

Credibility Models

Dr. Virginia Atanasiu

Catedra de Matematică, A. S. E. București

The paper presents the mathematical theory of some credibility models, involving complicated properties of conditional expectations and conditional covariance. The fact that is based on complicated mathematics will give more insight and understanding of the theoretical aspects and will point the way to the practical possibilities of the credibility models.

Key words: the risk premium, the credibility calculations.

Secțiunea 1. dezbate din punct de vedere teoretic modelul de credibilitate original al lui Bühlmann, relevându-i importanța pentru rezultatele viitoare privind credibilitatea în asigurările non-viață.

Secțiunea 2. a articolului constituie una dintre extensiile (generalizările) modelului original al lui Bühlmann, prin introducerea estimării recursive a credibilității din acest model.

Tema abordată de secțiunea 3. vizează, de asemenea, o extensie (generalizare) a modelului original al lui Bühlmann, prin prezentarea așa-numitului model de credibilitate care încorporează volumul riscului, în sensul că permite variația volumului riscului din modelul Bühlmann.

Secțiunea 1

Modelul ce face obiectul acestei secțiuni are drept principal scop estimarea primei nete de risc a unui contract (a unei polițe) de asigurare non-viață, dacă parametrul de risc al său (al ei) este θ . Subliniem faptul că θ este asimilat cu o variabilă aleatoare reală ce descrie caracteristicile riscului X luat în considerare pentru contractul respectiv, iar X cu o variabilă aleatoare nenegativă. Estimatorul ce urmează a fi folosit în scopul mai susmenționat l-am definit ca estimator liniar și neomogen, optim în sensul metodei celor mai mici pătrate (m.c.m.m.p.) și l-am numit estimator liniar și neomogen de credibilitate pentru prima netă de risc a contractului de asigurare non-viață implicat de acest model.

Pentru a ilustra cele spuse, fie: $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_t)$ vectorul $(1 \times t)$ aleator

al observațiilor efectuate pe durata a $t (\geq 2)$ ani asupra contractului respectiv. Presupunem: $0 < Var(X_r) < \infty, \forall r = \overline{1, t}$.

Prima netă de risc a contractului de parametru θ am reprezentat-o printr-o funcție $\mu(\cdot)$ depinzând de parametrul θ al contractului considerat, dar independentă de timp (de anul r al observației, $r = \overline{1, t}$). Deci $\mu(\theta)$ este prima netă de risc a contractului de parametru θ .

Estimatorul liniar și neomogen de credibilitate al lui $\mu(\theta)$ bazat pe \underline{X}' (adică pe observațiile efectuate pe durata celor $t (\geq 2)$ ani asupra contractului implicat în modelul pe care-l analizăm acum, adică asupra contractului de parametru θ), notat $\hat{\mu}(\theta)$ este așa după am afirmat ceva mai devreme, o funcție de \underline{X}' (adică de variabilele aleatoare observabile ale contractului de parametru θ) liniară și neomogenă, ceea ce înseamnă că este de forma unei combinații liniare și neomogene a tuturor variabilelor observabile ale respectivului contract, deci de forma:

$$\hat{\mu}(\theta) = a_0 + \sum_{r=1}^t a_r X_r,$$

a.î. să minimizeze eroarea medie pătratică a aproximării lui $\mu(\theta)$ prin toate funcțiile $g(\underline{X}')$, liniare și neomogene de forma:

$$g(\underline{X}') = c_0 + \sum_{r=1}^t c_r X_r$$

În concluzie, estimatorul liniar și neomogen de credibilitate al lui $\mu(\theta)$, adică $\hat{\mu}(\theta)$ (funcția liniară și neomogenă a tuturor obser-

vațiilor efectuate asupra contractului de parametru $\theta) = a_0 + \sum_{r=1}^t a_r X_r$, este, prin definiție, soluția problemei de minim:

$$\underset{\substack{c_0, c_r \\ r=1, t}}{\text{Min}} M \left\{ \left[\mu(\theta) - c_0 - \sum_{r=1}^t c_r X_r \right]^2 \right\}$$

În cele ce urmează, prezint soluția (rezultatul) liniar și neomogen de credibilitate, pe care am obținut-o în cadrul modelului abordat în studiul de față. În prealabil, realizez o descriere din punct de vedere probabilistic a acestui model: contractul implicat de modelul original al lui Bühlmann l-am reprezentat din punct de vedere probabilistic sub forma vectorului aleator bidimensional de componente $\theta \wedge \underline{X}'$, unde: prima componentă a vectorului, adică θ este parametrul de risc aleator neobservabil ce caracterizează riscul din contractul considerat, iar a doua componentă a vectorului, adică $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_t)$ este vectorul $(1 \times t)$ aleator al observațiilor efectuate pe durata a $t (\geq 2)$ ani asupra contractului respectiv (\underline{X}' indică observațiile efectuate asupra poliței pe durata a $t (\geq 2)$ ani; X_r reprezintă înregistrarea din anul r pentru contractul considerat; de regulă semnificația lui X_r este aceea de mărimea solicitărilor (cifra pretențiilor) de despăgubire din anul r pentru contractul respectiv, $r = \overline{1, t}$; am presupus că dispunem de înregistrările solicitărilor de despăgubire pe durata $t (\geq 2)$ ani pentru contractul de parametru θ).

Prin urmare, contractul considerat l-am identificat cu perechea (cuplul, v.a.b.) de componente $\theta \wedge \underline{X}'$, ale căror semnificații le-am precizat anterior.

Ipotezele de lucru introduse de Bühlmann sunt următoarele:

- (1) pentru θ dat, v.a. observabile (observațiile anuale) $X_r, r = \overline{1, t}$ sunt i.i.d.;
- (2) $0 < Var(X_r) < \infty, \forall r = \overline{1, t}$;
- (3) $M(X_r | \theta) = \mu(\theta), \forall r = \overline{1, t}$ (prima netă de risc este definită ca media condiționată de θ a observațiilor anuale efectuate asupra aces-

tui contract și este notată printr-o funcție $\mu(\cdot)$ depinzând de θ , dar independentă de $r, r = \overline{1, t}$ (adică de timp); am putut reprezenta media v.a. condiționate $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$ prin aceeași funcție $\mu(\cdot)$ depinzând de θ , dar independentă de $r, r = \overline{1, t}$ (adică de timp), întrucât aceste v.a. condiționate sunt i.d.);

(4) $Var(X_r | \theta) = \sigma^2(\theta), \forall r = \overline{1, t}$ (am putut reprezenta varianța observațiilor anuale condiționate $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$ prin aceeași funcție $\sigma^2(\cdot)$ depinzând de θ , dar independentă de $r, r = \overline{1, t}$ (adică de timp sau de anul observației), întrucât aceste v.a. condiționate sunt i.d.);

(5) $Cov(X_r, X_q | \theta) = 0, \forall r, q = \overline{1, t}, r < q$ (covarianța dintre observațiile anuale condiționate efectuate asupra contractului θ în ani diferiți este nulă, întrucât aceste v.a. condiționate sunt independente, cu alte cuvinte, observațiile condiționate efectuate asupra contractului de parametru θ în ani diferiți nu sunt corelate).

Observație:

Pentru contractul considerat rezultă următoarea matrice de covarianțe a observațiilor (riscurilor) condiționate din anii $r = \overline{1, t}$ și anume: $Cov(\underline{X}' | \theta) = I^{(t,t)} \sigma^2(\theta)$

Pe baza presupunerilor (1)-(5) formulate de Bühlmann și a parametrilor de structură notați cu m, s^2, a și definiți de actuar după cum urmează:

$$\begin{cases} m = M(X_r) = M[\mu(\theta)] \\ s^2 = M[\sigma^2(\theta)] \\ a = Var[\mu(\theta)] \end{cases}$$

am obținut folosind metoda celor mai mici pătrate, rezultatul liniar și neomogen de credibilitate, în speță prima liniară și neomogenă de credibilitate, pe care-l ilustrez în continuare: „Estimatorul liniar și neomogen de credibilitate al primei nete de risc $\mu(\theta)$ pentru contractul de parametru θ , bazat pe \underline{X}' (adică pe observațiile (înregistrările) individuale

efectuate asupra contractului considerat), deci $\hat{\mu}(\theta)$ este dat de relația:

$$\hat{\mu}(\theta) = z\bar{X} + (1-z)m,$$

unde: $\bar{X} = \frac{1}{t} \sum_{r=1}^t X_r$ este media aritmetică a

înregistrărilor individuale pentru respectivul contract, ce indică estimatorul individual pentru $\mu(\theta)$, iar $z = at/(s^2 + at)$ este factorul de credibilitate pentru contractul de parametru θ , ce indică de câtă credibilitate se bucură acestea”.

Subliniez că, în acest caz, prima liniară și neomogenă de credibilitate a contractului considerat, adică $\hat{\mu}(\theta)$ se poate calcula după formula prezentată mai înainte, numai dacă parametrii conținuți de ea și anume m, s^2, a sunt cunoscuți, ceea ce revine la a presupune că variabila aleatoare θ (variabila de structură) și $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$ (observațiile anuale condiționate sau riscurile anuale condiționate) au repartiții cunoscute.

În continuare prezentăm drept cazuri speciale din perspectiva atât a calculului estimatorului liniar și neomogen de credibilitate pentru $\mu(\theta)$ (adică a calculului lui $\hat{\mu}(\theta)$), cât și a formei rezultante a acestuia exemplele:

- 1) Gama pentru θ cu Poisson de parametru θ pentru $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$;
- 2) Beta pentru θ cu Bernoulli standard de parametru θ pentru $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$;
- 3) Gama pentru θ cu exponențial-negativă de parametru θ pentru $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$;
- 4) $\theta \in N(\mu_0, \sigma_0^2)$, cu $(X_r | \theta) \in N(\theta, \sigma^2), r = \overline{1, t}$.

Însă din nefericire, în general nu stăm atât de bine la capitolul calculului de credibilitate implicate de acest model particular. Pentru multe alegeri ale repartițiilor v.a. θ și $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$, calculul estimatorului liniar și neomogen de credibilitate pentru $\mu(\theta)$, adică a lui $\hat{\mu}(\theta)$ este dificil, iar formula sa rezultantă nu este o formulă liniară, care să-i

satisfacă pe clienții S.A., datorită proprietăților atractive pe care forma liniară le posedă.

Sfera de aplicabilitate a formulei lui $\hat{\mu}(\theta)$ fiind restrânsă (ea vizează cu precădere cazurile speciale redată la 1)-4)), se ridică o problemă în ceea ce privește calculul d.p.d.v.

practic al lui $\hat{\mu}(\theta)$ după formula prezentată. Problema cu care se confruntă în practica de zi cu zi calculul lui $\hat{\mu}(\theta)$, rezidă în aceea că repartițiile v.a. θ și $(X_r | \theta), r = \overline{1, t}$ sunt în general necunoscute, ceea ce face ca parametrii m, s^2, a conținuți de ea (de formulă) să fie necunoscuți și deci să necesite a fi estimați (în acest sens se trece la modelul clasic Bühlmann, a se v. [1]).

Secțiunea 2

Estimarea recursivă a credibilității din modelul original al lui Bühlmann constituie una dintre extensiile acestui model, în sensul că riscul pe care-l implică polița de asigurare non-viață nu rămâne în general același (constant, stabil) în timp, ceea ce înseamnă că pentru fiecare an $i (\geq 1)$ există un alt parametru de risc θ_i , conținând caracteristicile de risc ale poliței din anul i .

Notăție: $\theta = \{\theta_i\}_{i \geq 1}$, cu $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \dots \neq \theta_i \neq \dots$ (cu θ s-a notat șirul parametrilor de risc anuali diferiți (adică ce diferă de la an la an) ai contractului).

Pe baza presupunerilor (1)-(4) ale acestui model, prezentate mai jos și anume:

(1) pentru θ dat, v.a. (observațiile anuale) $X_i, i \geq 1$ sunt independente (condițional) $[(X_i | \theta_i) \wedge (X_j | \theta_j)]$ sunt independente, dacă $i, j \geq 1$, cu $i \neq j$;

(2) $0 < Var(X_i) < \infty, i \geq 1$;

(3) $M(X_i | \theta_i) = \mu(\theta_i), i \geq 1$ (prima netă de risc a contractului din anul i , deci a contractului de parametru θ_i este definită ca media observațiilor (riscurilor) condiționate din acel an i), unde $\mu(\cdot)$ este o funcție cu valori reale, depinzând de θ_i , oricare ar fi $i \geq 1$;

(4) $Cov[\mu(\theta_i), \mu(\theta_j)] = \rho^{|i-j|} \lambda, \forall i, j \geq 1$, cu $0 < \rho < 1$ și $\lambda > 0$ (v.a. $\mu(\theta_i) \wedge \mu(\theta_j)$) sunt corelate, iar corelația între primele nete din ani diferiți (din anii $i \wedge j$, cu $i \neq j$) descrește odată cu creșterea distanței temporale (în timp), precum și a parametrilor structurali definiți după cum urmează:

$$\begin{aligned} \mu &= M(X_i) = M[\mu(\theta_i)], i \geq 1; \\ \varphi &= M[Var(X_i | \theta_i)], i \geq 1; \\ \rho &; \\ \lambda &= Var[\mu(\theta_i)], i \geq 1, \end{aligned}$$

am obținut, folosind metoda celor mai mici pătrate și proceduri de tip recursiv, rezultatele liniare și neomogene de credibilitate, în speță primele liniare și neomogene de credibilitate ale contractului de asigurare non-viață, din anii i , cu $i \geq 1$, pe care le ilustrez în continuare:

„Estimatorul liniar și neomogen de credibilitate pentru prima netă de risc $\mu(\theta_{t+1})$ a contractului din anul $(t+1)$, bazat pe $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_t)$, (deci a observațiilor efectuate pe durata a $t(\geq 2)$ ani), cu $t \geq 1$,

adică $\hat{\mu}(\theta_{t+1})$ este:

$$\hat{\mu}(\theta_{t+1}) = \alpha_{t_0} + \sum_{j=1}^t \alpha_{t_j} X_j, t \geq 1, \quad \text{cu}$$

$0 < \alpha_{t_1} < \alpha_{t_2} < \dots < \alpha_{t_t} < 1$, iar estimatorul primei nete de risc $\mu(\theta_1)$ a contractului din anul 1, adică $\hat{\mu}(\theta_1)$ este: $\hat{\mu}(\theta_1) = \mu$ ”.

Observație:

Modelul original de credibilitate al lui Bühlmann se obține din modelul de estimare recursivă a credibilității, atunci când $\theta_i = \theta_1, \forall i \geq 1$.

Secțiunea 3

Modelul prezentat de această secțiune apare ca o altă extensie (generalizare) a modelului original al lui Bühlmann, în sensul că permite variația volumului riscului din modelul abordat în cadrul secțiunii 1., prin încorporarea volumului riscului de acolo. Afirmația „volumul riscului nu rămâne constant în timp”, trebuie înțeleasă astfel: „# riscurilor din fie-

care an de valabilitate a contractului nu este același, ci variază de la an la an, depinde de anul luat în considerație”.

Notății: $P_j = (\# \text{ riscurilor din anul } j), j = \overline{1, t}$; $Y_{jr}, r = \overline{1, P_j}$ sunt sumele pretinse (solicitate) pentru cele P_j riscuri din anul $j, j = \overline{1, t}$;

$S_j = \sum_{r=1}^{P_j} Y_{jr} = (\text{suma totală pretinsă (solicita-} \\ \text{tă) pentru respectivul contract în anul } j), \\ j = \overline{1, t}; X_j = S_j / P_j = (\text{raportul pierderilor} \\ \text{din anul } j), j = \overline{1, t}; \underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_t) = \\ (\text{vectorul aleator al pierderilor anuale unitare}).$

Pe baza presupunerilor (1)-(3) ale acestui model prezentate mai jos și anume:

(1) pentru θ dat, v.a. $Y_{jr}, r = \overline{1, P_j}, j = \overline{1, t}$ sunt i.i.d., ceea ce implică faptul că pentru θ dat, observațiile, adică pierderile anuale unitare \underline{X}' sunt i.i.d.;

(2) $M(X_j | \theta) = \mu(\theta), j = \overline{1, t}$ (prima netă a contractului de parametru θ se definește ca media pierderilor anuale unitare condiționate);

(3) $Var(Y_{jr} | \theta) = s^2(\theta), r = \overline{1, P_j}, j = \overline{1, t}$ (am putut reprezenta varianța pretențiilor condiționate $(Y_{jr} | \theta), r = \overline{1, P_j}, j = \overline{1, t}$ prin aceeași funcție $s^2(\cdot)$ depinzând de θ , dar independentă de $j, j = \overline{1, t}$ (de an, de timp), întrucât aceste v.a. condiționate sunt i.i.d.) $\Rightarrow Var(X_j | \theta) = s^2(\theta) / P_j, j = \overline{1, t}$ (ipoteză care este fără dar și poate cea mai rezonabilă, dacă ținem seamă de semnificația lui P_j), precum și a parametrilor de structură definiți de actuarii Bühlmann-Straub, după cum urmează:

$$\begin{cases} \mu = M(X_j) = M[\mu(\theta)], j = \overline{1, t}; \\ \varphi = M[s^2(\theta)]; \\ \lambda = Var[\mu(\theta)], \end{cases}$$

am obținut, folosind metoda celor mai mici pătrate rezultatul liniar și neomogen de credibilitate, în speță prima liniară și neomogenă, pe care o ilustrez în continuare: „Estima-

torul liniar și neomogen de credibilitate al primei nete de risc $\mu(\theta)$ pentru contractul considerat, bazat pe pierderile anuale unitare înregistrate în decursul a $t(\geq 2)$ ani, adică pe

$\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_t)$, deci $\hat{\mu}(\theta)$ este dat de relația: $\hat{\mu}(\theta) = \frac{P}{P+K} \bar{X}_t + \frac{K}{P+K} \mu$, unde:

$$P = \sum_{j=1}^t P_j = (\text{totalul riscurilor din cei } t(\geq 2)$$

ani de observație efectuați asupra contractului), $\bar{X}_t = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^t P_j X_j$ (media aritmetică ponderată a pierderilor anuale unitare, ponderile în sumă fiind numerele: $P_j / P, j = \overline{1, t}$).

Observații:

1) Estimatorul primei nete de risc a contractului din modelul prezentat se poate calcula cu ușurință, întrucât formula sa rezultantă este o formă liniară și neomogenă în \bar{X}_t (estimatorul individual pentru $\mu(\theta)$) și μ (estimatorul colectiv pentru $\mu(\theta)$).

2) Modelul original al lui Bühlmann se obține din modelul care încorporează volumul riscului, pentru $P_j = 1, \forall j \geq 1$.

Concluzii

Articolul prezintă teoria matematică a unor modele de credibilitate, implicând proprietăți complicate ale valorilor medii condiționate și ale covarianțelor condiționate. Faptul că se bazează pe matematici complicate, va conduce la o aprofundare și la o mai bună înțelegere a aspectelor teoretice și va deschide calea către posibilitățile practice ale modelelor de credibilitate.

Bibliografie

- [1]. **Atanasiu V.**, *Contributions to the credibility theory*, thesis of doctorate, University of Bucharest-Faculty of Mathematics, 2000.
- [2]. **Atanasiu V.**, *Calcul de credibilitate*, Revista „Studii și Cercetări de Calcul Economic și Cibernetică Economică” 4 / 1998, XXXII.
- [3]. **Goovaerts M.J., Kaas R., Van Herwaarden A.E., Bauwelinckx T.**, *Insurance Series, volume 3, Effective Actuarial Methods*, University of Amsterdam, The Netherlands, 1991.
- [4]. **Pentikäinen T., Daykin C.D., Pesonen M.**, *Practical Risk Theory for Actuaries*, Université Pierré et Marie Curie, 1990.
- [15]. **Sundt B.**, *An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics*, Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim Band 28, VVW Karlsruhe, 1984.