (4.29).$$

Vrednosti spremenljivke λ spreminjamo od 0 do ∞. Portfelj in nepristranska funkcija Φ sta prikazana na sliki 8:

SLIKA 8: ISKANJE UČINKOVITE MEJE Z NEPRISTRANSKO FUNKCIJO Φ PRI RAZLIČNIH VREDNOSTIH λ



Vir: Sharpe (1963, 279).

Slika 8 prikazuje različne naklone nepristranske funkcije Φ pri različnih vrednostih λ. Premica Φ_1 je indiferenčna premica, kjer je vrednost Φ konstantna: $\Phi 1 = \lambda R_P - V_P$. Druge premice ustrezajo višjim vrednostim Φ ($\Phi_3 > \Phi_2 > \Phi_1$). S spreminjanjem vrednosti λ, spreminjamo naklon nepristranske funkcije Φ in najdemo vse portfelje, ki ležijo na učinkoviti meji. To pot smo na os x prikazali varianco, ker je bolj primerno in ne spremeni principa iskanja učinkovite meje. Če bi na x osi prikazali standardni odklon, bi bile nepristranske funkcije krivulje in ne premice.

Optimizacijo opravimo s primernimi optimizacijskimi programi. Tudi v aplikaciji Microsoft Office – Excel, najdemo orodje, imenovano Solver (Reševalec), s katerim lahko optimiziramo portfelj.

4.2 SPLOŠNI MODEL SREDINA-VARIANCA

Splošni model sredina-varianca upošteva:

1. Možne so tudi prazne prodaje (short sale).
2. Relativni delež nekega tveganega vrednostnega papirja v portfelju je lahko omejen navzgor ali navzdol ali pa je omejen v nekem obsegu.

Model (oblike 0) (Markowizt 1987, 24) ima n ≥ 1 spremenljivk, ki so izpostavljene nobeni, eni ali več omejitvam, ki lahko zavzamejo naslednje oblike:

$\omega_i \geq L_i$ za nekatere *i* (omejitev najnižjega deleža) (4.30),

$\omega_i \leq U_i$ za nekatere *i* (omejitev najvišjega deleža) (4.31),

$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n \leq c$ (4.32),

$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n \geq c$ (4.33),

$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n = c$ (4.34),

veljati mora tudi:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \quad (4.35).$$

Pričakovani srednji donos celotnega portfelja :

$$R_P = E(r_P) = E\left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_{i i}\right) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i \quad (4.36).$$

Varianca pričakovanega srednjega donosa portfelja (tveganje) je:

$$V_P = \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \operatorname{cov}(r_i, r_j) \quad (4.37).$$

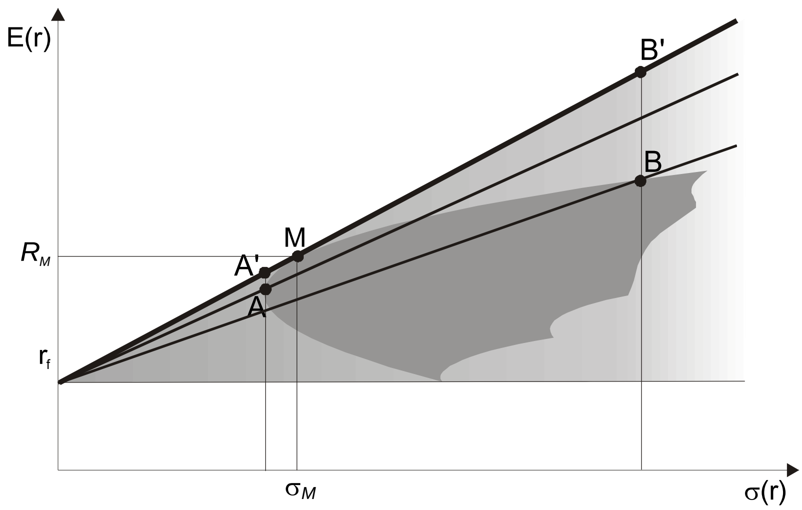
Optimalni portfelj v splošnem modelu sredina-varianca poiščemo podobno kot pri standardnem modelu, upoštevajoč zgornje omejitve.

4.3 MODEL SREDINA-VARIANCA Z NETVEGANIM VREDNOSTNIM PAPIRJEM

Netvegani vrednostni papir je v model sredina-varianca uvedel James Tobin leta 1958, ko je v članku *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk* analiziral Keynesovo teorijo likvidnostne preference, kjer je uporabil analizo sredina-varianca.

Investitor se odloča, da bo svoje premoženje razdelil med tveganim vrednostnim papirjem, ki ima neko stopnjo donosnosti in denarjem, ki nima donosnosti. Za deleže se odloči na podlagi svoje preference (indiferenčne krivulje). Tobin nato v analizi nadomesti tvegani vrednostni papir s portfeljem, sestavljenim iz tveganih vrednostih papirjev, in pride do pomembnega zaključka: ne glede, kakšne preference imamo (ali se zavedamo tveganja ali tveganje iščemo), bomo vedno izbrali enak optimalni portfelj tveganih vrednostnih papirjev. (Tobin 1958, 78). Tobin predlaga tudi alternativo denarju – netvegane vrednostne papirje (obveznice). Poleg tega predvideva, da si lahko investitor denar sposodi in ga vloži v tvegane vrednostne papirje oziroma lahko denar vloži v netvegani vrednostni papir (ga posodi). Slika 9 prikazuje možno množico tržnih portfeljev (temno sivo področje) in možno množico vseh portfeljev, ki jih dobimo s kombinacijo posameznega tržnega portfelja in netveganega vrednostnega papirja.

SLIKA 9: UČINKOVITA MEJA KOMBINACIJE TRŽNEGA PORTFELJA IN NETVEGANEGA VREDNOSTNEGA PAPIRJA



Vir: Sharpe (1970, 69).

Iz slike 9 je lepo razvidna Tobinova ugotovitev: če smo iz kombinacije tveganih vrednostnih papirjev na podlagi svojih preferenc izbrali portfelj A, lahko ob istem tveganju s kombinacijo portfelja M, ki ga imenujemo optimalni portfelj, in netveganega vrednostnega papirja sestavimo portfelj A', ki ima višji pričakovani donos. Bilo bi namreč neracionalno, da bi kombinirali portfelj A in netvegani vrednostni papir, saj bi bila daljica možnih portfeljev med točkama r_f in A neučinkovita, kar je lepo razvidno iz slike. Na podoben način lahko ravnamo, če smo na podlagi svojih preferenc izbrali portfelj B: z vpeljavo netveganega vrednostnega papirja lahko sestavimo portfelj B'. Ne glede, kakšne so naše preference, vedno izberemo optimalni portfelj M. Pojavi se vprašanje, kako lahko s kombinacijo netveganega vrednostnega papirja in optimalnega portfelja M sestavimo portfelj B', saj se nahaja izven daljice med točkama r_f in M, kjer bi se morali nahajati optimalni portfelji.

Sestavimo portfelj P iz kombinacije optimalnega portfelja M in netveganega vrednostnega papirja – lahko rečemo, da gre za kombinacijo dveh vrednostnih papirjev, zato lahko za portfelj P zapišemo (uporabimo enačbi 4.17 in 4.18) pričakovani donos kot:

$$R_P = \omega_1 r_f + \omega_2 R_M = \omega_1 r_f + (1-\omega_1) R_M \tag{4.38}$$,

kjer je:
r_f – donos netveganega vrednostnega papirja
R_M – pričakovani donos optimalnega portfelja M
ω_1 – delež v netveganem vrednostnem papirju
ω_2 – delež v portfelju M

Pri varianci portfelja P je treba upoštevati, da ima netvegani vrednostni papir varianco 0 in da je kovarianca med netveganim vrednostnim papirjem in optimalnim portfeljem M tudi 0. Tako lahko zapišemo za varianco portfelja P:

$$V_P = (1-\omega_1)^2 \sigma_M^2 \tag{4.39}$$,

oziroma za standardnim odklonom portfelja P:

$$\sigma_P = \omega_2 \sigma_M = (1-\omega_1)\sigma_M \tag{4.40}$$.

Vidimo, da je tveganje portfelja P odvisno samo od tveganja optimalnega portfelja M sorazmerno z deležem sredstev v portfelju M.

Pri $\omega_1 = 1$ investitor celotni delež sredstev vloži v netvegani vrednostni papir – kar pomeni, da je sredstva posodil po obrestni meri r_f. Pri $\omega_1 = 0$ je investitor celotni delež sredstev vložil v optimalni portfelj M. Portfelj P tako leži na daljici med točkama r_f in M, ki predstavlja optimalni portfelj.

Vzemimo sedaj $\omega_1 = -1$, kar pomeni, da si je investitor sposodil denarna sredstva po kreditni stopnji r_f in jih vložil v optimalni portfelj M. Ker velja: $\omega_1 + \omega_2 = 1$, mora biti $\omega_2 = 2$. Dobljeni portfelj P ima v tem primeru dvakrat večje tveganje kot portfelj M:

$$\sigma_P = \omega_2 \sigma_M = 2\sigma_M \tag{4.41}$$,

pričakovani donos pa je:

$$R_P = \omega_1 r_f + \omega_2 R_M = 2R_M - r_f \tag{4.42}$$.

Tako lahko investitor B z izposojo denarnih sredstev ($\omega_1 < 0$) in vlaganjem le-teh v optimalni portfelj M ($\omega_2 > 1$) sestavi portfelj B', prikazan na sliki 9.

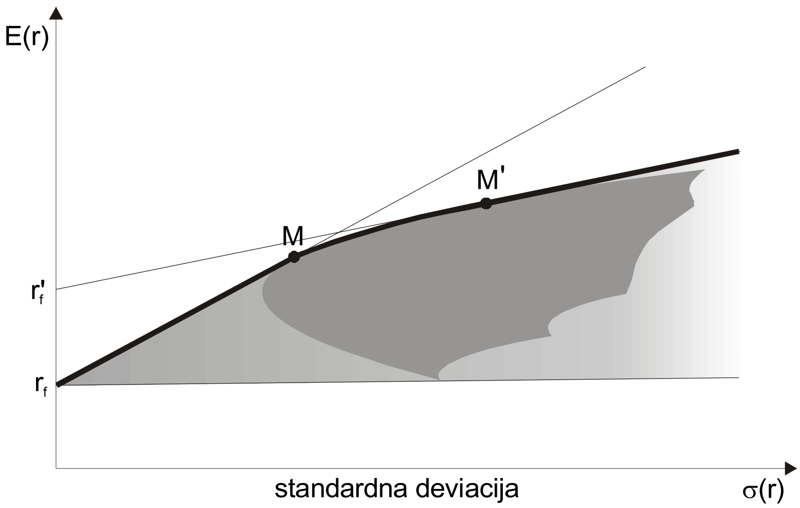
Vidimo lahko, da se proces investicije lahko zgodi v dveh korakih:

1. Na podlagi modela sredina-varianca sestavimo mogočo množico portfeljev in izberemo optimalni portfelj (tangencialni portfelj, kjer se premica izhajajoča iz r_f dotika učinkovite meje)
2. S kombiniranjem optimalnega portfelja in netveganega vrednostnega papirja na podlagi svojih preferenc izberemo portfelj P.

Ta proces imenujemo *ločevalni teorem* – (ang. *separation theorem*).

V modelu smo predvidevali, da si denarna sredstva izposodimo po isti obrestni meri, ko jih posodimo. V realnem svetu se investitor sooči z dejstvom, da je obrestna mera za izposojena sredstva višja od obrestne mere za posojena sredstva. S sliko lahko prikažemo omenjeno stanje:

SLIKA 10: RAZLIČNE OBRESTNE MERE ZA IZPOSOJENA IN POSOJENA SREDSTVA



Vir: Alexsander in Sharpe (1989, 164).

Vidimo, da je učinkovita meja razdeljena na tri segmente. Na segmentu od r_f do M uporabljamo se nahajamo, ko posodimo sredstva (kupimo netvegani vrednostni papir) po obrestni meri r_f. Na segmentu od M do M' ima učinkovita meja obliko, dobljeno z Markowitzovo analizo sredina-varianca. Na segmentu od M' naprej pa se nahajamo, ko si sposodimo sredstva po obrestni meri r'_f, kar moramo upoštevati v izračunih (namesto r_f vzamemo r'_f, namesto R_M in σ_M vzamemo R'_M in σ'_M).

Lahko pa pridemo v situacijo, ko si sredstev ne moremo sposoditi. Takrat ima učinkovita meja dva segmenta, in sicer: prvi segment od r_f do M je linearen, segment od M naprej pa ima znano obliko učinkovite meje, dobljene z Markowitzovo analizo sredina-varianca.

5 FAKTORSKI (ali INDEKS) MODELI

5.1 ENOFAKTORSKI MODELI

Razvoj faktorskih modelov je začel William Sharpe s člankom *A Simplified Model For Portfolio Analysis*, kjer je poskušal rešiti problem zamudnega računanja[10] optimalnega portfelja po Markowitzevem modelu. Namesto zamudnega izračuna kovarianc med posameznimi vrednostnimi papirji je poskušal najti model, kjer bi bil bodoči donos i-tega vrednostnega papirja odvisen od nekega skupnega faktorja oziroma indeksa. Namesto (N^2-N)/N izračunov kovarianc[11], bi bilo potrebno izračunati le N relacij. Faktorske modele pogosto imenujemo tudi indeksni modeli.

Model, s katerim je hotel odpraviti opisane težave, je imenoval *diagonalni model* (Sharpe 1963, 281). V njem je predvideval, da so donosi tveganih papirjev določeni z relacijo med nekim skupnim faktorjem in neko slučajno spremenljivko. Model opisuje enačba 5.1:

$$r_i = a_i + b_i F + c_i \qquad (5.1),$$

kjer je:
r_i –donos i-tega vrednostnega papirja
a_i,b_i – parametra i-tega vrednostnega papirja, sta konstanti
F – nivo nekega faktorja, je slučajna spremenljivka
c_i – slučajna spremenljivka i-tega vrednostnega papirja, ki je normalno porazdeljena, z matematičnim upanjem 0 in varianco σ^2_{Ci}

Faktor F je lahko (Sharpe 1963, 281)[12]: indeks trga vrednostnih papirjev, bruto domači proizvod, nek indeks cen oziroma faktor, ki ima najpomembnejši vpliv na donose vrednostnih papirjev. Vrednost faktorja F je določena z:

$$F = a_f + c_f \qquad (5.2),$$

kjer je:
a_f – parameter, je konstanta
c_f – slučajna spremenljivka, ki ima matematično upanje 0 in varianco σ^2_f

---

[10] V šestdesetih letih preteklega stoletja so bili računalniki daleč manj zmogljivi kot danes, poleg tega niso bili splošno razširjeni in čas njihove uporabe je bil povezan v visokimi stroški.
[11] Matrika kovarianc je reda N x N = N^2, diagonalno ležeče kovariance so variance, kar pomeni (N^2-N) izračunov, diagonalno nasprotne kovariance so enake $c_{ij} = c_{ji}$, kar pomeni, da je potrebno narediti (N^2-N)/2 izračunov.
[12] Sharpe je za faktor uporabil simbol *I*.

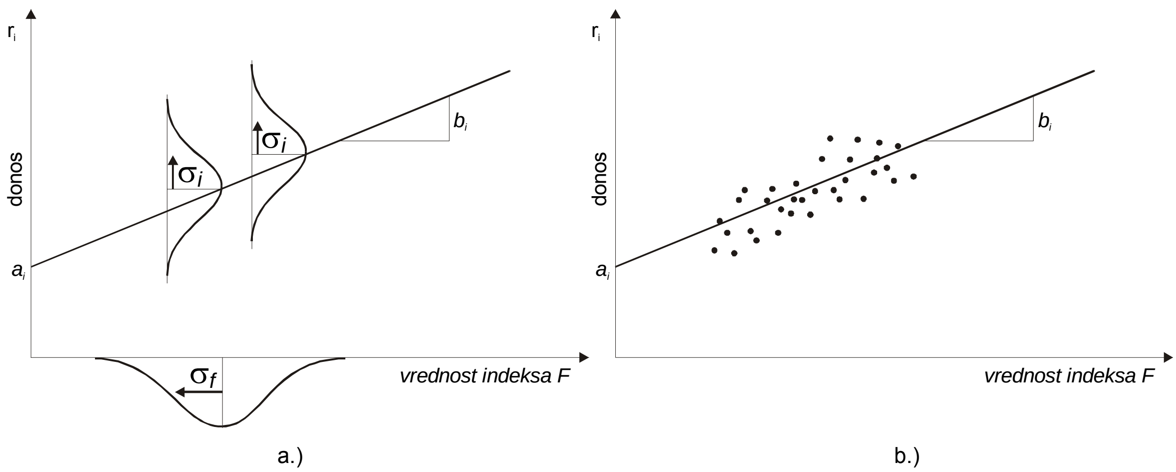
Model predvideva tudi, da so slučajne spremenljivke c_i med posameznimi vrednostnimi papirji neodvisne, prav tako so neodvisne c_i in slučajna spremenljivka faktorja c_f:

$$\operatorname{cov}(c_i, c_j) = 0 \text{ za vse } i \neq j \quad (5.3),$$

$$\operatorname{cov}(c_i, c_f) = 0 \quad (5.4).$$

Slika 11 prikazuje relacijo med r_i in F z njunimi verjetnostnimi porazdelitvami, primer a.) prikazuje verjetnostne porazdelitve in primer b.) prikazuje dejanske izmerjene vrednosti r_i v skozi več različnih investicijskih obdobij.

SLIKA 11: PRIKAZ PORAZDELITEV r_i IN a_f



Vir: Sharpe (1963, 283).

Enačba 5.1 v bistvu predstavlja regresijski model in vrednosti a_i, b_i predstavlja regresijska koeficienta, zato lahko a_i, b_i in σ_i izračunamo s pomočjo metode za izračun regresije, največkrat z metodo najmanjših kvadratov (Jesenko, 2001, 293).

Pričakovan donos i-tega vrednostnega papirja je:

$$\mu_i = E(r_i) = E[a_i + b_i(a_f + c_f) + c_i] = a_i + b_i a_f \quad (5.5).$$

Varianca donosa i-tega vrednostnega papirja je:

$$\sigma_i^2 = V(a_i + b_i F + c_i) = V[a_i + b_i(a_f + c_f) + c_i] \quad (5.6).$$

Upoštevamo, da sta slučajni spremenljivki c_i in c_f neodvisni, a_i in a_f pa sta konstanti in zato neodvisni, zato lahko uporabimo lastnost variance za neodvisne spremenljivke (nimajo kovariance) (Jamnik 1987, 137):

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad (5.7),$$

in enačbo 6.4 lahko zapišemo kot:

$$\sigma_i^2 = V\left[a_i + b_i\left(a_f + c_f\right) + c_i\right] = V\left(a_i\right) + V\left(b_i a_f\right) + V\left(b_i c_f\right) + V\left(c_i\right) \quad (5.8).$$

a_i in a_f sta konstanti in nimata variance (V = 0), uporabimo pa tudi lastnost variance (Jamnik 1987, 135):

$$V\left(aX\right) = a^2 V\left(X\right) \quad (5.9),$$

in dobimo:

$$\sigma_i^2 = V\left(c_i\right) + V\left(b_i c_f\right) = V\left(c_i\right) + b_i^2 V\left(c_f\right) = \sigma_{Ci}^2 + b_i^2 \sigma_f^2 \quad (5.10).$$

Kovariance med posameznimi vrednostnimi papirji izračunamo s pomočjo definicije za kovarianco (Jamnik 1987,136) :

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(r_i, r_j\right) &= c_{ij} = E\left[\left(r_i - E\left(r_i\right)\right)\left(r_j - E\left(r_i\right)\right)\right] = \\ &= E\left[\left(a_i + b_i F + c_i - E\left(a_i + b_i F + c_i\right)\right)\left(a_j + b_j F + c_j - E\left(a_j + b_j F + c_j\right)\right)\right] \end{aligned} \quad (5.11).$$

Upoštevamo lastnost matematičnega upanja (Jamnik 1987, 132):

$$E\left(aX + bY\right) = aE(X) + bE(Y) \quad (5.12).$$

ter pogoja 6.3 in 6.4, zato lahko napišemo:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(r_i, r_j\right) &= \operatorname{cov}\left(b_i F, b_j F\right) + \operatorname{cov}\left(b_i F, c_j\right) + \operatorname{cov}\left(b_j F, c_i\right) + \operatorname{cov}\left(c_i, c_j\right) = \\ &= \operatorname{cov}\left(b_i F, b_j F\right) = b_i b_j \operatorname{cov}(F, F) = b_i b_j \sigma_f^2 \end{aligned} \quad (5.13).$$

Vidimo, da pri enofaktorskem modelu odpade zahteven izračun kovarianc med posameznimi papirji, kar pospeši računanje.

Sedaj se lotimo izgradnje portfelja: donos portfelja, sestavljenega iz N tveganih vrednostnih papirjev je:

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(a_i + b_i F + c_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(a_i + c_i\right) + \left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_i\right] F \quad (5.14),$$

kjer velja: $\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1$.

Donos portfelja si tako lahko predstavljamo kot donos investicije v komponente i-tega vrednostnega papirja in kot donos investicije v faktor.

Ker je r_P slučajna spremenljivka, vzamemo za pričakovani donos matematično upanje:

$$R_P = E(r_P) = E\left[\sum_{i=1}^{N}\omega_i(a_i + c_i) + \left[\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right]F\right] = E\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i a_i\right) + E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right)(a_f + c_f)\right] =$$
$$= E\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i a_i\right) + E\left(a_f\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right) + E\left(c_f\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i a_i + a_f\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i \quad (5.15).$$

Varianco donosa portfelja izračunamo:

$$V_P = \sigma_P^2 = V(r_P) = V\left[\sum_{i=1}^{N}\omega_i(a_i + c_i) + \left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right)F\right] = V\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i a_i\right) + V\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i c_i\right) +$$
$$+ V\left[a_f\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right)\right] + V\left[c_f\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\sigma_{Ci}^2 + \left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right)^2\sigma_f^2 \quad (5.16),$$

in jo lahko preoblikujemo v (Alexander 1989, 206):

$$V_P = \sigma_P^2 = V(r_P) = \sigma_{eP}^2 + b_P^2\sigma_f^2 \quad (5.17),$$

kjer je:

$$\sigma_{eP}^2 = \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\sigma_{Ci}^2 \quad (5.18),$$

$$b_P = \left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_i\right) \quad (5.19).$$

Iz enačbe 5.17 vidimo, da je tveganje sestavljeno iz dveh delov: tveganje vsote posameznih vrednostnih papirjev, ki predstavlja nefaktorsko tveganje in tveganja faktorja. Tveganje faktorja je bolj znano pod imenom sistematično tveganje, nefaktorsko tveganje pa je bolj znano pod imenom nesistematično tveganje.

Analizirajmo obnašanje tveganja portfelja, če povečujemo število tveganih vrednostnih papirjev. Vzemimo, da so deleži vrednostnih papirjev enaki, zato velja:

$$\omega_i = \frac{1}{N} \quad (5.20).$$

Izraz b_P predstavlja povprečje parametrov b_i, zato se z večanjem N ne veča ali manjša v velikem obsegu (razen ko bi namenoma dodajali vrednostne papirje z veliko oziroma majhno vrednostjo b_i). Diverzifikacija po enofaktorskem modelu vodi k povprečju tveganja faktorja – sistematičnega tveganja.

Izraz σ_{eP}^2 pa se z večanjem N drastično zmanjšuje. Zapišimo enačbo 6.16, ki predstavlja nefaktorsko tveganje – nesistematično tveganje, z upoštevanjem pogoja 6.18:

$$\sigma_{eP}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \right)^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{N} \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_N^2}{N} \right) \qquad (5.21).$$

Izraz v oklepaju je povprečno nefaktorsko tveganje, ki ga sestavljajo tveganja vrednostnih papirjev in se sam ne spreminja veliko, vendar pa je pomnožen z *1/N*, ki pa se z večanjem zmanjšuje. Diverzifikacija v enofaktorskem modelu zmanjšuje nefaktorsko tveganje – nesistematično tveganje.

Opisani diverzifikaciji, kjer je ω_i=1/N, pravimo naivna diverzifikacija in ni nujno da je optimalna. Klemkosky in Martin (1975, 153) sta primerjala portfelje, sestavljenih iz vrednostnih papirjev z visokimi b_i in portfelje, sestavljenih iz papirjev z nizkimi b_i, ter ugotovila da morajo visoki b_i portfelji vsebovati več papirjev kot nizki b_i portfelji, da zagotovijo primerljivo stopnjo diverzifikacije.

Kakor je že bilo omenjeno, je Sharpe model razvil, da bi hitreje izračunal efektivno mejo. Diagonalni model ima obliko (Sharpe 1963,283):

izberi takšno kombinacijo deležev tveganih vrednostnih papirjev: ω_i, i=1…N+1,
kjer je:

$$\max\left[\lambda R_P - V_P\right] \qquad (5.22),$$

kjer sta :

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + a_f \sum_{i=1}^{N} \omega_i b_i = \sum_{i=1}^{N+1} \omega_i a_i \qquad (5.23),$$

$$V_P = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_i \right)^2 \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{N+1} \omega_i^2 \sigma_i^2 \qquad (5.24),$$

kjer velja $a_f = a_{n+1}$ in $\sigma_f^2 = \sigma_{n+1}^2$, ter dodatno uvedemo $\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_i = \omega_{n+1}$

pri omejitvah:

$$\omega_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots N \qquad (5.26).$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \qquad (5.25),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_i = \omega_{n+1} \qquad (5.26).$$

Enofaktorski model je sicer manj natančen kot model sredina-varianca (Sharpe 1963, 277), vendar je zaradi hitrosti izračuna zelo primeren za delo z velikim številom vrednostnih papirjev. Učinkovita meja, ki jo dobimo s tem modelom je podobna učinkoviti meji izračunani s pomočjo sredina-varianca. V model lahko uvedemo tudi netvegani vrednostni papir – izračuni so identični kot v poglavju 4.3.

5.2 VEČFAKTORSKI MODELI

Večfaktorski modeli so nastali kot odgovor na vprašanje, ali je en faktor dovolj, da natančno opiše donos i-tega vrednostnega papirja. Stanje gospodarstva odločilno vpliva na naša pričakovanja glede gibanja donosov vrednostnih papirjev. Gospodarstvo je kompleksna tvorba in lahko najdemo nekaj vplivov, ki jih lahko prepoznamo in bi znali vplivati na donosnost vrednostnih papirjev (Alexander 1989, 207):

1. pričakovanja glede stopnje rasti bruto narodnega dohodka
2. pričakovanja glede realne obrestne mere
3. pričakovanja glede stopnje inflacija
4. pričakovanja glede bodočih cen nafte

V večfaktorskih modelih je donos i-tega tveganega vrednostnega papirja odvisen od več faktorjev[13]:

$$r_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \cdots + b_{iM}F_M + c_i = a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik}F_k + c_i \qquad (5.27),$$

kjer je:
r_i –donos i-tega vrednostnega papirja
a_i –parameter i-tega vrednostnega papirja, je konstanta
b_{ik} – parameter i-tega vrednostnega papirja pri k-tem faktorju
F_k – nivo k-tega faktorja, je slučajna spremenljivka
c_i – slučajna spremenljivka i-tega vrednostnega papirja, ki je normalno porazdeljena, z matematičnim upanjem 0 in varianco σ_{Ci}^2

Vrednost k-tega faktorja je določena z:

$$F_k = a_{fk} + c_{fk} \qquad (5.28),$$

kjer je:
a_{fk} – parameter k-tega faktorja, je konstanta
c_{fk} – slučajna spremenljivka, ki ima matematično upanje 0 in varianco σ_{fk}^2

Model predvideva tudi, da so slučajne spremenljivke c_i med posameznimi vrednostnimi papirji neodvisne, prav tako so neodvisne c_i in slučajna spremenljivka k-tega faktorja c_{fk} :

$$\operatorname{cov}(c_i, c_j) = 0 \text{ za vse } i \neq j \qquad (5.29),$$

$$\operatorname{cov}(c_i, c_{fk}) = 0 \text{ za vse } k \qquad (5.30).$$

Enačba 5.27 predstavlja model za večkratno ali multiplo regresijo in parametre a_i, b_{ik} in σ_i izračunamo s pomočjo metode za izračun večkratne regresije (Jesenko, 2001, 319).

---

[13] William F. Sharpe. (1999). *Factor models*. [online]. Dostopno na: http://www.stanford.edu/~wfsharpe/mia/fac/mia_fac3.htm [28.8.2004].

Pričakovan donos i-tega vrednostnega papirja je:

$$\mu_i = E(r_i) = E\left[a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik} F_k + c_i \right] = a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik} a_{fk} \qquad (5.31).$$

Varianca donosa i-tega vrednostnega papirja je:

$$\sigma_{Vi}^2 = V\left(a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik} F_k + c_i \right) = V\left[a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik} \left(a_{fk} + c_{fk} \right) + c_i \right] \qquad (5.32).$$

Če upoštevamo, da so slučajne spremenljivke c_i in c_{fk} neodvisne, a_i in a_{fk} pa so konstante in zato neodvisne ter dodatno predvidevamo, da so faktorji med seboj neodvisni (Sharpe 1970, 125) lahko zapišemo (izpeljava je podobna kot pri enofaktorskem modelu):

$$\sigma_i^2 = \sigma_{Ci}^2 + \sum_{k=1}^{M} b_{ik}^2 \sigma_{fk}^2 \qquad (5.33).$$

Kovariance med posameznimi vrednostnimi papirji izrazimo kot:

$$\operatorname{cov}(r_i, r_j) = c_{ij} = E\left[(r_i - E(r_i))(r_j - E(r_i)) \right] = \sum_{k=1}^{M} b_{ik} b_{jk} \sigma_{fk}^2 \qquad (5.34).$$

Donos portfelja, sestavljenega iz N tveganih vrednostnih papirjev

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik} F_k + c_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i + c_i) + \left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i \sum_{k=1}^{M} b_{ik} \left(a_{fk} + c_{fk} \right) \right] \qquad (5.35),$$

kjer velja: $\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1$

Ker je r_P slučajna spremenljivka, vzamemo za pričakovani donos matematično upanje (Sharpe 1970, 124):

$$\begin{aligned} R_P &= E(r_P) = E\left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i + c_i) + \left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i \sum_{k=1}^{M} b_{ik} \left(a_{fk} + c_{fk} \right) \right] \right] = \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i \right) + E\left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i \sum_{k=1}^{M} b_{ik} a_{fk} \right] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i \sum_{k=1}^{M} b_{ik} a_{fk} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{k=1}^{M} a_{fk} \sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{k=1}^{M} a_{fk} b_{Pk} \end{aligned} \qquad (5.36),$$

kjer je:

$$b_{Pk} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} \qquad (5.37).$$

Varianca donosa portfelja pa je (Sharpe 1970, 125):

$$V_P = \sigma_P^2 = V(r_P) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{k=1}^{M} \sigma_{fk}^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i \, b_{ik} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{k=1}^{M} \sigma_{fk}^2 b_{Pk}{}^2 \tag{5.38}$$

Tudi tu velja podobna ugotovitev kot pri enofaktorskih modelih – diverzifikacija zmanjšuje nesistematično tveganje. Dobro diverzificiran portfelj ima tako samo sistematično tveganje.

Prav tako lahko izvedemo optimizacijo portfelja. Model ima obliko:
izberi takšno kombinacijo deležev tveganih vrednostnih papirjev: ω_i, i=1…N+M,
kjer je:

$$\max[\lambda R_P - V_P] \tag{5.39}$$

kjer sta :

$$R_P = E(r_P) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{k=1}^{M} a_{fk} \sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} = \sum_{i=1}^{N+M} \omega_i a_i \tag{5.40}$$

$$V_P = \sigma_P^2 = V(r_P) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{k=1}^{M} \sigma_{fk}^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i \, b_{ik} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N+M} \omega_i^2 \sigma_i^2 \tag{5.41}$$

kjer velja $a_{fk} = a_{n+k}$ in $\sigma_{fk}^2 = \sigma_{n+k}^2$, ter dodatno uvedemo $\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} = \omega_{n+k}$

pri omejitvah:

$$\omega_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots N \tag{5.42}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \tag{5.43}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} = \omega_{n+k} \tag{5.44}$$

Učinkovita meja, ki jo dobimo s tem modelom je podobna učinkoviti meji izračunani s pomočjo sredina-varianca. V model lahko uvedemo tudi netvegani vrednostni papir – izračuni so identični kot v poglavju 4.3.

6 CAPITAL ASSET PRICING MODEL - CAPM

6.1 Ravnotežje na trgu kapitala

Temelje CAPM[14] so neodvisno[15] drug od drugega položili Jack Treynor (1961), William Sharpe (1964) in John Lintner (1965) na osnovah analize sredina – varianca in Tobinovega ločevalnega teorema.

Model je bil ustvarjen z namenom, da bi opisoval ravnotežje donosov tveganih vrednostnih papirjev na trgu kapitala. Model nam omogoča natančno (teoretično) napovedovanje razmerja med tveganjem vrednostnega papirja in njegovim donosom.

Model je zgrajen na osnovah modela sredina – varianca z netveganim vrednostnim papirjem in predpostavlja (Aleksander 1989, 167, Lintner 1965, 15, Sharpe 1970, 80) :

1. Vsi investitorji sprejemajo cene vrednostnih papirjev kot dane in njihovi nakupi ne vplivajo na ceno vrednostnih papirjev.
2. Vsi investitorji optimizirajo portfelj po modelu sredina – varianca
3. Vsi investitorji imajo enaka predvidevanja o sredinah in variancah vseh vrednostnih papirjev in kovariancah med njimi.
4. Vsak investitor si lahko sposodi ali posodi kakršenkoli znesek po dani netvegani obrestni meri. Obrestna mera je enaka, ne glede ali gre za depozit ali kredit; enaka je za vse investitorje.
5. Prazne prodaje (short selling) so dovoljene in niso omejene.
6. Čas držanja (holding period) investicije je enak.
7. Obseg investicij je omejen na javno dostopna finančna sredstva, kot so delnice, obveznice in netvegana posojila in krediti.
8. Model ne upošteva davka na dobiček in stroške transakcij.
9. Informacije so takoj in neomejeno dostopne vsem investitorjem, trg je učinkovit.

Pogoji so zelo omejujoči in nedvomno nerealni, vendar Sharpe meni, da je pomembna sprejemljivost rezultatov modela, ne realnost njenih postavk (Sharpe 1964, 434).

Če se vsi investitorji ravnajo po predpostavkah modela, bodo (morajo) ob dani donosnosti netveganega vrednostnega papirja (enaka za vse investitorje) izbrali enak najbolj učinkovit portfelj tveganih vrednostnih papirjev.

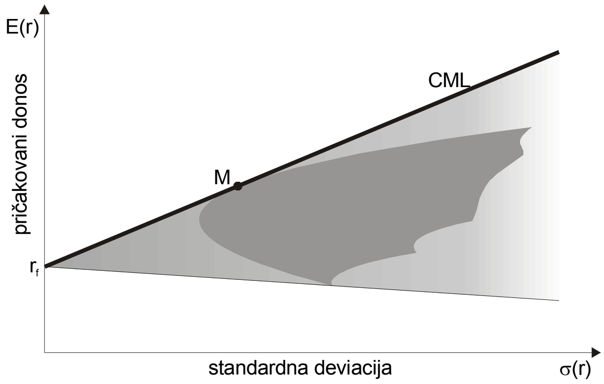
---

[14] Slovenski prevod je "model določanja cen dolgoročnih naložb", večinoma pa se uporablja kratica CAPM.

[15] Lintner je v opombi v svojem članku omenil, da je bil njegov članek že v končni fazi in na poti v tiskarno, ko je bil objavljen Sharpov članek. Sharpe pa je v svojem članku v opombi omenil, da je po koncu priprave članka izvedel, da je podoben model že razvil Jack Treynor - *Towards a theory of market value of risky assets* (1961), katerega rokopis ni bil objavljen.

Na sliki 12 je prikazana možna množica portfeljev, sestavljenih iz tveganih vrednostnih papirjev in netveganega vrednostnega papirja. Premico, ki izhaja iz točke donosnosti netveganega vrednostnega papirja in se dotika množice tveganih vrednostnih papirjev imenujemo premica trga kapitala CML – capital market line.

SLIKA 12: PREMICA TRGA KAPITALA - CML



kjer je:
r_f – obrestna mera netveganega vrednostnega papirja
M – tržni portfelj
CML – capital market line (premica trga kapitala)

Vir: Sharpe (1970, 81).

6.1.1 Tržni portfelj

V ravnotežju ga sestavljajo vsi tvegani vrednostni papirji, relativni delež i-tega tveganega vrednostnega papirja v celotnem portfelju je enak razmerju njegovega kapitala (število enot i-tega vrednostnega papirja pomnoženih z njegovo ravnotežno ceno) glede na kapital celotnega trga (Sharpe 1970, 81).Vsi investitorji želijo[16] imeti vrednostne papirje, ki sestavljajo tržni portfelj (optimalni portfelj) in pomanjkanje zanimanja za vrednostni papir, ki ni v tržnem portfelju, bo povzročilo padec cene papirja do nivoja, kjer ga bodo vsi investitorji ocenili za zanimivega in ga vključili v tržni portfelj. Podobno se zgodi z vrednostnim papirjem, ki je v tržnem portfelju: zaradi zanimanja vseh vlagateljev mu raste cena do meje, ko bodoči donosi niso veliki, zato vsi investitorji izgubijo zanimanje zanj in mu cena pade. Takšna gibanja cen vrednostnih papirjev povzročijo, da v ravnotežju vsi tvegani vrednostni papirji sestavljajo tržni portfelj (Sharpe 1965, 435).

6.1.2 Premica trga kapitala - CML (capital market line)

Predstavlja množico optimalnih porteljev, ki jih dobimo s kombinacijo tržnega porftelja in netveganega vrednostnega papirja. Posamezni investitor se odloči na podlagi svojih preferenc, kolikšen delež premoženja bo vložil v netvegani vrednostni papir, koliko pa v tržni portfelj.

[16] Kakor je bilo omenjeno v predpostavkah, model predvideva, da so vsi investitorji racionalni.

Zapišimo premico trga kapitala CML z enačbo:

$$R_P = r_f + S_{CML}\sigma_P \qquad (6.1),$$

kjer je:
R_P – bodoči pričakovani donos učinkovitega portfelja
σ_P – standardni odklon (tveganje) učinkovitega portfelja
S_{CML} –naklon CML
Naklon CML izrazimo z:

$$S_{CML} = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M} \qquad (6.2),$$

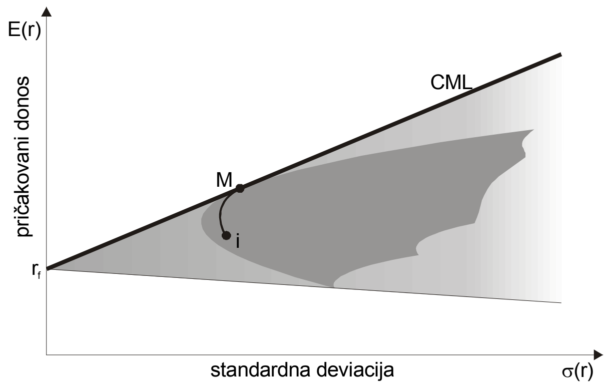
kjer je:
R_M – bodoči pričakovani donos tržnega portfelja
σ_M – standardni odklon (tveganje) tržnega portfelja

Dobili smo linearno relacijo med pričakovanim donosom učinkovitega portfelja in njegovim tveganjem, ki je preko naklona CML povezana s tržnim portfeljem. Ta relacija pa ne drži za neučinkovite portfelje in posamezne tvegane vrednostne papirje, ki ne ležijo na CML. Za njih bo potrebno ugotoviti novo relacijo.

6.1.3 Premica trga vrednostnih papirjev - SML (security market line)

Slika 13 prikazuje i-ti vrednostni papir in kombinacije portfeljev s tržnim portfeljem, ki jih prikazuje krivulja iM.

SLIKA 13: KRIVULJA iM – KOMBINACIJA i-TEGA VREDNOSTNEGA PAPIRJA IN TRŽNEGA PORTFELJA



kjer je:
M – tržni portfelj
i – i-ti vrednostni papir

Krivulja *iM*, ki povezuje točki *i* in *M*, je množica neučinkovitih portfeljev dobljenih s kombinacijo i-tega vrednostnega papirja in tržnega portfelja. Za analizo bomo uporabili analizo sredina-varianca (predstavljena v 4. poglavju)

Varianca kombinacije i-tega vrednostnega papirja in tržnega portfelja je (4. poglavje):

$$V_P = \sigma_P^2 = \omega_i^2 \sigma_i^2 + \omega_M^2 \sigma_M^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_i \sigma_M r_{iM} \quad (6.3),$$

kjer je:
ω_i – relativni delež investiran v i- ti vrednostni papir
ω_M – relativni delež investiran v tržni portfelj
σ_i – standardni odklon i-tega vrednostnega papirja
σ_M – standardni odklon tržnega portfelja
r_{iM} – koeficient korelacije

Ker velja :
$$\omega_i + \omega_M = 1 \quad (6.4),$$
in
$$r_{iM} = \frac{c_{iM}}{\sigma_i \sigma_M} \quad (6.5).$$

Enačbo 6.3. lahko preoblikujemo v:

$$\sigma_P = \sqrt{\omega_i^2 \sigma_i^2 + (1-\omega_i)^2 \sigma_M^2 + 2\omega_i (1-\omega_i) c_{iM}} \quad (6.6).$$

S spreminjanjem vrednosti ω_i dobimo krivuljo *iM* na sliki 13 . Želimo ugotovili, kakšen naklon ima krivulja *iM* pri $\omega_i = 0$, ko je celotni delež v tržnem portfelju. V tej točki (v pogojih ravnotežja) bo vseeno neki delež i-tega vrednostnega papirja v tržnem portfelju[17]. Zanima nas odziv standardnega odklona portfelja na spremembo ω_i , zato enačbo 6.6 parcialno odvajamo po ω_i :

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial \omega_i} = \frac{\omega_i (\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2c_{iM}) + c_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_P} \quad (6.7).$$

Prav tako nas zanima odziv pričakovanega donosa portfelja na spremembo ω_i . Pričakovani donos je :

$$R_P = \omega_i \mu_i + (1-\omega_i) R_M \quad (6.8),$$
kjer je:
μ_i – bodoči pričakovani donos i-tega tveganega vrednostnega papirja
R_M – bodoči pričakovani donos tržnega portfelja

Enačbo 6.8. parcialno odvajamo po ω_i :

$$\frac{\partial R_P}{\partial \omega_i} = \mu_i - R_M \quad (6.9).$$

[17] V ravnotežju je tržni portfelj je sestavljen iz vseh delnic na trgu.

Naklon krivulje v točki M izrazimo:

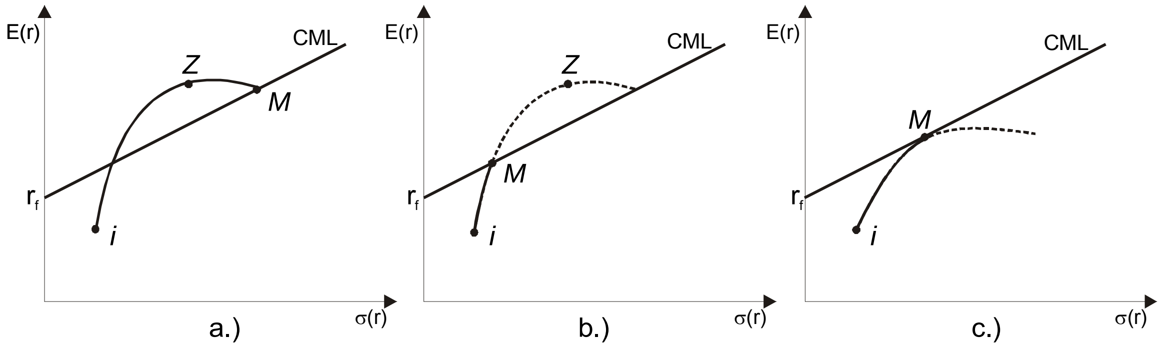
$$\frac{\partial R_P}{\partial \sigma_P} = \frac{\partial R_P / \partial \omega_i}{\partial \sigma_P / \partial \omega_i} = \frac{\mu_i - R_M}{\left[\omega_i(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2c_{iM}) + c_{iM} - \sigma_M^2\right] / \sigma_P} \tag{6.10}$$

V točki M velja: $\omega_i = 0$ in $\sigma_P = \sigma_M$, ter dobimo:

$$\left.\frac{\partial R_P}{\partial \sigma_P}\right|_{\omega_i = 0} = S_M = \frac{\mu_i - R_M}{\left(c_{iM} - \sigma_M^2\right) / \sigma_M} = \frac{\left(\mu_i - R_M\right)\sigma_M}{c_{iM} - \sigma_M^2} \tag{6.11}$$

V čem je pomen naklona krivulje *iM* ? V točki M mora biti krivulja *iM* tangencialna na CML. Predpostavimo primere a.), b.) in c.), ki jih prikazujemo na sliki 13:

SLIKA 14: MOGOČI POTEK KRIVULJE iM



Vir: Sharpe (1970, 88).

Za CML velja, da predstavlja učinkovito mejo možnih portfeljev, sestavljenih iz kombinacije tržnega portfelja in netveganega vrednostnega papirja. V primeru a.) vidimo, da možne kombinacije i in M začrtajo krivuljo portfeljev, ki so nad mejo premice trga kapitala CML – kar je neskladno z modelom. V primeru b.) lahko razmišljamo na naslednji način (Sharpe 1964, 437): ko je $\omega_i = 0$ smo v točki M, toda v tržnem portfelju je vseeno del i-tega vrednostnega papirja. Če hočemo i-ti papir popolnoma odstraniti iz tržnega portfelja, mora biti $\omega_i < 0$, kar nas pripelje do nove krivulje portfeljev, ki so nad mejo CML – kar je zopet neskladno z modelom. Vidimo, da je v ravnotežju edina možna rešitev, ko se krivulja *iM* tangencialno dotika CML, kar je prikazano na primeru c.).

Naklona krivulje *iM* in premice trga kapitala CML morata biti v ravnotežju enaka, kar opišemo z enačbo:

$$S_{iM} = S_{CML} \tag{6.12}$$

kjer je:

S_{iM} – naklon krivulje *iM* v točki M

S_{CML} – naklon CML

Enačbo 6.12 razvijemo v:

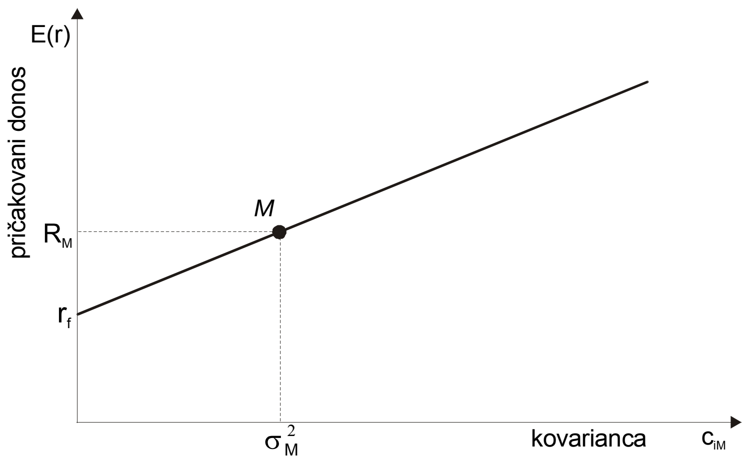
$$\frac{(\mu_i - R_M)\sigma_M}{c_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M} \tag{6.13}$$

in jo preuredimo:

$$\mu_i = r_f + \left(\frac{R_M - r_f}{\sigma_M^2}\right) c_{iM} \tag{6.14}$$

V ravnotežju bo pričakovani donos i-tega vrednostnega papirja linearno odvisen od kovariance med njim in tržnim kapitalom. Premico imenujemo premica trga vrednostnih papirjev – SML (security market line), ki je prikazana na sliki 15.

SLIKA 15: PREMICA TRGA VREDNOSTNIH PAPIRJEV - SML



Vir: Sharpe (1970, 90).

Enačba 6.14 velja za vse tvegane vrednostne papirje, prav tako pa tudi za učinkovite ali neučinkovite portfelje. Naredimo primer za dva tvegana vrednostna papirja: p_1 in p_2.

Pričakovani donos bo:

$$R_Z = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 \tag{6.15}$$

Kovarianco portfelja Z izračunamo z uporabo definicije kovariance:

$$\operatorname{cov}(r_i, r_j) = c_{ij} = E\left[\left(r_{i(t)} - \mu_i\right)\left(r_{j(t)} - \mu_j\right)\right] \tag{6.16}$$

kjer je:

$r_{i(t)}$, $r_{i(t)}$, – trenutna vrednost donosa i-tega in j-tega vrednostnega papirja v času t

$$\begin{aligned} c_{ZM} &= E\left[\left(r_{z(t)} - R_Z\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right)\right] = E\left[\left(\left(\omega_1 r_{1(t)} + \omega_2 r_{2(t)}\right) - \left(\omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2\right)\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right)\right] = \\ &= E\left[\omega_1\left(r_{1(t)} - \mu_1\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right) + \omega_2\left(r_{2(t)} - \mu_2\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right)\right] \end{aligned} \tag{6.17}$$

Uporabimo lastnost matematičnega upanja (Jamnik 1987, 132):

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \tag{6.18}$$

in dobimo:

$$c_{ZM} = \omega_1 E[(r_{1(t)} - \mu_1)(r_{M(t)} - R_M)] + \omega_2 E[(r_{2(t)} - \mu_2)(r_{M(t)} - R_M)] = \omega_1 c_{1M} + \omega_2 c_{2M} \tag{6.19}$$

Glede na deleža ω_1 in ω_2 se bo portfelj Z nahajal na premici med p_1 in p_2.
Ugotovitev lahko posplošimo: v ravnotežju se bodo vsi tvegani vrednostni papirji in vsi možni portfelji (tudi tržni portfelj) nahajali na premici SML.

Uporabimo predstavno moč slike 15 in izrazimo naklon SML:

$$S_{SML} = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M^2} \tag{6.20}$$

in enačbo 6.14 zapišemo kot:

$$\mu_i = r_f + S_{SML} c_{iM} \tag{6.21}$$

Naredimo povzetek: relacijo med učinkovitimi portfelji in tržnim portfeljem smo lahko elegantno, linearno izrazili z CML. Na podoben način smo hoteli najti podobno elegantno relacijo med vsemi tveganimi vrednostnimi papirji (in vsemi portfelji izraziti relacijo med vsemi tveganimi vrednostnimi papirji (dejansko med vsemi portfelji) in tržnim portfeljem, kar nam je uspelo, zopet linearno, s SML.

Relacijo med vsemi učinkovitimi portfelji in tržnim portfeljem opišemo z enačbama:

$$R_P = r_f + S_{CML} \sigma_P \tag{6.22}$$

$$S_{CML} = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M} \tag{6.23}$$

Relacijo med vsemi tveganimi vrednostnimi papirji (in vsemi portfelji – učinkovitimi in neučinkovitimi) in tržnim portfeljem pa opišemo z enačbama:

$$\mu_i = r_f + S_{SML} c_{iM} \tag{6.24}$$

$$S_{SML} = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M^2} \tag{6.25}$$

Razjasnimo kako korelacija c_{iM} vpliva na tveganje tržnega portfelja. V tržnem portfelju imamo N tveganih vrednostnih papirjev, relativni delež i-tega vrednostnega papirja je ω_{iM}.

Uporabimo definicijo kovariance in izrazimo varianco tržnega portfelja kot:

$$
\begin{aligned}
\sigma_M^2 &= c_{MM} = \\
&= E\left[\left(r_{M(t)} - R_M\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right)\right] = \\
&= E\left[\left(\left(\omega_{1M} r_{1(t)} + \omega_{2M} r_{2(t)} + \ldots + \omega_{NM} r_{N(t)}\right) - \left(\omega_{1M}\mu_1 + \omega_{2M}\mu_2 + \ldots + \omega_{NM}\mu_N\right)\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right)\right] = \\
&= E\begin{bmatrix} \omega_{1M}\left(r_{1(t)} - \mu_1\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right) + \omega_{2M}\left(r_{2(t)} - \mu_2\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right) + \ldots + \\ + \omega_{NM}\left(r_{N(t)} - \mu_N\right)\left(r_{M(t)} - R_M\right) \end{bmatrix} = \\
&= \omega_{1M} c_{1M} + \omega_{2M} c_{2M} + \cdots + \omega_{NM} c_{NM}
\end{aligned} \qquad (6.26).
$$

Vidimo, da i-ti tvegani vrednostni papir prispeva k tveganju (varianci) tržnega portfelja s kovarianco c_{iM} in deležem ω_{iM} v tržnem portfelju.

Žal kovarianca c_{iM} ni tako intuitivna mera kot standardni odklon σ_P (Sharpe 1970, 95). Preoblikujmo enačbo 6.24 in dobimo:

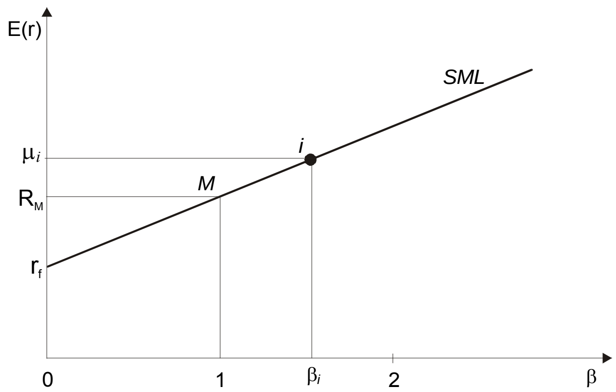
$$\mu_i = r_f + \left(R_M - r_f\right)\left(\frac{c_{iM}}{\sigma_M^2}\right) \qquad (6.27).$$

Bodoči donos i-tega tveganega vrednostnega papirja je tako linearna funkcija razlike med donosom tržnega portfelja in obrestne mere (R_M - r_f), kar imenujemo tudi *premija za tveganje* in je bolj intuitivna mera kot kovarianca. Ulomek v oklepaju imenujemo **beta koeficient** (ali samo **beta**) in ga označimo z β:

$$\beta_i = \frac{c_{iM}}{\sigma_M^2} \qquad (6.28).$$

Tvegani vrednostni papirji z β_i>1 bodo ležali na SML nad tržnim porfeljem.

SLIKA 16: TRŽNI PORTFELJ IN β



Enačbo 6.27 lahko preoblikujemo v:

$$(\mu_i - r_f) = (R_M - r_f)\beta_i \qquad (6.29).$$

Enačba lepo prikaže, da si lahko β_i predstavljamo kot koeficient, ki nam pove, za koliko se poveča (β_i >1) *premija za tveganje i-tega tveganega vrednostnega papirja* (μ_i - r_f) glede *premije tveganja tržnega portfelja* (R_M - r_f), oziroma zmanjša, če je β_i <1. β_i tako predstavlja *občutljivost* pričakovanega donosa i-tega vrednostnega papirja glede na gibanje pričakovanega donosa tržnega portfelja:

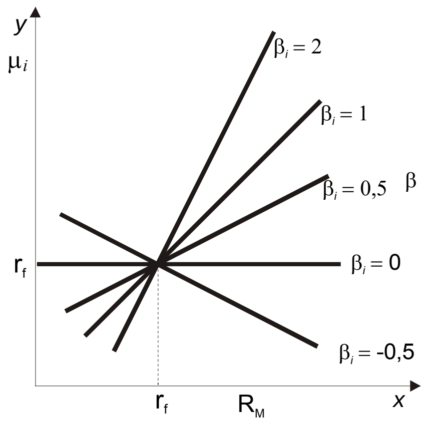
$$\mu_i = r_f + (R_M - r_f)\beta_i \qquad (6.30).$$

Če upoštevamo enačbi 6.19 in 6.28, ugotovimo, da lahko β za nek portfelj, sestavljen iz dveh tveganih vrednostnih papirjev izračunamo kot :

$$\beta_P = \omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2 \qquad (6.31).$$

V sliki opišemo razmerje med donosnostjo i-tega vrednostnega papirja (μ_i na *y*-osi) in donosnostjo tržnega portfelja (R_M na *x*-osi). Posamezna premica predstavlja *karakteristično premico i-tega vrednostnega papirja*, β_i pa predstavlja naklon i-te karakteristične premice.

SLIKA 17: KARAKTERISTIČNE PREMICE TVEGANIH VREDNOSTNIH PAPIRJEV



Vir: Sharpe (1970, 96).

Vrednostne papirje z β_i > 1 pojmujemo kot agresivne (Sharpe 1970, 93), ker se nihanja donosa tržnega portfelja izražajo v še večjem nihanju donosa i-tega vrednostnega papirja. Nasprotno pojmujemo vrednostne papirje z β_i < 1 kot defenzivne, saj se nihanja donosa tržnega portfelja izražajo v manjšem nihanju donosa vrednostnega papirja. Vrednostnemu papirju z β_i = 1 se donosnost z gibanjem bodoče donosnosti tržnega portfelja ne spreminja, tak portfelj ima c_{iM} = 0 in ne prispeva k tveganju portfelja – je netvegani vrednostni papir, ki pa ima tudi donosnost netvegane obrestne mere. Vrednostni papirji z β_i < 0 (c_{iM} < 0) so izredno redki, saj pomeni, da se njihove donosnosti gibajo v nasprotni smeri od gibanja donosnosti portfelja, vendar lahko v kombinacijami z drugimi vrednostnimi papirji sestavijo netvegani portfelj, ki pa mora v ravnotežju imeti donos netvegane obrestne mere (Sharpe 1970, 96).

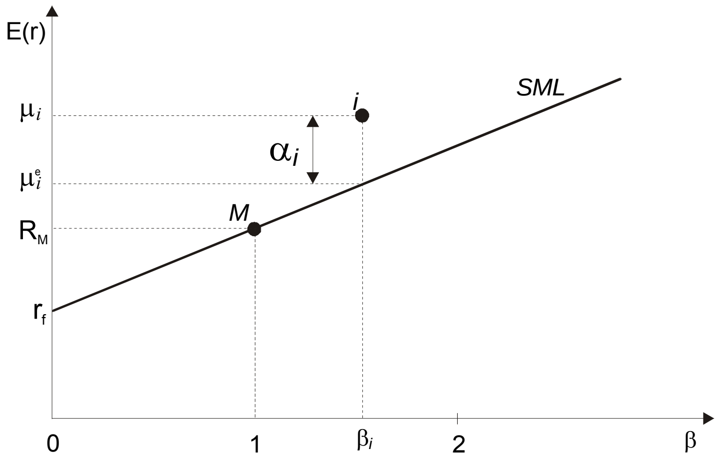
Po CAMP se bodo bodoče cene vrednostnega papirja ustalile v ravnotežju. Bodoči donos (relativna razlika med ceno papirja na začetku investicije in pričakovano ceno na koncu investicije) v ravnotežju leži na premici trga vrednostnih papirjev – SML in vsi investitorji imajo nek delež sredstev investiran v tržni portfelj, ki je po CAMP najbolj učinkovit portfelj. Model na ta način vzpodbuja pasivno investicijsko strategijo, saj je dovolj, da del ali vsa sredstva vložimo v tržni portfelj oziroma v praksi v tak portfelj, ki dovolj dobro posnema trg. Prednost pasivne strategije je v tem, da je povezana z nizkimi stroški, ker ni potrebno imeti zaposlene visoko plačane strokovnjake za analizo trga. Tako so se pojavili indeksni vzajemni skladi, katerih provizija je manjša do aktivno upravljanih skladov.

6.2 Neravnotežje

Veliko investitorjev oziroma finančnih posrednikov vlaga veliko časa v iskanje vrednostnih papirjev, ki naj bi bili v neravnotežju. Z analizo vrednostnega papirja (tehnična in temeljna analiza) poskušajo ugotoviti bodočo donosnost. Pričakovana donosnost po CAPM lahko služi kot referenčna točka za ugotavljanje neravnotežja (Bodie, Kane in Marcus 1999, 260). Ločimo dva primera neravnotežja (Alexander in Sharpe 1989, 187):

1. Vrednostni papir je podcenjen, če je z analizo izračunana pričakovana donosnost večja od izračunane pričakovane donosnosti po CAPM – pričakovan donos se nahaja nad SML, kar je prikazano na sliki 18.
2. Vrednostni papir je precenjen, če je njegova z analizo izračunana pričakovana donosnost manjša od izračunane pričakovane donosnosti po CAPM – pričakovan donos se nahaja pod SML.

SLIKA 18: PRIČAKOVANI DONOS V NERAVNOTEŽJU



Vir: Bodie, Kane in Marcus (1999, 261).

Odmik pričakovane donosnosti i-tega vrednostnega papirja od pričakovane donosnosti dobljene po CAPM imenujemo **alfa** in ga označimo z α_i in ga izrazimo kot:

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_i^e \quad (6.32),$$

kjer je:

μ_i - pričakovani donos i-tega vrednostnega papirja dobljen z analizo

μ_i^e - pričakovani bodoči donos i-tega vrednostnega papirja v ravnotežju po CAPM

V neravnotežju investitor oziroma finančni posrednik ne bo izbral tržnega portfelja, temveč bo v svoj portfelj vključil podcenjene papirje in izločil precenjene papirje.

Pomembno je opomniti (Alexander in Sharpe 1989,188), da investitorji nimajo enotnega mnenja, kateri tvegani vrednostni papirji so precenjeni oziroma podcenjeni. Vsak investitor naredi lastno analizo vrednostnega papirja in rezultati seveda niso enaki.

V neravnotežju torej lahko zapišemo:

$$\mu_i - r_f = \alpha_i + (R_M - r_f)\beta_i \qquad (6.33).$$

Ker model kot vhodne podatke uporablja pričakovane donose, je dejanski donos vrednostnega papirja različen od izračunanega. Obstojata dva vira negotovosti (Sharpe 1970, 96):

1. Dejanska vrednost R_M je negotova.
2. Odstopanje dejanskih vrednosti od SML je negotovo.

Dejansko donosnost torej lahko zapišemo kot:

$$r_i - r_f = \alpha_i + (R_M - r_f)\beta_i + e_i \qquad (6.34),$$

kjer je:
r_i – dejanski donos
R_M – donos tržnega portfelja in je slučajna spremenljivka – odraža negotovost dejanske vrednosti RM
e_i – slučajna spremenljivka – odraža negotovost odmika od SML

ki je sicer po obliki zelo podobna enofaktorskemu modelu (enačba 5.1 v 5. poglavju):

$$r_i = a_i + b_i F + c_i \qquad (6.35),$$

kjer je:
r_i –donos i-tega vrednostnega papirja
a_i,b_i – parametra i-tega vrednostnega papirja, sta konstanti
F – nivo nekega faktorja, je slučajna spremenljivka
c_i – slučajna spremenljivka i-tega vrednostnega papirja, ki je normalno porazdeljena, z matematičnim upanjem 0 in varianco σ_i^2

Roll in Ross (1980, 1074) ravno zaradi te podobnosti menita, da je CAPM tako razširjen med teoretiki in praktiki. Ne šteje njegova izpeljava na podlagi teorije koristnosti (posredno preko analize sredina-varianca), temveč izračun na podlagi nekega faktorja.

7 APT - ARBITRAGE PRICING THEORY

Teorijo je razvil Stephen Ross leta 1976 na osnovi arbitraže. Arbitraža nastane, kadar imamo na trgu dve ceni istega vrednostnega papirja. Po višji ceni vrednostni papir prazno prodamo (short sale) in dobljen denar porabimo za nakup istega vrednostnega papirja po nižji ceni. Razlika med cenama je naš gotovi (netvegani) dobiček. V samo transakcijo nismo vložili lastnih sredstev, torej smo s sredstvi neomejeni in lahko z velikim prometom ustvarimo velike dobičke. Seveda želijo vsi udeleženci na trgu izvesti arbitražo, zato se ceni vrednostnega papirja kmalu izenačita. Vzemimo sedaj enostavni primer portfelja, katerega neto investicija je enaka nič. Sestavimo ga iz dveh netveganih vrednostnih papirjev, ki imata različne donose. Papir z nižjim donosom prazno prodamo in nakupimo papir z višjim donosom. Praktično to pomeni, da si sposodimo denar po nižji obrestni meri in ga posodimo po višji obrestni meri. Donos je razlika med obrestnimi merami in ni tvegan – naredili smo arbitražo. Tak portfelj imenujemo arbitražni portfelj. Seveda bodo zopet vsi hoteli imeti enak portfelj, kar bo povzročilo izenačenje donosov. V ravnotežju mora imeti arbitražni portfelj donos nič.
V nadaljevanju si oglejmo, kako lahko sestavimo arbitražni portfelj skozi APT (Roll in Ross, 1980).

Teorija predvideva:

- trg je učinkovit
- prazne prodaje (short sale) so dovoljene in neomejene
- investitorji enotno verjamejo, da donos i-tega vrednostnega papirja ustvarja generatorski k-faktorski model (k-factor generating model)

Generatorski k-faktorski model opišemo z enačbo:

$$r_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \cdots + b_{iM}F_M + c_i = a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik}F_k + c_i \qquad (7.1),$$

kjer je:
r_i –donos i-tega vrednostnega papirja
a_i –parameter i-tega vrednostnega papirja, je konstanta
b_{ik} – parameter i-tega vrednostnega papirja pri k-tem faktorju, predstavlja občutljivost donosa r_i na spremembe faktorja F_k
F_k – nivo k-tega faktorja, je slučajna spremenljivka
c_i – slučajna spremenljivka i-tega vrednostnega papirja, ki je normalno porazdeljena, z matematičnim upanjem 0 in varianco σ_i^2, predstavlja nesistematično tveganje, značilno za vsak i-ti vrednostni papir.

Vrednost k-tega faktorja je določena z:

$$F_k = a_{fk} + c_{fk} \qquad (7.2),$$

kjer je:
a_{fk} – parameter k-tega faktorja, je konstanta
c_{fk} – slučajna spremenljivka, ki ima matematično upanje 0 in varianco σ_f^2

Teorija dodatno predvideva:

$$E(c_i) = 0 \tag{7.3}$$,

značilna (nesistematična) tveganja vrednostnih papirjev so med seboj neodvisna:
$$\mathrm{cov}(c_i, c_j) = 0 \text{ za vse } i \neq j \tag{7.4}$$,

povprečna vrednost faktorja je nič:
$$E(F_k) = 0 \tag{7.5}$$,

značilno (nesistematično tveganje) je neodvisno(nekolerirani) od tveganj faktorja:
$$\mathrm{cov}(c_i, F_k) = 0 \text{ za vse } i \text{ in } k \tag{7.6}$$,

različni faktorji so neodvisni (nekorelirani) med seboj:
$$\mathrm{cov}(F_k, F_m) = 0 \text{ za vse } k \neq m \tag{7.7}$$,

Izrazimo pričakovano donosnost in upoštevamo 7.2 in 7.4:

$$E(r_i) = \mu_i = a_i \tag{7.8}$$,

izraz vstavimo v enačbo 7.1 in dobimo:

$$r_i = \mu_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \cdots + b_{iM}F_M + c_i = \mu_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik}F_k + c_i \tag{7.9}$$,

Sedaj sestavimo neto ničelni investicijski portfelj – neto investicija je enaka nič:

$$\begin{aligned} r_P &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(a_i + \sum_{k=1}^{M} b_{ik}F_k + c_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i \sum_{k=1}^{M} b_{ik}F_k + \sum_{i=1}^{N} \omega_i c_i = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{k=1}^{M} F_k \sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} + \sum_{i=1}^{N} \omega_i c_i \end{aligned} \tag{7.10}$$,

kjer velja:
$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 0 \tag{7.11}$$.

Vzemimo, da imamo neto ničelni investicijski portfelj sestavljen tako, da so investicije v posamezni i-ti tvegani vrednostni papir enake, s čimer zagotovimo, da je portfelj dobro diverzificiran:
$$\omega_i = \frac{1}{N} \tag{7.12}$$.

Izberimo[18] i-te tvegane vrednostne papirje tako, da odpravimo vpliv faktorjev, s čimer zagotovimo, da neto ničelni investicijski portfelj ne bo imel sistematičnega tveganja:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} = 0 \tag{7.13}$$

Enačba 7.5 tako dobi obliko:

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i c_i \tag{7.14}$$

V primeru, da je število tveganih vrednostnih papirjev v portfelju veliko, se izraz:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i c_i \tag{7.15}$$

približa ničelni vrednosti. c_i je slučajna spremenljivka i-tega vrednostnega papirja, ki je normalno porazdeljena, z srednjo vrednostjo 0. Izračunamo lahko torej le varianco[19]:

$$V\left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i c_i\right) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i\right) = \frac{1}{N^2} V\left(\sum_{i=1}^{N} c_i\right) = \frac{N\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N} \tag{7.16}$$

Varianca portfelja se z večanjem N zmanjšuje proti 0, in donos portfelja (enačba 7.10) lahko izrazimo kot:

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i c_i \approx \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i \tag{7.17}$$

Pokazali smo, da je moč sestaviti neto ničelni investicijski portfelj, ki nima niti sistematičnega niti nesistematičnega tveganja. V pogojih ravnotežja mora imeti tak portfelj donosnost nič, saj bi bil drugače tak portfelj arbitražni portfelj.

Sestavimo nov arbitražni neto ničelni investicijski portfelj tako, da vanj vnesemo nov tvegani vrednostni papir. To storimo tako, da i-ti tvegani vrednostni portfelj prodamo in nakupimo j-tega. Nov portfelj mora zopet imeti donos nič, prav tako vsi mogoči portfelji, ki jih sestavimo. Ravnotežne sile, ki izničijo arbitražo, delujejo v zveznem času.

---

[18] Nekatere papirje prazno prodamo (short sale), druge kupimo.

[19] Upoštevamo, da so c_i neodvisne in zato lahko upoštevamo lastnost variance: $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Imamo torej naslednje pogoje:

$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 0$ - neto ničelni investicijski portfelj (7.18),

$\sum_{i=1}^{N} \omega_i a_i = 0$ - ravnotežni pogoj neto ničelnega investicijskega portfelja (7.19),

$\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{i1} = 0$, $\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{i2} = 0, \dots,$ $\sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{iM} = 0$ - pogoji za netvegani arbitražni portfelj (7.20).

Zgornje pogoje lahko zapišemo v matrični obliki (Renström 2002, 4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{M1} & b_{M2} & \cdots & b_{M3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \cdots \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7.21),$$

Matrika je reda *(2+k)×N*, vektor deležev ω je reda *N×1*, in vektor ničel reda (2+*k*)×*1*. Ker s produktom matrik dobimo vektor ničel, to implicira, da katerokoli vrstico matrike lahko izrazimo z linearno kombinacijo drugih vrstic (vrstice so linearno odvisne).

Tako za vsak a_i lahko napišemo:

$$a_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \cdots + \lambda_k b_{ik} \qquad (7.22).$$

Najdimo tak portfelj, kjer je $a_i = \lambda_0$, kar pomeni, da portfelj ni odvisen od faktorjev in ni tvegan:

$$r_f = \lambda_0 \qquad (7.23).$$

Pričakovana donosnost i-tega vrednostnega papirja je (enačba 7.7):

$$\mu_i = E(r_i) = a_i \qquad (7.24).$$

Enačbo 7.16 sedaj lahko preoblikujemo:

$$\mu_i - r_f = \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \cdots + \lambda_k b_{ik} \qquad (7.25).$$

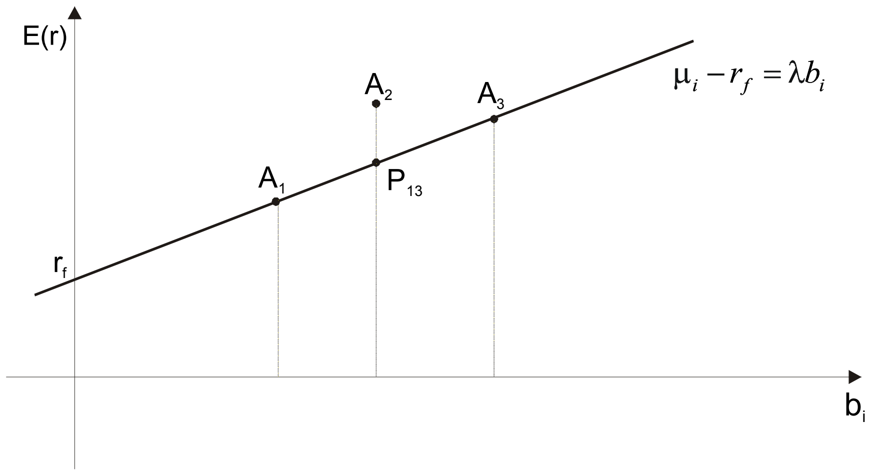
Premija za tveganje ($\mu_i - r_f$) je pri i-tem tveganem papirju linearna kombinacija faktorskih premij za tveganje.

Analizirajmo λ in se omejimo samo na en faktor (imamo samo eno sistematično tveganje):

$$\mu_i - r_f = \lambda b_i \quad (7.26),$$

in imamo vrednostne papirje A_1, A_2 in A_3. S kombiniranjem A_1 in A_3 lahko sestavimo portfelj P_{13}, ki ima enako sistematično tveganje (enako odzivnost od edinega faktorja) kot vrednostni papir A_2, a nižji pričakovani donos, kar je prikazano na sliki 19. S prazno prodajo A_1 in A_3 v enakih deležih kot sestavljata portfelj P_{13} in z nakupom A_2, bi ustvarili arbitražni portfelj (prazna prodaja P_{13} v bistvu pomeni, da smo si sposodili sredstva po nižji "obrestni" meri in jih vložili v A_2, ki ima večji donos). Če natančneje pogledamo, tu ni prave arbitraže, ki je povezana z netveganim dobičkom, ampak govorimo o tvegani arbitraži (Bodie, Kane in Marcus 1999, 310). V ravnotežju morajo donosi vseh portfeljev in vseh vrednostnih papirjev ležati na isti premici – naklon premice mora biti za vse vrednostne papirje in portfelje enak.

SLIKA 19: ARBITRAŽNI PORTFELJ



Vir: Roll in Ross (1980, 1079).

Vrnimo se k enačbi 7.25 in pojasnimo pomen faktorske premije za tveganje. Če sestavimo portfelj s pričakovanim donosom $R_j = E(r_j)$, ki ima samo eno sistematično tveganje in je torej odvisen samo od enega faktorja ter ima b_j=1, lahko vsak λ_j zapišemo kot:

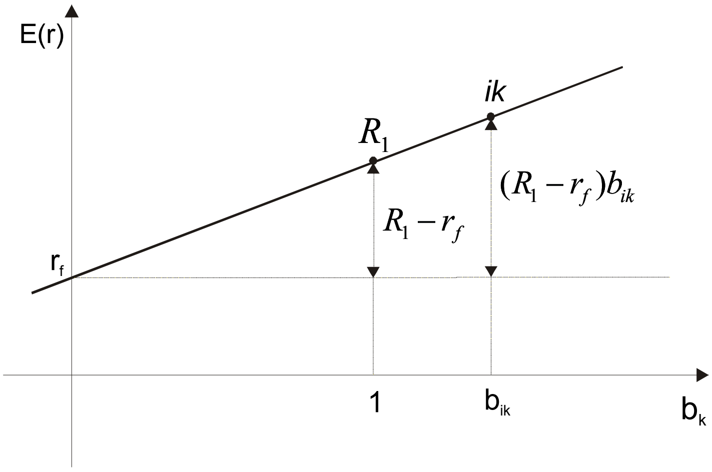
$$\lambda_j = R_j - r_f \quad (7.27),$$

Premija za tveganje k-tega faktorja je razlika med pričakovanim donosom portfelja s samo enim sistematičnim tveganjem faktorja j in donosom netveganega vrednostnega papirja. Enačbo 7.25 tako zapišemo kot:

$$\mu_i - r_f = (R_1 - r_f)b_{i1} + (R_2 - r_f)b_{i2} + \cdots + (R_k - r_f)b_{ik} \quad (7.28).$$

Vidimo, da je premija za tveganje vrednostnega papirja (velja tudi za portfelj) seštevek posameznih k-tih premij za tveganje. Vsi pričakovani donosi (tako vrednostnih papirjev kakor portfeljev) morajo v ravnotežju ležati na isti premci, kar prikazuje slika 20:

SLIKA 20: PREMIJE ZA TVEGANJE PRI POSAMEZNEM FAKTORJU



Ker je za ravnotežje odgovorna možnost (tvegane) arbitraže in z njo povezano povpraševanje in ponudba po vrednostnih papirjih, verjetnostna porazdelitev donosov vrednostnega papirja ni pomembna za analizo, kar je prednost glede na CAPM, ki temelji na analizi sredina-varianca, kjer se predvideva, da ima donos normalno porazdelitev ali/in kvadratično funkcijo koristnosti.

Postavi se vprašanje, ali je tržni portfelj (iz CAPM) lahko eden izmed faktorjev. Kot dobro diverzificiran portfelj bi res utegnil imeti samo sistematično tveganje in bi lahko služil kot nadomestek za nek faktor. V bistvu lahko vsak dobro diverzificiran portfelj služi kot nadomestek za nek faktor in na splošno lahko najdemo *k* dobro diverzificiranih portfeljev, ki bi nadomestili *k* faktorjev bolj kot katerikoli enojni tržni indeks. Tržni portfelj ne igra nikakršne ključne vloge kot jo v CAPM.

Z enačbo 7.28 smo izrazili premijo za tveganje za posamezni vrednostni papir v ravnotežju. Vemo, da morajo v ravnotežju vsi donosi ležati na isti premici, kar je prikazano s slikama 19 in 20, zato lahko napišemo:

$$R_P - r_f = (R_1 - r_f)b_{P1} + (R_2 - r_f)b_{P2} + \cdots + (R_k - r_f)b_{Pk} \qquad (7.29),$$

posamične občutljivosti portfelja od k-tega faktorja pa lahko izrazimo kot[20]:

$$b_{Pk} = \omega_1 b_{1k} + \omega_2 b_{2k} + \cdots + \omega_N b_{Nk} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i b_{ik} \qquad (7.30).$$

[20] Uporabimo enačbo 5.37, 5.poglavje.

Varianco portfelja pa zapišemo kot[21]:

$$V_P = \sigma_P^2 = V(r_P) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{k=1}^{M} \sigma_{Ci}^2 b_{Pi}^{\ 2} \qquad (7.31).$$

Slaba stran APT je, da ne določa nobenega posebnega faktorja. Faktorje in njihovo število je treba določiti s statistično metodo – faktorsko analizo.

Chen, Roll, and Ross (1986) so našli naslednjih pet makroekonomskih faktorjev za določanje strukture donosa vrednostnih papirjev:

1. Mesečna stopnja rasti industrijske produkcije v ZDA
2. Spremembe v pričakovani inflaciji
3. Nepričakovana inflacija
4. Nepričakovane spremembe privzete premije za tveganje, merjene kot razlika med donosom portfelja korporacijskih obveznic, ki so ocenjene kot "BAA in nižje" in donosom portfelja dolgoročnih državnih obveznic ZDA.
5. Nepričakovane spremembe v časovni strukturi obrestne mere, merjena kot razlika med dolgoročnimi državnimi obveznicami ZDA in med donosi enomesečnih zakladnih menic ZDA.

Cagnetti (2002, 22) je v primeru italijanskega trga kapitala našel druge faktorje, kar vodi k sklepu, da je za posamezni trg kapitala vedno potrebno narediti faktorsko analizo.

APT uporabljamo (Bodie, Kane in Marcus, 1999, 318) podobno kot CAPM za ugotavljanje bodočih donosov vrednostnih papirjev in portfeljev, zaradi večfaktorske narave teorije pa lahko ugotovimo, na katera tveganja (tveganje faktorja) moramo biti posebno pozorni.

[21] Uporabimo enačbo 5.38, 5.poglavje.

8 MEDNARODNA DIVERZIFIKACIJA

8.1 Donos tuje investicije

Če se odločimo, da bomo investirali samo na domačem trgu, smo se odrekli morebitni boljši diverzifikaciji, ki se pojavijo na tujih finančnih trgih (trenutno je na svetu okoli 100 borz[22]).

Pri poslovanju s tujimi borzami se srečamo z dodatnima tveganjema (Bodie, Kane in Marcus 1999, 794): politično tveganje in devizno tveganje. Politično tveganje je povezano z negotovostjo pretvorbe tuje valute v domačo (tuje vlade namreč lahko spremenijo zakonodajo in tako delno ali popolnoma preprečijo zamenjavo valut), sprememba davčne politike, sprememba politike na področju trgovanja z vrednostnimi papirji za tuje investitorje in ostale spremembe poslovne klime v državi (na primer: vojna, teroristične grožnje…).

Devizno tveganje pa je povezano z nihanjem valutnega tečaja in njegovo bodočo vrednostjo v času zamenjave, ko donose v tujih vrednostnih papirjih zamenjamo v domačo valuto.

Donos investicije v domači tvegani vrednostni papir (Alexander in Sharpe, 1989, 629) zapišemo kot[23]:

$$r_D = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \qquad (8.1).$$

kjer je:
P_1- cena na koncu investicijskega obdobja
P_0 – cena na začetku investicijskega obdobja

Donos investicije v tuj tvegani vrednostni papir zapišemo kot:

$$r_T = \frac{X_1 P_1 - X_0 P_0}{X_0 P_0} \qquad (8.2),$$

kjer je:
X_1 - srednji devizni tečaj na koncu investicijskega obdobja
X_0 - srednji devizni tečaj na začetku investicijskega obdobja

Donos, ki je nastal zaradi spremembe deviznega tečaja zapišemo kot:

[22] Viri na intranetu navajajo različno število borz, podatek je povzet po Investopedia.com.[online]. Dostopno na: http://www.investopedia.com/categories/stockexchanges.asp [10.9.2004].
[23] Zaradi enostavnejše razlage ne upoštevamo dividend, ki jih morebiti dobimo v investicijskem obdobju.

$$r_F = \frac{X_1 - X_0}{X_0} \qquad (8.3).$$

Iz enačb 8.1, 8.2 in 8.3 lahko izrazimo:

$$1 + r_T = (1 + r_D)(1 + r_F) \qquad (8.4),$$

kar lahko preoblikujemo v:

$$r_T = r_D + r_F + r_D r_F \qquad (8.5).$$

Ker je produkt $r_D r_F$ običajno majhen, ga lahko zanemarimo in enačbo 8.5 preoblikujemo v:

$$r_T = r_D + r_F + r_D r_F \approx r_D + r_F \qquad (8.6).$$

Pričakovani donos tujega vrednostnega papirja je[24]:

$$E(r_T) = E(r_D) + E(r_F) = \mu_D + \mu_F \qquad (8.7).$$

Variance donosa tujega vrednostnega papirja je[25]:

$$V(r_T) = \sigma_T^2 = \sigma_D^2 + \sigma_F^2 + 2c_{DF} = \sigma_D^2 + \sigma_F^2 + 2\sigma_D \sigma_F r_{DF} \qquad (8.8),$$

kjer je:
c_{DF} – kovarianca med domačo in tujo valuto
r_{DF} – korelacijski koeficient med domačo in tujo valuto

Ker ima lahko korelacijski koeficient vrednostni med –1 in 1, vidimo, da je lahko varianca tujega vrednostnega papirja manjša od običajne vsote variance domačega donosa in variance donosa v tuji valuti.

Pozitivni donos zaradi spremembe deviznega tečaja lahko pokrije negativni donos (izguba) tujega tveganega vrednostnega papirja.

Tveganje zaradi spremembe deviznega tečaja lahko omilimo ali v celoti odpravimo (Solnik 1996,107 in Zbašnik 1996, 162-181)) z uporabo izvedenih finančnih instrumentov (sklenemo terminsko pogodbo o prodaji tuje valute, kupimo valutno put opcijo) ali z izposojo tuje valute za financiranje investicije.

---

[24] Uporabimo lastnost matematičnega upanja (Jamnik 1987, 132): $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

[25] Uporabimo lastnost variance (Jamnik 1987, 136): $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$.

Investitor ali finančni posrednik, ki želi sestaviti mednarodni portfelj, se mora soočiti z določenimi ovirami (Solnik 1996, 116):

1. Seznanitev s tujimi trgi kapitala

V dobi globalne mreže – Interneta je lažje dobiti potrebne informacije, vendar so vseeno ovire pri pravilni razlagi letnih poročil tujega podjetja (različni računovodski standardi). Z večjim številom delnic se povečuje tudi zahtevnost analize, kar za seboj potegne večje število analitikov in/ali bolj zmogljivo programsko in strojno opremo.

2. Regulacija trga

V nekaterih državah omejujejo vrednost, ki jo lahko domači investitor investira v tuje vrednostne papirje. Obstajajo tudi omejitve, s katerimi hočejo države preprečiti špekulacije na svojih trgih kapitala (uvedba skrbniških računov v Sloveniji in na Hrvaškem).

3. Učinkovitost trga kapitala

Vsi trgi kapitala tudi niso učinkoviti – primer je slovenski trg kapitala (Mramor et al. 2000, 343). Nekateri trgi so zelo majhni in nelikvidni.

4. Stroški

Stroški mednarodne investicije so praviloma višji. Različne so tudi davčne stopnje in način obračunavanja davka (na transakcijo, na kapitalski dobiček in na dohodek (dividende in podobno)) (Solnik 1996, 191).

Vsekakor pa te ovire ne smejo odvrniti investitorja oziroma finančnega posrednika od analize diverzifikacije v mednarodnem merilu.

V nadaljevanju si bomo ogledali primerne modele za analizo diverzifikacije.

8.2 Model sredina-varianca

Markowitzov model sredina-varianca (poglavje 4.) je uporaben za analizo mednarodne diverzifikacije. Vhodne podatke (pričakovana donosnost, varianca in kovariance med njimi) lahko določimo na dva načina:

1. Sprejmemo devizno tveganje

   V tem primeru za donos tveganega papirja velja enačba 8.2:

   $$r_T = \frac{X_1 P_1 - X_0 P_0}{X_0 P_0} \qquad (8.9).$$

   Vse donose preračunamo na domačo valuto in nato določimo pričakovane bodoče vhodne podatke.

2. Zavarujemo se pred deviznim tveganjem

   Sklenemo terminsko pogodbo o prodaji tuje valute, kupimo valutno put opcijo ali si izposodimo tuje valute za financiranje investicije, kar pa prinese dodatni strošek zavarovanja, ki ga moramo na koncu upoštevati pri izračunu donosnosti portfelja.

V primeru popolnega zavarovanja ni deviznega tveganja in tudi za donos tujega vrednostnega papirja velja enačba 8.1:

$$r_D = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \qquad (8.10).$$

V model sredina-varianca lahko uvedemo tudi netvegani vrednostni papir, kjer pa moramo upoštevati, da postanejo tuji netvegani vrednostni papirji za nas zaradi nihanja deviznega tečaja tvegani (razen v primeru, ko se zavarujemo pred deviznim tveganjem).

Gerke, Mager in Röhrs (2004) so z Markowitzovim modelom sredina-varianca analizirali učinkovite meje mednarodne diverzifikacije z vidika nemškega investitorja. Za vhodne podatke so vzeli indekse, ki jih izračunava podjetje Morgan Stanley Capital Investment (MSCI). Izbrali so največje delniške trge: ZDA (USA), Japonska (J), Kanada (CND), Francija (F), Nemčija (G), Švica (CH) in Velika Britanija (UK) in dodatne, sicer manjše trge: Avstrija (A), Belgija (B), Nizozemska (NL), Španija (E), Švedska (S), Avstralija (AUS), Italija (I) in Singapur (SGP). Podatki so zajeti v obdobju januar 1980 do oktober 2001, izračuni so narejeni v smislu sprejetja deviznega tveganja (nezavarovano devizno tveganje). Letne donose in statistične mere so izračunali iz dnevnih podatkov.

Analizirali so model brez omejitev in model z omejitvami (nedovoljene prazne prodaje in maksimalni delež domačega indeksa je omejen z zgornjo mejo 25%). Za izračun Sharpovega razmerja so za netvegani vrednostni papir vzeli 3 mesečno obrestno mero za denarna sredstva, ki jo objavlja Deutsche Bundesbank.

Sharpovo razmerje je naklon premice, ki izhaja iz netveganega donosa in se dotika učinkovite meje (spoznali smo jo v poglavju 4.3), in ima enačbo:

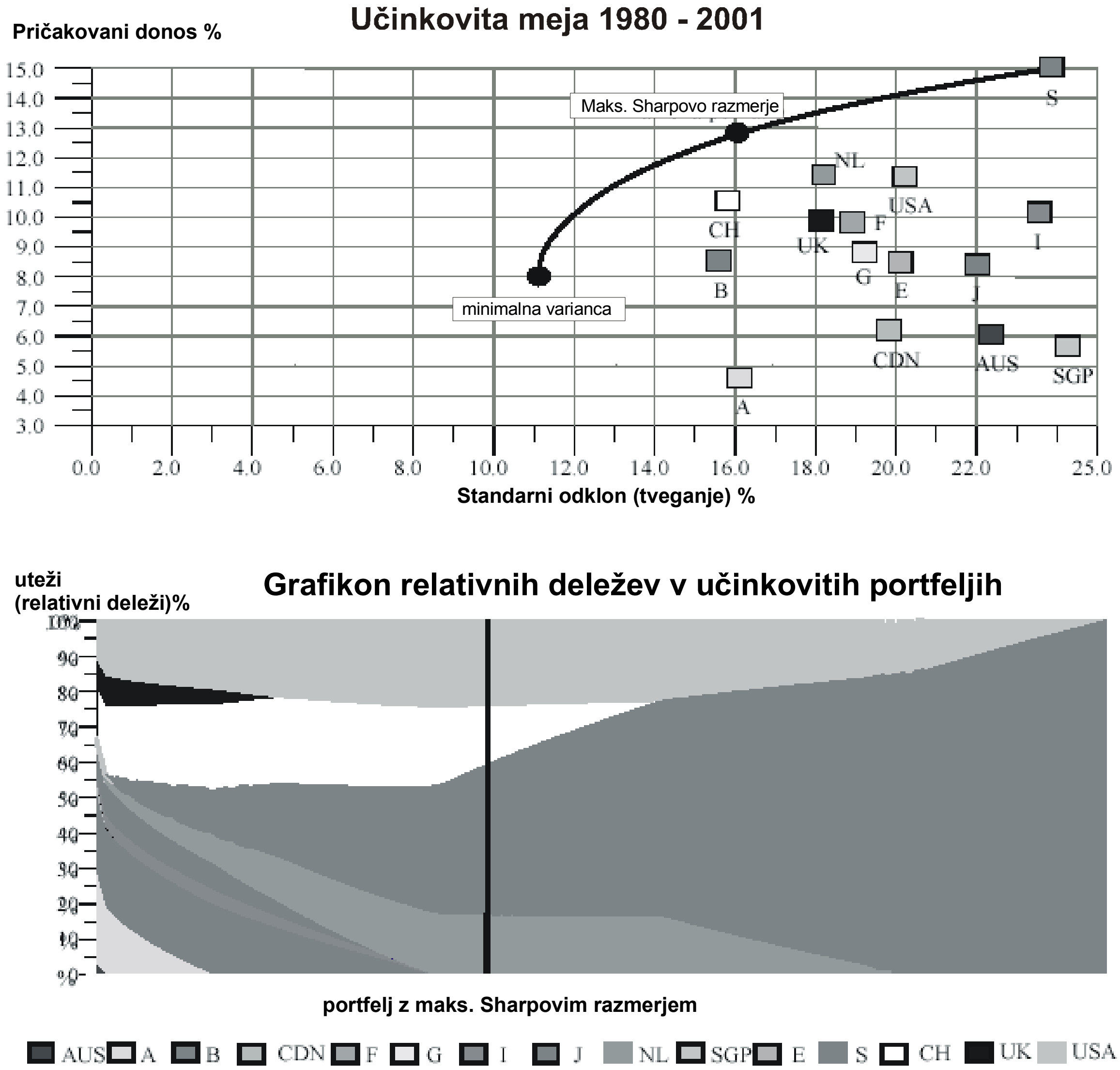
$$SR = \frac{R_P - r_f}{\sigma_M} \qquad (8.11).$$

Portfelj, ki ima najvišje Sharpovo razmerje, je najbolj učinkovit tvegan portfelj.

Slika 21 prikazuje učinkovito mejo za obdobje 1989-2001 z uporaba modela brez omejitev. Švedski indeks predstavlja skrajni portfelj z največjim pričakovanim donosom in največjim tveganjem. Spodnji grafikon prikazuje deleže posameznih indeksov v portfelju. Na levi strani se nahaja portfelj z minimalno varianco na desni pa se nahaja najbolj tvegan portfelj, ki je v celoti sestavljen iz švedskega indeksa. Relativni deleži indeksov v portfelju za največjim Sharpovim razmerjem (označen z odebeljeno črto) vsebuje 17.09% NL, 42.63% S, 16.40% CH in 23.88% USA indeksov.

Nemški investitor bi glede na pretekle podatke v letih 1980 do 2001 največji donos dosegel, če ne bi investiral v domače delnice.

SLIKA 21: UČINKOVITA MEJA NEOMEJENIH PORTFELJEV ZA OBDOBJE 1980-2001



Vir: Gerke, Mager in Röhrs (2004, 10)

V analizi so tudi poskušali ugotoviti napovedovalne zmožnosti modela, kjer so ugotovili, da v imajo zgodovinsko ugotovljeni portfelji z najvišjim Sharpovim razmerjem najslabše rezultate. Portfelji z minimalnimi variancami pa so izkazali najboljše rezultate, kar pomeni, da za izgradnjo portfelja z najboljšim razmerjem donos – tveganje lahko uporabljamo manj stroga vodila.

8.3 FAKTORSKI MODELI

Donos tuje investicije, ki jo opisuje enačba 8.6 namiguje, da so za analizo diverzifikacije primerni večfaktorski modeli:

$$r_T = r_D + r_F + r_D r_F \approx r_D + r_F \quad (8.12).$$

Solnik in Feitas (Solnik 1996, 226) sta izbrala faktorje in izračunala delež, ki ga posamezni faktor prispeva k donosom:
1. Svetovni delniški indeks.
2. Primeren mednarodni indeks industrijskega sektorja
3. Gibanje deviznih tečajev
4. Primeren domači tržni indeks

Prvi trije faktorji so mednarodni faktorji, četrti je domači faktor. Donose delnic sta analizirala s pomočjo enostavne analize regresije (R^2 – meri odstotek nihanja delnice nekega podjetja, ki ga je moč pojasniti s določenim faktorjem) in naredila povprečje za posamezne države. Analiza je pokazala, da ima domači faktor največji vpliv na donos delnice. Ravno obratno pa je dokazal Roll (Bodie, Kane in Marcus, 1999, 802), ko je spremljal gibanje regionalnih delniških indeksov med borznim zlomom septembra 1987, ko so padli vsi indeksi na večjih borzah. Padec je najbolje pojasnila beta regionalnega delniškega indeksa v odvisnosti od svetovnega indeksa.

8.4 Ravnovesni modeli

8.4.1 Mednarodni CAPM- ICAPM

Kot smo spoznali v 6.poglavju je v domačem CAPM pričakovani donos posameznega tveganega vrednostnega papirja povezan prek β_i s pričakovanim donosom tržnega portfelja:

$$\mu_i = r_f + (R_M - r_f)\beta_i \quad (8.13)$$

Če želimo domači CAPM razširiti na vse, v svetovnem merilu dosegljive vrednostne papirje in tako dobiti svetovni tržni portfelj, bi morali dodatno uvesti dve predpostavki (Solnik 1996, 140):

1. Vsi investitorji po celem svetu morajo imeti enake nakupovalne košarice (consumption basket)
2. Realne cene potrošnih dobrin (consumption goods) morajo biti enake v vsaki državi – paritete kupne moči mora biti povsod hkrati enaka

Veljava teh dodatnih postavk pomeni, da na devizni tečaj vpliva samo razlika med inflacijama dveh držav. Vendar, ker je realna kupna moč povsod enaka, ni tveganja deviznega tečaja, ki je tako zgolj pretvorno-računovodski pripomoček. Vendar je vpeljava teh dveh predpostavk le preveč nerealna, zato je potrebno v modelu upoštevati tudi valutno tveganje.

Realna kupna moč ni enak med vsemi državami, kar dolgoročno vodi k drsenju deviznih tečajev.

ICAPM , prav tako kot CAPM, predvideva, da investitorji tvegane vrednostne papirje vrednotijo z analizo sredina-varianca na podlagi domače valute. Model prav tako predvideva, da je neto količin sredstev v izposojenih in posojenih netveganih vrednostnih papirjih enaka nič.

Po CAPM je optimalni portfelj investitorja sestavljen iz tveganega portfelja, ki je skupen vsem investitorjem, in osebnega varovalnega portfelja, ki služi zmanjševanju tveganja nakupne moči. Če ne obstoja negotovost glede bodočih inflacijskih stopenj v katerikoli državi, se osebni varovalni portfelj reducira na domači netvegani vrednostni papir.

V ravnovesju bo imel tvegani vrednostni portfelj pričakovani donos:

$$\mu_i = r_f + \beta_{iw} RP_w + \gamma_{i1} RP_1 + \gamma_{i2} RP_2 + \cdots + \gamma_{ik} RP_k \qquad (8.14),$$

kjer je:
r_f – donos netveganega vrednostnega papirja (obrestna mera)
β_{iw} – občutljivost i-tega vrednostnega papirja na gibanje trga
RP_w – premija za tveganje svetovnega trga in je enaka $R_w - r_f$
γ_{ik} - občutljivosti i-tega vrednostnega papirja na valute 1 do k
RP_k - premija za tveganje za valute od 1 do k

Za vrednostni papir, ki je nekoreliran od deviznih tečajev oziroma je popolnoma zavarovan proti deviznemu tveganju, še velja domači CAPM model.

8.4.2 Mednarodna APT- IAPT

Mednarodna ATP že po svoji večfaktorski naravi in arbitražni logiki zahteva manj predpostavk kot ICAPM – zahteva samo učinkovite trge kapitala (Solnik 1983, 449).

Premija za tveganje vrednostnega papirja (velja tudi za portfelj) je, kakor smo spoznali v 7.poglavju, seštevek posameznih k-tih premij za tveganje (enačba 7.28):

$$\mu_i - r_f = (R_1 - r_f) b_{i1} + (R_2 - r_f) b_{i2} + \cdots + (R_k - r_f) b_{ik} \qquad (8.15).$$

Faktorje moramo seveda ugotoviti z metodo faktorske analize.

9 SKLEP

Diverzifikacija je osnovni princip zavarovanja proti tveganju in investitorji so ta princip intuitivno uporabljali že dolgo časa preden je Markowitz predlagal formalni opis. Že pred njem so posamezniki gradili bogato osnovo, ki jo imenujemo teorija pričakovane koristnosti, ki poskuša pojasniti naše odločitve v pogojih tveganja, kjer se srečujemo z neločljivo dvojico donos-tveganje. Teorija definira tri različne osebnostne tipe : oseba, ki se zaveda tveganja, oseba, ki je do tveganja ravnodušna in oseba, ki tveganje išče. Oseba, ki se zaveda tveganja in njena oblika krivulje pričakovane koristnosti, je postala temelj analize sredina-varianca, katere osnovno obliko je Harry Markowitz razvil leta 1952, ter pozneje tudi formalno dokazal veljavnost teorije. Največji doprinos k upravljanju tveganja je, da je izrazil pričakovani donos tveganega vrednostnega papirja s povprečno vrednostjo pričakovanega donosa, tveganje donosa pa je izrazil z varianco (standardnim odklonom). Princip diverzifikacije naložb je postal jasen – kovariance oziroma korelacijski koeficienti med donosi vplivajo na donos in tveganje portfelja. V ugodnih okoliščinah – korelacijski koeficient naj bo čim manjši – je moč z različnimi deleži tveganih vrednostnih papirjev sestaviti portfelj, ki ima manjše tveganje kot je tveganje posameznih vrednostnih papirjev. Hkrati pa je postalo jasno dejstvo, da se donos zmanjša – višina donosa je tehtano povprečje posameznih donosov. Diverzifikacija naložb tako neizogibno s seboj prinese tudi zmanjšanje donosa. Rezultat optimizacije modela je učinkovita meja – krivulja učinkovitih portfeljev – portfelji, ki imajo izmed vseh možnih največji možni donos ob najmanjšem možnem tveganju. Model sredina-varianca se ni prijel med praktiki zaradi zahtevnega računanja kovarianc. William Sharpe je leta 1963 na Markowitzov predlog razvil poenostavljen enofaktorski model, naslednje leto pa je predstavil Capital Asset Pricing - CAPM, s katerim je moč določiti donos vrednostnega papirja glede na njegovo tveganje. Investitorji so tako dobili pomembno orodje za presojanje investicij. Pomembna postavka je tudi pojem tržnega portfelja, ki je po modelu najbolj učinkovit tvegan portfelj in je za vse investitorje enak – v ravnotežju je seštevek vseh posameznih kapitalskih vrednosti tveganih vrednostnih papirjev. Ni važno, kakšne so naše sposobnosti napovedovanja prihodnjih donosov vrednostnih papirjev – v ravnotežju je tržni portfelj vedno najbolj učinkovit portfelj – zato investiramo vanj in pustimo, da trg določi donos. Tako model vzpodbuja pasivno strategijo investiranja. CAMP se s svojimi predpostavkami preveč oddalji od dejanskega stanja, zato rezultati samo približno napovedo dejansko stanje, lahko pa so tudi popolnoma neuporabni. Nerealne predpostavke CAMP so bile vzrok za nastanek Arbitrage Pricing Theory - ATP, ki jo je leta 1976 razvil Stephen Ross. Model ima osnovo v večfaktorskih modelih in predvideva, da za ravnotežje cen skrbi možnost (tvegane) arbitraže – dva portfelja, ki imata popolnoma enako občutljivost na tveganje morata imeti tudi popolnoma enaki pričakovani donos, kajti drugače lahko pride od arbitraže – prazno prodamo portfelj z nižjim donosom in jih vložimo v portfelj z višjim donosom. Seveda ima model tudi svoje slabosti, predvsem to, da ne določa faktorjev, ki vplivajo na ravnotežni donos vrednostnega papirja. Obravnavani modeli so bili razviti za upravljanje s portfeljem, omejenim na eno državo. Portfelj pa lahko sestavimo iz tudi iz tujih vrednostnih papirjev – govorimo o mednarodni diverzifikaciji, kjer pa se srečamo z dodatnima tveganjema: politično tveganje in tveganje deviznih tečajev. Poleg tega je potrebno preseči težave glede različnih kultur, jezika, drugačnih zakonov in regulative, večje stroške – toda vseeno je priporočljivo v analizi upoštevati tudi tuje vrednostne papirje, kajti možno je doseči res globalno učinkovite portfelje. Pri analizi se srečamo s problemom izbire pravega modela – model sredina-varianca se izkaže za uporabnega, APT že v osnovi upošteva več faktorjev, problem nastopi pri CAPM in enofaktorskih modelih, ki pa jih moramo razširiti z dodatnimi faktorji.

Investitor oziroma finančni posrednik mora pri vplivu diverzifikacije naložb na donosnost portfelja upoštevati naslednje:

- diverzifikacija zmanjšuje tveganje in hkrati tudi donos
- diverzifikacija ni zagotovilo za netvegani donos – vedno je prisotno tveganje, da bo donos negativen – izguba
- modeli s katerimi analiziramo in optimiziramo portfelj so zgolj groba orodja – niso kristalna krogla za napovedovanje prihodnosti

10 POVZETEK

Diplomsko delo predstavlja pomen diverzifikacije naložb na donosnost portfelja finančnega posrednika. V prvem delu je predstavljeno tveganje in negotovost ter odločitve v pogojih tveganja, ki jih raziskuje teorija pričakovane koristnosti. V drugem delu je predstavljen Markowitzov model sredina-varianca, kjer sta bila prvič matematično izražena pričakovani bodoči donos – kot sredina donosa in tveganje – kot varianca donosa. Model nadzorno prikaže pomen kovarianc med donosi na diverzifikacijo portfelja in obliko učinkovite meje. Diverzifikacija zmanjša tveganje, a tudi donos. Rezultat optimizacije modela je krivulja učinkovitih portfeljev – učinkovita meja. Zaradi zahtevnega izračuna se model (nastal leta 1952) ni uveljavil med praktiki, zato je Sharpe leta 1963 predstavil enofaktorski model, ki je izračun poenostavil. V sklopu je predstavljen tudi večfaktorski model. Nadalje sta prestavljena ravnotežna modela: Capital Asset Pricing Model –CAPM in Arbitrage Pricing Theory – APT ter njune predpostavke za zagotavljanje ravnotežja. V tretjem delu je predstavljena mednarodna diverzifikacija in modeli, ki jih uporabljamo za analizo portfelja.

Ključne besede: tveganje in negotovost, pričakovana koristnost, model sredina-varianca, učinkoviti portfelji, učinkovita meja, Capital Asset Pricing Model, CAPM, tržni portfelj, beta, Arbitrage Pricing Theory, APT, arbitraža, enofaktorski modeli, večfaktorski modeli.

Abstract

This paper provides an overview of meaning of investment diversification on return of portfolio of finance agent. In first part risk and uncertainty is presented along with decisions under uncertainty, which is part of Expected Utility Theory. In second part Markowitz's Mean-Variance model is presented, where expected return as mean of return and risk as variance of return were mathematical introduced. Model shows importance of covariance between returns to portfolio diversification and shape of efficient frontier. Diversification reduces risk but also reduces return. Result of diversification is curve of efficient portfolios – efficient frontier. The model was not accepted by practitioners because time-demanding computing (it was year 1952) therefore one factor model which reduced computing was presented by Sharpe in 1963. Multifactor model is also presented. Furthermore two equilibrium models are presented: Capital Asset Pricing Model –CAPM in Arbitrage Pricing Theory – APT along with their assumptions for obtaining equilibrium. In third part international diversification is presented and models used for portfolio analyse.

Keywords: risk and uncertainty, expected utility, mean-variance model, efficient portfolios, efficient frontier, Capital Asset Pricing Model, CAPM, market model, beta, Arbitrage Pricing Theory, APT, arbitrage, one factor model, multifactor model.

11 LITERATURA

Alexander, Gordon J., William F. Sharpe in Jeffery V. Bailey. 1993. *Fundamentals of investments.* Englewood Cliffs,.

Bodie, Zvi, Alex Kane in Alan J. Marcus, 1999. *Investments.* Boston, Massachusetts: Irwin/McGraw-Hill.

Veselinovič, D., S. Valant, M. Čas, T. Rotar, L. Gabrijelčič, T. Klemenc, S. Burian, Peter Premk, M. Dubronik in D. Mramor. 1995. *Borzni priporočnik*. Ljubljana: Gospodarski vestnik.

Jamnik, Rajko. 1986. *Verjetnostni račun in statistika*. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Zveza organizacij za tehnično kulturo Slovenije.

Jesenko, Jože. 2001. *Statistika v organizaciji in managementu*. Kranj.Moderna organizacija

Klemkosky, Robert C. in John D. Martin. 1975. The effect of market risk on portfolio diversification. *Journal of Finance* 30(March)1, 147-155

Lintner, John. 1965. The Valuation of Risk Assets and the Selection on Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics,* 1(Februar), 13-37

Levy, Haim in H. M. Markowitz. 1979. Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. *The American Economic Review,* 69 (June). 308-317

Markowitz, Harry M.. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance* 7 (March), 77-91.

Markowitz, Harry M.. 1987. *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets.* Oxford, New York : Basil Blackwell.

Mramor, Dušan, B. Aver, S. Čadež, M. Divjak, M. Gazvoda, F. Jamnik, B. Jamnik, B. Jašovič, N. Jogan, R. Kleidiest, J. Krašovec, J. Lukovac, B. Novak, M. Pahor, M. Petrič, J. Pustatičnik, M. Romih, M. Selan, G. Sluga, D.Veselinovič. B. Zupančič. M. Žnidaršič. 2000. *Trg kapitala v Sloveniji.* Ljubljana: Gospodarski vestnik.

Nai-Fu, Chen, Richard Roll in Stephen A. Ross. 1986. Economic Forces and the Stock Market. *Journal of Business* 59(July)3, 383-404

Roll, Richard in Stephen A. Ross. 1980. An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Finance* 35(Dec)5, 1073-1104

Sharpe, William F.. 1970. *Portfolio theory and capital markets*. New York: McGraw-Hill.

Sharpe, William F.. 1963. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science* 9(Jan)2, 277-294

Sharpe, William F.. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Contitions of Risk. *Journal of Finance* 3(September), 425-442

Solnik, Bruno. 1983. International Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Finance* 38(May)2, 449-458

Solnik, Bruno. 1996. *International investments.* Reading (Mass.).Addison-Wesley,

Solnik, Bruno. 1995. Why not diversify internationally rather than domestically ?. *Financial Analysts Journal* 51(Jan - Feb)1, 89-94.

Tobin, James. 1958. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies* 25, 65-85.

12 VIRI

Gonçalo L. Fonseca in Leanne Ussher. 2001.The History Of Economic Thought Website [online]. Dostopno na: http://cepa.newschool.edu/het/home.htm [16.7.2004]

William F. Sharpe. 2004.Personal Homepage [online]. Dostopno na: http://www.stanford.edu/~wfsharpe/home.htm [20.9.2004]

Thomas Renström. 2002. Economics 217,Financial Markets: Theory & Evidence: The Arbitrage Pricing Theory, APT [online]. Department of Economics, University of Rochester. Dostopno na: http://www.econ.rochester.edu/Wallis/Renstrom/Eco217/Lect_9.pdf [20.9.2004]

Arduino Cagnetti. 2002. Capital Asset Pricing Model and Arbitrage Pricing Theory in the Italian Stock Market: an Empirical Study [online]. Centre for Financial Markets Research, University of Edinburgh Management School and Economics Dostopno na: http://www.managementschool.ed.ac.uk/research/working_papers/paper_021.html [20.9.2004]

Rama V. Ramachandran. 2004. Ramachandran's Home Page [online]. NYU Stern School of Business. Dostopno na: http://pages.stern.nyu.edu/~rramacha/Chapter7.pdf [1.9.2004)

Wolfgang Gerke, Ferdinand Mager and Alexander Röhrs. 2004. Twenty Years of International Diversification from a German Perspective. [online] 7th Conference, Zürich SWX Swiss Exchange, Financial Markets and Portfolio Management. Dostopno na: http://www.fmpm.ch/docs/7th/Papers_SGF_2004/SGF706b.pdf [25.9.2004]