

# Aplicación de la teoría de valores extremos al gerenciamiento del riesgo<sup>1</sup>

Miguel T. Delfiner & Matías A. Gutiérrez Girault\*

Los activos en los mercados emergentes se caracterizan por una distribución de sus retornos más leptocúrtica que la de sus pares en mercados desarrollados. En este contexto se han aplicado diversas técnicas basadas en la Teoría de Valores Extremos (EVT) a un gran número de activos locales, a efectos de calcular su Valor a Riesgo (VaR). Estos resultaron ser mucho más precisos a la hora de predecir pérdidas extremas respecto a valores de VaR obtenidos bajo la hipótesis normal. Las técnicas consisten en un método estático<sup>2</sup> y un método dinámico para calcular el VaR. Este último combina una estimación por pseudo máxima verosimilitud de un modelo AR(1) – GARCH(1,1) para la volatilidad corriente y EVT para estimar la cola de la distribución de la innovación del modelo.

## I. Introducción

Los activos en los mercados emergentes tienen la característica de poseer una mayor densidad probabilística en las colas de la distribución de sus retornos, en comparación con aquellos provenientes de los mercados desarrollados, fenómeno que se conoce como efecto de colas gordas o ‘fat tails’. En el Cuadro 1 se presenta la estadística descriptiva de las distribuciones empíricas de los retornos de los activos argentinos empleados en este trabajo.

Cuadro 1

Activo	Obs.	Media	Máx.	Mín.	Desvío estándar	Sesgo	Cur-tosis	Jarque Bera (estad)	Jarque Bera (prob)	Des. Máx.	Des. Mín.
FRB	1,813	-0.00	0.14	-0.15	0.02	-0.77	27.5	45,582	0.000	8.7	8.8
PAR	1,813	0.00	0.12	-0.13	0.01	-0.34	15.0	10,855	0.000	8.3	9.3
Glob03	1,424	-0.00	0.12	-0.09	0.02	-0.35	32.8	52,548	0.000	7.4	5.9
Glob17	1,118	-0.00	0.14	-0.16	0.02	-1.66	31.9	39,417	0.000	9.1	10.3
Pre3	1,884	0.00	0.18	-0.18	0.02	-0.52	16.8	15,111	0.000	7.9	8.2
Pro2	1,884	-0.00	0.22	-0.32	0.02	-2.46	51.0	182,368	0.000	10.6	15.0
Embi+Arg	1,214	0.00	0.38	-0.22	0.04	1.71	18.5	12,719	0.000	9.6	5.5
Acindar	1,865	-0.00	0.14	-0.20	0.03	-0.30	6.0	711	0.000	4.2	5.9
Galicia	1,853	-0.00	0.28	-0.16	0.03	0.46	10.3	4,145	0.000	9.0	5.2
Telecom	1,891	-0.00	0.20	-0.16	0.03	0.45	7.5	1,636	0.000	6.9	5.5
Astra	1,669	0.00	0.18	-0.29	0.03	-0.64	12.8	6,774	0.000	6.4	10.3
Francés	1,891	-0.00	0.28	-0.52	0.03	-1.76	42.4	123,083	0.000	8.5	16.0
Renault	1,891	-0.00	0.17	-0.22	0.03	-0.17	6.1	746	0.000	5.1	6.5
Merval	1,873	-0.00	0.12	-0.15	0.02	-0.35	7.7	1,725	0.000	5.3	6.5

Se ha utilizado una muestra representativa constituida por bonos Brady (FRB y PAR), bonos Globales con vencimiento en 2003 y 2017, bonos Previsionales y acciones de seis compañías, a la vez que los índices Merval y Embi+ (Argentina). En el Cuadro 2,

\* Las opiniones de los autores no necesariamente reflejan la del Banco Central de la República Argentina.

<sup>1</sup> Deseamos agradecer a V.Balzarotti y E.Grubicic (BCRA), P.Druck y S.Pernice (UCEMA), A.Powell y M.González Rozada (UTDT) por sus valiosos comentarios.

<sup>2</sup> Ver Balzarotti y Delfiner (2001).

en cambio, se muestra la estadística descriptiva de los retornos de activos negociados en mercados desarrollados. Se incluyeron 5 acciones de conocidas corporaciones (Coca-Cola, Microsoft, General Motors, AT&T y Hewlett-Packard) y 6 bonos internacionales (3 bonos del tesoro norteamericano, 2 bonos del gobierno japonés y un bono del gobierno alemán).

**Cuadro 2**

Activo	Obs.	Media	Máx.	Mín.	Desvío estándar	Sesgo	Cur-tosis	Jarque Bera (estad)	Jarque Bera (prob)	Des. Máx.	Des. Mín.
MSFT	1.909	-0.00	0.18	-0.17	0.02	-0.14	7.73	1,787	0.000	7.3	7.0
AT&T	1.909	0.00	0.12	-0.16	0.02	-0.06	8.46	2,376	0.000	5.5	7.0
COKE	1.909	0.00	0.09	-0.11	0.02	-0.05	6.08	755	0.000	5.2	6.2
GM	1909	0.00	0.07	-0.11	0.02	-0.06	4.24	123	0.000	-9.3	5.5
HWP	1.909	0.00	0.15	-0.15	0.03	-0.02	6.13	777	0.000	5.4	5.3
TreaB10	1.971	0.00	0.02	-0.02	0.00	-0.33	7.01	1,357	0.000	4.9	7.0
TreaB20a	1.971	-0.00	0.02	-0.02	0.00	-0.30	5.78	665	0.000	4.2	6.2
TreaB20b	1.971	-0.00	0.01	-0.02	0.00	-0.29	6.42	987	0.000	4.5	6.4
GermGB10	1.971	-0.00	0.01	-0.01	0.00	-0.53	8.64	2,709	0.000	5.5	6.2
JGB10a	1.971	-0.00	0.03	-0.03	0.00	-0.63	49.9	181,081	0.000	13.2	13.8
JGB10a	1.971	-0.00	0.01	-0.01	0.00	-0.62	9.13	3,213	0.000	6.2	6.3

La mayor parte de los retornos de los activos en ambos cuadros corresponde al período comprendido entre enero de 1994 y julio de 2001. El estadístico de Jarque Bera (JB) indica cuán distintos son los datos<sup>3</sup> respecto a una distribución normal. Puede observarse en ambos cuadros que su probabilidad asociada permite rechazar la hipótesis nula de normalidad de los retornos, a la vez que los máximos y mínimos de cada serie medidos en desvíos estándar respecto a la media arrojan valores que serían altamente improbables de hallar en el caso de que su distribución fuera una gaussiana. El rasgo común a todas las series es una alta curtosis<sup>4</sup>, indicio de que poseen mayor densidad probabilística en las colas, fenómeno que se conoce como colas gordas o ‘fat tails’. Esto es cierto para el mercado local, pero también en lo que respecta a mercados desarrollados. A pesar de no tener una muestra muy grande de activos extranjeros, parece razonable generalizar lo observado en los cuadros en cuanto a que los activos nacionales son más leptocúrticos que los de economías desarrolladas, lo que indicaría que la presunción de normalidad es aún menos apropiada en el caso de los activos locales. Esto estaría indicando que las prácticas de gerenciamiento de riesgo aceptadas usualmente en los países desarrollados<sup>5</sup> podrían ser inadecuadas en el ámbito local.

Una de las medidas más frecuentemente usadas en la actualidad para cuantificar el riesgo es el Valor a Riesgo o VaR, que es el valor de la distribución de pérdidas de un activo que en un horizonte de tiempo dado no es superado en más de un determinado porcentaje de veces o con una probabilidad dada. Uno de los objetivos del presente trabajo es estimar este cuantil usando distintas metodologías.

<sup>3</sup> La distribución empírica de los retornos.

<sup>4</sup> En relación a la de una variable que tiene una distribución normal, que es igual a 3.

<sup>5</sup> Se debe destacar que a pesar de que en la industria financiera usualmente se acepta aproximar los retornos con una distribución normal, en los últimos años arrojaron las críticas en cuanto a la subestimación del riesgo que esta aproximación implica.

Las acciones resultan más volátiles que los bonos, los cuales sin embargo son más leptocúrticos, indicando que su distribución es ‘menos’ normal que la distribución de las acciones. Esto es relevante en cuanto a que las medidas de VaR normales tendrían mayores inconvenientes a fin de proveer una adecuada cobertura para los bonos. Considerando que este tipo de activo es el de mayor volumen en nuestro medio, la discusión previa cobra mayor relevancia. Por otra parte, se observa en los retornos de los activos financieros un sesgo ligeramente negativo y una media cercana a cero.

Todo esto implica que al implementar políticas de control de riesgo (sobre todo en el medio local), como puede ser el cálculo de cuantiles que pongan una cota superior a las pérdidas (de los cuales el más popular es el VaR), se subestime en forma notable la ocurrencia de valores extremos. Esto es debido a que tradicionalmente su cálculo se realiza suponiendo una distribución normal. De hecho, el principal obstáculo que se encuentra al intentar estimar un modelo para la evaluación del riesgo de mercado es el desconocimiento de la distribución de pérdidas de los activos financieros.

## II. Aspectos generales de la teoría

En los modelos de riesgo tradicionales se suele seleccionar una distribución de probabilidades (típicamente la normal), cuyos parámetros se pueden estimar a través del análisis estadístico de los datos empíricos. En contraste, la teoría de los valores extremos (en inglés ‘Extreme Value Theory’ (EVT)) es una herramienta que trata de brindar una estimación de las colas de la distribución original haciendo uso solamente de los valores extremos de la serie de datos.

En el contexto de las ideas desarrolladas en Embrechts et al<sup>6</sup>, en este trabajo se utiliza la técnica conocida como ‘picos sobre un umbral’ (en inglés POT: ‘*Peaks-Over-Threshold*’). Básicamente se utilizan los datos que se encuentran por encima de un alto umbral prefijado con anterioridad, que se supone que siguen una distribución paramétrica conocida como Distribución Generalizada de Pareto (GPD). A continuación se presentan los principales resultados de esta teoría:

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias idénticamente distribuidas representando el retorno diario de un activo financiero,  $X_i = -\ln(P_i/P_{i-1})$ , se supone que tienen una función de distribución desconocida  $F(x) = P\{X_i \leq x\}$ . La distribución de valores que exceden un umbral “u” preestablecido se define como:

$$F_u(y) = P(X-u \leq y / X > u), \quad 0 \leq y \leq X_0 \quad (1)$$

en donde  $X_0 \leq \infty$  es el punto más a la derecha de  $F$ . La distribución de excesos,  $F_u$ , representa la probabilidad de que la pérdida exceda el umbral ‘u’ a lo sumo en una cantidad ‘y’, condicionado en la información de que la pérdida excedió el umbral. Un resultado fundamental de EVT es el siguiente teorema de convergencia válido para toda  $F$ :

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0, \quad \text{siendo}$$

<sup>6</sup> Embrechts, Klueppelberg & Mikosh (1997)

$$G_{\xi, \beta(u)}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-y}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

con  $\beta > 0$ , donde  $y \geq 0$  cuando  $\xi > 0$  y  $0 \leq y \leq -\beta/\xi$  si  $\xi < 0$ . (2)

Esta distribución de dos parámetros se conoce como la Distribución Generalizada de Pareto o GPD. El teorema establece que a medida que se aumenta el umbral 'u', la distribución de los excesos converge a una GPD. En este trabajo la hipótesis será que para un 'u' lo suficientemente elevado, es posible hallar valores de  $\xi$  y  $\beta$  tal que:

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \beta(u)}(y) \quad (3)$$

Suponiendo que una cantidad  $N_u$  de un total de  $n$  observaciones de retornos excede el umbral 'u', se ajusta la GPD a dichos  $N_u$  excesos mediante algún método estadístico apropiado, p.ej. mediante máxima verosimilitud. La elección del umbral es un compromiso entre elegir un valor lo suficientemente elevado como para que el teorema asintótico pueda considerarse exacto, y lo suficientemente bajo como para tener el suficiente material para la estimación de los parámetros  $\xi$  y  $\beta$ .

### II.a. La distribución incondicional

Cualquier probabilidad condicional  $F_u$  puede ser escrita en términos de la incondicional  $F$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_u(y) &= P(X - u \leq y / X \geq u) = \frac{P(X \leq y + u \cap X \geq u)}{P(X \geq u)} = \frac{P(u \leq X \leq y + u)}{1 - P(X \leq u)} \\ &= \frac{P(u \leq X \leq y + u)}{1 - F_x(u)} = \frac{P(X \leq y + u) - P(X \leq u)}{1 - F_x(u)} = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (4) \end{aligned}$$

Reemplazando  $x = u + y$ , y combinando las expresiones (3) y (4), se obtiene:

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi, \beta}(x - u) + F(u), \text{ para } x > u \quad (5)$$

Lo único que que resta es un estimador empírico de  $F(u)$ . El candidato natural es  $(n - N_u)/n$ , con lo cual reemplazando esta expresión y la fórmula (2) para la GPD en (5) se obtiene al siguiente estimador de la cola de la distribución:

$$\widehat{F}(x) = 1 - (N_u / n) \left(1 + \frac{\xi(x - u)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \text{ válido para valores de } x > u. \quad (6)$$

A partir de la expresión (6) es posible deducir una expresión para el VaR. Dada una probabilidad  $q > F(u)$ , invirtiendo la fórmula anterior resulta:

$$VaR_q^{(EVT)} = u + \frac{\beta}{\xi} \left( \frac{n}{N_u} (1-q)^{-\xi} - 1 \right) \quad (7)$$

### II.b. La distribución condicional

El VaR puede estar basado tanto en la distribución incondicional como en la distribución condicional de los retornos. En el primer caso se trata del VaR incondicional o estático, que es útil para evaluar el riesgo de un activo durante periodos de tiempo prolongados y que se puede computar mediante la expresión (7). El VaR condicional o dinámico, en tanto, es un percentil de la distribución condicional de los retornos y se utiliza para evaluar el riesgo en el corto plazo. Una de sus ventajas teóricas por sobre el estático es que tiene en cuenta que lo que es un valor extremo varía según se trate de un período de alta o baja volatilidad. Por ejemplo, en el momento  $t$  se realiza un pronóstico del VaR para  $t+1$  teniendo en cuenta la distribución de probabilidad de los retornos condicional al momento  $t$ . Esto contrasta con el VaR estático, en donde la distribución dada por la expresión (6) es incondicional respecto de la historia de la serie hasta  $t$ .

En esta sección se calcula el VaR condicional o dinámico siguiendo la metodología desarrollada en McNeil (1999) estimando modelos autorregresivos de volatilidad estocástica del tipo AR-GARCH, y aplicando EVT para obtener una mejor estimación de la probabilidad de ocurrencia de las pérdidas extremas.

### II.c. Características del proceso estocástico

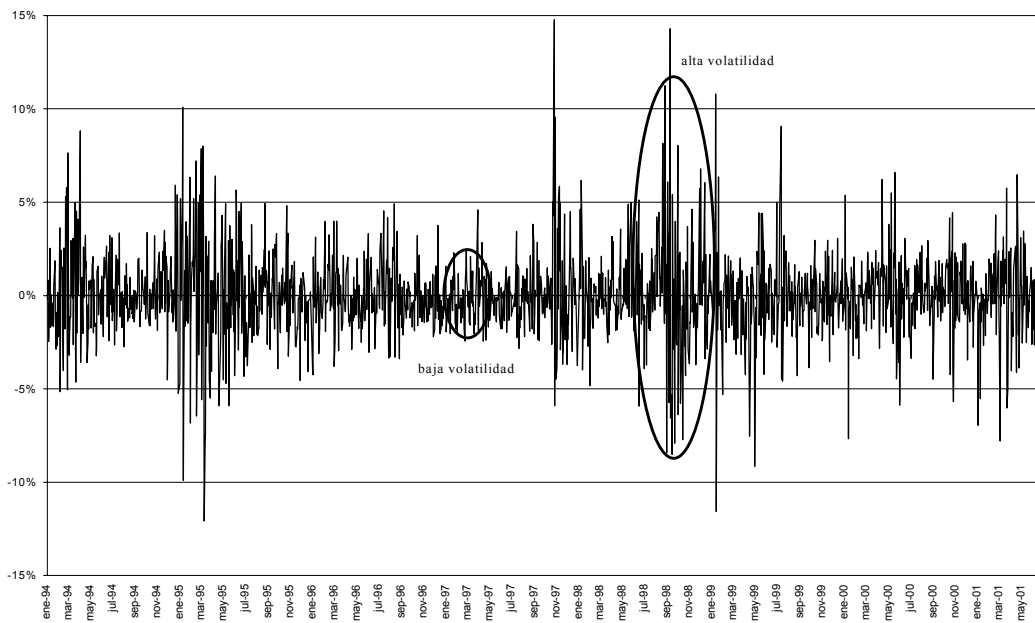
A la variable aleatoria  $X_t$  se le ajusta un modelo AR(1)-GARCH(1,1) de la forma:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + \sigma_t Z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

con  $\phi < 1$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta > 0$ ,  $\alpha_1 + \beta < 1$  y  $|\alpha_1| < 1$ , y siendo que  $\varepsilon_{t-1}^2$  es igual a  $(X_{t-1} - \phi X_{t-2})^2$  y  $Z_t$  la innovación *i.i.d.* del proceso. Lo anterior implica que los retornos de los activos financieros no son independientes a lo largo del tiempo, por más que las innovaciones sí lo sean.

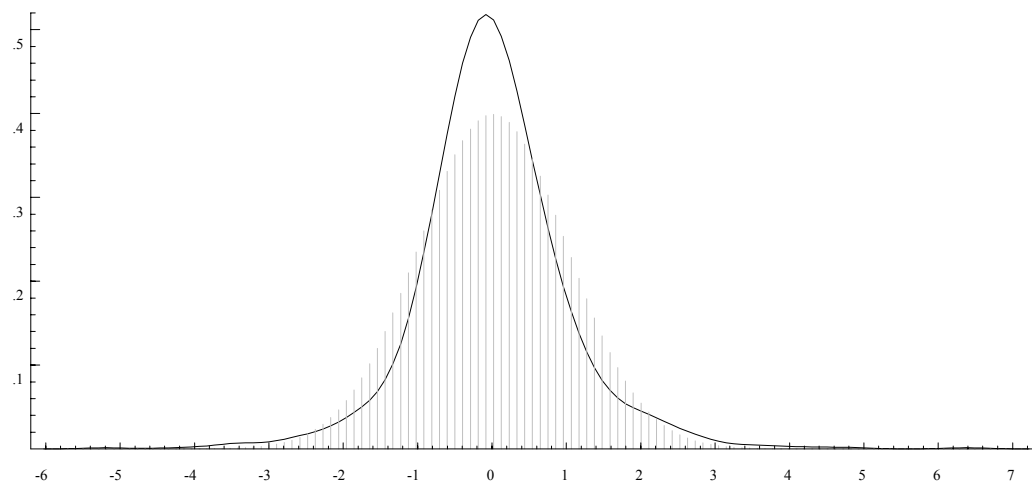
El Gráfico 1 muestra a modo de ejemplo la serie de retornos del índice Merval, en donde se observa el efecto de ‘clustering’ en sus retornos, es decir, periodos de alta volatilidad seguidos por periodos de baja volatilidad. Esto es lo que motiva la introducción del componente GARCH, para modelar el proceso de la varianza condicional de los retornos.

### Gráfico 1



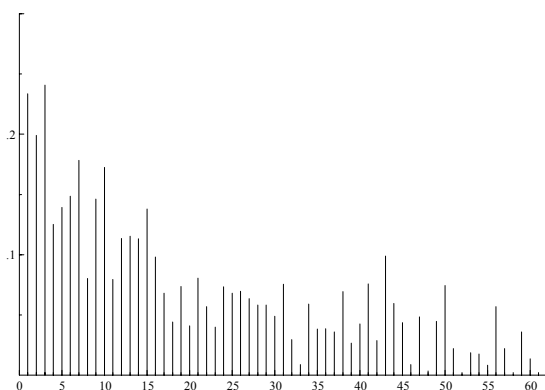
La distribución incondicional de los retornos  $F_X(x)$ , que es en la cual se basa el VaR estático, se puede aproximar visualmente a través de un histograma con los retornos de toda la muestra. En el Gráfico 2 se superpone a una variable aleatoria con distribución  $N(0,1)$  una estimación no paramétrica de la densidad de la distribución incondicional de los retornos, estandarizados por la volatilidad incondicional o muestral. Allí se notan ciertos hechos estilizados de las distribuciones de los retornos de los activos financieros: leptocurtosis mayor que la normal, ‘fat tails’ (colas gordas, i.e., mayor probabilidad de ocurrencia de eventos extremos) y ‘thin waist’ (cintura angosta, i.e., menor probabilidad de eventos cercanos a la media).

### Gráfico 2

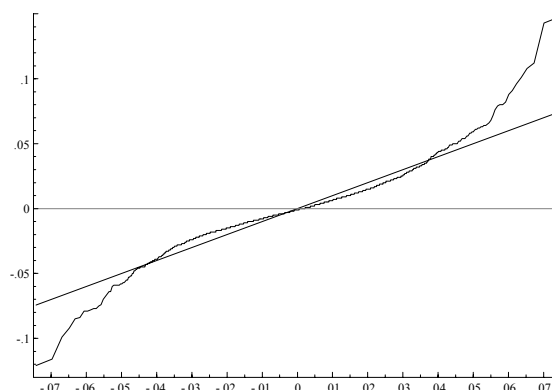


En los Gráficos 3 y 4 se muestran otros instrumentos para ver la no normalidad incondicional de los retornos: el correlograma de los retornos al cuadrado<sup>7</sup> y un gráfico de cuantiles o *gráfico-QQ*. La existencia de cierta autocorrelación en los retornos cuadrados refleja la no independencia temporal de la varianza condicional de los retornos, en tanto que en el gráfico de cuantiles se identifican los desvíos respecto a la normalidad. Si la serie de retornos se distribuyera normalmente, la línea debería estar pegada a la diagonal que cruza el cuadro. En este caso, sin embargo, las desviaciones que se observan reflejan dos de los hechos estilizados antes mencionados: en los extremos la línea se separa reflejando una mayor probabilidad en las colas, mientras que en el entorno del eje los desvíos se deben a la *cintura angosta*.

**Gráfico 3**



**Gráfico 4**

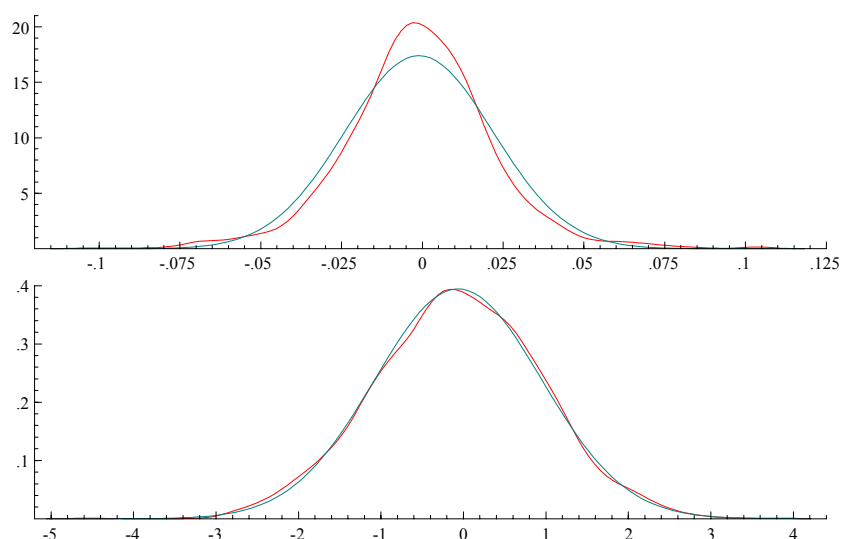


El enfoque GARCH convencional para la estimación del VaR dinámico asume que  $Z_t$  es una innovación gaussiana independiente de  $X_t$  e  $I_{t-1}$ , es decir, que la distribución  $F_Z(z)$  es normal. Si bien las innovaciones tienen una distribución *i.i.d*  $N(0,1)$ , ellas son multiplicadas por la volatilidad condicional de  $X_t$  del momento ( $\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$ ). En consecuencia, la distribución incondicional de  $\varepsilon_t$  y, luego la de  $X_t$ , está constituida por muchas distribuciones *i.i.d*  $N(0,1)$  desplazadas alrededor de la media condicional ( $\phi_{X_{t-1}}$ ) según la volatilidad condicional, obteniéndose distribuciones incondicionales leptocúrticas<sup>8</sup>. En el Gráfico 5 se muestran las densidades estimadas (por métodos de *kernel*) para una serie simulada  $Z_t \sim i.i.d N(0,1)$  (gráfico inferior) y para otra obtenida a partir de la anterior,  $\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$  (gráfico superior) donde  $\sigma_t$  es la volatilidad condicional del modelo estimado para el Merval, siendo ambas comparadas contra la densidad de otra variable normal. Allí se nota claramente la no normalidad del error, a pesar de la normalidad de la innovación.

<sup>7</sup> Es un hecho estilizado que mientras los retornos de un activo no están autocorrelacionados, lo cual es esperable en virtud de la aparente eficiencia de los mercados financieros, sí lo están los retornos al cuadrado.

<sup>8</sup> Para una prueba formal, ver Campbell, Lo y MacKinlay (1997).

**Gráfico 5**



Emplear innovaciones gaussianas implica suponer que la distribución condicional de los retornos también es gaussiana, lo que lleva a una subestimación del VaR ya que empíricamente su distribución condicional aparenta tener colas más pesadas que la normal (hay mayor probabilidad de ocurrencia de pérdidas más grandes). Como se ve en los Gráficos 6 y 7, los residuos estandarizados, que en teoría deberían distribuirse de una manera consistente con los supuestos formulados acerca de  $Z_t$ , no aparentan surgir de un proceso con innovaciones distribuidas idéntica e independientemente de acuerdo a una normal estándar.

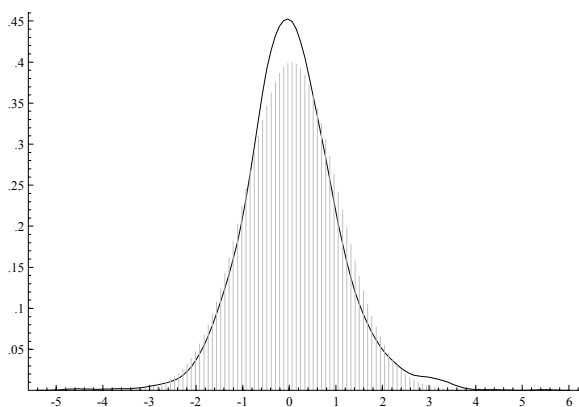
A diferencia del enfoque convencional en el que se supone que la innovación tiene una distribución normal, redundando en retornos con una distribución condicional normal, aquí suponemos que  $Z_t$  tiene una distribución  $F_Z(z)$  desconocida con media cero y varianza unitaria, por lo que la estimación del modelo se realiza por pseudo máxima verosimilitud<sup>9</sup>. La modificación en el supuesto distributivo de la innovación está motivada por la observación de que aún controlando por la volatilidad condicional de  $X_t$  los retornos presentan colas gordas. Esto lleva a pensar que otra fuente de leptocurtosis en los retornos puede venir dada por la distribución de las innovaciones, en el sentido que shocks o pérdidas más grandes tienen una mayor probabilidad de ocurrencia que la que está implícita en una distribución normal, justificando el uso de distribuciones con colas más gordas para no subestimar el riesgo.

---

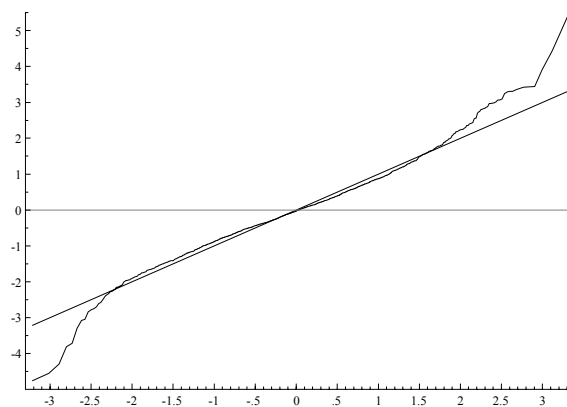
<sup>9</sup> La estimación por pseudo máxima verosimilitud reporta estimativos consistentes y asintóticamente normales, y consiste en construir la función de verosimilitud como si las innovaciones fueran gaussianas, aunque en realidad no lo sean. Los coeficientes estimados son los mismos que se hubieran obtenido de haber supuesto normalidad, debiendo sin embargo realizarse una corrección sobre los errores estándares estimados. La maximización de la función objetivo se realizó con métodos numéricos utilizando el algoritmo de Newton-Raphson.



**Gráfico 6**



**Gráfico 7**



En síntesis, la distribución incondicional de los retornos puede tener *colas gordas*: (i) con innovaciones gaussianas pero con volatilidad condicional estocástica, y/o (ii) por el hecho de que las innovaciones tengan una distribución con colas gordas, que se refleja también en la distribución condicional de los retornos. En consecuencia, para mejorar este VaR dinámico y siguiendo a McNeil (1999) aquí no se hacen supuestos distributivos sobre  $F_Z(z)$ , en tanto que se aplica EVT a la cola de la distribución de los residuos estandarizados del modelo, estimando una Distribución Generalizada de Pareto.

Por definición, la distribución condicional de los retornos es:

$$F_{x_{t+1}|I_t}(x) = P(X_{t+1} \leq x | I_t)$$

Como se supuso un proceso AR(1) – GARCH(1,1), se reemplaza  $X_{t+1}$  por su pronóstico, con lo que se obtiene una estimación de la distribución condicional:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{x_{t+1}|I_t}(x) &= P(\hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} z_{t+1} \leq x | I_t) \\ &= P\left(z_{t+1} \leq \frac{x - \hat{\mu}_{t+1}}{\hat{\sigma}_{t+1}} \middle| I_t\right) \end{aligned}$$

Luego, como  $Z_t$  es una innovación y en consecuencia, independiente de  $I_t$ ,

$$\hat{F}_{x_{t+1}|I_t}(x) = F_z\left(z_{t+1} \leq \frac{x - \hat{\mu}_{t+1}}{\hat{\sigma}_{t+1}}\right)$$

Si  $q$  es el nivel de confianza deseado, como por ejemplo 99%,

$$\begin{aligned} q &= F_z\left(z_{t+1} \leq \frac{x_q - \hat{\mu}_{t+1}}{\hat{\sigma}_{t+1}}\right) \\ q &= F_z(z_{t+1} \leq z_q) \text{ y } z_q = \frac{x_q - \hat{\mu}_{t+1}}{\hat{\sigma}_{t+1}} \end{aligned}$$

Por último,  $z_q \hat{\sigma}_{t+1} + \hat{\mu}_{t+1} = x_q$ , o también  $VaR_{t+1}^{evt} = Var(Z) \hat{\sigma}_{t+1} + \hat{\mu}_{t+1}$ , donde  $VaR(Z)$  es un cuantil superior de la distribución marginal de  $Z_t$ , por lo que no depende del tiempo.

### III. Método estático

El método estático consiste en determinar para cada serie un umbral ‘ $u$ ’ apropiado (típicamente se elige un valor que deje por debajo entre el 5% y 8% de las pérdidas extremas) y en estimar los parámetros  $\beta$  y  $\zeta$  a partir de los  $N_u$  datos remanentes, usando máxima verosimilitud u otra técnica apropiada. Una vez calculados estos parámetros se puede determinar el VaR a través de (7). Este cuantil permanecerá estable durante largos períodos, pues en principio se requeriría de muchos datos adicionales a efectos de agregar suficientes valores extremos nuevos como para cambiar la estimación de los parámetros. Debido a que no hay necesidad teórica de recalcular permanentemente el cuantil (es más, en general se lo recalcula pasado un año sin que se observen cambios notables en el VaR), es que se conoce esta metodología como método estático.

Para el cálculo del VaR se han elegido los 12 activos representativos del mercado local (6 bonos y 6 acciones) y los dos índices (Merval y Embi+) descriptos en el Cuadro 1, cuyos retornos diarios van desde principios de 1994 hasta Julio 2001. Los últimos 250 datos de cada serie no se han usado para la estimación, sino que se han reservado a efectos de evaluar la capacidad de predicción del modelo. Sin embargo una muestra de 250 datos es demasiado pequeña, pues el número esperado de violaciones resulta despreciable. Es por ello que se resolvió agregar a los datos ‘*out-of-sample*’ los últimos 500 datos ‘*in-sample*’ para testear los cuantiles obtenidos. Esto último se realizó comparando la cantidad de violaciones teóricas con las observadas, esto es la cantidad de veces en los cuales se observa un retorno mayor al VaR establecido. Los resultados se presentan en el Cuadro 4.

El ajuste de los parámetros de cada serie se realizó mediante una estimación por máxima verosimilitud de la función de densidad correspondiente a la cola de la GPD (la derivada de (6)). Algunos de los ajustes logrados pueden observarse en los Apéndices I y II: en ellos se muestra la curva teórica de la función de probabilidad acumulada (la línea punteada) que como se observa se ajusta bastante bien a la cola de la distribución empírica.

En el Cuadro 3 se presentan los valores de  $\zeta$  y  $\beta$  para cada serie y se calcula mediante la expresión (7) el Valor a Riesgo estimado. También se ha incluido el Valor a Riesgo que se hubiera obtenido bajo la suposición de una distribución normal, al cual se ha caracterizado como  $VaR^n (= k\sigma X^{10})$ . Esta expresión supone una media nula (lo cual es bastante razonable, ver Cuadro 1), y  $\sigma$  representa el desvío estándar, mientras  $k$  depende del nivel de confianza elegido.

Lo destacable en este último cuadro es que los VaR calculados mediante EVT estático son menores a los  $VaR^n$  a un nivel de confianza del 95%, pero a medida que se adentra más en las colas de la distribución (o sea para mayores niveles de confianza)

<sup>10</sup> En donde X representa la posición en el activo.

los VaR calculados con EVT superan notoriamente los VaR<sup>n</sup>. Esto implicaría que la distribución normal sobreestima el riesgo para bajos niveles de confianza, pero lo subestima para niveles altos. Para lograr una efectiva cobertura de los riesgos debido a movimientos muy adversos en los precios de los activos (niveles de confianza aproximadamente  $\geq 97\%$ ), se requieren pues niveles más altos de capital de lo que predice la distribución normal.

A nivel agregado puede señalarse que el VaR 99.9 es mayor para bonos que para acciones (como fuera señalado en la sección 1) a pesar de la mayor volatilidad de estas últimas, lo cual vuelve a señalar que EVT captura el efecto de colas gordas observado previamente en los bonos argentinos, cosa que no sucede en el caso de los cuantiles normales.

**Cuadro 3**

Activo	Datos Estim.	Datos Check	Epsilon	Beta	VaR <sup>n</sup> 95	VaR <sup>n</sup> 99	VaR <sup>n</sup> 99.9	VaR 95	VaR 99	VaR 99.9
FRB	1,564	750	0.37	0.02	2,6%	3,8%	5,0%	1,9%	5,1%	14,7%
PAR	1,564	750	0.41	0.01	2,3%	3,3%	4,4%	2,1%	4,0%	10,3%
Glob03	1,175	750	0.28	0.01	1,5%	2,2%	2,9%	1,2%	3,1%	7,7%
Glob17	869	750	0.69	0.01	2,7%	3,9%	5,1%	1,9%	4,8%	21,9%
Pre3	1,635	750	0.06	0.03	3,8%	5,4%	7,2%	3,2%	7,9%	15,6%
Pro2	1,635	750	0.18	0.03	3,4%	4,9%	6,5%	2,4%	7,1%	16,6%
Embi+ Arg	965	750	0.30	0.02	6,4%	9,1%	12,1%	4,8%	9,2%	20,7%
Acindar	1,616	750	0.11	0.02	5,7%	8,0%	10,7%	5,7%	10,0%	17,5%
Galicia	1,604	750	0.01	0.03	5,3%	7,5%	9,9%	4,7%	9,0%	15,3%
Telecom	1,616	750	0.00	0.02	4,7%	6,7%	8,8%	4,3%	7,7%	12,5%
Astra	1,425	750	0.06	0.02	4,6%	6,5%	8,7%	4,4%	7,8%	13,1%
Francés	1,642	750	-0.02	0.03	5,1%	7,2%	9,6%	4,7%	8,6%	13,9%
Renault	1,642	750	0.24	0.02	5,8%	8,1%	10,8%	5,6%	9,5%	18,4%
Merval	1,624	750	0.11	0.02	3,8%	5,4%	7,2%	4,0%	6,9%	12,2%

**Cuadro 4**

Activo	Ex <sup>n</sup> 95	Ex <sup>n</sup> 99	Ex <sup>n</sup> 99.9	Ex 95	Ex 99	Ex 99.9
FRB	25	18	10	38	8	0
PAR	22	12	7	29	8	0
Glob03	35	23	15	45	13	2
Glob17	28	15	11	42	12	0
Pre3	12	7	3	17	3	0
Pro2	16	12	9	29	8	1
Embi+ Arg	18	8	3	36	7	1
Acindar	37	18	5	37	7	1
Galicia	29	14	5	42	8	0
Telecom	41	12	6	51	9	1
Astra	33	15	7	35	10	3
Francés	32	16	7	40	10	1
Renault	31	11	4	34	8	0
Merval	38	18	6	36	6	1
Teóricos	37.5	7.5	3.75	37.5	7.5	3.75

En la última línea<sup>11</sup> del Cuadro 4 se muestra la cantidad teórica de violaciones esperadas en 750 observaciones y luego se las coteja con la cantidad efectivamente observada usando ambas metodologías. Para ello se cuenta la cantidad de retornos observados que superan las medidas de VaR calculadas. De esta manera se evalúa la bondad de cada modelo en función de la similitud entre las violaciones observadas y las predichas teóricamente para los diversos activos.

A pesar de no contar con los suficientes activos como para efectuar un test estadístico, resulta bastante evidente el mejor ajuste obtenido a través de EVT, si bien a un nivel de confianza del 99.9% provee una cobertura excesiva. De los 14 cuantiles al 95%, 3 fueron mejor estimados por la distribución normal, al 99% solo 1 resultó mejor estimado, mientras que al 99.9% son 6 datos los que fueron mejor estimados por EVT. Aunque en este último caso el resultado pareciera ambiguo, EVT sobreestima el cuantil, lo cual resulta en un número de violaciones mucho menor al esperado. Esto es una propiedad deseable desde el punto de vista prudencial, aunque costoso desde el punto de vista del capital inmovilizado.

#### IV. Método dinámico

El concepto del método dinámico es distinto al del estático, ya que en el primer caso el VaR se basa en la distribución condicional de los retornos y debe ser recalculado en forma diaria, con el consiguiente mayor esfuerzo computacional, mientras que el VaR estático se basa en la distribución incondicional y el recálculo diario no es necesario. En el primer caso, la mayor complejidad tiene como contrapartida un ahorro en el capital económico necesario para cubrir las pérdidas, obteniéndose a pesar de ello un nivel de cobertura similar al del VaR incondicional.

Como se explicó en la sección II.b., para capturar la dinámica de la media y la varianza condicional se estima un modelo AR(1)-GARCH(1,1) sin hacer ningún supuesto sobre las innovaciones mas que sean *i.i.d.* de acuerdo a una  $F_z(Z)$  con media cero y varianza unitaria. Como los residuos estandarizados deberían asemejarse a las innovaciones, para estimar la cola de  $F_z(Z)$  (que es lo que interesa para conocer el VaR dinámico) se aplicará la técnica de EVT desarrollada en la parte estática a la cola de la distribución empírica de los residuos. Finalmente, al contar con una estimación paramétrica de la cola de  $F_z(Z)$  y con las estimaciones de la media y la volatilidad condicional, se puede estimar la distribución condicional de las pérdidas.

##### *IV.a. Algoritmo empleado para el cómputo del VaR dinámico*

1. Dada una muestra de retornos  $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  de tamaño  $\mathbf{m}$  construída a partir de una serie histórica de los precios de los activos financieros, se definieron ventanas de  $\mathbf{n}$  observaciones cada una, con  $\mathbf{m} > \mathbf{n}$ , por lo que la cantidad de ventanas es de  $\mathbf{m}+1-\mathbf{n}$ . Por ejemplo, en el caso de la serie de Telecom, la muestra contenía 1865 observaciones de sus retornos, por lo que se construyeron 866 ventanas de 1000 observaciones cada una.

---

<sup>11</sup> Por ejemplo para un nivel de confianza del 95%, esperaríamos observar  $5\%*750 = 37.5$  violaciones.

2. Las **m+1-n** ventanas son móviles y cubren todo el rango de la muestra. La primer ventana está definida por  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , la segunda es  $\{X_2, \dots, X_{n+1}\}$  y la última  $\{X_{m-n}, \dots, X_m\}$ .
3. Los siguientes pasos se llevan a cabo para cada una de las ventanas:
  - (i) Se estima un modelo AR(1)-GARCH(1,1).
  - (ii) Se calculan los errores estandarizados  $z_t$  y se estiman la media  $\mu_{t+1}$  y la varianza condicional  $\sigma_{t+1}$ , del primer día posterior al último de la ventana correspondiente.
  - (iii) Para chequear si el modelo es estacionario se verifica que las estimaciones de  $\alpha_1 + \beta$  sean menores a 1.
  - (iv) Se calcula  $\text{VaR}(Z)$ , que es incondicional ya que proviene de la distribución de la innovación. Hay dos alternativas:
    - a) Estimar una expresión paramétrica para la cola de  $F_z(Z)$  ajustándola a una Distribución Generalizada de Pareto, a partir de la cola de la distribución empírica de los residuos estandarizados, y elegir un cuantil, que será  $\text{VaR}(Z)$ . Es el caso del *VaR dinámico con EVT*
    - b) Seleccionar un cuantil de la distribución normal estándar, en función del riesgo deseado. Es el caso del *VaR dinámico gaussiano*.
  - (v) Con los pronósticos de la media y varianza condicional, y con el  $\text{VaR}(Z)$  incondicional calculado en el punto anterior, se calcula el  $\text{VaR}_{t+1}$  dinámico:

$$\text{VaR}_{t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \text{VaR}(Z).$$

El algoritmo anterior permite obtener dos resultados para el VaR dinámico según se opte por usar (iv) a) o (iv) b). Ellos serán llamados método dinámico EVT y gaussiano respectivamente.

Asimismo se ha usado el algoritmo propuesto para verificar la aseveración hecha en la sección III en cuanto a que el método estático estima un VaR que permanece bastante inalterado a través del tiempo. Para ello se han usado las mismas ventanas móviles definidas anteriormente con las cuales se estiman **m+1-n** predicciones diarias del VaR incondicional diarias, calculadas a través de la fórmula (7). Esta última opción será llamada método estático<sup>12</sup>.

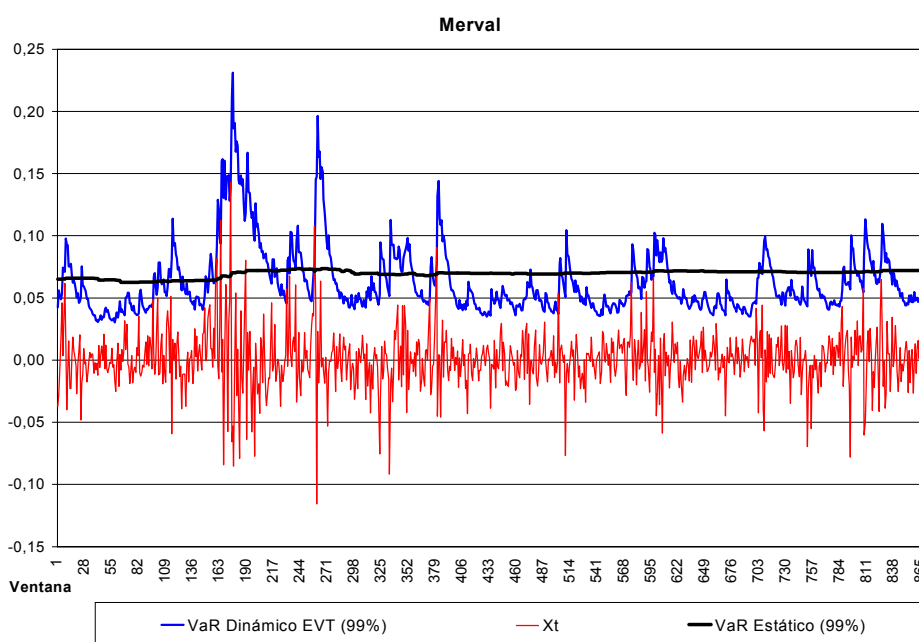
Para observar su funcionamiento se han hecho pronósticos del  $\text{VaR}_{t+1}$  para los métodos dinámico y estático mediante una ventana móvil de 1000 datos, comparando el resultado con el retorno observado el día t+1. Dado que la mayoría de las series suman aproximadamente 1860 datos diarios, se podrán comparar unos 860 retornos acontecidos con el pronóstico efectuado. El Gráfico 8 exhibe a modo de ejemplo los resultados obtenidos para el índice Merval con un nivel de confianza del 99%. En el se muestran los retornos conjuntamente con las predicciones de los VaR estático, dinámico EVT y dinámico gaussiano con una frecuencia diaria. Los restantes resultados se presentan en el Apéndice III.

---

<sup>12</sup> Podría pensarse en este método como semiestático, pues el VaR se recalcula m+1-n veces ( lo cual le daría un carácter dinámico) aunque con la metodología correspondiente al método estático. Esta diferencia en realidad es irrelevante pues tal como se había aseverado anteriormente este VaR permanece casi constante a través del tiempo.

Se puede observar claramente que el método estático predice un VaR que permanece prácticamente constante a través del tiempo<sup>13</sup>. Por otro lado, al no seguir de cerca la curva de retornos esta metodología resulta ineficiente en cuanto a una correcta asignación del capital económico, pues en períodos de baja volatilidad el nivel de capital supera, y en mucho, a los retornos observados. Por otra parte, el método dinámico calculado con EVT sigue de cerca la curva de retornos, disminuyendo en consecuencia el capital requerido. Queda por ver si este beneficio no implica en contrapartida una menor eficacia, es decir, una mayor cantidad de violaciones. Para ello, en los cuadros 5 y 6 se resume la cobertura ofrecida por las tres metodologías disponibles, evaluadas a través de la cantidad de violaciones a cada una de las medidas VaR calculadas.

**Gráfico 8**



**Cuadro 5**

		Estático	Dinámico EVT	Dinámico Normal	Teóricas
			<i>FRB</i>		
<i>0.999</i>	<i>Violaciones</i>	1	1	9	1
<i>0.99</i>	<i>Violaciones</i>	11	11	18	8
<i>0.95</i>	<i>Violaciones</i>	42	43	42	41
			<i>PAR</i>		
<i>0.999</i>	<i>Violaciones</i>	0	0	7	1
<i>0.99</i>	<i>Violaciones</i>	9	8	14	8
<i>0.95</i>	<i>Violaciones</i>	35	37	36	41
			<i>Global 2003</i>		
<i>0.999</i>	<i>Violaciones</i>	2	0	7	0
<i>0.99</i>	<i>Violaciones</i>	7	7	10	4
<i>0.95</i>	<i>Violaciones</i>	28	24	23	21

<sup>13</sup> Cabe destacar que se tienen unas 840 observaciones, lo que equivale a más de tres años. Usualmente se recalcula el VaR estático cada año por lo cual hay pocas posibilidades que la predicción se desactualice.

<i>Global 2017</i>					
0.999	Violaciones	0	0	1	0
0.99	Violaciones	3	1	6	1
0.95	Violaciones	12	12	12	6
<i>Pre3</i>					
0.999	Violaciones	0	1	10	1
0.99	Violaciones	6	10	24	9
0.95	Violaciones	31	54	47	44
<i>Pro2</i>					
0.999	Violaciones	1	2	15	1
0.99	Violaciones	12	11	23	9
0.95	Violaciones	39	42	41	44
<i>Embi + (Argentina)</i>					
0.999	Violaciones	0	1	2	0
0.99	Violaciones	5	3	3	2
0.95	Violaciones	16	12	6	11

**Cuadro 6**

		<b>Estático</b>	<b>Dinámico EVT</b>	<b>Dinámico Normal</b>	<b>Teóricas</b>
<i>Acindar</i>					
0.999	Violaciones	2	1	5	1
0.99	Violaciones	8	10	18	9
0.95	Violaciones	41	53	57	43
<i>Galicia</i>					
0.999	Violaciones	1	0	2	1
0.99	Violaciones	9	12	17	9
0.95	Violaciones	49	55	51	43
<i>Telecom</i>					
0.999	Violaciones	2	0	3	1
0.99	Violaciones	10	8	16	9
0.95	Violaciones	66	58	55	45
<i>Astra</i>					
0.999	Violaciones	2	1	7	1
0.99	Violaciones	7	9	10	7
0.95	Violaciones	34	34	30	34
<i>Francés</i>					
0.999	Violaciones	1	1	6	1
0.99	Violaciones	10	12	15	9
0.95	Violaciones	49	47	45	45
<i>Renault</i>					
0.999	Violaciones	0	2	2	1
0.99	Violaciones	9	9	13	9
0.95	Violaciones	40	50	39	45
<i>Merval</i>					
0.999	Violaciones	2	0	7	1
0.99	Violaciones	6	11	26	9
0.95	Violaciones	43	49	57	44

La performance de los métodos para calcular el VaR se evaluó comparando la cantidad de violaciones con las que habría que esperar en función del nivel de confianza elegido, tanto en exceso como en defecto. Para niveles de confianza  $\geq 99\%$ , los métodos basados en EVT superan al VaR condicional gaussiano. Por otro lado, los métodos estático y dinámico con EVT arrojan un número similar de violaciones cuando se aplican a acciones, mientras que cuando se aplican a bonos el método dinámico con EVT supera al estático. Por lo tanto, desde el punto de vista de la eficacia de los métodos, ambos son similares. El factor de decisión entre ambos

modelos dependerá entonces de su eficiencia relativa, la cual depende tanto del costo de computarlos como de la cantidad de capital que requieran para cubrir el riesgo, con la misma eficacia.

#### IV. Conclusiones

Tras un análisis comparativo de las distribuciones empíricas de los retornos de los activos locales y de países desarrollados, se ha observado que los primeros son menos normales, por ser más sesgados y leptocúrticos. También se han encontrado diferencias por tipo de activo: los bonos suelen ser más leptocúrticos que las acciones en los dos ámbitos. Dado que el mayor volumen de activos que se transa en el país corresponde a títulos públicos, la presunción de normalidad resulta muy inadecuada, y es por ello que el uso de métodos alternativos, como EVT, proveen medidas de VaR más apropiadas.

Se ha aplicado una técnica estática de EVT, muy económica en cuanto al esfuerzo computacional, que produjo mejores resultados que con una distribución normal. Finalmente se empleó una técnica dinámica basada en la distribución condicional de los retornos, que combina la estimación de modelos GARCH con la utilización de EVT para estimar de manera diaria un VaR condicional, es decir, basado en una distribución condicional de los retornos o las pérdidas. Se concluyó que si bien la *'performance'* de este último método no difiere demasiado respecto al del método estático (ver cuadros 5 y 6), el cálculo del VaR es mucho más sensible respecto a los retornos observados, y la evolución temporal del VaR dinámico con EVT actúa como una envolvente de los mismos (ver apéndice III). Esto produce claras ventajas debido a una mejor administración del capital inmovilizado en relación al método estático. En el Apéndice IV se representa una medida representativa del capital inmovilizado que consiste en la suma de las diferencias entre el  $VaR^{EVT}$  diario (estático y dinámico) y el retorno diario a través de los 860 días en los cuales se efectuaron pronósticos<sup>14</sup> para niveles de confianza del 95%, 99%, y 99.9%. Es claro el ahorro en cuanto a capital, y también el hecho de que este beneficio es más importante a mayores niveles de confianza. La contracara de este beneficio es el hecho de que las metodologías GARCH suelen ser bastante reactivas. Esto es, el VaR dinámico depende fuertemente de los valores cercanos de la volatilidad condicional, debido a lo cual se observará en este caso una persistencia de valores altos de VaR en los días posteriores a un shock de volatilidad en el mercado, aún en el caso de que haberse tratado de un hecho puntual. Esto hará que en período posterior a este shock, el VaR dinámico sea alto a pesar de que la volatilidad baje inmediatamente. En estos casos implicará una sobreexigencia de capital, pero esto es una característica general de los modelos GARCH.

En consecuencia, la elección de la metodología depende de la aplicación que se le de. Un ente regulador probablemente elegirá el método estático, pues es de simple implementación y fácil supervisión, además de garantizar un razonable nivel de cobertura en todo el período que se desea cubrir. En contraste, una mesa de dinero o

---

<sup>14</sup>  $\sum_{i=1}^{860} (VaR_i^{EVT} - r_i)$



'trading desk' probablemente esté dispuesta a un mayor esfuerzo computacional de implementar la metodología dinámica a fin de no inmovilizar tanto capital.

## Referencias

Balzarotti V. y M. T. Delfiner (2001): “Teoría de Valores Extremos Aplicada a la Medición de Riesgos de Mercado en Argentina”, BCRA.

Bollerslev T. (1986): “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

Bollerslev T., R. Chou and K. Kroner (1992): “Arch Modelling in Finance”, *Journal of Econometrics* 52, 5-99.

Campbell J., A. Lo and A. MacKinlay (1997): *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Cotter J. (2000): “Conditional and Unconditional Risk Management Estimates for European Stock Index Futures”, University College Dublin.

Danielsson J. and C. de Vries (2000): “Value-at-Risk and Extreme Returns”, London School of Economics, Tinbergen Institute and Erasmus University Rotterdam.

Embrechts, P., C. Klüppelberg and T. Mikosch (1999): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.

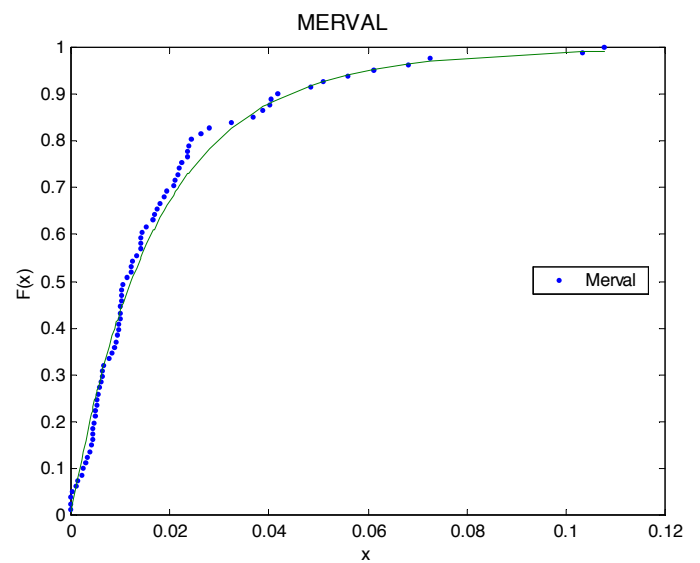
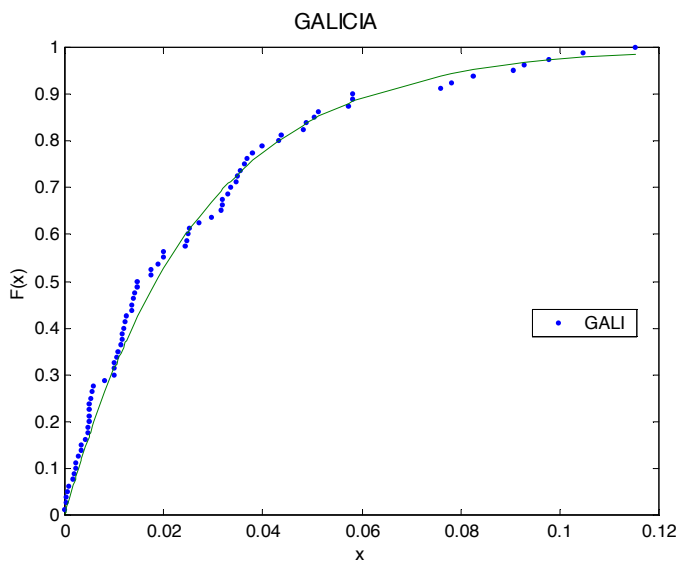
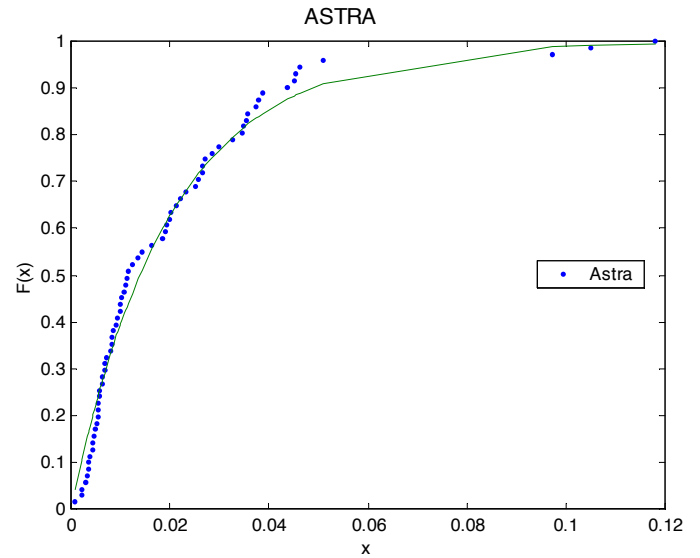
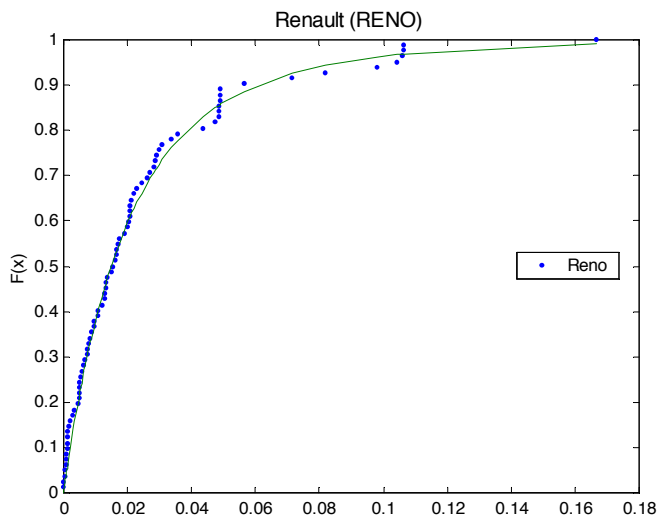
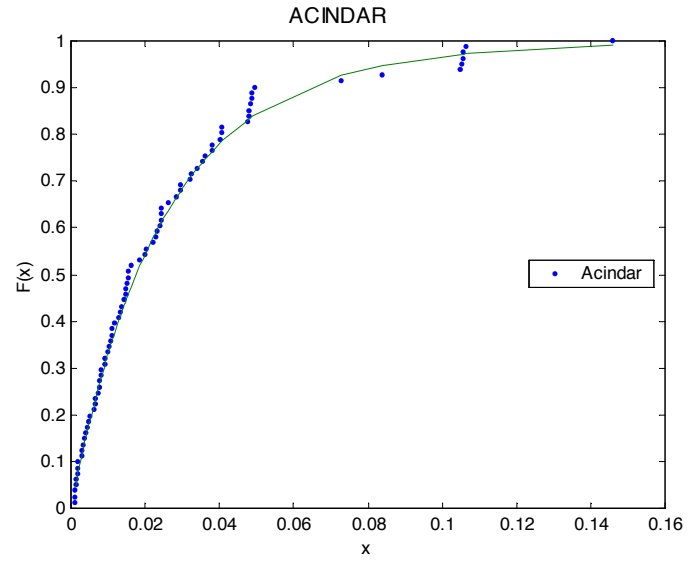
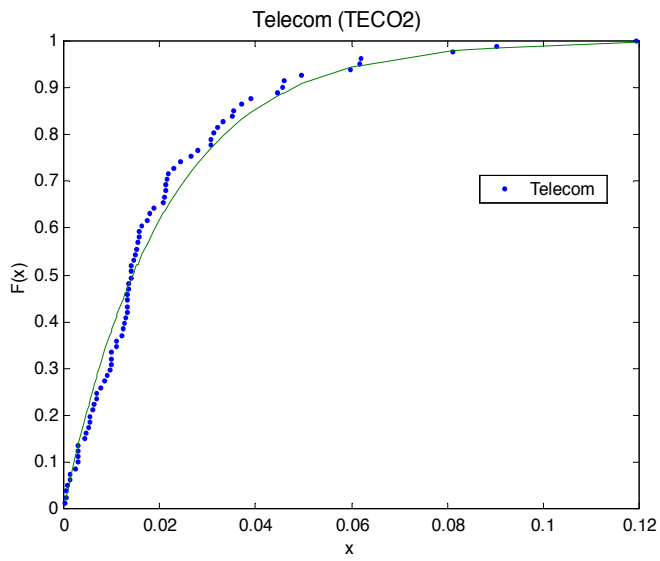
Haaser N. and J. Sullivan (1991): *Real Analysis*. Dover.

McNeil, A. (1999): “Extreme Value Theory for Risk Managers”, ETH Zürich, Departement Mathematik.

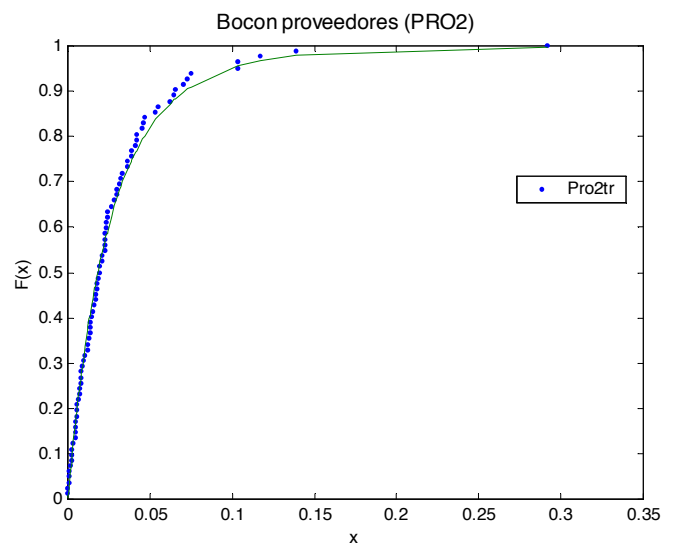
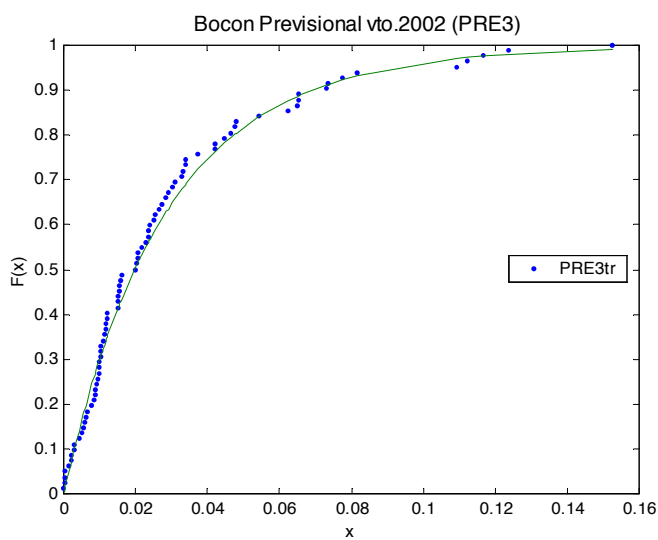
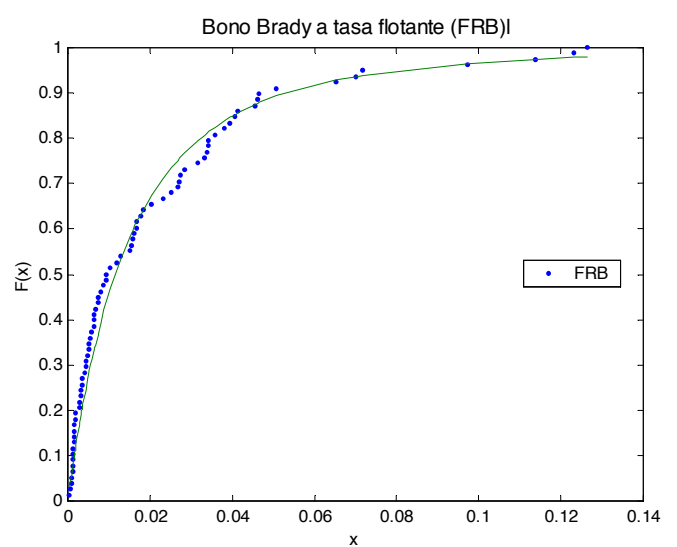
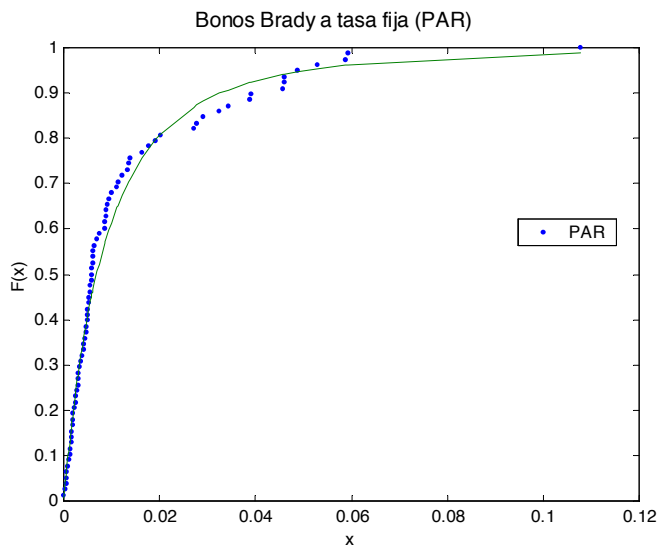
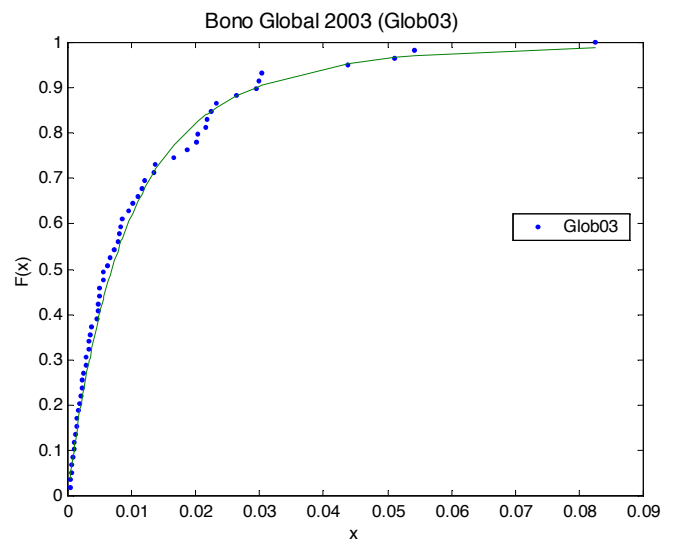
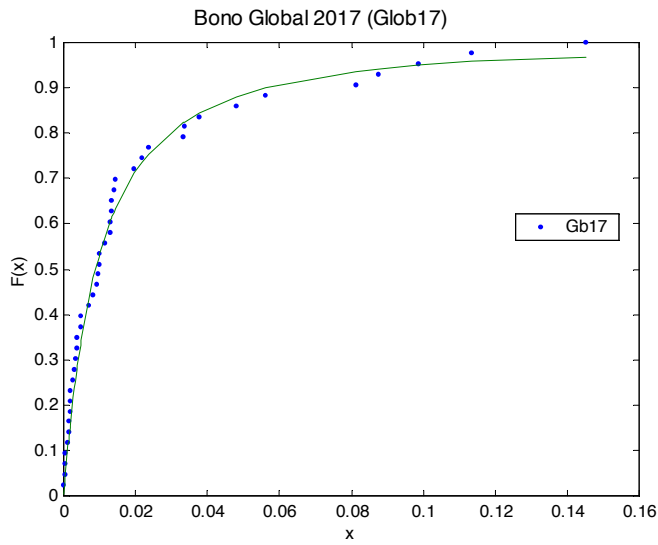
McNeil, A. and R. Frey (2000): “Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach”, ETH Zürich, Departement Mathematik.

RiskMetrics (1996): *RiskMetrics Technical Document*, 4<sup>th</sup> edition. J.P. Morgan/Reuters.

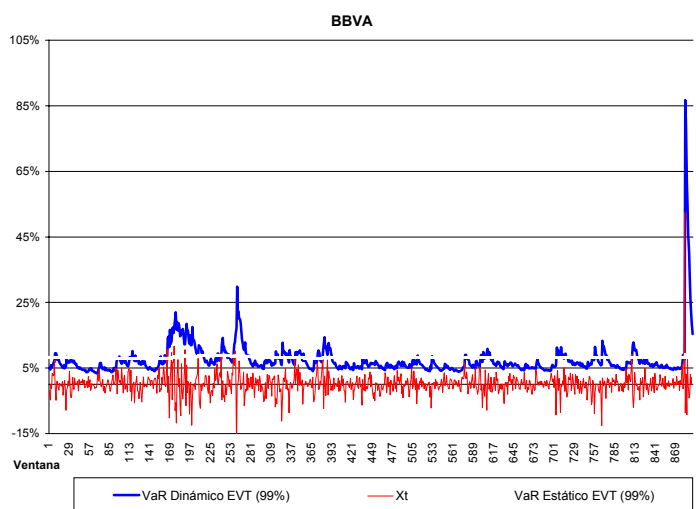
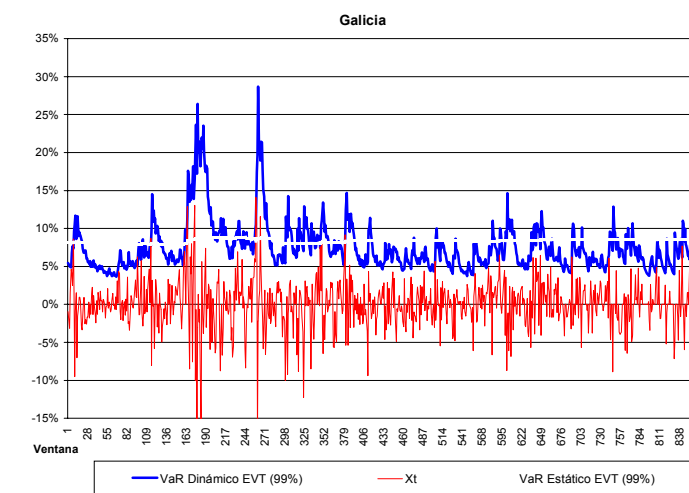
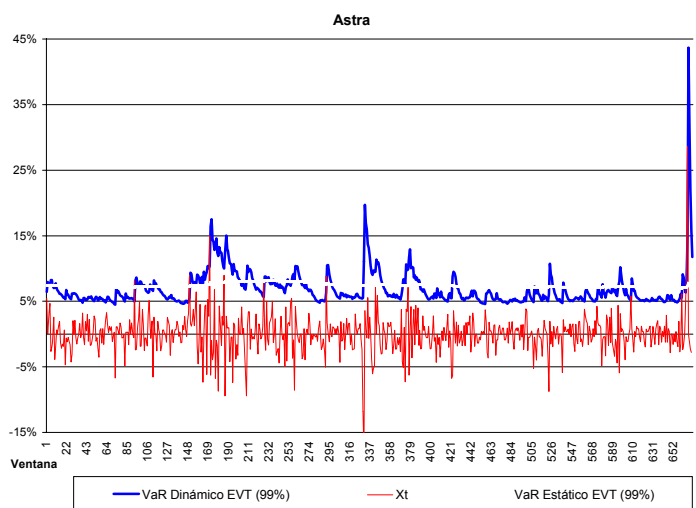
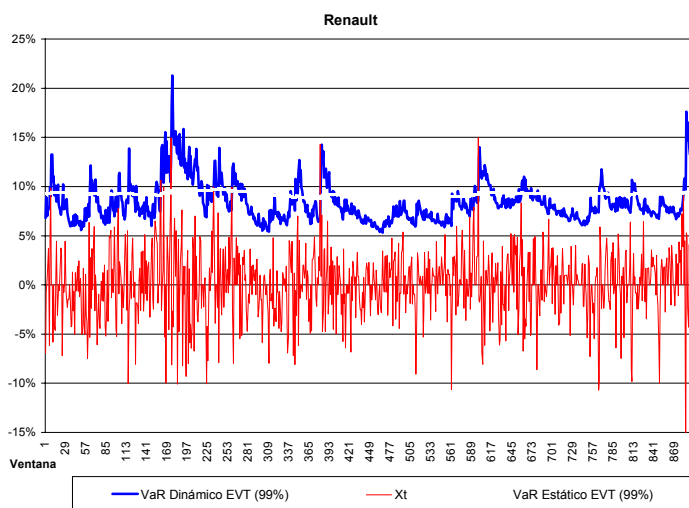
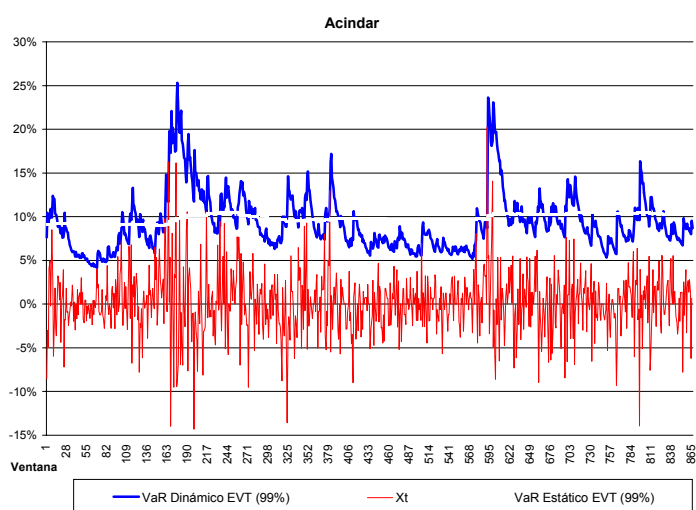
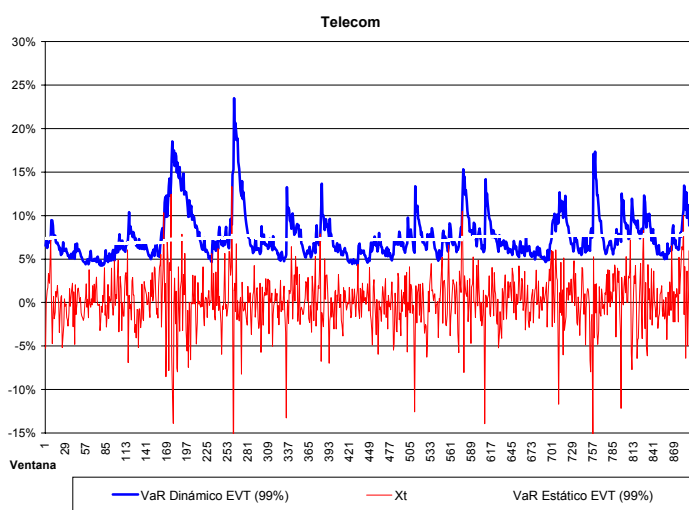
## Apéndice I: Distribuciones paretianas (GPD) vs. empíricas para acciones



## Apéndice II: Distribuciones paretianas (GPD) vs. empíricas para bonos

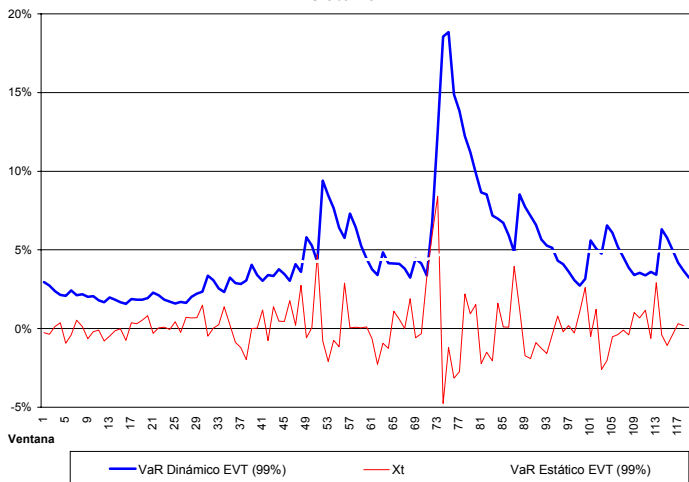


## Apéndice III

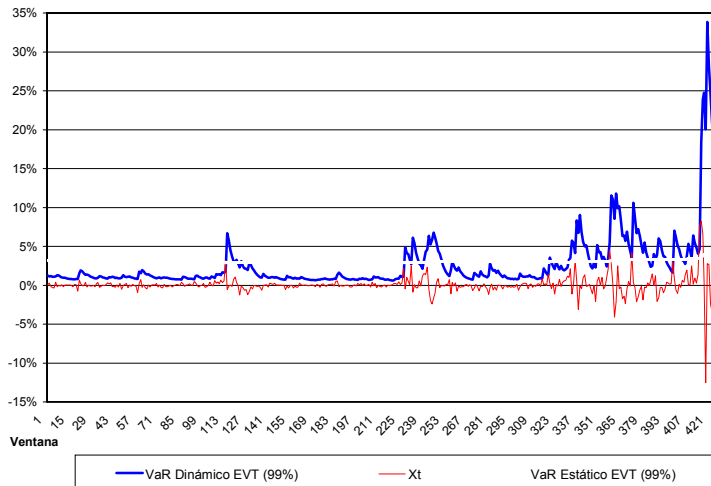


# Apéndice III

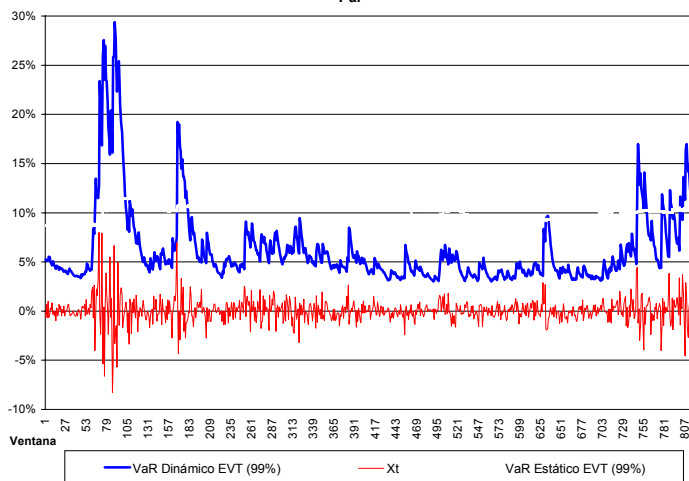
Global 2017



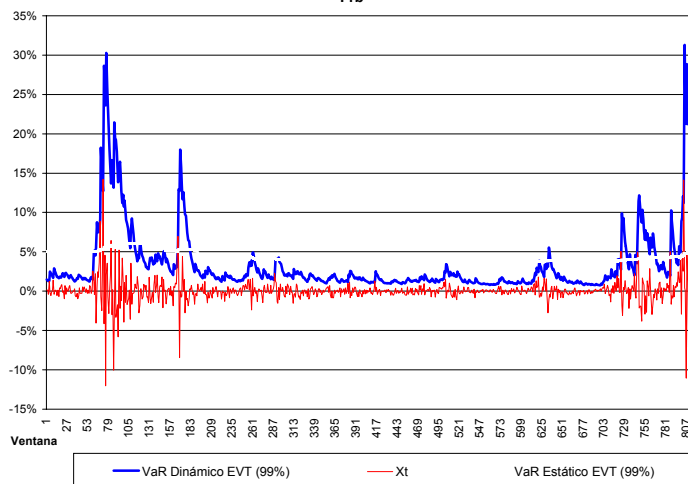
Global 2003



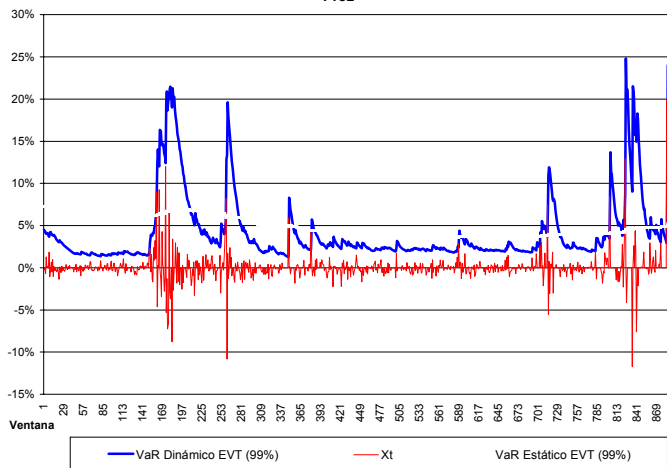
Par



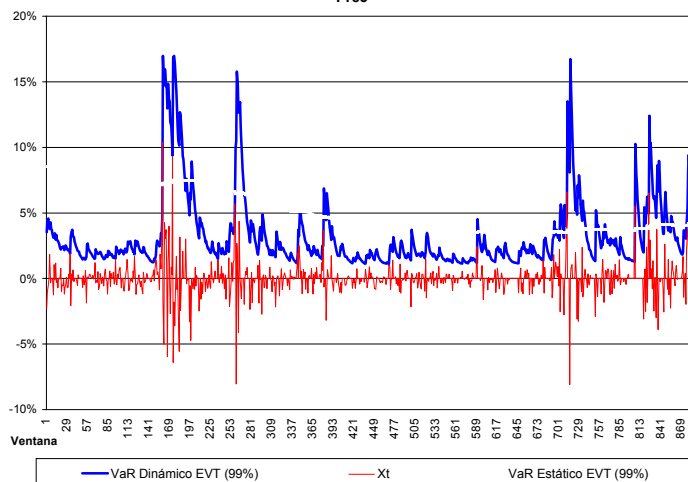
Frb



Pro2



Pre3



## Apéndice IV

<i>Nivel de confianza</i>	<i>0,95</i>	<i>0,95</i>		<i>0,99</i>	<i>0,99</i>		<i>0,999</i>	<i>0,999</i>	
<i>Método para el VaR</i>	<i>EVT Static</i>	<i>EVT Dinamic</i>	<i>Dif</i>	<i>EVT Static</i>	<i>EVT Dinamic</i>	<i>Dif</i>	<i>EVT Static</i>	<i>EVT Dinamic</i>	<i>Dif</i>
<i>BBVA</i>	39,3	41,0	4,4%	72,9	66,3	-9,1%	132,6	105,9	-20,1%
<i>Acindar</i>	46,3	47,1	1,7%	84,2	79,7	-5,4%	148,9	132,4	-11,1%
<i>Astra</i>	27,2	26,8	-1,5%	49,7	46,2	-7,1%	87,2	94,4	8,2%
<i>Embi+Arg</i>	11,9	13,1	10,4%	21,9	19,8	-9,5%	45,4	29,2	-35,7%
<i>FRB</i>	13,0	14,7	12,5%	35,2	27,4	-22,1%	117,8	58,6	-50,3%
<i>Galicia</i>	37,7	39,0	3,4%	71,3	64,5	-9,5%	130,0	99,6	-23,4%
<i>Glob03</i>	4,7	5,5	17,4%	12,7	11,1	-12,2%	33,4	24,3	-27,2%
<i>Glob17</i>	2,0	2,8	39,9%	5,2	5,4	4,3%	22,2	11,4	-48,8%
<i>Pre3</i>	20,8	14,2	-31,9%	46,4	29,2	-37,1%	108,5	69,0	-36,4%
<i>Merval</i>	31,8	32,3	1,5%	60,2	54,6	-9,3%	109,8	84,3	-23,2%
<i>PAR</i>	15,1	14,5	-3,9%	32,1	26,2	-18,3%	83,4	50,7	-39,2%
<i>Pro2</i>	16,7	15,9	-4,6%	44,1	36,5	-17,2%	133,2	78,3	-41,2%
<i>Reno</i>	47,2	46,2	-2,1%	81,8	74,2	-9,3%	160,0	125,3	-21,7%
<i>Telecom</i>	35,6	40,1	12,7%	64,7	66,1	2,2%	122,6	107,4	-12,4%