Bühler, Wolfgang; Kempf, Alexander

Working Paper

Optimale Arbitragestrategien in Terminmärkten

ZEW Discussion Papers, No. 94-10

Discussion Paper No. 94-10

Optimale Arbitragestrategien in Terminmärkten

Wolfgang Bühler
Alexander Kempf

Optimale Arbitragestrategien in Terminmärkten

von

Wolfgang Bühler * & Alexander Kempf **

** Lehrstuhl für Finanzierung, Universität Mannheim, und ZEW*
*** ZEW*

April 1994

Zusammenfassung

Der folgende Beitrag analysiert das optimale Verhalten eines Investors, der Arbitrage zwischen Kassa- und Futuresmarkt betreibt. Gegenüber dem Standardmodell der cash & carry-Arbitrage wird der zulässige Strategieraum des Arbitrageurs erweitert, indem berücksichtigt wird, daß der Arbitrageur in der Vergangenheit eingegangene Arbitragepositionen jederzeit vor Fälligkeit glattstellen kann.

Abstract

The following article analyses the optimal arbitrage strategy of an investor in the spot and in the futures market. In contrast to the cost of carry model, the arbitrageur is not obliged to hold positions until maturity, but he may unwind arbitrage positions before maturity whenever it is favourable to him.

1 Problemstellung

1.1 Einführung

Die zentrale Bedeutung von Kapitalmärkten für eine Volkswirtschaft ist unstrittig. Über sie werden zum einen Finanzmittel ihrer effizienten Verwendung zugeführt, zum anderen bieten diese Märkte Individuen die Möglichkeit, die für sie optimale zeitliche Stuktur ihres Konsumstromes zu realisieren.

Die Beurteilung der Terminmärkte fällt im Vergleich zu den Kassamärkten weniger eindeutig aus. Phasen, in denen primär der spekulative Charakter dieser Märkte betont wird, wechseln ab mit Phasen, in denen die Absicherungsmöglichkeiten mittels Terminmärkte im Vordergrund der Diskussion stehen. Der Wechsel in der Einschätzung von Termingeschäften spiegelt sich auch in der Dialektik von Deregulierungs- und Regulierungsmaßnahmen wider, wie sie in den vergangenen Jahrzehnten zu beobachten war.

Mit der Bereitstellung finanzieller Mittel sind für den Kapitalgeber Risiken vielfältiger Arten verbunden, die sich in den heutigen und zukünftigen Preisen der gehandelten Titel niederschlagen. Wenn es gelingt, diese Risiken von den zugrundeliegenden Kapitaltransaktionen zu trennen, dann können die Risiken von denjenigen Marktteilnehmern übernommen werden, die hierzu in der Lage sind. Dadurch erhöht sich die Ergiebigkeit der Kassamärkte, da dann auch diejenigen potentiellen Kapitalgeber Mittel bereitstellen, die hierzu ohne Verlagerungsmöglichkeit der Risiken nicht bereit wären.

Auf Terminmärkten werden Instrumente gehandelt, mit deren Hilfe die gewünschte Risikoverlagerung erreicht wird. Terminmärkte besitzen somit eine die Kassamärkte unterstützende Funktion, indem sie für eine optimale Allokation der auf Kassamärkten entstehenden Risiken sorgen. Zu den wichtigsten auf Terminmärkten gehandelten Instrumenten zählen Optionen, Forwards und Futures. Im Rahmen dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf Forwards und Futures.

Bei Forwards und Futures werden die Konditionen eines erst in der Zukunft zu erfüllenden Geschäftes bereits heute festgelegt. Zu diesen Konditionen zählen die Art und Menge des zu kaufenden oder zu verkaufenden Instrumentes und dessen Preis. Durch die Fixierung des

Preises der zukünftigen Transaktion wird somit das Risiko einer ungünstigen Preisentwicklung ausgeschaltet.[1]

1.2 Cash & Carry-Arbitrage

Zwischen dem heutigen Preis eines Kassainstrumentes und dessen Terminpreis muß ein enger Zusammenhang bestehen. Liegt beispielsweise der aktuelle Goldpreis pro Unze bei 370 $ und der Terminpreis bei Lieferung in einem Jahr ebenfalls bei 370 $, dann könnte die folgende Arbitragestrategie von einem Goldhändler durchgeführt werden: Er verkauft eine Unze Gold zu 370 $, legt diesen Betrag risikolos zu 6 % an und kauft gleichzeitig dieselbe Menge Gold per Termin in einem Jahr zurück. Durch diese Transaktion erzielt er einen risikolosen Arbitragegewinn in Höhe von 0,06 · 370 = 22,20 $.

In "gut funktionierenden" Märkten führt diese Arbitragestrategie (Verkauf am Kassamarkt, Kauf am Terminmarkt) solange zu fallenden Kursen auf dem Kassamarkt und zu Kurssteigerungen auf dem Terminmarkt, bis keine weiteren risikolosen Arbitragegewinne mehr erzielt werden können.

Es läßt sich zeigen[2], daß für ein lagerfähiges Kassainstrument zwischen dem aktuellen Kassapreis $S(t)$ und dem zugehörigen Terminpreis $F(t,T)$ eines Termingeschäftes mit Erfüllung in $T-t$ Jahren die folgende Beziehung besteht:

$$F(t,T) = S(t)e^{r(T-t)}. \qquad (1)$$

Hierbei bezeichnet r die Höhe des konformen Zinssatzes für eine risikolose Mittelanlage oder Mittelaufnahme der Fristigkeit $T-t$. Werden während der Laufzeit des Termingeschäftes Ausschüttungen auf das Kassainstrument vorgenommen, verringert sich $F(t,T)$ um den Barwert dieser Zahlungen. Im Zeitpunkt der Fälligkeit des Termingeschäftes T müssen sich der Terminpreis $F(T,T)$ und der Kassapreis $S(T)$ entsprechen.

---

1 Da es sich bei einem Forward um ein unbedingtes Termingeschäft handelt, verliert der Investor mit der heutigen Fixierung des Terminpreises auch die Chance, in Zukunft einen günstigeren Preis erzielen zu können. Hierin unterscheiden sich Forwards und Futures von Optionen, bei denen der Käufer das Recht, aber nicht die Pflicht, hat, zu einem heute fixierten Kurs zu handeln.

2 Vgl. Hull (1993), S. 51 ff.

Bei gegebenem Kassakurs kann mit Hilfe von (1) der zugehörige arbitragefreie Terminpreis $F(t,T)$ ermittelt werden, der auch als *cash & carry-Preis* bezeichnet wird. Diese Namensgebung geht auf eine Transaktion zurück, bei der das Kassainstrument im Zeitpunkt t erworben (cash) und auf Lager gelegt wird (carry). Sofern bei der Lagerung des Kassainstruments keine direkten Lagerkosten entstehen, sind mit dieser cash & carry-Transaktion die Zahlung des Kassapreises $S(t)$ und Zinszahlungen oder entgangene Zinserträge verbunden. Beide Konsequenzen sind annahmegemäß sicher und addieren sich zu dem Terminpreis $F(t,T)$.

Immer, wenn der Terminpreis nicht mit dem aufgezinsten Kassapreis übereinstimmt, setzt unter Annahmen, die weiter unten präzisiert werden, eine risikolose Arbitrage ein, die den Terminpreis auf die in Beziehung (1) festgelegte Höhe zurücktreibt. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(i) Liegt der quotierte Terminpreis $\hat{F}(t,T)$ unter $F(t,T)$, d.h. ist der Forward unterbewertet, dann wird ein Arbitrageur den Forward kaufen, das Kassainstrument verkaufen und den erzielten Kassapreis risikolos anlegen. Bei Fälligkeit des Forwards muß er das Kassainstrument zum Terminpreis $\hat{F}(t,T)$ erwerben. Diesen Preis entrichtet er aus dem zum Zinssatz r angelegten Kassapreis und erzielt einen Gewinn zum Zeitpunkt T in Höhe von $F(t,T)-\hat{F}(t,T)$. Bezogen auf den Zeitpunkt t führt diese "short-Arbitrage" zu einem Gewinn der Höhe $S(t)-\hat{F}(t,T)e^{-r(T-t)}$.

(ii) Liegt der quotierte Terminpreis $\hat{F}(t,T)$ über dem cash & carry-Preis $F(t,T)$, dann führt der Arbitrageur eine "long-Arbitrage" durch, bei der das Kassainstrument gekauft und der Forward verkauft werden. Der Arbitragegewinn im Zeitpunkt t ergibt sich dann zu $\hat{F}(t,T)e^{-r(T-t)}-S(t)$.

Aus den dargestellten Zusammenhängen zwischen Kassa- und Terminmarkt wird deutlich, daß Arbitrageuren eine wichtige Mittlerfunktion zwischen Kassa- und Terminmärkten zukommt. Durch ihre Transaktionen sorgen sie dafür, daß neue Informationen an beiden Märkten zeitgleich verarbeitet werden und stellen dadurch sicher, daß die Preise auf beiden Märkten sich parallel entwickeln.[3]

3 Vgl. zur Informationsübertragung zwischen Kassa- und Terminmarkt für den Deutschen Aktienindex (DAX) Grünbichler/Longstaff/Schwartz (1992) und Kempf/Kaehler (1993).

Ohne den durch Arbitrageure bewirkten Preisverbund zwischen Termin- und Kassamärkten wäre insbesondere bei einem Einsatz von Futures die gewünschte Risikoabsicherung nicht zu erreichen. Da Futures, im Gegensatz zu Forwards, in bezug auf Kontraktvolumen und Fälligkeitstermin standardisierte Termingeschäfte sind, wird ein Investor in der Regel keine perfekte Absicherung einer Kassamarktposition mittels Futures erreichen können. Ist die Laufzeit des Futures beispielsweise länger als die gewünschte Absicherungsdauer, wird der Investor seine Futuresposition vor Fälligkeit glattstellen. Die gewünschte Absicherung der Kassaposition wird nur dann erfüllt, wenn sich Kassa- und Futureskurs während der Absicherungsfrist in etwa gleichgerichtet entwickelt haben. Dies stellen Arbitrageure sicher.

1.3 Voraussetzungen der Cash & Carry-Arbitrage

Die Beziehung (1) ist an eine Reihe von Voraussetzungen gebunden, von denen die drei wichtigsten im weiteren diskutiert werden:

(i) Das Kassainstrument kann gelagert werden, und es fallen keine Ausschüttungen bis zur Fälligkeit des Terminkontraktes an.

(ii) Allein die Arbitrageure bestimmen den Zusammenhang zwischen Kassa- und Terminpreis.

(iii) Arbitrageure halten eingegangene Arbitragepositionen stets bis zur Fälligkeit des Terminkontraktes.

Zu (i): In aller Regel sind Finanztitel in dem Sinne lagerfähig, daß sie gekauft und bis zur Fälligkeit des Termingeschäftes gehalten werden können.[4] Das gilt auch für das dem DAX-Index zugrundeliegende Aktienportefeuille. Da es sich bei diesem Index um einen Performance-Index handelt, ist für ihn, im Gegensatz zu den meisten anderen Indizes und Finanztiteln, auch die Ausschüttungsbedingung erfüllt. Im weiteren wird deshalb ein Termingeschäft auf den DAX betrachtet.

[4] Ein Beispiel für ein nicht lagerfähiges Gut, auf das Termingeschäfte abgeschlossen werden, stellt ein Agrarprodukt dar, das erst im nächsten Jahr geerntet wird.

Es ist bekannt, daß bei nicht stochastischen Zinssätzen der Preis eines Forwards mit dem eines Futures auf dasselbe Kassainstrument übereinstimmt.[5] Wenngleich beobachtbare Zinssätze sich nicht deterministisch verhalten, haben empirische Untersuchungen doch gezeigt, daß die Preise von Forwards und Futures nur sehr geringfügig voneinander abweichen.[6] Deshalb treffen die folgenden Überlegungen auch auf die an der Deutschen Terminbörse gehandelten DAX-Futures zu.

Zu (ii): Damit die Arbitrageure allein den Preiszusammenhang zwischen Kassa- und Terminmarkt determinieren, müssen

- sie über unbeschränkt einsetzbare Mittel verfügen können,
- die beiden Märkte friktionsfrei sein, und
- die Arbitragetransaktionen risikolos durchgeführt werden können.

Alle drei Annahmen sind in der Realität nicht erfüllt. Für die erste Voraussetzung ist dies offensichtlich. Da insbesondere die Käufe und Verkäufe am Kassamarkt Transaktionskosten verursachen, trifft auch die zweite Annahme nicht zu. Die dritte Annahme ist verletzt, da auch die Orders von Arbitrageuren einer Ausführungsverzögerung unterliegen. Daraus folgt, daß der Ausführungskurs nicht zwingend mit dem eine Arbitragemöglichkeit anzeigenden Signalkurs übereinstimmt, und deshalb der erwartete Arbitragegewinn nicht mit Sicherheit realisiert werden kann.[7]

Zu (iii): Arbitrageure sind keinesfalls daran gebunden, eine aufgebaute Arbitrageposition bis zur Fälligkeit des Futures in T zu halten. Wurde beispielsweise im Zeitpunkt t eine long-Arbitrage-Position aufgebaut und ist in einem späteren Zeitpunkt τ das Kassainstrument relativ zum Futures überbewertet, dann wird durch die vorzeitige Glattstellung der ursprünglichen Arbitrage-Position ein höherer Gewinn erzielt, als wenn diese bis zur Fälligkeit gehalten

---

5 Vgl. Cox/Ingersoll/Ross (1981), Proposition 3, S. 325.

6 Vgl. beispielsweise Cornell/Reinganum (1981). Zu einer komparativ statischen Analyse der Preisunterschiede von Forwards und Futures bei stochastischen Zinsen vgl. Berendes/Bühler (1993).

7 Vgl. Bühler/Kempf (1993) zu einer empirischen Untersuchung von Arbitragegewinnen zwischen DAX und DAX-Futures, bei der Ausführungsverzögerungen berücksichtigt werden.

wird.[8] Dem Arbitrageur steht somit ein sehr viel reichhaltigeres Strategiespektrum zu Verfügung als dies bei der cash & carry-Arbitrage unterstellt wird. Eine empirische Studie von Sofianos (1993) zeigt, daß die Möglichkeit der vorzeitigen Glattstellung bei 70 % der eingegangenen Arbitrage-Positionen wahrgenommen wird. Der dabei erzielte Gewinn beträgt ca. 44 % des gesamten Arbitragegewinns.[9]

1.4 Zum Stand der Literatur

Nur in wenigen Publikationen wurde die vorzeitige Glattstellungsmöglichkeit eines Arbitrageurs modelliert. Brennan und Schwartz (1988, 1990) analysieren die optimale Strategie unter den engen Voraussetzungen, daß Arbitrageure nur *eine* Position aufbauen können und daß ihre Transaktionen die Marktpreise nicht beeinflussen. Duffie (1990) charakterisiert unter denselben einschränkenden Annahmen die Höhe der kritischen Fehlbewertung, für die eine eingegangene Position optimal aufgelöst werden sollte. Wie Brennan und Schwartz modelliert Duffie die Fehlbewertung als exogenen stochastischen Prozeß in Form einer Brownschen Brücke. Mehr als eine Position kann ein Arbitrageur in dem Modell von Tuckman und Vila (1992) eingehen. Die Annahme einer exogenen Fehlbewertung wird aber genauso beibehalten wie die Voraussetzung, daß Arbitrage-Positionen risikolos aufgebaut werden können. Ferner berücksichtigen Tuckman und Vila in ihrem Modell keine Transaktionskosten.

Cooper und Mello (1990) und Holden (1990) modellieren erstmals die Rückwirkung der Nachfrage von Arbitrageuren auf die Höhe der Fehlbewertung. Ihre Modelle werden im folgenden in einer Vielzahl von wesentlichen Punkten verallgemeinert:

- Arbitrage-Positionen können aufgrund von Ausführungsverzögerungen nicht risikolos aufgebaut werden.

- Der unterstellte stochastische Prozeß des Kassapreises entsteht aus dem Zusammenwirken mehrerer Gruppen von Marktteilnehmern. Ohne Arbitrageure wird dieser stochastische Prozeß der

8 Die Gewinnerhöhung resultiert hierbei aus unterschiedlichen Transaktionskosten beim Öffnen und Schließen von Arbitragepositionen. In Abschnitt 2 wird hierauf näher eingegangen.

9 Vgl. Merrick (1989).

Fehlbewertung im Mittel *nicht* gegen null konvergieren. Den Arbitrageuren kommt deshalb die oben beschriebene originäre Aufgabe zu, Fehlbewertungen zu reduzieren.

- Arbitrageure müssen bei der Entwicklung ihrer optimalen Strategien zwei Arten von Kursrisiken beachten: Kursrisiken im Futures- und im Kassamarkt.

In Abschnitt 2 werden das Optimierungsproblem des Arbitrageurs formalisiert und die Existenz einer optimalen Strategie nachgewiesen. Ferner werden Überlegungen zur numerischen Lösung des entstehenden Dynamischen Optimierungsproblems in drei Zustands- und einer Zeitvariablen vorgestellt. Abschnitt 3 ist der Analyse der optimalen Arbitragestrategien mit und ohne vorzeitige Glattstellungsmöglichkeit gewidmet. Eine Reihe offener Fragen wird in dem abschließenden Abschnitt 4 angesprochen.

2 Optimierungsproblem des Arbitrageurs

2.1 Voraussetzungen

Die weiteren Überlegungen beruhen auf den nachfolgend zusammengestellten Annahmen:

(i) Es wird nur der Arbitrageur mit den geringsten Transaktionskosten betrachtet. Er wird als risikoneutral mit rationalen Erwartungen modelliert.[10] Der Arbitrageur legt den Planungen für seine optimale Strategie ein endliches Intervall $[0,T]$ zugrunde.

(ii) Das Zeitintervall $[0,T]$ wird in N Teilintervalle der Länge Δt zerlegt. In jedem der Zeitpunkte $t_n = n\Delta t$ $(n = 0,\ldots,N-1)$ kann der Arbitrageur über den Umfang seiner unlimitierten Aufträge im Futures- und Kassamarkt entscheiden. $x(t_n)$ symbolisiert die Nachfrage des Arbitrageurs (in Stück) im Kassamarkt und kann positiv oder negativ sein. Die Nachfrage am Futuresmarkt entspricht genau der negativen Menge der Nachfrage am Kassamarkt.

---

[10] Zum Konzept rationaler Erwartungen in dem hier verwendeten Sinn vgl. z. B. Varian (1984), S. 234.

Der Aufbau einer long-Arbitrage-Position und der Abbau eines short-Arbitrage-Position werden durch ein positives $x(t_n)$ beschrieben. Ein negatives $x(t_n)$ charakterisiert den Aufbau einer short- oder den Abbau einer long-Arbitrage-Position. Ein im Zeitpunkt t_{n-1} plazierter Auftrag wird aufgrund einer Auftragsverzögerung der Länge Δt erst in t_n ausgeführt.

(iii) Es wird nur ein Futures-Kontrakt mit Fälligkeit in T betrachtet. Für den Futuresmarkt wird Informationseffizienz vorausgesetzt. Der Futurespreis ist exogen und genügt der folgenden stochastischen Differenzengleichung

$$\tilde{F}(t_n,T) = F(t_{n-1},T) + \sigma(t_n)\cdot \tilde{Z}(t_n). \tag{2}$$

In (2) bezeichnet $\tilde{Z}(t_n)$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit Mittelwert null und Varianz eins. Der über die cash & carry-Beziehung (1) ermittelte implizite Kassakurs

$$\tilde{S}_I(t_n) = \tilde{F}(t_n,T)\cdot e^{-r(T-t_n)} \tag{3}$$

genügt approximativ der stochastischen Differenzengleichung

$$\tilde{S}_I(t_n) = S_I(t_{n-1}) + r\cdot S_I(t_{n-1})\Delta t + \sigma\cdot \tilde{Z}(t_n) \tag{4}$$

mit konstanter Volatilität σ.

(iv) Am Futuresmarkt fallen keine Transaktionskosten an. Die Transaktionskosten am Kassamarkt sind proportional zum Transaktionsvolumen in DM. Beim Aufbau einer Arbitrage-Position entstehen höhere entscheidungsrelevante Transaktionskosten pro Einheit als beim vorzeitigen Schließen einer offenen Position. Wird eine Arbitrageposition bis Fälligkeit gehalten, fallen keine weiteren Transaktionskosten an.

(v) Der Gleichgewichtsprozeß für den Kassapreis unter Berücksichtigung der Nachfrage des Arbitrageurs besitzt die folgende Struktur:[11]

[11] Zur Begründung dieses Gleichgewichtsprozesses vgl. Bühler/Kempf (1994).

$$\tilde{S}(t_n) = S(t_{n-1}) + \alpha\left\{\beta_I\left[\tilde{S}_I(t_n) - S_I(t_{n-1})\right] + \beta_N \tilde{Z}_N(t_n) + \beta_F(t_n) + x(t_{n-1})\right\} \tag{5}$$

Der erste Ausdruck in der geschweiften Klammer beruht auf der Nachfrage einer Investorengruppe, die sich an der Entwicklung des Futurespreises $\tilde{F}(t_n)$ bzw. des impliziten Kassapreises $\tilde{S}_I(t_n)$ orientiert. Der zweite Term charakterisiert den Einfluß stochastischer unlimitierter Marktaufträge sogenannter Noise-Trader.[12] Der Erwartungswert von $\tilde{Z}_N(t_n)$ ist null. Der dritte Summand basiert auf der Nachfrage von Positive Feedback Traders. Diese Investoren orientieren sich an Trends im Kassamarkt. Ihre Nachfrage nimmt mit steigenden Kursen zu.

Die Parameter β_F, β_I, und β_N hängen insbesondere vom Grad der Risikoaversion und der Anzahl der Investoren in den einzelnen Gruppen ab. α charakterisiert die Marktliquidität. So führt eine Nachfrage des Arbitrageurs in Höhe von einer Einheit zu einer Zunahme des Gleichgewichtskurses um α.

2.2 Entscheidungsproblem des Arbitrageurs

Stimmen impliziter Kassapreis $S_I(t_{n-1})$ und Kassapreis $S(t_{n-1})$ nicht überein, dann erzielt ein cash & carry-Arbitrageur bei der Eröffnung von $x(t_{n-1})$ Arbitrage-Positionen einen auf den Zeitpunkt t_{n-1} diskontierten, sicheren Arbitragegewinn $G(t_{n-1})$ in Höhe von

$$G(t_{n-1}) = x(t_{n-1}) \cdot \left\{S_I(t_{n-1}) - S(t_{n-1})\right\}. \tag{6}$$

Aufgrund der in 2.1 formulierten Voraussetzungen ergeben sich nun gegenüber einer cash & carry-Arbitrage die folgenden Änderungen:

- Eine im Zeitpunkt t_{n-1} plazierte Order wird erst in t_n ausgeführt. Dadurch ist der Arbitragegewinn zum Zeitpunkt der Orderaufgabe ungewiß.[13]

[12] Zu dieser Gruppe von Investoren vgl. z. B. Black (1986).

[13] Es handelt sich hierbei also nicht mehr um Arbitrage im engen Sinne.

- Der Kassakurs $\tilde{S}(t_n)$ im Ausführungszeitpunkt wird von der Nachfrage $x(t_{n-1})$ des Arbitrageurs beeinflußt.

- Es entstehen Transaktionskosten $\tilde{TC}(t_n)$, die von $\tilde{S}(t_n)$ und dem Bestand an offenen Arbitragepositionen $B(t_{n-1})$ abhängen.

Zusammenfassend ergibt sich somit bei einem Auf- bzw. Abbau von $x(t_{n-1})$ Arbitragepositionen in t_n ein riskanter Arbitragegewinn in Höhe von

$$\tilde{G}(t_n) = x(t_{n-1}) \cdot \left\{\tilde{S}_1(t_n) - \tilde{S}(t_n)\right\} - \tilde{TC}(t_n), \quad n = 1,\ldots,N. \tag{7}$$

Der endogene Kassakurs $\tilde{S}(t_n)$ setzt sich aufgrund der Beziehung (5) aus einem Kursbestandteil $\tilde{S}_{OA}(t_n)$, der nicht von der Nachfrage des Arbitrageurs abhängt, und dem Einfluß $\alpha \cdot x(t_{n-1})$ des Arbitrageurs zusammen:

$$\tilde{S}(t_n) = \tilde{S}_{OA}(t_n) + \alpha\, x(t_{n-1}). \tag{8}$$

Die zufälligen, nichtnegativen Transaktionskosten $\tilde{TC}(t_n)$ ergeben sich aufgrund der Proportionalitätsannahme zu

$$\tilde{TC}(t_n) = \left| x(t_{n-1}) \cdot \tilde{S}(t_n) \cdot TCU \right|. \tag{9}$$

Hierbei bezeichnet TCU die Transaktionskosten pro DM Nachfrage. Diese hängen von dem aktuellen Bestand $B(t_{n-1})$ an offenen Positionen in t_{n-1} ab, da die Glattstellung einer Arbitrageposition mit niedrigeren Kosten pro Einheit c_{UW} verbunden ist als die Eröffnung einer neuen Position, die zu Transaktionskosten pro Einheit der Höhe c_O führt. Den aktuellen Bestand erhält man aus den Transaktionen in der Vergangenheit:

$$B(t_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-2} x(t_i), \quad n = 2,\ldots,N+1 \tag{10}$$

mit $B(t_N) = 0$. Unter der Voraussetzung, daß der Arbitrageur aufgrund der niedrigeren Transaktionskosten zuerst offene long (short)-Arbitragepositionen schließt, ehe er neue short (long)-Positionen eröffnet,[14] betragen die Transaktionskosten pro Einheit c_{UW}, falls $|x(t_{n-1})| \le |B(t_{n-1})|$ gilt und das Vorzeichen der beiden Ausdrücke verschieden, d. h. $x(t_{n-1}) \cdot B(t_{n-1}) < O$ ist. Die Transaktionskosten pro Einheit TCU besitzen damit die folgende Struktur:

$$TCU[B(t_{n-1}), x(t_{n-1})] = \begin{cases} c_{UW}, & falls\ |x(t_{n-1})| \le |B(t_{n-1})|, B(t_{n-1}) * x(t_{n-1}) < 0 \\ c_O, & falls\ B(t_{n-1}) * x(t_{n-1}) \ge 0 \\ \dfrac{|B(t_{n-1})| c_{UW} + [|x(t_{n-1})| - |B(t_{n-1})|] c_O}{|x(t_{n-1})|}, & \\ & falls |x(t_{n-1})| > |B(t_{n-1})|, B(t_{n-1}) * x(t_{n-1}) < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (8) und (11) erhält man für die Transaktionskosten in DM den folgenden Ausdruck:

$$\tilde{T}C(t_n) = \left| x(t_{n-1}) \cdot \left\{ \tilde{S}_{OA}(t_n) + \alpha x(t_{n-1}) \right\} \cdot TCU[B(t_{n-1}), x(t_{n-1})] \right|. \tag{12}$$

Damit sind sämtliche Bestandteile des zufälligen Arbitragegewinns $\tilde{G}(t_n)$ auf die exogenen Variablen und die Entscheidungsvariablen des Arbitrageurs zurückgeführt. Aufgrund der unterstellten Risikoneutralität maximiert der Arbitrageur den Erwartungswert der Summe aus den diskontierten Arbitragegewinnen:

$$P_{UW} = \max_{\{x(t_{n-1})\}} E_0 \left\{ \sum_{n=1}^{N} e^{-rt_n} \tilde{G}(t_n) \right\}. \tag{13}$$

In der Formulierung des Optimierungsproblems (13) wurde die Abhängigkeit der optimalen Entscheidung im Zeitpunkt t_{n-1} von der Höhe des impliziten Kassapreises $S_I(t_{n-1})$, des endogenen Kassapreises $S(t_{n-1})$ und des Bestandes $B(t_{n-1})$ an offenen Arbitrage-Positionen nicht explizit berücksichtigt. Die Entscheidungsvariablen

[14] Im Gegensatz zu den Modellen von Brennan/Schwartz, Cooper/Mello, Holden und Tuckman/Vila stellt diese Voraussetzung eine echte Einschränkung des Strategienraumes des Arbitrageurs dar. Die Ursache hierfür liegt in der Abhängigkeit der Transaktionskosten von der Höhe des Kassapreises.

$x[t_{n-1}, S_1(t_{n-1}), S(t_{n-1}), B(t_{n-1})]$ sind somit als Entscheidungsfunktionen aufzufassen. Zur Vereinfachung der Notation wird auch im weiteren die Bezeichnung $x(t_{n-1})$ für diese Entscheidungsfunktion verwendet.

Eine Entscheidung im Zeitpunkt t_{n-1} beeinflußt die zukünftigen Arbitragegewinne über zwei Wege. Zum einen hängt der Preis $\tilde{S}(t_n)$ und damit alle späteren Kassapreise von $x(t_{n-1})$ ab. Zum anderen verändert die Anzahl der in t_{n-1} an den Markt gegebenen Aufträge den Bestand an offenen Positionen in t_n und damit die Höhe der zukünftigen Transaktionskosten.

2.3 Zur Existenz optimaler Arbitragestrategien

Die Entscheidungsfunktionen $x(t_{n-1})$ können beliebige ganzzahlige Werte zwischen - ∞ und + ∞ annehmen. Es ist deshalb nicht offensichtlich, ob das Maximierungsproblem (13) eine optimale Lösung besitzt. Der Beweis hierzu läßt sich etwas einfacher führen, wenn statt des Prozesses $\tilde{S}_I(t_n)$ der diskontierte Prozeß

$$\tilde{S}_I^*(t_n) = e^{-rt_n} \tilde{S}_I(t_n) \qquad (14)$$

als exogene Variable verwendet wird. $\tilde{S}_I^*(t_n)$ ist das zu $\tilde{S}_I(t_n)$ gehörige äquivalente Martingal.[15] Die Drift von $\tilde{S}_I^*(t_n)$ ist bei Vernachlässigung von Ausdrücken der Ordnung $o(\Delta t)$ demzufolge null, so daß $\tilde{S}_I^*(t_n)$ approximativ der folgenden stochastischen Differenzengleichung genügt:

$$\tilde{S}_I^*(t_n) = S_I^*(t_{n-1}) + \sigma^*(t_n)\tilde{Z}(t_n). \qquad (15)$$

Inhaltlich bedeutet die Verwendung des diskontierten Prozesses den Übergang zu einem neuen Numéraire, bezüglich dessen die risikolose Anlage und Aufnahme von Mitteln zinslos erfolgt. Daraus ergeben sich die folgenden Modifikationen des Optimierungsproblems:

- In der Zielfunktion (13) kann die Abzinsung entfallen.

---

15 Der Übergang zu einem äquivalenten Martingal gehört zum Standardrepertoire in der Theorie von Contingent Claims. Vgl. beispielsweise Müller (1985), S. 21 ff.

- Der endogene Kassapreisprozeß $\tilde{S}^*(t_n)$ besitzt nun die Form

$$\tilde{S}^*(t_n) = S^*(t_{n-1}) + \alpha\left\{\beta_I\sigma^*(t_n)\tilde{Z}(t_n) + \beta_N\tilde{Z}_N(t_n) + \beta_F(t_n) + x(t_{n-1})\right\}. \tag{16}$$

  Hierbei ist $\tilde{Z}_N(t_n)$ wie $\tilde{Z}(t_n)$ normalverteilt mit dem Erwartungswert null und der Varianz eins. Ferner sind $\tilde{Z}_N(t_n)$ und $\tilde{Z}(t_n)$ unkorreliert.

- Die Differenz zwischen implizitem und endogenem Kassapreis läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned}\tilde{S}_I^*(t_n) - \tilde{S}^*(t_n) = {} & S_I^*(t_{n-1}) + \sigma^*(t_n)\tilde{Z}(t_n) \\ & - S^*(t_{n-1}) - \alpha\left\{\beta_I\sigma^*(t_n)\tilde{Z}(t_n) + \beta_N\tilde{Z}_N(t_n) + \beta_F(t_n) + x(t_{n-1})\right\}\end{aligned}$$

  beziehungsweise als

$$\tilde{S}_I^*(t_n) - \tilde{S}^*(t_n) = S_I^*(t_{n-1}) - S^*(t_{n-1}) - a(t_n)\tilde{Z}(t_n) - b\tilde{Z}_N(t_n) - c(t_n) - \alpha x(t_{n-1}) \tag{17}$$

$$\text{mit:} \quad \begin{aligned} a(t_n) &= \sigma^*(t_n)[\alpha\beta_I - 1] \\ b &= \alpha\beta_N \\ c(t_n) &= \alpha\beta_F(t_n) \end{aligned} \quad .$$

Zur weiteren Vereinfachung der Notation werden die Zeitpunkte t_n mit n bezeichnet und das Symbol S^* wieder durch S ersetzt.

Statt des Optimierungsproblems (13) wird im folgenden eine Zielfunktion betrachtet, in der keine gewinnmindernden Transaktionskosten $\tilde{TC}$ berücksichtigt werden. Da $\tilde{TC}$ definitionsgemäß nichtnegativ ist, folgt aus der Existenz einer optimalen Arbitragestrategie ohne Transaktionskosten auch die Existenz einer optimalen Lösung von (13).

Der Existenzbeweis wird konstruktiv in einer für die Dynamische Optimierung typischen Weise rekursiv geführt.

Schritt N-1:

Aufgrund der Ausführungsverzögerung besteht im Zeitpunkt N-1 kein Freiheitsgrad für den Arbitrageur. Im Zeitpunkt N wird der Bestand B(N-1) an offenen Positionen durch Einlieferung glattgestellt. Es gilt somit

$$x^*(N-1) = -B(N-1).$$

Schritt N-2:

Das Optimierungsproblem lautet:

$$\max_{x(N-2)} E_{N-2}\left\{x(N-2)\left[\tilde{S}_l(N-1)-\tilde{S}(N-1)\right]\middle| S_l(N-2), S(N-2)\right\},$$

wobei E_{N-2} den Erwartungswert bedingt zu den Zustandsvariablen $S_l(N-2), S(N-2)$ bezeichnet. Unter Verwendung von (17) und der Beziehung

$$l(N-2) = S_l(N-2) - S(N-2) - c(N-1)$$

ergibt sich

$$J\big(S_l(N-2), S(N-2)\big) := \max_{x(N-2)}\left\{x(N-2)[l(N-2)-\alpha\, x(N-2)]\right\}$$

mit der in $S_l(N-2)$ und $S(N-2)$ linearen Lösungsfunktion

$$x^*(N-2) = \frac{1}{2\alpha} l(N-2) = \frac{1}{2\alpha}\left\{S_l(N-2) - S(N-2) - c(N-1)\right\} \quad (18)$$

und dem optimalen Zielfunktionswert

$$J\left[S_l(N-2), S(N-2)\right] = \frac{1}{4\alpha} l^2(N-2). \quad (19)$$

Schritt N-3:

Die Optimierungsaufgabe besitzt folgende Form:

$$J[S_l(N-3),S(N-3)]:=\max_{x(N-3)} E_{N-3}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x(N-3)\left[\tilde{S}_l(N-2)-\tilde{S}(N-2)\right]\\+\dfrac{1}{4\alpha}\left[\tilde{S}_l(N-2)-\tilde{S}(N-2)-c(N-1)\right]^2\end{array}\right\}\\ \mid S_l(N-3),S(N-3)\end{array}\right\}.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung (17) ergibt sich

$$J[S_l(N-3),S(N-3)]=\max_{x(N-3)}\left\{\begin{array}{l}x(N-3)[l(N-3)-\alpha x(N-3)]\\+\dfrac{1}{4\alpha}\left[\alpha^2x^2(N-3)-2\alpha(l(N-3)-c(N-1))x(N-3)\right]\\+\dfrac{1}{4\alpha}\left[(l(N-3)-c(N-1))^2+a^2(N-2)+b^2\right]\end{array}\right\}$$

beziehungsweise

$$J[S_l(N-3),S(N-3)]=\max_{x(N-3)}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{3}{4}\alpha x^2(N-3)+\dfrac{1}{2}[l(N-3)+c(N-1)]x(N-3)\\+\dfrac{1}{4\alpha}\left[(l(N-3)-c(N-1))^2+a^2(N-2)+b^2\right]\end{array}\right\}. \tag{20}$$

Als optimale Lösungsfunktion ergibt sich

$$x^*(N-3)=\frac{1}{3\alpha}[l(N-3)+c(N-1)], \tag{21}$$

und für den optimalen Zielfunktionswert erhält man:

$$J[S_l(N-3),S(N-3)]=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{3\alpha}l^2(N-3)-\dfrac{1}{3\alpha}l(N-3)c(N-1)\\+\dfrac{1}{3\alpha}c^2(N-1)+\dfrac{1}{4\alpha}\left(a^2(N-2)+b^2\right)\end{array}\right\}. \tag{22}$$

Schritt N-n (n = 3,4,...,N):

Es gelte

$$J\left[S_l(N-n+1), S(N-n+1)\right] = \left\{\frac{p}{q\alpha} l^2(N-n+1) + \frac{\gamma}{\alpha} l(N-n+1) + d\right\}, \tag{23}$$

mit positiven p, q und $\frac{p}{q} < \frac{1}{2}$. γ ist nicht vorzeichenbeschränkt und hängt wie d vom Stufenindex n ab. Zur Vereinfachung der Notation werden diese Abhängigkeiten im folgenden vernachlässigt.

Die Existenz einer optimalen Lösung im Schritt $N-n$ ist daran gebunden, daß der Koeffizient von $x^2(N-n)$ negativ ausfällt. Das Vorzeichen von $x^2(N-n)$ hängt ausschließlich von α und den in $l(N-n)$ quadratischen Formen der Zielfunktion ab, die im weiteren gesondert analysiert werden. Die Optimierungsaufgabe im $(N-n)$-ten Schritt lautet:

$$\max_{x(N-n)} \left\{ \begin{array}{l} x(N-n)[l(N-n) - \alpha x(N-n)] \\ + E_{N-n} \left[\begin{array}{l} \frac{p}{q\alpha}\left(\tilde{S}_l(N-n+1) - \tilde{S}(N-n+1) - c(N-n+2)\right)^2 \\ + \frac{\gamma}{\alpha}\left(\tilde{S}_l(N-n+1) - \tilde{S}(N-n+1) - c(N-n+2)\right) + d \\ \mid S_l(N-n), S(N-n) \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$= \max_{x(N-n)} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha x^2(N-n) + l(N-n)x(N-n) \\ + \frac{p}{q\alpha}\left(\alpha^2 x^2(N-n) - 2\alpha(l(N-n) - c(N-n+2))x(N-n)\right) \\ + \frac{p}{q\alpha}\left((l(N-n) - c(N-n+2))^2 + a^2(N-n+1) + b^2\right) \\ + \frac{\gamma}{\alpha}(l(N-n) - c(N-n+2) - \alpha x(N-n)) + d \end{array} \right\}$$

$$= \max_{x(N-n)} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha\left(\frac{q-p}{q}\right)x^2(N-n) \\ + \left[\frac{q-2p}{q} l(N-n) + \left(\frac{2pc(N-n+2)}{q} - \gamma\right)\right] x(N-n) \\ + \frac{p}{q\alpha}[l(N-n) - c(N-n+2)]^2 + \frac{\gamma}{\alpha} l(N-n) + d' \end{array} \right\}.$$

Als optimale Lösung ergibt sich

$$x^*(N-n) = \frac{(q-2p)l(N-n)}{2\alpha(q-p)} + \frac{2pc(N-n+2) - q\gamma}{2\alpha(q-p)}.$$

Da $l(N-n) = S_l(N-n) - S(N-n) - c(N-n+1)$ ist, hängt die optimale Arbitrageentscheidung im Zeitpunkt $N-n$ linear von dem impliziten und dem endogenen Kassapreis ab. Der optimale Zielfunktionswert besitzt folgende Struktur:

$$J\left(S_l(N-n), S(N-n)\right) = \frac{p'}{q'\alpha} l^2(N-n) + \frac{\gamma'}{\alpha} l(N-n) + d'' \qquad (24)$$

mit $p' = q$ und $q' = 4(q-p)$. γ' ist eine Funktion der Parameter p, q, γ und c. d'' hängt zudem von a, b und α ab. Die explizite Form dieser Abhängigkeiten ist für die Beweisführung nicht von Interesse.

$J\left(S_l(N-n), S(N-n)\right)$ besitzt dieselbe Struktur wie $J\left(S_l(N-n+1), S(N-n+1)\right)$. Ferner ist $\frac{p'}{q'} < \frac{1}{2}$. Daraus folgt, daß der

Koeffizient von $x^2(N-n-1)$ in dem Optimierungsproblem der nächsten Stufe wiederum ein negatives Vorzeichen besitzt. Somit existiert für jedes $n = 0,\dots,N-2$ eine optimale, in den Preisen $S_I(n)$ und $S(n)$ lineare Strategie.

Bei Berücksichtigung von Transaktionskosten hängt die optimale Strategie auch noch vom Bestand $B(n)$ an offenen Positionen ab. Ferner geht die Linearität in $S_I(n)$ und $S(n)$ verloren.

2.4 Numerische Betrachtung

Das Optimierungsproblem (13) besitzt eine zeitlich additive Struktur und kann deshalb als Dynamisches Optimierungsproblem formuliert werden.[16] Es bietet sich dabei an, als Zustandsvariablen den impliziten Kassapreis $S_I(t_n)$, den endogenen Kassapreis $S(t_n)$ und den Bestand an offenen Positionen $B(t_n)$ des Arbitrageurs zu wählen. Die Bellmansche Rekursiongleichung lautet dann

$$J^*\left(t_{n-1}, S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}), B(t_{n-1})\right) = \max_{x(t_{n-1})} e^{-r\Delta t} E_{n-1}\left\{\begin{matrix} \tilde{G}(t_n) + J^*\left(t_n, \tilde{S}_I(t_n), \tilde{S}(t_n), B(t_n)\right) \\ \mid S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}), B(t_{n-1}) \end{matrix}\right\} \tag{25}$$

mit den Transformationsfunktionen

$$\tilde{S}^*(t_n) = S^*(t_{n-1}) + \alpha\left\{\beta_I\left(\tilde{S}_I(t_n) - S_I(t_{n-1})\right) + \beta_N \tilde{Z}_N(t_n) + \beta_F(t_n) + x(t_{n-1})\right\} \tag{26}$$

und

$$B(t_n) = B(t_{n-1}) + x(t_{n-1}). \tag{27}$$

Als Endbedingungen sind zu beachten, daß der Bestand nach Ausführung der Order $x(t_{N-1})$ im Zeitpunkt t_N gleich null sein muß

$$B(t_N) = B(t_{N-1}) + x(t_{N-1}) = 0 \tag{28}$$

16 Zur Dynamischen Optimierung vgl. Zimmermann (1992), S. 196 ff.

und daß der Futures-Kontrakt zum Kasssapreis abgerechnet wird. Es gilt somit

$$F(t_N, T) = S_I(T) = S(T). \tag{29}$$

Aus (7) erhält man dann als Rekursionsbeginn

$$J^*\left(t_{N-1}, S_I(t_{N-1}), S(t_{N-1})\right) = 0. \tag{30}$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Transformationsfunktionen läßt sich die Optimierung in (25) wesentlich vereinfachen. Hierzu wird die zu der Entscheidung $x(t_{n-1}) = 0$ gehörende Funktion

$$\bar{J}\left(t_{n-1}, S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}), B(t_{n-1}), x(t_{n-1}) = 0\right) = E_{n-1}\left\{\begin{matrix} J^*\left(t_n, \tilde{S}_I(t_n), \tilde{S}(t_n), B(t_n)\right) \\ \left| S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}), B(t_{n-1}), x(t_{n-1}) = 0 \right. \end{matrix}\right\}$$

eingeführt. Mit Hilfe von (26) und (27) folgt nun für ein beliebiges $x(t_{n-1})$:

$$\begin{aligned} &\bar{J}\left(t_{n-1}, S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}), B(t_{n-1}), x(t_{n-1})\right) = \\ &\bar{J}\left(t_{n-1}, S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}) + \alpha x(t_{n-1}), B(t_{n-1}) + x(t_{n-1}), 0\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß es in (25) genügt, den Erwartungswert einmal für $x(t_{n-1}) = 0$ zu errechnen. Aus diesem kann dann der Zielfunktionswert für beliebiges $x(t_{n-1})$ unmittelbar ermittelt werden. Da der Erwartungswert über die zweidimensionale Zufallsvariable $\left(\tilde{S}_I(t_n), \tilde{Z}_N(t_n)\right)$ zu bilden ist, führt die Beziehung (31) zu einer erheblichen Rechenvereinfachung. (25) lautet damit:

$$\begin{aligned} &J^*\left(t_{n-1}, S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}), B(t_{n-1})\right) = \\ &\max_{x(t_{n-1})} e^{-r\Delta t}\left\{\begin{matrix} -\alpha x^2(t_{n-1}) + \left(\beta S_I(t_{n-1}) - S(t_{n-1}) - c(t_n)\right)x(t_{n-1}) \\ +\bar{J}\left(t_{n-1}, S_I(t_{n-1}), S(t_{n-1}) + \alpha x(t_{n-1}), B(t_{n-1}) + x(t_{n-1}), 0\right) \end{matrix}\right\} \end{aligned} \tag{32}$$

Hierbei ist β eine Konstante und ergibt sich aus (4) und (5) zu $\beta = (1 - \alpha\beta_I) r\Delta t$. c ist wie in Abschnitt 2.3 definiert.

Das Dynamische Optimierungsproblem (32) mit den Zustandsvariablen wird numerisch gelöst. Die Bestandsvariable $B(t_{n-1})$ kann dabei wie die Entscheidungsvariable $x(t_{n-1})$ positive und negative ganzzahlige Werte annehmen. Die beiden Kursvariablen werden diskretisiert. Zur Erwartungswertbildung werden deren Ausprägungen in einem 2σ-Bereich berücksichtigt.

3 Analyse optimaler Arbitragestrategien

Im folgenden wird für eine Vielzahl unterschiedlicher Ausprägungen die optimale Strategie eines Arbitrageurs ermittelt. Ziel ist es dabei, Antworten auf folgende Fragen zu erhalten:

- Wie hängt die optimale Anzahl der auf- oder abzubauenden Positionen $x^*(0)$ von
  - der Höhe der Fehlbewertung $S_I(0) - S(0)$,
  - der Anzahl offener Positionen $B(0)$,
  - der Fälligkeit T des Futures ab ?

- Wie gestaltet sich die Arbitragestrategie $x^*\left(t_n, S_I(t_n), S(t_n), B(t_n)\right)$ für spezielle Entwicklungen des Kassakurses $S(t_n)$ $n = 0,\ldots,N$ und damit der Fehlbewertung $S_I(t_n) - S(t_n)$?

Für die Durchführung dieser Analyse der optimalen Arbitragestrategien wurde folgende Standardkombination für die Parameterwerte gewählt:[17]

Impliziter Kassapreis:	$S_I(0) = 2.000$
Volatilität des Futurespreises:	$\sigma = 20\%\ p.a.$
Marktliquidität:	$\alpha = 1{,}14$
Zinssatz:	$r = 0{,}08 \mathrel{\hat{=}} 8\%$
Restlaufzeit des Futures:	$T = 10\ Tage \mathrel{\hat{=}} 1/36\ Jahr$
Transaktionskosten:	$c_o = 0{,}01 \mathrel{\hat{=}} 1\%$
	$c_{uw} = 0$

In Abbildung 1 ist für einen aktuellen Bestand an offenen Arbitragepositionen in Höhe von $B(0) = 0$ die optimale Zahl zu eröffnender

[17] Die gewählten Parameter beruhen, soweit sie sich auf den Future beziehen, auf einer empirischen Studie des DAX-Futures. Vgl. Bühler/Kempf (1993).

Arbitragepositionen $x^*(0)$ in Abhängigkeit vom Umfang der Fehlbewertung für die Restlaufzeit von $T = 10$ und $T = 2$ dargestellt.

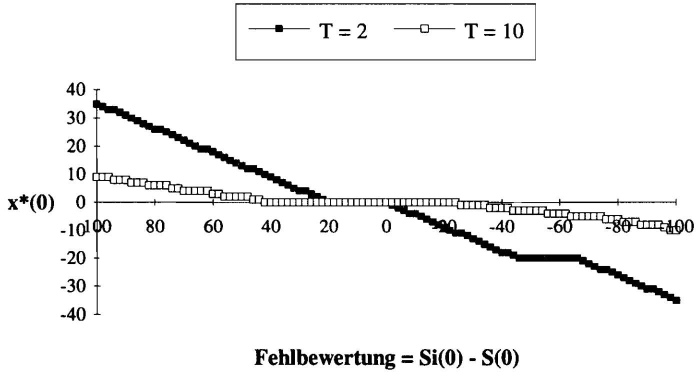

Abb. 1: Optimale Anzahl der zu eröffnenden Arbitragepositionen x*(0) für einen Anfangsbestand B(0) = 0 und die Restlaufzeiten T=10 und T=2.

Wie zu erwarten, nimmt $|x^*(0)|$ mit dem absoluten Umfang der Fehlbewertung $|S_1(0) - S(0)|$ monoton zu. Aufgrund der Transaktionskosten und der Ganzzahligkeitsbedingung liegt allerdings keine strenge Monotonie vor. Für eine positive Fehlbewertung $S_1(0) - S(0) > 0$, d. h. eine relative Unterbewertung des Kassainstruments, werden long-Arbitrage-Positionen $(x^*(0) > 0)$ eingegangen. Entsprechend führt eine Überbewertung des Kassainstruments zu short-Arbitrage-Positionen.

Bei einer Restlaufzeit von T = 2 Tagen baut der Arbitrageur nur noch am Folgetag Positionen auf, die dann am 2. Tag abgerechnet werden. Sobald die absolute Fehlbewertung über den Transaktionskosten in Höhe von $0{,}01 \cdot S(0)$ liegt, werden long- oder short-Positionen eröffnet. Aufgrund des den Umfang der Fehlbewertung reduzierenden Einflusses der Transaktionen des Arbitrageurs werden im Gegensatz zur Strategie eines cash & carry-Arbitrageurs nur in begrenztem Umfang Positionen außerhalb des Transaktionskostenbandes aufgebaut.

Bemerkenswert ist, daß der Umfang der Handelstätigkeit des Arbitrageurs bei längerer Restlaufzeit des Futures $(T = 10)$ für absolute Fehlbewertungen oberhalb der Transaktionskosten geringer ausfällt als bei kurzer Restlaufzeit. Die Ursache für die geringere Handelsaktivität bei der Restlaufzeit $T=10$ liegt in der Rückwirkung auf die zukünftigen Arbitragegewinne. Während für $T=2$ lediglich der Gewinn $\tilde{G}(t_1)$ am Folgetag durch die Order in $t_0=0$ beeinflußt wird, besitzt diese Order für $T=10$ auch positive und negative Rückwirkungen auf die Folgegewinne $J\left(\tilde{S}_1(t_1), \tilde{S}(t_1), B(t_1)\right)$. Positiv wirkt dabei die sich absolut erhöhende Anzahl von offenen Positionen, da diese eine zukünftige Einsparung von Transaktionskosten bei vorzeitiger Glattstellung erlauben. Negativ dagegen wirkt der die mittlere Fehlbewertung reduzierende Einfluß von $x^*(0)$ auf $\tilde{S}(t_1)$. Dieser negative Effekt dominiert bei der gegebenen, realistischen Parameterkonstellation die positive Auswirkung.

Abbildung 2 zeigt die optimale Entscheidung des Arbitrageurs im Zeitpunkt $t_0=0$ bei einem Anfangsbestand an offenen Positionen in Höhe von $B(0)=20$. Dieser Anfangsbestand an long-Arbitrage-Positionen führt im Vergleich zu Abbildung 1 zu einer deutlichen Asymmetrie der optimalen Entscheidung $x^*(0)$ in Abhängigkeit von der Fehlbewertung. Wie zu erwarten, ist bei gleicher absoluter Höhe der Fehlbewertung im Falle einer Überbewertung des Kassainstruments (negative Fehlbewertung) die Handelsaktivität des Arbitrageurs nicht niedriger als bei dessen Unterbewertung. Die Ursache hierfür ist in der unterschiedlichen Höhe der Transaktionskosten c_O und c_{UW} zu sehen. Während eine negative Fehlbewertung bis zu einem Umfang von 20 Positionen transaktionskostenfrei durch vorzeitige Auflösung von Arbitragepositionen ausgenutzt werden kann, sind bei dem Aufbau weiterer long-Arbitrage-Positionen Transaktionskosten in Höhe von 1 % zu entrichten. Für die Restlaufzeit T = 2 wird dieser Effekt besonders deutlich.

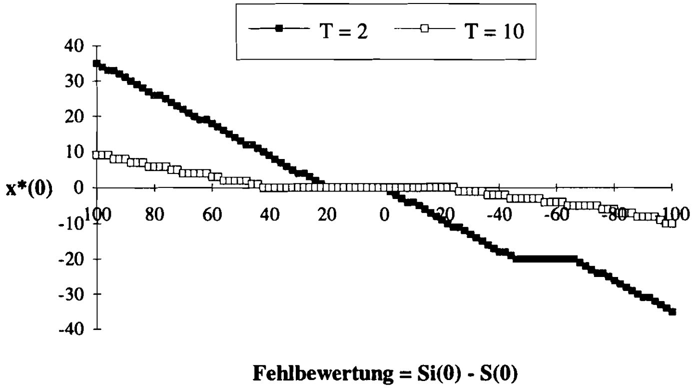

Abb. 2: Optimale Anzahl der zu öffnenden bzw. zu schließenden Arbitragepositionen x*(0) für einen Anfangsbestand B(0) = +20 und die Restlaufzeiten T = 10 und T = 2.

In der folgenden Abbildung 3 ist die optimale Entscheidung $x^*(0)$ für die beiden Anfangsbestände $B(0) = -20$ und $B(0) = 0$ in Abhängigkeit von der Restlaufzeit T des Futures bei einer gegebenen Unterbewertung des Kassainstruments in Höhe von $S_I(0) - S(0) = 50$ Einheiten dargestellt. Aus dem Verlauf dieser Funktionen können zwei interessante, auch empirisch bestätigte Schlußfolgerungen gezogen werden:

- Für beide Bestände an offenen Positionen nehmen die Handelsaktivitäten des Arbitrageurs mit abnehmender zeitlicher Distanz zum Fälligkeitszeitpunkt des Futures zu.

- Die Handelsaktivität liegt bei dem Bestand $B(0) = -20$ stets höher als bei dem Bestand $B(0) = 0$. Ein Arbitrageur, der in der Vergangenheit bei einer Überbewertung des Kassainstruments eine short-Arbitrageposition aufgebaut hat, wird demzufolge bei einer Umkehrung der Fehlbewertungsvorzeichen mit höheren Volumina und möglicherweise früher in den Markt gehen als bei einer bestandsunabhängigen Strategie. Dadurch werden nach einer hohen negativen Fehlbewertung keine hohe positive Fehlbewertung und somit positiv autokorrelierte Fehlbewertungen zu erwarten sein.[18]

[18] Zu empirischen Befunden hierzu vgl. MacKinlay/Ramaswamy (1988) und Bühler/Kempf (1993).

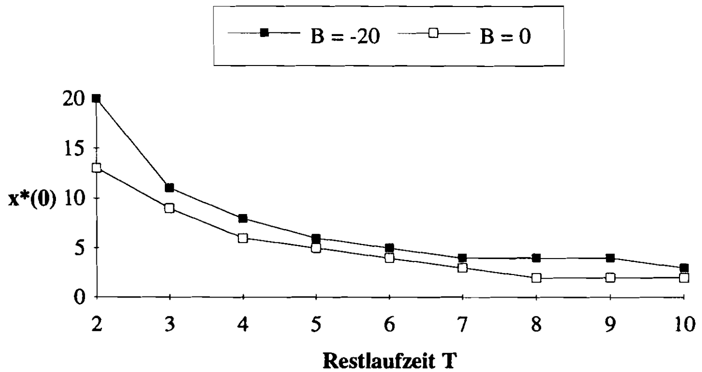

Abb. 3: Optimale Anzahl der zu öffnenden bzw. zu schließenden Arbitragepositionen für eine Fehlbewertung $S_I(0)$-$S(0)$ = 50 und einen Anfangsbestand B(0) = -20 bzw. B(0) = 0 in Abhängigkeit von der Restlaufzeit des Futures.

Das Ergebnis in Abbildung 3 darf nicht mit dem Auf- und Abbau von Arbitragepositionen im Zeitablauf verwechselt werden. Die optimalen Arbitrageentscheidungen im Zeitablauf bei gegebener Fehlbewertung sind beispielhaft in Abbildung 4 dargestellt.

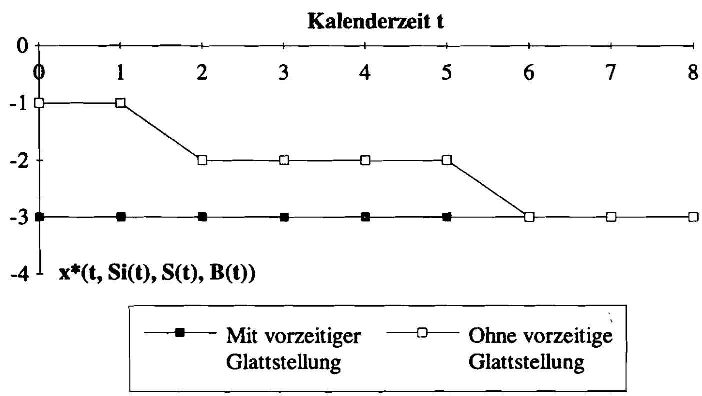

Abb. 4: Vergleich der optimalen Arbitragestrategien im Zeitablauf eines Arbitrageurs mit einem Anfangsbestand von B(0) = +25 und eines Arbitrageurs ohne vorzeitige Glattstellungsmöglichkeit bei einer anfänglichen Fehlbewertung $S_I(0)$ - $S(0)$ = -50. Ohne Handeln des Arbitrageurs verändert sich die Fehlbewertung nicht.

In Abbildung 4 sind die optimalen Entscheidungen eines Arbitrageurs A mit vorzeitiger und eines Arbitrageurs B ohne vorzeitige Glattstellungsmöglichkeit gegenübergestellt. Deutlich zeigt sich, wie der Arbitrageur B zunehmend short-Arbitragepositionen im Zeitablauf aufbaut, da die negativen Folgewirkungen eines mit diesen Maßnahmen verbundenen abnehmenden Kassakurses geringer werden. Insgesamt baut B Positionen im Umfang von 19 Einheiten auf. Arbitrageur A reduziert im Zeitablauf den Anfangsbestand in Höhe von 25 Einheiten auf null und baut zusätzlich im letzten Orderzeitpunkt 2 short-Positionen auf. Hierbei ist es für ihn optimal, seinen Anfangsbestand gleichmäßig abzubauen. Dadurch wird die optimale Balance zwischen Periodengewinn und kumulierten Restgewinnen erreicht.

Abbildung 5 liegt der Fall einer zunehmenden Überbewertung des Kassainstruments zugrunde. Ausgehend von $S_I(0) = 2.000$, $S(0) = 2.030$ und einem Anfangsbestand von B(0) = 25 erhöht sich ohne Handeln des Arbitrageur bei festem impliziten Kassapreis der Kassapreis $S(t_n)$ in jedem Zeitpunkt um 4 Punkte.

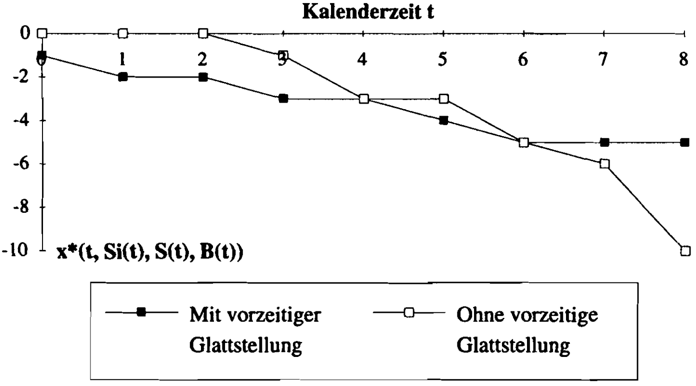

Abb. 5: Vergleich der optimalen Arbitragestrategien im Zeitablauf eines Arbitrageurs mit einem Anfangsbestand von B(0) = +25 und eines Arbitrageurs ohne vorzeitige Glattstellungsmöglichkeit bei einer anfänglichen Fehlbewertung $S_I(0)$ - S(0) = -30. Ohne Handeln des Arbitrageurs erhöht sich die absolute Fehlbewertung um vier Einheiten pro Tag.

Der Arbitrageur A mit vorzeitiger Glattstellungsmöglichkeit baut seinen Anfangsbestand vollständig ab und eröffnet zusätzlich 5 short-Positionen, während der Arbitrageur B insgesamt 28 Positionen eröffnet. Bemerkenswert ist wiederum die weniger abrupte Strategie von A im Vergleich zu B.

4 Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein dynamisches, stochastisches Modell zur Ermittlung optimaler Arbitragestrategien an Terminmärkten entwickelt. Im Mittelpunkt der Modellierung stand dabei die Erfassung der Rückwirkung der Arbitragestrategie auf den Preisprozeß des Kassainstruments. Das Modell konnte in ein Dynamisches Optimierungsproblem mit drei Zustandsvariablen transformiert werden, das einer numerischen Behandlung zugänglich ist. Abschließend wurde die Abhängigkeit der optimalen Arbitragestrategie von den wichtigsten Einflußfaktoren im Rahmen einer komparativ statischen Analyse diskutiert.

Das Modell bildet den Kern eines Markt-Mikrostrukturansatzes, innerhalb dessen der Einfluß von Arbitrageuren auf die Basis analysiert werden kann. Mit Hilfe dieses Modells sollen die stochastischen Eigenschaften der Basis in einem Gleichgewichtsansatz ermittelt und mit denen der cash & carry-Basis verglichen werden. Ziel ist es dabei, beobachtete Eigenschaften der Basis zu erklären, die mit dem cash & carry-Modell nicht in Übereinstimmung zu bringen sind.

Literatur:

Berendes, M./Bühler, W. (1993): Analyse der Preisunterschiede von Zinsforwards und Zinsfutures, Arbeitsbericht 93-2, Lehrstuhl für Finanzierung der Universität Mannheim.

Black, F. (1986): Noise, in: The Journal of Finance, Vol. 41, 1986, S. 529-543.

Brennan, M. J./Schwartz, E. S. (1988): Optimal Arbitrage Strategies under Basis Variability, in: Studies in Banking and Finance, Vol. 5, 1988, S. 167-180.

Brennan, M. J./Schwartz, E. S. (1990): Arbitrage in Stock Index Futures, in: Journal of Business, Vol. 63, 1990, S. S7-S31.

Bühler, W./Kempf, A. (1993): Der DAX-Future: Kursverhalten und Arbitragemöglichkeiten, in: Kredit und Kapital, Vol. 26, 1993, S. 533 - 574.

Bühler, W./Kempf, A. (1994): The Value of the Early Unwind Option in Futures Contracts with an Endogenous Basis, ZEW Discussion Paper No. 94-06.

Cooper, I./Mello, A. (1990): Futures/Cash Arbitrage with Early Unwinding Opportunities and Inelastic Liquidity Demand, Paper presented at ESF Network Workshop on Options and Futures, Spain.

Cornell, B./Reinganum M. R. (1981): Forward and Futures Prices: Evidence from the Foreign Exchange Markets, in: The Journal of Finance, Vol. 36, 1981, S. 1035-1045.

Cox, J./Ingersoll, J./Ross, S. (1981): The Relation between Forward Prices and Futures Prices, in: Journal of Financial Economics, Vol. 9, 1981, S. 321-346.

Duffie, D. (1990): The Risk Neutral Value of the Early Arbitrage Option: A Note, in: Advances in Options and Futures Research, Vol. 4, 1990, S. 107-110.

Grünbichler, A./Longstaff, F. A./Schwartz, E. S. (1992): Electronic Screen Trading and the Transmission of Information: An Empirical Examination, Working Paper # 27-92, University of California, Los Angeles 1992.

Holden, C. (1990): Intertemporal Arbitrage Trading: Theory and Empirical Tests, Discussion Paper # 474, Indiana University, Blommington/Indianapolis 1990.

Hull, J. (1993): Options, Futures, and Other Derivative Securities, 2. Ed., Englewood Cliffs 1993.

Kempf, A./Kaehler, J. (1993): Informationsverarbeitung auf Kassa- und Terminmarkt: DAX versus DAX-Futures, in: ZEW Wirtschaftsanalysen, Vol. 1, 1993, S. 359-380.

MacKinlay, A. C./Ramaswamy, K. (1988): Index-Futures Arbitrage and the Behavior of Stock Index Futures Prices, in: Review of Financial Studies, Vol. 1 (1988), S. 137 - 158.

Merrick, J. J. Jr. (1989): Early Unwindings and Rollovers of Stock Index Futures Arbitrage Programs: Analysis and Implications for Predicting Expiration Day Effects, in: The Journal of Futures Markets, Vol. 9, 1989, S. 101-111.

Müller, S. (1985): Arbitrage Pricing of Contingent Claims, Berlin 1985.

Sofianos, G. (1993): Index Arbitrage Profitability, in: The Journal of Derivatives, Vol. 1, 1993, S. 6-20.

Tuckman, B./Vila, J. L. (1992): Arbitrage with Holding Costs: A Utility Based Approach, in: The Journal of Business, Vol. 47, 1992, S. 1283-1302.

Varian, H. (1984): Microeconomic Analysis, 2. Ed., New York 1984.

Zimmermann, H. J. (1992): Operations Research Methoden und Modelle, 2. Aufl., Wiesbaden 1990.