Objectivité monétaire et objectivité physique dans les schémas de reproduction de Marx

Carlo Benetti[*], Alain Béraud[†], Edith Klimovsky[‡], Antoine Rebeyrol[◊]

Ce texte, composé d'extraits d'un travail plus important intitulé « Equilibre et possibilité de crises dans le modèle de reproduction élargie de Marx », a été présenté par Carlo Benetti et Antoine Rebeyrol au colloque « L'analyse monétaire de l'économie : autour de *Marchands, salariat et capitalistes*, à l'Université Pierre Mendès-France / Grenoble 2 des 15 et 16 avril 2010.

INTRODUCTION

À l'aide d'exemples numériques en valeur, ou en monnaie, Marx étudie la reproduction élargie du capital social dans une économie bisectorielle. Dans ses exemples, l'économie atteint un régime de croissance régulière dès la seconde période (Marx, 1885, Livre II, section III, chap. XIII). Nous appelons « équilibre de Marx » un tel résultat. S'opposant à d'autres propositions du *Capital*, cette conclusion a surpris la plupart des participants aux débats auxquels la théorie de Marx a donné lieu. Elle a été interprétée comme la propriété d'un modèle excluant la crise et l'instabilité dynamique lesquelles, par conséquent, ne pourraient apparaître qu'en modifiant certaines hypothèses retenues par Marx. Cette position largement partagée a été adoptée, entre autres, par des auteurs aussi différents et significatifs que Rosa Luxemburg (1913) et Michio Morishima (1973) que nous privilégions pour avoir affirmé leur position de manière particulièrement claire et vigoureuse.
Marx énonce que ses schémas numériques décrivent la reproduction de flux monétaires : « les chiffres peuvent indiquer des millions de marks, de francs ou de livres sterling » (1885, t. 2 : 756). Seuls sont connus les produits des quantités par les valeurs unitaires : valeurs du produit brut, de la masse salariale et du capital constant dans les deux secteurs.
Posons la fameuse question de Sraffa : que pourrait observer un homme qui tomberait sur la terre depuis la lune[1] ? Sraffa (1960 : 3), puis les néo-ricardiens, répondent : les quantités produites et utilisées. En opposition aux quantités de la théorie marginaliste (par exemple « l'utilité marginale »), les quantités "objectives" sont celles qui « have an objective, independent existence at every or some instants of the natural (i.e. not interfered with by the experimenter) process of production and distribution ; they can therefore be measured physically, with the ordinary instruments for measuring number, weight, time…These are the *only* quantities which … can be assumed to be known or given" (souligné par Sraffa). (cité par Kurz et Salvadori p. 1551-2). La réponse de Marx serait complètement différente :

[*] Université de Paris Ouest Nanterre La Défense, EconomiX.
[†] Université de Cergy-Pontoise, Thema.
[‡] Universidad Autónoma Metropolitana– Azcapotzalco, México, et EconomiX.
[◊] Université de Paris Ouest Nanterre La Défense, EconomiX.

[1] Kurz et Salvadori (2004 : 1546) nous disent que Sraffa rédigea à la fin des années 1920, probablement en 1928, un court document intitulé "Man from the Moon" dans lequel il cherchait à clarifier la signification des équations de production qu'il avait développées en 1927.

« l'homme de la lune » selon Marx observe lui aussi des quantités « objectives » mais ce sont des flux monétaires qui représentent les ventes totales des deux secteurs et les paiements des moyens de production et du travail pour la mise en œuvre de la reproduction élargie. On ne voit pas ce qui se passe dans les usines que Marx qualifie par ailleurs de « laboratoires secrets de la production » à la porte desquels il est écrit : « no admittance except on business » (1867 : 725). N'étant pas des businessmen, ni l'homme de la lune ni le macroéconomiste n'y ont accès.

Pourtant, dès le début de son analyse, Marx souligne la principale nouveauté du domaine qu'il va aborder : « Aussi longtemps que nous avons considéré la production de la valeur et la valeur des produits du capital sur le plan individuel, la forme naturelle du produit-marchandise était, pour l'analyse, tout à fait indifférente […] Ce mode de présentation purement formel ne suffit plus lorsqu'il s'agit d'étudier le capital social dans son ensemble et la valeur de ses produits […car...] la reconversion en capital d'une partie de la valeur des produits […et…] l'entrée d'une autre partie dans la consommation […] constituent un mouvement […dans lequel…] *ce n'est pas seulement la valeur mais c'est encore la matière qui est remplacée*; [ce mouvement] dépend donc tout autant des proportions relatives des composantes de la valeur du produit social que de leur valeur d'usage, de leur forme matérielle » (*ibid*., t. 2, pp.753-4, souligné par nous). S'agissant du capital individuel, la condition de reproduction est la formation d'une plus-value non négative. Mais s'agissant du capital social il faut tenir compte de l'objectivité du problème de la reproduction des valeurs d'usage : Marx indique clairement l'importance du problème de la reproduction physique, sans toutefois détailler les conditions qu'elle impose. Nous visons à compléter son analyse sur ce point.

Nous étudions dans la première partie le fonctionnement du modèle de Marx, puis en mettons à jour les conditions physiques qui montrent clairement que, contrairement à ce qu'affirmaient les interprétations de Rosa Luxemburg (1913) et Michio Morishima (1973), il ne s'agit pas d'un modèle d'équilibre.

1. L'équilibre de Marx

1.1 Les hypothèses

Dans le prolongement de l'analyse de la reproduction simple, Marx propose une représentation bisectorielle agrégée de la production : « Les diverses branches de la production appartiennent à chacune des [deux] sections qui forment une seule grande branche de la production, dans un cas celle des moyens de production, dans l'autre celle des moyens de consommation » (Marx 1885, t. 2 : 755). Quant aux capitalistes, ils sont regroupés en deux classes : « La classe capitaliste de I englobe l'ensemble des capitalistes produisant des moyens de production » (*ibid*., t. 2 : 758). Il en est de même pour les capitalistes produisant les biens de consommation. Cela implique que l'économie se compose de deux « marchandises composites » et de deux « capitalistes représentatifs ». Explicitons les hypothèses du modèle de Marx :

(*i*) Dans chaque secteur, il existe une seule méthode de production, à produit unique et rendements constants.

(*ii*) Les moyens de production (produits par le secteur I) ont comme seul usage l'accumulation, et les biens de consommation (produits par le secteur II) ont une double utilisation, à savoir l'accumulation (salaire des ouvriers) et la consommation des capitalistes.

(*iii*) Tout le capital est circulant.

(*iv*) Seuls les capitalistes épargnent, les travailleurs consomment tout leur salaire.

(*v*) Le profit épargné est investi dans le secteur où il se forme.

(*vi*) Le processus d'accumulation est asymétrique : le taux d'épargne du secteur I est fixé (il assure au moins la reproduction simple de ce secteur), tandis que le secteur II s'adapte en absorbant, s'il le peut, les moyens de production qui restent disponibles.
Dans ses exemples numériques, Marx admet que le prix relatif est fixé une fois pour toutes par les valeurs travail, le taux d'exploitation est uniforme et constant, la composition organique du secteur I est supérieure ou égale à celle du secteur II, en sorte que le taux de profit du secteur I est inférieur ou égal à celui du secteur II.

1.2. Le modèle

Les schémas monétaires ou en valeur de Marx peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} k_1 + v_1 + m_1 &= y_1 \\ k_2 + v_2 + m_2 &= y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

où k_i, v_i, m_i, et y_i (i = 1, 2) sont le capital constant, le capital variable, la plus-value et la valeur du produit du secteur *i*. Supposons donc que « l'homme de la lune » observe les achats monétaires du secteur II au secteur I (k_2), les masses salariales des deux secteurs (v_1 et v_2) et les chiffres d'affaire des deux secteurs (y_1 et y_2). Ayant lu Marx ou inventé lui-même *Le Capital*, il en déduirait m_2 et le taux d'exploitation, puis (en supposant l'uniformité de ce taux), m_1 et k_1. Toutes les données du schéma de Marx lui seraient accessibles. Considérant qu'il existe une seule technique figurable par une matrice de coefficients techniques **A**, même si elle est inconnue, il pourrait *a priori* transcrire les équations précédentes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underbrace{q_1 a_{11}\lambda_1}_{k_1} + \underbrace{q_1 a_{12}\lambda_2}_{v_1} + m_1 &= \underbrace{q_1\lambda_1}_{y_1} \\ \underbrace{q_2 a_{21}\lambda_1}_{k_2} + \underbrace{q_2 a_{22}\lambda_2}_{v_2} + m_2 &= \underbrace{q_2\lambda_2}_{y_2} \end{aligned} \tag{2}$$

où q_i (i = 1,2) représente les quantités (inconnues) de biens produits par les secteurs, λ_1 et λ_2 sont leurs valeurs travail unitaires (inconnues), et a_{ij} est la quantité de bien *j* nécessaire pour produire une unité de *i* (i.e. un des éléments de la matrice **A** inconnue).

En divisant la valeur des capitaux constant et variable de chaque secteur par la valeur de son produit brut et en notant λ la valeur relative λ_1 / λ_2, il obtiendrait une matrice **M** :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_1 / y_1 & v_1 / y_1 \\ k_2 / y_2 & v_2 / y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} / \lambda \\ a_{21}\lambda & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les termes de cette matrice **M** sont quatre nombres purs *connus* par « l'homme de la lune selon Marx », même s'il ne connaît ni la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ni λ. Il peut toutefois en déduire immédiatement les termes diagonaux de **A** (les a_{ii}). En outre, il peut observer une propriété remarquable : la trace, le déterminant, l'équation caractéristique et donc aussi les valeurs propres de la matrice **M** sont *indépendants* de λ. Ce sont *les mêmes* que ceux de la matrice **A** inconnue. La plus-value étant positive, les matrices **M** et **A** sont productives.

Il se trouve – la suite de l'article le montrera – que l'analyse de la reproduction chez Marx dépend d'une proportion que nous notons *z* et appelons la « proportion de Marx », qui peut être comprise comme un indice du poids relatif des secteurs. Par définition, on pose $z = y_1 / k_2$, d'où l'on déduit :

$$z = y_1 / k_2 = q_1 / q_2 a_{21} = q / a_{21}$$

où q désigne la proportion des quantités physiques produites dans les deux secteurs $(q = q_1 / q_2)$. z est un nombre pur : il mesure le rapport *des valeurs ou des quantités* des capitaux constants qui ont été produits par le secteur I et utilisés par le secteur II. Comme il existe une seule technique, la proportion de Marx évoluera toujours comme la proportion entre les productions des deux secteurs dont elle est une fonction linéaire croissante. Ainsi, par exemple, la croissance régulière se définira-t-elle par la stationnarité de *z*.
En résumé, un économiste néo-sraffien qui accepte l'hypothèse de rendements d'échelles constants prendra pour base de son analyse dynamique le système physique (**A**, *q*). Marx, quant-à lui, se donne le système des flux monétaires (**M**, *z*) au départ de son analyse de la reproduction. Il suppose qu'il lui correspond une unique matrice **A** et une unique proportion *q* mais ne se donne jamais les moyens de les calculer. La connaissance de (**M**, *z***)** ne permet pas de déterminer la technique de production pas plus que le rapport d'échange ou la proportion entre les quantités produites. La technique appartient à un ensemble de matrices « **A** », associées aux différents niveaux possibles de λ et caractérisées par le fait qu'elles partagent toutes entre elles, et chacune avec **M**, la même équation caractéristique[2]. Nous allons montrer dans la suite, c'est l'un des objectifs de l'article, que la connaissance de cette équation caractéristique est suffisante pour déterminer les conditions *physiques* de la reproduction et des crises. Il est remarquable que ce résultat soit obtenu uniquement à partir de l'observation des flux monétaires (ou de valeurs)[3] sans avoir à entrer dans « les laboratoires secrets de la production ».
Notons, pour la suite, qu'il aurait été équivalent de capter l'idée de la proportion de Marx à travers le rapport des valeurs ou des quantités de biens de consommation utilisés productivement dans le secteur I et produits dans le secteur II : $v_1 / y_2 = q a_{12}$, plutôt que $y_1 / k_2 = q / a_{21}$. On peut définir une proportion $\tilde{z}$ de la façon suivante :

$$\tilde{z} = v_1 / y_2 = q_1 a_{12} / q_2 = q a_{12}$$

Sur la base de **M**, on passe de *z* à $\tilde{z}$ par la relation :

$$\tilde{z} = \left(k_2 / y_2\right)\left(v_1 / y_1\right) z = (a_{21}\lambda)(a_{12} / \lambda) z = a_{21} a_{12} z$$

Comme ($a_{21}\lambda$) et (a_{12} / λ) sont deux nombres connus, il est équivalent de raisonner sur le système (**M**, z) ou sur le système (**M**, $\tilde{z}$).
Remarquons enfin que « l'homme de la lune selon Marx » aurait pu tout aussi bien diviser non pas les valeurs des capitaux constant et variable des différents secteurs par la valeur de

---

[2] C'est seulement si le changement de λ était purement nominal au sens qu'il résulterait d'une modification des unités de mesure physique des biens, que l'ensemble des techniques se réduirait à une seule ayant autant d'expressions nominales que de choix d'unités physiques relatives.
[3] Oskar Lange (1965: 6) remarquait à cet égard : "It is possible to express quantities [*k*] et *v* + *m* in monetary units instead of physical units because this procedure does not affect at all the essence of balance-sheet laws studied by us". Cependant, il ne justifie guère cette thèse.

leur produit brut y_i, mais les valeurs des capitaux constants et variables des différents secteurs par les valeurs, respectivement, des moyens de production et biens de consommation produits. Il aurait alors obtenu une matrice

$$\begin{pmatrix} k_1/y_1 & v_1/y_2 \\ k_2/y_1 & v_2/y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}q \\ a_{21}/q & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \tilde{z} \\ 1/z & a_{22} \end{pmatrix},$$

indépendante de la valeur relative λ, où apparaissent z et $\tilde{z}$. Elle a la même équation caractéristique que les matrices **A** possibles et que la matrice **M**.

1.3. L'asymétrie des décisions d'accumulation

Nous allons montrer que l'originalité de l'équilibre de Marx s'explique par l'asymétrie des décisions d'accumulation qui, à son tour, est justifiée par l'utilisation différenciée des biens (hypothèse (*ii*). Désignant par s_i la fraction épargnée de la plus-value du capitaliste i (i = 1, 2) et par r_i son taux de profit, on a, compte tenu de (*iv*) et (*v*) :

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1\left(1+s_1r_1\right)+k_2\left(1+s_2r_2\right) \\ y_2 &= v_1\left(1+s_1r_1\right)+v_2\left(1+s_2r_2\right)+\left(1-s_1\right)r_1\left(k_1+v_1\right)+\left(1-s_2\right)r_2\left(k_2+v_2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Puisque l'on fait abstraction de la monnaie et des titres, la valeur de la demande globale de biens est égale à la valeur du produit total et, par conséquent, ces deux équations se déduisent l'une de l'autre. On raisonnera simplement sur la première équation. Notons $G_i = (1+g_i)$ les facteurs d'accumulation. Compte tenu de (*v*) $g_i = s_ir_i$. La première équation du système (3), sous la forme $y_1 = k_1G_1 + k_2G_2$, s'écrit après simplification par la valeur des moyens de production comme une relation purement physique entre quantités de ces moyens de production qui représente leur égalité emplois-ressources :

$$q_1 = G_1q_1a_{11} + G_2q_2a_{21} \tag{4}$$

Cette relation entre les facteurs d'accumulation sectoriels peut être réécrite pour faire apparaître la proportion de Marx et des paramètres tous connus sur la base du système (**M**, z) :

$$z = G_1za_{11} + G_2 \tag{5}$$

Dans cette première partie de l'article, nous supposons que les moyens de production sont toujours entièrement utilisés et donc que cette égalité est toujours vérifiée. À un moment donné, les facteurs d'accumulation sont les seules inconnues dans cette relation, ce qui illustre l'asymétrie des décisions des secteurs qui caractérise le modèle de Marx: un seul des deux taux d'accumulation peut être posé comme exogène. Mais en réalité l'équation (5) permet aussi de comprendre, au delà de cette asymétrie, pourquoi c'est le secteur I qui est choisi pour le rôle actif. Écrivons en effet la proportion de Marx future en fonction de son niveau actuel et des taux d'accumulation :

$$z^+ = z\frac{G_1}{G_2} \tag{6}$$

Cette définition donne une expression de G_2 linéaire en z ($G_2 = \frac{G_1}{z^+} z$). Sa substitution dans l'équation (5) permet d'éliminer non seulement G_2, mais aussi z pour obtenir une relation entre les seuls G_1 et z^+ :

$$z^+ = \frac{G_1}{1 - a_{11} G_1} \tag{7}$$

Ce résultat, étonnant car la proportion de Marx future ne dépend que de G_1 et pas de z, son niveau initial, est à l'origine de l'ajustement brutal à l'équilibre de Marx. Économiquement, il se comprend facilement. Considérons le système (1) : indépendamment du niveau d'activité de la section II, de k_2 et donc de z, la connaissance de y_1 et G_1 donne y_1^+ mais aussi $(y_1 - k_1^+)$, *i.e.* la valeur des moyens de production qui restent disponibles pour le secteur II, à savoir k_2^+ s'ils sont entièrement utilisés. Elle donne donc aussi $y_1^+ / k_2^+ = z^+$. Comme $y_1^+ = y_1 G_1$ et $y_1 - k_1^+ = y_1(1 - a_{11} G_1)$, on retrouve bien (7). Avec G_1 exogène, tant que les moyens de production existant sont entièrement utilisés, la même proportion de Marx z^+ sera donc obtenue immédiatement, à partir de valeurs potentiellement très diverses de son niveau initial. Après quoi il suffit que la décision d'accumulation du secteur I soit maintenue constante au cours du temps ($G_1^+ = G_1$, etc.), pour que l'économie suive un sentier de croissance régulier ($z^{++} = z^+$, etc.). Pour au moins des plages entières de valeurs de $z(0)$, en fixant G_1 on obtient une croissance régulière avec $z(t) = G_1 / (1 - a_{11} G_1)$ pout tout $t > 0$. Si G_1 varie, on provoque en une seule période un nouveau taux de croissance équilibré.
Il faut remarquer que le résultat impliqué par (7), tant en ce qui concerne le caractère abrupt de l'ajustement que sa stabilité, tient à la nature physique des moyens de production. Supposons, à titre d'exercice, que l'on se donne le taux d'accumulation du secteur II, et non plus G_1, comme variable exogène. Raisonnons *a contrario* de ce que nous venons de faire et rayons mentalement l'équation du secteur I dans le système (1). La connaissance de k_2 et G_2 nous donnera bien k_2^+ (pour autant que cette quantité soit disponible), mais rien ne nous permettra de déterminer k_1^+ ou v_1^+ (et donc y_1^+ et z^+) tant que nous ne connaîtrons pas y_1, et donc z. Nous connaissons y_2 et v_2^+, mais $(y_2 - v_2^+)$ ne fixe qu'une borne supérieure pour v_1^+, parce que contrairement au premier secteur le secteur II produit des biens à double usage, destinés aussi à la consommation finale des capitalistes. Rétablissons en revanche l'équation du secteur I. La connaissance de y_1 (ou z) nous fournit directement $k_1^+ = y_1 - k_2^+$ et donc y_1^+ et z^+. De fait, l'élimination de G_1 – et non plus de G_2 – entre les équations (5) et (6) donne maintenant, pour G_2 constant, une équation de récurrence en z :

$$z^+ - \frac{z}{a_{11} G_2} = -\frac{1}{a_{11}}$$

Sa solution est $z(t) = \overline{z} + \left(1 / a_{11} G_2\right)^t \left(z(0) - \overline{z}\right)$, où $\overline{z} = G_2 / (1 - a_{11} G_2)$. L'évolution est maintenant progressive et non plus brutale. En outre, on peut remarquer qu'elle est monotone instable sous l'hypothèse $G_2 < 1/a_{11}$, qui est la condition pour que la solution stationnaire $\bar{z}$ soit positive.

L'équation (4) lorsqu'elle est vérifiée, avec $G_1 \leq R_1$ exogène et constant, est à elle seule suffisante pour obtenir la solution complète du modèle de Marx. C'est donc l'accumulation dans le secteur I qui est décisive. Le modèle de Marx formalise une économie, tirée par les décisions d'accumulation dans le secteur du bien dont c'est le seul usage, les moyens de production.

1.4. Rosa Luxemburg et Michio Morishima à propos des schémas de reproduction

Ces deux auteurs reconnaissent l'importance théorique du schéma de Marx. Rosa Luxemburg y voit « l'un des services les plus éminents que Marx ait rendus à la science économique » (1913, t. 1 : 25) et Michio Morishima considère que « it is no exaggeration to say that before Kalecki, Frisch and Tinbergen no economist, except Marx, had obtained a macro-dynamic model rigorously constructed in a scientific way […..]. Marx's theory of reproduction is very similar to Leontief's input-output analysis […..] and […..] contains in itself a way to von Neumann Revolution » (1973, p. 3). Cependant, ils estiment que l'analyse de Marx est contradictoire avec sa vision du capitalisme. Rosa Luxemburg (1913, t. 2 : 15) observe qu' « en examinant le schéma de reproduction élargie sous l'angle de la théorie de Marx, on arrive à cette conclusion qu'il se trouve en contradiction avec cette théorie [celle qui se trouve dans tout le *Capital* en particulier dans le livre III] sur plus d'un point ». Cette contradiction a son origine dans l'interprétation commune aux deux auteurs du modèle de Marx comme un modèle d'équilibre, où la croissance régulière en seconde période est une propriété du modèle, qui découle nécessairement de ses hypothèses. Une fois que ceci est admis, il s'agit d'identifier l'hypothèse dont dépend l'équilibre de Marx et de montrer son caractère arbitraire. Cela justifie son élimination et son remplacement par une hypothèse différente, compatible avec des modèles où cet équilibre n'est pas vérifié. Pour Rosa Luxemburg, l'équilibre de Marx résulte de l'hypothèse (*i*) de technique de production inchangée : « malgré l'accumulation du capital […le schéma…] présuppose la même composition organique [….]. Cette hypothèse est sans doute admise pour simplifier l'analyse […mais doit être abandonnée car…] les modifications techniques [sont] parallèles au procès d'accumulation capitaliste et inséparables d'elle » (*Ibid.*, t. 2 : 15). L'interprétation du modèle de Marx comme un modèle d'équilibre est encore plus explicite chez Morishima. L'équilibre de Marx résulte de l'hypothèse (*vi*) sur l'asymétrie des décisions d'accumulation : cet équilibre est une « strange conclusion » du modèle qui « is not specific to the numerical illustration used by Marx, but is a logical implication of his investment function » (1973, p. 120). D'où la conclusion que « in Marx's economy there prevails a tendency towards balanced growth, which is much stronger than the convergence claimed by neoclassical economists such as Solow, Meade and Uzawa, because *any state* of unbalanced growth will disappear in Marx's economy in a single year" (*Ibid*. souligné par nous). C'est cette fonction d'investissement que Morishima remet en cause dans la suite de son chapitre.

La position de ces deux auteurs repose pourtant sur l'ignorance des conditions physiques de l'équilibre de Marx, qu'il faut maintenant étudier.

II. Les conditions physiques de l'équilibre de Marx

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, Marx pose la question des conditions de la reproduction de « la matière » ou de la « valeur d'usage » des différentes composantes du capital social. Il s'agit de savoir sous quelles hypothèses et dans quelles conditions, les moyens de production et les biens de consommation qui ont été produits, sont pleinement utilisés. Remarquons enfin que seules les hypothèses (*i*), (*ii*), (*iii*) et (*vi*) sont utiles pour l'analyse de la reproduction physique.

2.1. Le modèle physique

Considérons le système de Marx en valeurs d'usage, indépendamment de toute relation sociale, avec une équation pour chacune d'entre elles :

$$\begin{cases} q_1 G_1 a_{11} + q_2 G_2 a_{21} = q_1 \\ q_1 G_1 a_{12} + q_2 G_2 a_{22} + C = q_2 \end{cases}$$

où C désigne la consommation finale globale des non travailleurs. En divisant la première ligne par $q_2 a_{21}$ et la seconde par q_2, on fait apparaître les grandeurs connues sur la base du système (**M**, z) ou (**M**, $\tilde{z}$) :

$$\begin{cases} z G_1 a_{11} + G_2 = z \\ \tilde{z} G_1 + G_2 a_{22} + c = 1 \end{cases} \tag{8}$$

où on rappelle que $z = q/a_{21}$, $\tilde{z} = v_1 / y_2 = q a_{12} = a_{12} a_{21} z$ et où $c = C / q_2$ est la part de la consommation finale dans la production de biens de consommation.
En éliminant G_2 entre ces deux équations on met en évidence une relation entre G_1 et c :

$$c = (Dz) G_1 + (1 - a_{11} z) \tag{9}$$

où $D = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ est le déterminant de la matrice **M** (et de la matrice **A** inconnue). Il est positif si la composition organique du capital est plus élevée dans le secteur I que dans le secteur II, i.e. si le secteur I utilise plus intensivement les moyens de production (et moins intensivement le travail) que le secteur II. La part de la consommation finale c est une fonction linéaire croissante ou décroissante de G_1 selon le signe de D. Comme les facteurs d'accumulation des secteurs sont en relation décroissante (cf. (5) ou (8)), si $D > 0$ (< 0) c'est en effet un développement relatif important (faible) du secteur I qui libérera le plus de biens de consommation pour une utilisation finale.
Pour que l'équilibre de Marx soit possible, il faut que la consommation finale ne soit pas négative, donc que la solution de l'équation (9) soit positive ou nulle :

$$c \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad D G_1 \geq a_{22} - \frac{1}{z} \tag{10}$$

Si le déterminant est positif, la condition (10) se lit $G_1 \geq \frac{a_{22}}{D} - \frac{1}{zD}$. Elle détermine le taux d'accumulation minimum dans le secteur I qui permet au système de se reproduire. En revanche, si le déterminant est négatif, la condition (10) se lit $G_1 \leq \frac{a_{22}}{D} - \frac{1}{zD}$. Elle fixe alors le taux maximum de croissance admissible du secteur I. Pour que le système se reproduise, G_1 doit donc excéder une certaine valeur plancher si $D > 0$, et au contraire ne pas dépasser une valeur plafond si $D < 0$. Dans les deux cas, lorsque z augmente, l'ensemble des G_1 admissibles compatibles avec la reproduction se réduit progressivement selon le signe de D : le plafond baisse ou le plancher monte.

Pour que l'équilibre de Marx se réalise, il faut aussi qu'aucune crise de reproduction n'apparaisse en seconde période, donc que :

$$DG_1 \geq a_{22} - \frac{1}{z^+}$$

En utilisant l'équation (7) $z^+ = \frac{G_1}{1 - a_{11}G_1}$ pour éliminer z^+ de cette condition en seconde période, on a :

$$G_1^{-2} - \left(a_{11} + a_{22}\right)G_1^{-1} + D \geq 0 \qquad (11)$$

Lorsque cette condition est vérifiée à l'égalité, on obtient l'équation caractéristique des matrices **M** et **A**. G_1 est alors l'inverse de la valeur propre dominante de cette matrice, inverse que l'on notera μ. On peut montrer que l'inégalité précédente implique que :

$$G_1 \leq \mu \qquad (12)$$

On a donc obtenu une seconde condition algébrique du modèle physique, économiquement évidente puisqu'il n'y a pas de croissance régulière physiquement possible à un taux qui excède celui qui prévaut le long d'un sentier de von Neumann. Si la première condition $DG_1 \geq a_{22} - (1/z)$ n'est pas vérifiée, l'économie connaît, dès la première période, une crise de reproduction. Si au contraire cette première condition est satisfaite mais pas la seconde (si donc $G_1 > \mu$), on peut affirmer que, lorsque G_1 est maintenu constant, la crise de reproduction est évitée en première période mais survient nécessairement à la seconde. Si les conditions (10) et (12) sont toutes deux vérifiées la croissance régulière s'installera dès la seconde période. Ces deux conditions sont donc nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre de Marx se réalise, dans le modèle physique.

2.2. Conditions en valeurs et conditions physiques

Dans le modèle de Marx, les taux de profit sont donnés et l'accumulation dans chaque secteur est financée par sa propre plus-value. Il reste à savoir si ces conditions sociales imposent – ou non - des conditions supplémentaires à l'étude physique menée à la section précédente. Un exemple évident est le sentier de croissance maximal de von Neumann, toujours possible physiquement : il impose un rapport d'échange égal au prix de production, ce qui n'est compatible avec le schéma de Marx qu'en cas d'égale composition organique des deux secteurs ($D = 0$).

Marx choisit toujours, dans ses exemples, une composition organique du secteur I supérieure ou égale à celle du secteur II. Cela implique que le déterminant de **M** est positif ou nul, le secteur I utilisant relativement plus intensément les moyens de production que le secteur II. Comme Marx suppose l'uniformité (et la positivité) du taux d'exploitation, cela implique aussi l'inégalité suivante :

$$1 \leq \overline{R}_1 \leq \mu \leq \overline{R}_2$$

L'introduction des contraintes de budget se traduit chez Marx par une contrainte sociale d'autofinancement de l'accumulation des secteurs. Leurs taux de croissance sont limités par leurs taux de profit, lesquels sont fixes puisque la valeur relative est fixe : $G_1 \leq \overline{R}_1$ et $G_2 \leq \overline{R}_2$.

La crise de reproduction est évitée si et seulement si $z \leq \dfrac{\overline{R}_2}{1 - a_{11}G_1}$ (ou encore $G_1 \geq \dfrac{z - \overline{R}_2}{za_{11}}$). En effet, rappelons que $z = y_1 / k_2$. Compte tenu de la passivité du secteur II, la valeur des moyens de production que le secteur I a produit et ne désire pas accumuler, $y_1\left(1 - a_{11}G_1\right)$, ne doit pas excéder la valeur de la demande *maximale* de moyens de production du secteur II, soit $k_2\overline{R}_2$. Si cette crise est évitée en première période, elle l'est aussi par la suite car l'ajustement de z^+, donné par l'équation (7), permet de réécrire cette condition d'absence de crise de reproduction en seconde période sous la forme $G_1 \leq \overline{R}_2$: il n'y a évidemment pas de croissance régulière concevable à un taux qui excède les capacités de financement du secteur II, ce qui est automatiquement évité dans le modèle de Marx avec $D \geq 0$, puisque $G_1 \leq \overline{R}_1 \leq \overline{R}_2$.
L'hypothèse (*v*) du modèle de Marx impose donc à son équilibre des conditions plus fortes que les simples conditions physiques. Pour certaines proportions initiales, la crise pourrait physiquement être évitée pour des facteurs d'accumulation G_1 qui excèdent $\overline{R}_1$, en sorte que le secteur I se trouve incapable de les réaliser.

2.3. Comparaison avec l'analyse post sraffienne du modèle de Marx

L'approche post sraffienne suppose connues la matrice **A** et les quantités produites q_i (i = 1,2). Le point de départ est le système physique, ce qui conduit à privilégier l'équation (4). Il suffit alors de substituer à la variable z le rapport q/a_{21}, où les deux termes sont connus, pour retrouver les résultats précédents. La méthode « macroéconomique » suggérée par les schémas de Marx se révèle ainsi particulièrement puissante car, malgré l'hypothèse supplémentaire sur les méthodes de production, sur tous les points traités dans l'article l'approche post sraffienne n'apporte aucun élément nouveau.
Cette dernière est cependant utile car elle permet de répondre à une question intéressante qui n'a pas pu être traitée en utilisant uniquement les données du schéma des flux monétaires. Il s'agit de savoir dans quelle mesure le rapport d'échange entre les deux biens peut empêcher la réalisation de l'équilibre de Marx dans une économie qui vérifie les conditions physiques de la reproduction. Dans chaque situation où le choix de G_1 permet d'éviter une crise de reproduction, un transfert de marchandises est nécessaire entre les secteurs. La valeur, $q_1(1 - G_1a_{11})p$, des biens de production que le section I, livre à l'autre section doit être au moins égale à la valeur de la quantité de biens de consommation qui lui permettra de mettre en œuvre sa décision d'accumulation, $q_1a_{12}G_1$, en sorte que :

$$a_{12}G_1 \le \left(1 - a_{11}G_1\right) p$$

De même, la valeur des biens de production que le secteur II achète ne doit pas excéder la valeur des biens de consommation qu'il a produits déduction faite des biens de consommation qu'il accumule pour nourrir les travailleurs qu'il emploie :

$$a_{21}G_2 p \le \left(1 - a_{22}G_2\right)$$

Le déroulement normal de la reproduction exige donc que :

$$\frac{a_{12}G_1}{1 - a_{11}G_1} \le p \le \frac{1 - a_{22}G_2}{a_{21}G_2} \qquad (13)$$

Puisque la quantité de moyens de production qui a été produite est égale à la demande, $q_1 = q_1 a_{11} G_1 + q_2 a_{21} G_2$, la condition (19) se réécrit :

$$\frac{a_{12}G_1}{1 - a_{11}G_1} \le p \le \frac{1}{(1 - a_{11}G_1)q} - \frac{a_{22}}{a_{21}}$$

Le taux d'accumulation dans le secteur des moyens de production et la condition initiale sur la proportion q déterminent les limites entre lesquelles doit se fixer le prix relatif en première période. En développant cette expression, on peut vérifier que l'intervalle n'est pas vide pourvu que $a_{22} - \frac{a_{21}}{q} \le DG_1$, ce qui est la condition d'absence de crise de reproduction (voir la relation (10)).

Cependant, en l'absence de crise, à partir de la deuxième période le taux de croissance du secteur II sera égal à G_1. On doit donc écrire pour la période 2 et les périodes ultérieures, la relation (19) sous la forme :

$$\frac{a_{12}G_1}{1 - a_{11}G_1} \le p^{+} \le \frac{1 - a_{22}G_1}{a_{21}G_1}$$

À nouveau, en vertu de la condition (12) on peut vérifier que la fourchette, qui ne dépend plus que de G_1, n'est pas vide. Dans le cas où $G_1 = \mu$, la fourchette se réduit à un point et le prix relatif doit être égal au prix de production.

Ainsi, sur le sentier régulier, les conditions physiques de la reproduction imposent au rapport d'échange un intervalle qui ne dépend que de la technique et du choix du taux de croissance régulière. Tout mécanisme social qui déterminerait un prix relatif extérieur à ces fourchettes impliquerait l'impossibilité de choisir un taux de croissance pourtant physiquement réalisable.

Remarquons que dans le modèle de Marx où les taux d'accumulation sont bornés par les taux de profit, cette condition est automatiquement vérifiée puisque l'on peut écrire :

$$\frac{a_{12}G_1}{1 - a_{11}G_1} \le \frac{a_{12}\overline{R}_1}{1 - a_{11}\overline{R}_1} = \lambda = \frac{1 - a_{22}\overline{R}_2}{a_{21}\overline{R}_2} \le \frac{1 - a_{22}G_2}{a_{21}G_2}$$

CONCLUSION

Même si nous nous sommes limités à l'étude de la possibilité des crises, notre analyse est suffisante pour conclure que les critiques de Rosa Luxemburg et Morishima au schéma de reproduction élargie de Marx ne sont pas justifiées. Il n'est pas exact d'affirmer que l'équilibre de Marx résulte de l'hypothèse d'une technique constante, ni que cet équilibre est logiquement impliqué par la fonction d'investissement. Marx obtient l'équilibre à la deuxième période sur la base d'exemples numériques particuliers qui excluent toute crise. Nous avons montré que, dans le schéma de reproduction élargie du livre II du *Capital*, il n'y a pas d'incompatibilité entre les hypothèses de Marx et la crise. L'équilibre de Marx dépend de la proportion initiale entre les secteurs et, pour certaines proportions, de la décision d'accumulation des capitalistes du secteur I. Il s'ensuit que, contrairement à l'interprétation des deux auteurs, le schéma de Marx n'est pas un modèle d'équilibre.
Notre analyse a confirmé l'intuition de Marx sur l'importance de la reproduction « de la matière ». Nous avons montré que les propriétés de son modèle dérivent fondamentalement de sa spécification physique : une économie bisectorielle où un des deux biens a un usage unique, l'accumulation. En outre, et cela est remarquable, même si Marx part exclusivement de données de la circulation monétaire qui ne lui permettent de calculer ni les quantités relatives de biens produits et utilisés par les secteurs, ni leur valeur relative, son schéma fournit tous les éléments d'une étude des conditions physiques de la reproduction.

Références bibliographiques

Kurz Heinz & Neri Salvadori (2004), "'Man from the Moon'. On Sraffa's Objectivism", *Économies et Sociétés,* Histoire de la pensée économique, PE, n° 35 : 1545-1557.

Marx, Karl (1867), *Le capital,* livre 1, traduction française in Karl Marx, Œuvres, Paris : Bibliothèque de la Pléiade, t. 1, 1963.

Marx, Karl (1885), *Le Capital*, livre 2, traduction française, in Karl Marx, Œuvres, Paris : Bibliothèque de la Pléiade, t. 2, 1968.

Lange, Oskar (1965), *Teoria repeodukcji i akumulacji,* Warsaw : Polish Scientific Publishers, traduction anglaise, Oxford : Pergamon Press Ltd, 1969.

Luxemburg, Rosa (1913), *L'accumulation du capital*, traduction française, Paris, François Maspero, 1967.

Morishima, Michio (1973), *Marx's Economics, A dual theory of value and growth,* Cambridge, Cambridge University Press.

Sraffa, Piero (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities*, traduction française Serge Latouche, Paris: Dunod, 1970.

Trigg, Andrew (2006), *Marxian Reproduction Schema*, London, Routledge.

von Neumann, John (1938), "Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes" in *Ergebnisse eines mathematischen Seminars*, édité par K. Menger, Vienne. Traduction anglaise in *The Review of Economic Studies*, Vol. 13, N° 1 (1945 - 1946): 1-9.