

## Determining European Options Values through Crank-Nicolson Method

Prof.dr. Ion LUNGU, Catedra de Informatică Economică, A.S.E. București,  
Lect.dr. Sorin MANOLE, Universitatea "Constantin Brâncoveanu" Pitești

*Options are nowadays transacted within a lot of stock exchanges worldwide. The problem of options gets a special importance due to the fact that many of the managerial decisions can be assimilated to options. The paper deals with numerical methods of financial options evaluation. The mathematical model of determining the values of an option of European type is partial differential equation with an initial condition and two boundaries conditions, and for its solving, finite differences methods can be used. Out of these methods, the Crank-Nicolson method is proposed to be used. As Crank-Nicolson method is an implicit one, applying it leads to a linear system of equations, for whose solving the LU algorithm, Gauss method, Jacobi method, Gauss – Seidel method, method of successive over-relaxations are used.*

**Keywords:** European options, values of an option, Crank – Nicolson Method, LU algorithm, Gauss method, Jacobi method, Gauss – Seidel method, method of successive over-relaxations.

### 1 Introducere

#### 1.1. Opțiuni financiare

O opțiune conferă deținătorului dreptul, dar înlătură obligația, de a tranzacționa o cantitate oarecare dintr-un activ financiar, la o dată fixată înainte și la un preț prestabilit.

Cumpărătorul unei opțiuni are dreptul, însă nu și obligația, de a cumpăra sau vinde o anumită cantitate de active suport (materiale, financiare, valutare etc.), la o dată convenită și la un preț fixat înainte.

Vânzătorul unei opțiuni își asumă irevocabil obligația de a vinde sau cumpăra o cantitate de active, la termenul de scadență, la un preț convenit, chiar dacă la momentul exercitării opțiunii piața îi este nefavorabilă.

După data expirării întâlnim opțiuni de tip **European** – care se exercită doar la exercițiu și opțiuni de tip **American** – care se pot exercita în orice moment de timp anterior scadenței.

Din punct de vedere al naturii există opțiuni de tip **call** (de cumpărare) și opțiuni de tip **put** (de vânzare).

#### 1.2. Problema evaluării opțiunilor financiare

Pentru evaluarea unei opțiuni europene este necesar să se rezolve o ecuație cu derivate parțiale cu o condiție inițială și două condiții la limită.

Vom folosi următoarele notații:  $t$  - momentul curent de timp,  $T$  - termenul de exercițiu,  $E$  - prețul de exercițiu (prețul la care se face tranzacția),  $S(t)$  (sau  $S$ ) - prețul activului suport,  $C(S,t)$  (sau  $C$ ) - prețul unei opțiuni call,  $P(S,t)$  (sau  $P$ ) - prețul unei opțiuni put,  $V(S,t) - C(S,t)$  sau  $P(S,t)$ ,  $\sigma$  - volatilitatea (abaterrea standard a valorii activului financiar),  $r$  - rata dobânzii.

Considerând  $r$  și  $\sigma$  constante în timp, problemele de determinare a valorilor unei opțiuni europene de tip call și put ( $P1$ ), respectiv ( $P2$ ) sunt

$$(P1) \begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\ C(S,T) = \max(S - E, 0) \\ C(0,t) = 0 \\ C(S,t) \approx S, \text{ când } S \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$(P1) \begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\ C(S,T) = \max(S - E, 0) \\ C(0,t) = 0 \\ C(S,t) \approx S, \text{ când } S \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$(P2) \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \\ P(S, T) = \max(E - S, 0) \\ P(0, t) = Ee^{-r(T-t)} \\ P(S, t) \rightarrow 0, \text{ când } S \rightarrow \infty \end{cases}$$

Ecuția diferențială din (P1) și (P2) se numește **ecuația Black-Scholes**. Pentru rezolvarea acestor programe trebuie să se efectueze transformări care să conducă la programe mai simple, adică la ecuația de difuzie cu o condiție inițială și două condiții la limită.

Astfel, efectuând transformările

$$\begin{cases} S = Ee^x; \quad S \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R} & (1) \\ t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}; \quad t \leq T \Rightarrow \tau \geq 0 & (2) \\ V(S, t) = Ee^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x - \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x, \tau) & (3) \\ k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} & (4) \end{cases}$$

programele (P1) și (P2) devin echivalente cu (P11), respectiv (P21)

$$(P11) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \max \left[ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0 \right] \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) \approx e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} \end{cases}$$

$$R_{hk} = \left\{ (x_n, \tau_m) \mid x_n = nh, \tau_m = mk, n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N} \right\},$$

unde  $h, k$  sunt foarte mici și reprezintă pașii de discretizare pe axa  $Ox$ , respectiv  $O\tau$ .

Deoarece  $-\infty < x < \infty$ , ne restrângem atenția asupra unui interval finit pe axa  $Ox$ , făcând limitarea

$$-N^-h \leq x \leq N^+h, \text{ cu } N^-h \text{ și}$$

$N^+h$  mari.

Conform relației (2), avem

$$(P21) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \max \left[ e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0 \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, \tau) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) \approx e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x + \frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} \end{cases}$$

Prin urmare, determinarea valorilor unei opțiuni europene de orice tip se reduce la rezolvarea următorului program generic:

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0 & (5) \\ u(x, 0) = u_0(x) & (6) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = f(x, \tau) & (7) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, \tau) = g(x, \tau) & (8) \end{cases}$$

unde formele analitice ale funcțiilor  $f, g$  și  $u_0$  depind de tipul concret de opțiune financiară ce urmează a fi evaluată. Soluția ecuației de difuzie (5) cu condiția inițială (6) și condițiile la limită (7) și (8) este o funcție definită pe domeniul  $D = \{(x, \tau) \mid x \in \mathbf{R}, \tau \geq 0\}$ .

## 2. Determinarea valorilor opțiunilor europene prin metode numerice

Găsirea soluțiilor analitice este incomodă, motiv pentru care prezintă interes determinarea unor soluții numerice.

Pentru acest lucru, în locul domeniului  $D$  luăm rețeaua

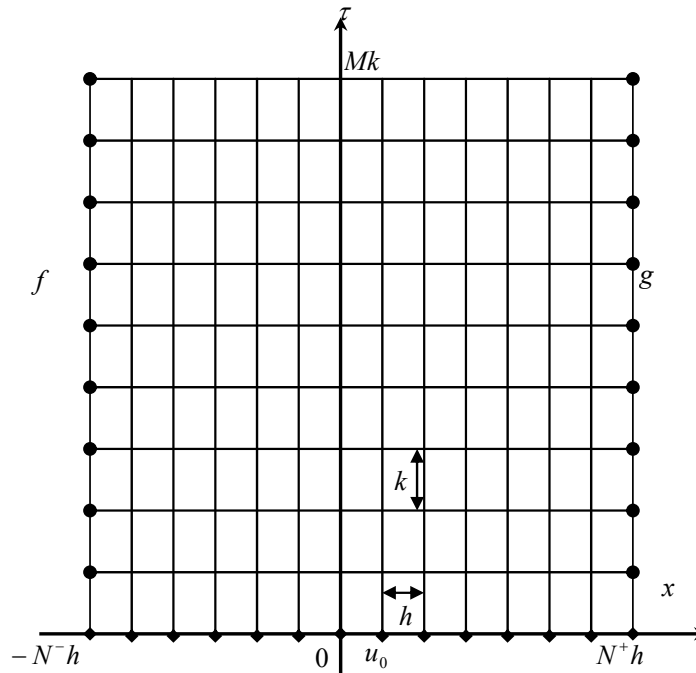
$$\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t), \text{ de unde rezultă că}$$

$$\tau \in \left[ 0, \frac{1}{2} \sigma^2 T \right]. \text{ Cum acest interval de lungime}$$

$\frac{1}{2} \sigma^2 T$  se împarte în intervale de lungime  $k$ ,

pentru nodurile rețelei considerată mai devreme avem  $0 \leq m \leq M$ , unde  $M$  este

$$\text{dat de relația } Mk = \frac{1}{2} \sigma^2 T.$$



**Fig.1.** Rețeaua de discretizare

Așadar, considerăm următoarea rețea de discretizare:

$$R'_{hk} = \{ (x_n, \tau_m) / x_n = nh, \tau_m = mk, -N^- \leq n \leq N^+, n \in \mathbf{Z}, 0 \leq m \leq M, m \in \mathbf{N} \}$$

Rezolvarea problemei (P) prin metode numerice presupune ca în fiecare nod  $(x_n, \tau_m)$  al acestei rețele să se găsească o soluție numerică  $v(x_n, \tau_m)$ , notată  $v_n^m$ , care să aproximeze valoarea exactă a soluției  $u(x_n, \tau_m)$ . Odată realizat acest lucru, pentru determinarea valorilor opțiunii este necesară utilizarea unor transformări, care sunt inversele transformă-

rilor (1), (2) și (3), pentru a se ajunge de la soluția ecuației de difuzie la soluția ecuației Black-Scholes.

**3. Metoda Cranck - Nicolson**

La metoda Cranck – Nicolson se utilizează formula

$$(1 + \alpha)v_n^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^{m+1} = (1 - \alpha)v_n^m + \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^m + \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^m \quad (9)$$

sau  $(1 + \alpha)v_n^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^{m+1} = z_n^m \quad (10)$ ,

după efectuarea notației

$$z_n^m = (1 - \alpha)v_n^m + \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^m + \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^m \quad (11), \text{ unde}$$

$$\alpha = \frac{k}{h^2}.$$

Din condițiile la limită și din condiția inițială dispunem de la început de valorile soluției în nodurile de pe frontieră situate pe laturile din dreapta, din stânga și de jos (v. Fig. 1.). Astfel, din (6), (7) și (8), la care se adaugă (10) obținem următorul program:

$$\begin{cases} (1 + \alpha)v_n^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^{m+1} = z_n^m, & -N^- < n < N^+, 0 \leq m < M \\ v_n^0 = u_0(nh), & -N^- \leq n \leq N^+ \\ v_{-N^-}^m = f(-N^-h, mk), & 0 < m \leq M \\ v_{N^+}^m = g(N^+h, mk), & 0 < m \leq M \end{cases}$$

fiind necesar să determinăm valorile  $v_n^m$ , pentru  $1 \leq m \leq M, -N^- < n < N^+$ .

Relația (10) se scrie sub forma ecuației matriceale  $Cv^{m+1} = z^m$  (12), unde  $v^{m+1}$  este vectorul coloană cu componentele  $v_{N^+-1}^{m+1}, v_{N^+-2}^{m+1}, \dots, v_0^{m+1}, \dots, v_{-N^++1}^{m+1}$ ;  $z^m$  este vectorul

coloană cu componentele  $z_{N^+-1}^m, z_{N^+-2}^m, \dots, z_0^m, \dots, z_{-N^++1}^m$ ;

$$C = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha/2 & 1+\alpha & -\alpha/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 1+\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\alpha & -\alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha/2 & 1+\alpha \end{pmatrix} \tag{13}$$

Valorile soluției în nodurile unei linii a rețelei se calculează în funcție de valorile soluției în nodurile din linia anterioară. Astfel, cu relația (11) se calculează  $z^m$  componentă cu componentă în funcție de componentele lui  $v^m$  obținut anterior. Apoi, cu  $z^m$  astfel determinat, se rezolvă sistemul  $Cv^{m+1} = z^m$ .

Fiind o metodă implicită, metoda Crank-Nicolson presupune rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare, iar în acest scop se utilizează metode directe și metode iterative. Din prima clasă vom folosi **algoritmul LU** și **metoda Gauss**, iar dintre metodele iterative (care constau în construirea unui șir de vectori ce converge la soluție) vom folosi **metoda Jacobi**, **metoda Gauss-Seidel** și **metoda suprarelaxărilor succesive**.

**3.1. Algoritmul LU**

**Teoremă.** O matrice  $A \in M_N(\mathbf{R})$  care îndeplinește condițiile  $a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \det(A) \neq 0$ , poate fi scrisă sub forma unui produs  $LU$ , unde  $L$  este matrice inferior triunghiulară, iar  $U$  matrice superior triunghiulară. În plus, descompunerea de mai sus este unică dacă elementele lui  $L$  sau  $U$  de pe diagonală principală sunt specificate.

În cazul în care matricea  $A$  este tridiagonală, descompunerea  $A = LU$  poate fi determinată imediat. Astfel, din ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} & a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{N-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & z_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{N-1} & z_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_N \end{pmatrix}$$

obținem

$$\begin{cases} u_1 = a_1, u_i = a_i - \frac{c_{i-1}b_{i-1}}{u_{i-1}}, 2 \leq i \leq N & (14) \\ z_i = c_i, 1 \leq i \leq N-1 & (15) \\ l_i = \frac{b_i}{u_i}, 1 \leq i \leq N-1 & (16) \end{cases}$$

Revenind la ecuația matriceală (12), se poate arăta că matricea  $C$  satisface condițiile din

teoremă. Mai mult,  $C$  fiind matrice tridiagonală, are loc o descompunere  $LU$  ca

mai sus, pentru care dispunem de relațiile (14) – (16) cu

$$a_i = 1 + \alpha, \quad 1 \leq i \leq N \quad (17)$$

$$b_i = c_i = -\frac{\alpha}{2}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (18)$$

Efectuând descompunerea  $C = LU$ , sistemul (12) devine  $LUv^{m+1} = z^m$  iar pentru obținerea soluției lui, se rezolvă mai întâi prin substituție directă sistemul  $Ly^m = z^m$  și se găsește soluția  $\bar{y}^m$ , iar apoi prin substituție inversă sis-

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = z_N^m \\ \bar{y}_i = z_{N-i+1}^m - \frac{b_{i-1} \bar{y}_{i-1}}{u_{i-1}} = z_{N-i+1}^m + \frac{\alpha \bar{y}_{i-1}}{2u_{i-1}}, \quad 2 \leq i \leq N \end{cases}$$

**Pasul 4.** Se determină  $\bar{v}_i$  astfel:

$$\begin{cases} \bar{v}_{-N^+ + 1} = \frac{\bar{y}_N}{u_N} \\ \bar{v}_i = \frac{\bar{y}_{N-i+1} - z_{N-i+1} \bar{v}_{i-1}}{u_{N-i+1}} = \frac{2\bar{y}_{N-i+1}^m + \alpha \bar{v}_{i-1}}{2u_{N-i+1}}, \quad -N^+ + 2 \leq i \leq N^+ - 1 \end{cases}$$

Așa cum rezultă din ultimele patru relații, sunt necesare doar mărimile  $u_i$ , nu  $z_i$  și  $l_i$ .

temul  $Uv^m = \bar{y}^m$  determinând soluția căutată  $\bar{v}^m$ .

Așadar, pentru determinarea soluției, la iterația  $m$  ( $1 \leq m \leq M$ ) să se parcurgă pașii următori:

**Pasul 1.** Se determină  $u_i$  pe baza relațiilor (14), (17) și (18), cu  $N = N^+ + N^- - 1$ .

**Pasul 2.** Se calculează componentele vectorului  $z^m$  cu ajutorul relației (11).

**Pasul 3.** Se determină  $\bar{y}_i^m$  astfel:

### 3.2. Metoda Gauss

Omitem indicele care marchează momentul de timp și scriem sistemul (12) sub forma

$$\begin{cases} a_1 v_{N^+ - 1} + c_1 v_{N^+ - 2} = z_{N^+ - 1} \\ b_1 v_{N^+ - 1} + a_2 v_{N^+ - 2} + c_2 v_{N^+ - 3} = z_{N^+ - 2} \\ \dots \\ b_{j-1} v_{N^+ - j + 1} + a_j v_{N^+ - j} + c_j v_{N^+ - j - 1} = z_{N^+ - j} \\ \dots \\ b_{N-1} v_{-N^+ + 2} + a_N v_{-N^+ + 1} = z_{-N^+ + 1} \end{cases}$$

unde  $N = N^+ + N^- - 1$  și  $a_i = 1 + \alpha$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $b_i = c_i = -\frac{\alpha}{2}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ . Cu prima ecuație se elimină  $v_{N^+ - 1}$  din a doua ecuație obținând o ecuație în  $v_{N^+ - 2}$  și  $v_{N^+ - 3}$ . Cu această ecuație se elimină  $v_{N^+ - 2}$  din ecuația a treia etc. Folosind penultima ecuație se elimină  $v_{-N^+ + 2}$  din ultima ecuație și se ajunge la o ecuație în  $v_{-N^+ + 1}$ . După determinarea lui  $v_{-N^+ + 1}$  din ultima ecuație, se găsesc și celelalte necunoscute cu ajutorul unui proces invers,

plecând de la penultima ecuație. Se observă că în acest proces de eliminare coeficientul  $c_j$  se conservă. În etapa  $j-1$  a procesului de eliminare, ecuația  $j-1$  care a fost supusă procesului de eliminare și ecuația  $j$  care urmează să fie supusă acestui proces arată astfel:

$$\begin{cases} \beta_{j-1} v_{N^+ - j + 1} + c_{j-1} v_{N^+ - j} = x_{j-1} \\ b_{j-1} v_{N^+ - j + 1} + a_j v_{N^+ - j} + c_j v_{N^+ - j - 1} = z_{N^+ - j} \end{cases}$$

După eliminarea lui  $v_{N^+ - j + 1}$  se obține

$$\left( a_j - \frac{c_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}} \right) v_{N^+-j} + c_j v_{N^+-j-1} = z_{N^+-j} - \frac{x_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}}, \quad \text{sau} \quad \text{în} \quad \text{mod} \quad \text{formalizat}$$

$\beta_j v_{N^+-j} + c_j v_{N^+-j-1} = x_j$  (19), de unde rezultă relațiile de recurență

$$\begin{cases} \beta_j = a_j - \frac{c_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}}, & j = 2, 3, \dots, N; \quad \beta_1 = a_1 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} x_j = z_{N^+-j} - \frac{x_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}}, & j = 2, 3, \dots, N; \quad x_1 = z_N \end{cases} \quad (21)$$

Odată eliminat  $v_{-N^-+2}$  din ultima ecuație, obținem  $\beta_N v_{-N^-+1} = x_N$  (22), relație din care se determină  $v_{-N^-+1}$ .

Relația (19) este una generică, care permite determinarea variabilei  $v_{N^+-j}$  în funcție de variabila anterioară  $v_{N^+-j-1}$ .

Din ecuațiile (22) și (19) se găsește soluția sistemului inițial

$$\begin{cases} v_{-N^-+1} = \frac{x_N}{\beta_N} \\ v_{N^+-j} = v_{N^+-j+1} = \frac{1}{\beta_j} (x_j - c_j v_{N^+-j-1}) \end{cases}$$

$j = N-1, N-2, \dots, 2, 1$  după ce  $\beta_j$  și  $x_j$  au fost obținute în mod recursiv cu relațiile (20) și (21).

### 3.3. Metoda Jacobi

Pentru un sistem liniar de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute scris în formă matricială  $Ax = b$ , la metoda Jacobi soluția se iterează pe baza relației de recurență

$$x_i^{(l+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(l)} \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots$$

Revenim la sistemul (12), a cărui matrice  $C$  este dată de (13) și ai cărui termeni liberi sunt dați prin relațiile (11). Prin aplicarea procedurii iterativ Jacobi se construiește un șir  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(l)}, \dots$ , care aproximează pe  $v^{m+1}$ . Cu ajutorul relațiilor (11) se calculează componentele vectorului  $z^m$  folosind componentele vectorului  $v^m$ . Dacă oținem indicele care marchează momentul de timp, obținem următoarea

toarea schemă de iterație a metodei Jacobi

$$\begin{cases} v_{-N^-+1}^{(l+1)} = \frac{1}{\alpha+1} \left( z_{-N^-+1} + \frac{\alpha}{2} v_{-N^-+2}^{(l)} \right) \\ v_n^{(l+1)} = \frac{1}{\alpha+1} \left( z_n + \frac{\alpha}{2} v_{n-1}^{(l)} + \frac{\alpha}{2} v_{n+1}^{(l)} \right), \\ v_{N^+-1}^{(l+1)} = \frac{1}{\alpha+1} \left( z_{N^+-1} + \frac{\alpha}{2} v_{N^+-2}^{(l)} \right) \end{cases}$$

$$n = -N^- + 2, -N^- + 3, \dots, 0, \dots, N^+ - 2, \quad \text{pentru } l = 1, 2, \dots$$

### 3.4. Metoda Gauss - Seidel

În cazul sistemului  $Ax = b$ , la metoda Gauss-Seidel avem formula de recurență

$$x_i^{(l+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(l+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(l)} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots$$

Revenind la sistemul (12), după efectuarea calculelor se obțin următoarele relații:

$$\begin{cases} v_{-N^-+1}^{(l+1)} = \frac{1}{\alpha+1} \left( z_{-N^-+1} + \frac{\alpha}{2} v_{-N^-+2}^{(l)} \right) \\ v_n^{(l+1)} = \frac{1}{\alpha+1} \left( z_n + \frac{\alpha}{2} v_{n-1}^{(l+1)} + \frac{\alpha}{2} v_{n+1}^{(l)} \right), \\ v_{N^+-1}^{(l+1)} = \frac{1}{\alpha+1} \left( z_{N^+-1} + \frac{\alpha}{2} v_{N^+-2}^{(l+1)} \right) \end{cases}$$

$n = -N^- + 2, -N^- + 3, \dots, 0, \dots, N^+ - 2$ , pentru  $l = 1, 2, \dots$ , care permit determinarea aproximărilor lui  $v^{m+1}$ .

### 3.5. Metoda suprarelaxărilor succesive

Pentru sistemul  $Ax = b$ , vectorul care aproximează soluția în etapa  $l+1$  este dat de relația

$$x^{(l+1)} = x^{(l)} + \omega \left( x^{-(l+1)} - x^{(l)} \right) = (1 - \omega)x^{(l)} + \omega x^{-(l+1)}$$

unde  $x^{-(l+1)}$  este aproximarea de ordin  $l + 1$  obținută prin metoda Gauss-Seidel, iar  $\omega$  o constantă, care se numește factor de relaxare. Pentru sistemul (12), aproximațiile lui  $v^{m+1}$  obținute prin acest procedeu sunt date de schema

$$\begin{cases} v_{-N^+ + 1}^{(l+1)} = \frac{\omega}{\alpha + 1} \left( z_{-N^+ + 1} + \frac{\alpha}{2} v_{-N^+ + 2}^{(l)} \right) + (1 - \omega)v_{-N^+ + 1}^{(l)} \\ v_n^{(l+1)} = \frac{\omega}{\alpha + 1} \left( z_n + \frac{\alpha}{2} v_{n-1}^{(l+1)} + \frac{\alpha}{2} v_{n+1}^{(l)} \right) + (1 - \omega)v_n^{(l)} \\ v_{N^+ - 1}^{(l+1)} = \frac{\omega}{\alpha + 1} \left( z_{N^+ - 1} + \frac{\alpha}{2} v_{N^+ - 2}^{(l+1)} \right) + (1 - \omega)v_{N^+ - 1}^{(l)} \end{cases}$$

$n = -N^+ + 2, -N^+ + 3, \dots, 0, \dots, N^+ - 2$ , pentru  $l=1, 2, \dots$

#### 4. Concluzii

Rezolvarea numerică directă a ecuației Black-Scholes creează anumite dificultăți legate de modul de alegere a pașilor de discretizare, dar și de aspecte privind convergența și stabilitatea. De aceea, se efectuează acele transformări care conduc la ecuația de difuziune, ce se rezolvă numeric mult mai comod, iar dificultățile menționate mai devreme dispar.

Dintre metodele de rezolvare a ecuației de difuzie am optat pentru metoda Crank-Nicolson, întrucât este o metodă stabilă, cu o precizie destul de bună (rata de convergență fiind  $O(h^2 + k^2)$ ), iar prin aplicarea ei se obține un sistem de ecuații a cărui matrice este

tridiagonală. Totodată, implementarea relațiilor la care se ajunge prin metodele propuse pentru rezolvarea sistemului nu este dificilă. Întrucât pasul de discretizare de pe axa  $Ox$  trebuie să fie mic și intervalul de discretizare mare, determinarea valorilor unei opțiuni implică utilizarea unor matrice de dimensiuni mari, ceea ce creează dificultăți datorită volumului mare de memorie utilizată.

#### Bibliografie

1. Hillier, B., Ibrahimo, M.V. – *The Performance of Credit under Asymmetric Information about Project Means and Variances*, Journal of Economic Studies, vol. 19, 1992, pp. 3-17
2. Morton, K.W., Mayers, D.F. – *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge, 1994
3. Manole, S. – *Numeric Methods of European Options Evaluations*, The Proceedings of the Sixth International Conference on Economic Informatics “Digital Economy”, București, may 2003, pp. 607-611
4. Myerson, R. – *Optimal Auction Design*, Mathematics of Operations Research, vol. 5, 1981, pp. 58-73
5. Vickrey, W. – *Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders*, Journal of Finance, vol. 16, 1991, pp. 8-37
6. Wilmott, P. – *Derivative. Inginerie financiară*, Ed. Economică, București, 2002