

CIRPÉE

Centre interuniversitaire sur le risque, les politiques économiques et l'emploi

Cahier de recherche/Working Paper **05-25**

Une application expérimentale de la méthode de minimisation de l'entropie croisée: l'estimation des flux d'échanges interrégionaux au Québec

Jean Dubé
André Lemelin

Août/August 2005

Dubé: JDMD Groupe Conseils inc., 344 de Lamennais, Ste-Foy
jdube@jdmdgc.com

Lemelin: INRS Urbanisation, Culture et Société, 3465 Durocher, Montréal
andre_lemelin@ucs.inrs.ca

Résumé:

Cet article présente une application expérimentale de la méthode d'estimation des flux d'échanges entre des régions par la minimisation de l'entropie croisée (mesure de Kullback-Leibler). Les flux interrégionaux ont été estimés pour 31 catégories de biens et services, entre trois régions du Québec en 1992 : les régions métropolitaines de Montréal et de Québec et le Reste-du-Québec. La méthode, d'inspiration bayésienne, a permis de dégager des flux interrégionaux respectant les totaux marginaux provenant de matrices de comptabilité sociale régionales préexistantes, à partir de données sur les flux de transport jouant le rôle de distribution a priori.

Mots Clés: Estimation, commerce interrégional, flux de transport, minimisation de l'entropie croisée

Abstract:

In this paper, we report on an experimental application of Kullback-Leibler cross-entropy minimization to estimate trade flows between regions. Interregional trade flows were estimated for 31 categories of goods and services, between three regions of the Province of Québec in 1992 : the Montréal and Québec metropolitan areas, and the Rest-of-Québec. With this bayesian-style method, we were able to obtain interregional flows that respect the marginal totals taken from pre-existing regional social accounting matrices, using transportation flow data as a priori distributions.

Keywords: Estimation, Interregional trade, Transport flows, Cross-entropy minimization

JEL Classification: R12, R13, C13, C81

Introduction

Cet article présente une application expérimentale de la méthode d'estimation des flux d'échanges entre des régions par la minimisation de l'entropie croisée (mesure de Kullback-Leibler). Les flux interrégionaux ont été estimés pour 31 catégories de biens et services, entre trois régions du Québec en 1992 : la région métropolitaine (RMR) de Montréal, celle de Québec et le Reste-du-Québec (RdQ).

L'une des utilisations les plus répandues des modèles régionaux est l'évaluation des retombées économiques. Mais faute d'information sur les échanges interrégionaux, les analyses de retombées ne peuvent pas prendre en compte les effets de débordement et de rétroaction des investissements ou des politiques publiques. Les résultats risquent évidemment de s'en trouver faussés ou tronqués.

Or en science régionale, il est rare de disposer de données complètes et fiables sur les flux d'échanges entre les régions. Les méthodes traditionnelles d'estimation¹ des flux d'échanges interrégionaux se sont développées principalement dans le contexte de l'élaboration de modèles entrées-sorties régionaux ou interrégionaux. C'est Isard (1951) qui a formulé le cadre comptable et le modèle interrégionaux « idéaux » auxquels se sont ensuite référés la plupart des chercheurs. Le trait marquant du cadre comptable d'Isard est que l'on considère un même bien produit dans deux régions différentes comme deux biens complètement distincts : « Pennsylvania brick becomes a commodity different from New York brick or California brick » (Isard, 1951, reproduit 1990, p.81). En conséquence, les flux d'échanges interrégionaux sont affectés de quatre indices, car ils sont enregistrés, non seulement par région productrice et région consommatrice, mais encore par secteur producteur et par secteur acheteur.

De toute évidence, ce modèle impose des exigences énormes en données qui sont, en pratique, rarement satisfaites. D'où une grande abondance d'écrits sur des méthodes permettant de définir, pour chaque bien, une matrice des échanges interrégionaux². Notons que ce problème n'est qu'un cas particulier du problème général de l'ajustement des matrices, que l'on rencontre aussi dans le contexte de la mise à jour ou de l'ajustement des tableaux entrées-sorties et des matrices de comptabilité sociale (MCS). Les écrits pertinents sont donc loin de se limiter au domaine des modèles régionaux d'entrées-sorties.

Cet article débute avec une présentation succincte de différentes méthodes d'estimation des flux d'échanges entre des régions. Nous présentons ensuite brièvement la méthode de minimisation de l'entropie croisée (MinXEnt), ainsi que les données auxquelles cette méthode a été appliquée. Suivent une discussion des résultats obtenus et une conclusion.

¹ Le mot « estimation » n'a pas ici le sens strict qu'on lui donne en statistique ou en économétrie; il est employé dans le sens plus général de l'attribution d'une valeur à une variable selon une méthode scientifiquement défendable.

² Voir notamment le résumé concis mais clair de Batten (1983, 139-148).

L'estimation des flux d'échanges interrégionaux

La plupart des méthodes proposées avancent une solution en deux temps. On estime d'abord, pour chaque bien, les flux intrarégionaux et les exportations régionales nettes (exportations, moins importations). Les résultats de cette première étape constituent les totaux marginaux de la matrice de flux interrégionaux recherchée. La seconde étape consiste à répartir les importations selon l'origine et les exportations selon la destination (passage des totaux marginaux à la matrice des flux interrégionaux).

On peut distinguer deux familles de méthodes : les méthodes purement palliatives³ et les méthodes hybrides. Les premières n'utilisent que des données communément disponibles, c'est-à-dire un tableau entrées-sorties national et des données régionales sur les niveaux d'activité (branches de production et branches de demande finale). Quant aux méthodes hybrides (parfois appelées *semi-survey* en anglais), elles proposent de combiner ces données avec l'information disponible d'autres sources.

Flux intrarégionaux et exportations régionales nettes

Une des méthodes palliatives d'estimation des exportations régionales nettes est la méthode des quotients de localisation, décrite et critiquée par Isserman (1980), Round (1983), Batten (1983), Miller et Blair (1985) et Lemelin (1997, 2004). Le quotient de localisation est un indicateur de spécificité qui mesure l'importance relative d'une industrie dans une région. On calcule généralement le quotient de localisation d'une industrie dans une région comme le rapport de la fraction de l'emploi « national » de cette industrie qui est situé dans la région, sur la fraction de l'emploi « national » de l'ensemble des industries qui est situé dans la région :

$$QL_{ij} = \frac{\text{Fraction de l'emploi total de la branche } j \text{ situé dans la zone } i}{\text{Fraction de l'emploi total global situé dans la zone } i}$$

Lorsque le quotient de localisation est supérieur à l'unité, la région est considérée comme exportatrice nette et lorsque le quotient est inférieur à l'unité, elle est considérée importatrice nette. Formellement, on estime les exportations nettes, EN_{ij} , du produit de l'industrie j , par la région i , au moyen de la formule

$$EN_{ij} = x_{ij} \frac{(QL_{ij} - 1)}{QL_{ij}} \quad (1)$$

où x_{ij} est la production du bien j par la région i . Évidemment, ce calcul repose sur des hypothèses extrêmement restrictives, tel que mis en évidence notamment par Isserman (1980).

³ Méthodes pour pallier au manque de données. C'est ainsi que nous proposons de traduire l'expression « non-survey ». « Méthodes constructives » porterait probablement à confusion, tandis que « méthodes indirectes » serait trop flou. Round (1983), qui donne une définition large de « non-survey techniques », propose d'ailleurs de nommer les valeurs obtenues par ces méthodes des ersatz (« surrogates ») plutôt que des estimations, une idée que traduit bien l'adjectif « palliatif ».

Une variante de cette application réside dans la technique du *minimum requirement* proposée par Ullman et Dacey (1960) et décrite notamment par Schaffer (1999). La différence majeure entre les deux approches est que le *minimum requirement*, fait appel à la structure de l'emploi régional comparée à un échantillon de régions de taille semblable plutôt qu'à l'économie en entier.

Une autre façon d'estimer les exportations régionales nettes est la méthode du solde régional⁴. Son origine remonte à Isard (1953) et elle est étudiée, entre autres, par Isard (1953, 1972), Round (1983) et Batten (1983). Cette méthode considère que l'écart entre la production locale et l'absorption (demande) locale⁵ représente l'importation ou l'exportation nette du produit. Formellement, le solde b_j^i est égal à la différence entre la production locale du produit j dans la région i , x_j^i , et la demande locale d_j^i .

$$b_j^i = x_j^i - d_j^i \quad (2)$$

La méthode du quotient de localisation évoquée plus haut est un cas particulier de la méthode du solde régional (voir entre autres Lemelin, 2004). D'autres variantes s'appuient sur des hypothèses d'homomorphisme⁶ entre les régions afin de dériver les demandes nettes des produits.

Ainsi, à partir d'une matrice de comptabilité sociale (MCS) du Québec qu'ils avaient actualisée pour 1992, Fréchette, Lemelin et Robichaud⁷ ont construit trois matrices régionales de comptabilité sociale, pour la région métropolitaine de recensement de Montréal, celle de Québec et le Reste du Québec⁸. La méthode utilisée a été d'appliquer à chaque flux de la matrice, une répartition en proportion du meilleur indicateur disponible, de façon à obtenir la part de chaque région dans le flux donné⁹. Ensuite, pour chacune des deux régions métropolitaines et pour chaque produit, on a calculé le solde régional comme la différence entre la production et l'absorption locales. Or pour chaque région et chaque produit, ce solde se divise en trois composantes : les exportations nettes (exportations, moins importations) vers le Reste du Monde, les exportations nettes vers le

⁴ *Regional commodity balance* en anglais. Fréchette et Robichaud (1998) et Lemelin et Robichaud (1998) ont d'ailleurs utilisé une méthode qui s'apparente à celle-là. Voir la description de cette méthode ci-après.

⁵ Qui est habituellement dérivée d'un coefficient national.

⁶ Similitudes structurelles. Par exemple, on peut faire l'hypothèse que les propensions marginales à importer et à exporter sont les mêmes pour chaque région qu'au niveau national.

⁷ Fréchette et Robichaud (1998) et Lemelin et Robichaud (1998).

⁸ Cette dernière a été obtenue par soustraction, après que les matrices des RMR de Montréal et Québec aient été équilibrées.

⁹ Par exemple, les flux relatifs à la production manufacturière ont été répartis au moyen de données régionales tirées du recensement des manufactures de Statistique Canada. Cette approche est de type « top-down » puisqu'elle consiste à répartir un total entre les régions au moyen d'un allocateur, alors que l'approche « bottom-up » consiste à obtenir le total par addition de données régionales.

Reste du Canada et les exportations nettes vers les autres régions du Québec. Fréchette *et al.* font l'hypothèse que les propensions moyennes à importer et à exporter du et vers le Reste du Monde et le Reste du Canada sont les mêmes pour chaque région que pour l'ensemble du Québec. Cela permet d'estimer les flux d'importations et d'exportations de chaque région avec le Reste du Monde et le Reste du Canada, ainsi que les exportations nettes de chaque région vers l'ensemble des autres régions du Québec. Les détails de la variante de la méthode du solde régional appliquée par Fréchette *et al.* sont donnés à l'annexe 2.

Toutes les méthodes évoquées conduisent à estimer des exportations *nettes*. Si ces exportations nettes servent de point de départ à l'estimation de flux interrégionaux, la structure de ces derniers est soumise *a priori* à de fortes restrictions implicites, car la possibilité de flux d'échanges croisés (*cross-hauling* en anglais) est exclue. Concrètement, si une région est exportatrice nette d'un produit, ses importations sont supposées nulles et ses exportations totales sont égales à ses exportations nettes; pour une région importatrice nette, ses exportations sont supposées nulles et ses importations totales sont égales à ses importations nettes. Cela est manifestement contraire aux faits.

L'envers de la même médaille est que ces méthodes maximisent les échanges intrarégionaux puisqu'elles font l'hypothèse que la production locale est d'abord dirigée vers l'absorption locale et que, réciproquement, la demande locale se satisfait d'abord auprès de la production locale.

Pour surmonter ces restrictions, nous proposons d'estimer simultanément les flux intrarégionaux et interrégionaux, sans passer par les exportations nettes. Les lignes qui suivent décrivent les méthodes les plus répandues d'estimation des flux interrégionaux.

Flux interrégionaux

Il n'y a guère de technique purement palliative pour estimer les flux interrégionaux, si ce n'est la répartition bi-proportionnelle à partir des totaux marginaux de lignes et de colonnes, une technique manifestement peu crédible en l'occurrence. Les autres méthodes exigent l'apport de données supplémentaires. Dans l'heureuse éventualité où il existe une matrice de flux interrégionaux pour une période antérieure, le problème qui se pose est simplement celui de la mise à jour ou du rééquilibrage d'une matrice (nous parlerons des techniques de mise à jour dans un moment). Mais le cas qui nous intéresse est celui où il n'existe pas de données antérieures.

Dans ces conditions, il y a un premier groupe de méthodes qui s'appuient sur des données de coûts de transport. C'est le cas du modèle gravitaire de Leontief-Strout (1963) et de celui de la programmation linéaire. Le peu de réalisme de cette dernière méthode est bien connu : les flux théoriquement optimaux qui constituent la solution au programme linéaire sont très différents des flux observés, notamment parce que les données portent sur des flux qui, en réalité, ne sont pas homogènes. Le modèle de Leontief-Strout est plus intéressant, pourvu que l'on ait accès à des données sur les coûts de transport.

Pour notre part, nous nous intéressons davantage aux méthodes qui font appel à des données sur les flux de transport, vu la disponibilité récente de telles données entre les

régions au Québec¹⁰. Il s'agit bien de méthodes hybrides, puisqu'elles combinent des données de comptabilité économique (tableaux entrées-sorties, MCS) avec des données d'une autre source.

À partir de la matrice des flux de transport, il s'agit de produire des flux d'échange qui respectent les totaux marginaux de l'absorption et de la production intérieures des régions. Ce problème est formellement équivalent à celui qui se pose lorsqu'il faut équilibrer une matrice, par exemple, pour mettre à jour un tableau entrées-sorties d'une période antérieure et le rendre conforme aux données courantes de production et de demande.

La somme des écrits sur les méthodes d'ajustement de matrices est impressionnante. L'approche la plus connue est probablement la technique d'ajustement biproportionnel RAS¹¹. Mais il existe une multitude d'autres méthodes. Les principales sont passées en revue notamment par Round (2003), dans le contexte de l'équilibrage des matrices de comptabilité sociale. Dans la foulée de Schneider et Zenios (1990), celui-ci distingue les problèmes d'ajustement de type 1 et de type 2 : les problèmes de type 1 consistent à ajuster une matrice rectangulaire à des totaux marginaux connus; les problèmes de type 2 consistent à ajuster une matrice carrée de manière à ce que les totaux de lignes soient égaux aux totaux de colonnes correspondants. L'ajustement d'une matrice de comptabilité sociale est un problème de type 2. Mais dans une matrice des flux de transport, les quantités absorbées par chaque région ne sont pas nécessairement égales aux quantités produites par la même région : de toute évidence, notre problème est de type 1.

On peut également distinguer les méthodes d'ajustement selon qu'elles sont formulées en termes de flux ou de coefficients. Par exemple, Jackson et Murray (2004, p. 4-5) décrivent la méthode RAS en termes de coefficients, tandis que Round (2003) la définit en termes de flux. Les deux formulations ne sont pas équivalentes en général. En effet, la plupart des méthodes conduisent à des résultats qui peuvent s'interpréter et se calculer comme la solution d'un problème de minimisation, sous contraintes, des différences entre la matrice de départ et la matrice ajustée. Or, la fonction objectif du problème n'est pas la même, selon qu'elle soit écrite en termes de flux ou de coefficients.

L'une des méthodes mentionnées par Round (2003) est la méthode DSS, une variante de la technique RAS proposée par Schneider et Zenios (1990). Cette méthode est conçue spécifiquement pour des problèmes de type 2; elle n'est donc pas pertinente pour nous.

Une autre méthode pouvant servir à équilibrer des matrices est celle des moindres carrés. Dans ce cas, il s'agit de trouver une matrice de flux ajustés, x_{ij}^* , à partir d'une matrice existante de flux, x_{ij} , en minimisant la somme des déviations quadratiques entre les

¹⁰ AGRA-Monaco Québec (1999).

¹¹ Nous verrons que la méthode de minimisation de l'entropie croisée (MinXEnt) que nous avons appliquée conduit dans les circonstances présentes aux mêmes résultats, mais qu'elle est fondée sur une justification théorique qui fait défaut à la méthode RAS.

nouvelles et les anciennes valeurs. La fonction objectif du problème d'optimisation à résoudre s'écrit :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (x_{ij}^* - x_{ij})^2 \quad (4)$$

Mais, comme le précise Round (2003, p. 23), cette formulation ne tient aucun compte de la fiabilité ou de la stabilité relative des flux observés. C'est pourquoi il lui préfère la méthode de Stone-Byron.

Cette méthode fut d'abord introduite par Stone, Champernowne et Meade (1942) et Stone (1977), avant d'être opérationnalisée par Byron (1978). Elle consiste à minimiser sous contraintes la somme des écarts quadratiques pondérés par le degré de fiabilité des flux, c'est-à-dire par l'inverse de leur variance v_{ij} :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(x_{ij}^* - x_{ij})^2}{v_{ij}} \quad (5)$$

En quelque sorte, la méthode Stone-Byron est à la précédente ce que sont les moindres carrés généralisés aux moindres carrés ordinaires. Dans le cas présent toutefois, on suppose la plupart du temps que les covariances sont nulles. Quant aux variances v_{ij} , elles ne sont pas observées : on leur attribue une valeur qui traduit un jugement subjectif sur leur degré de fiabilité. Round justifie une telle pratique dans les termes suivants : « Although there is compiler judgment, it enters at a second order rather than at a first order level as it is the tolerance factors rather than the estimates themselves about which judgment is being exercised »¹².

La méthode de minimisation de l'entropie croisée (MinXEnt), enfin, est largement utilisée par Robinson et ses associés du groupe IFPRI pour équilibrer des matrices de comptabilité sociale (voir notamment Robilliard et Robinson, 1999, et Robinson, Cattaneo et El-Said, 1998 et 2000). Contrairement aux techniques plus ou moins *ad hoc* décrites jusqu'à maintenant, la méthode MinXEnt s'appuie sur des fondements épistémologiques rigoureux. Étant donné l'absence d'information directe sur les échanges interrégionaux et le fort degré d'incertitude auquel nous faisons face, il nous a semblé indispensable de pouvoir étayer ainsi nos estimations. C'est donc cette méthode que nous avons choisie pour estimer les flux d'échanges interrégionaux au Québec à partir des données de flux de transport comme information *a priori*. La méthode MinXEnt est exposée dans la prochaine section

Méthode et données

La méthode MinXEnt

Le fondement de la méthode MinXEnt est formulé en tant que « second principe d'optimisation de l'entropie » par Kapur et Kesavan (1992), pour les situations où l'on dispose d'information *a priori* : « De toutes les distributions de probabilité qui satisfont

¹² « Bien que le jugement du compilateur [de la MCS] soit présent, il intervient au niveau du second ordre plutôt que du premier, puisque c'est à propos des facteurs de tolérance, plutôt que des estimations elles-mêmes, que s'exerce le jugement ».

les contraintes imposées, on doit choisir celle qui est la plus proche de la distribution donnée *a priori*¹³ ». Selon les auteurs, ce principe est une généralisation d'un principe d'abord énoncé par Jaynes (1957) comme la traduction opérationnelle de la neutralité scientifique. Le même principe est mis de l'avant par Golan, Judge et Miller (1996). Ces auteurs, et bien d'autres, soutiennent que les méthodes d'estimation fondées sur la minimisation de l'entropie croisée sont de véritables méthodes d'estimation, d'inspiration bayésienne, et non seulement des techniques pour attribuer des valeurs à des variables (signification que nous avons donnée au terme « estimation » jusqu'à maintenant).

Plus concrètement, la méthode MinXEnt consiste à ajuster une matrice *a priori* – en l'occurrence la matrice des flux de transport – de façon à respecter une information « dure », qui est imposée comme contrainte et qui, dans notre cas, est donnée par les totaux marginaux. Puisque les contraintes marginales fixent l'ordre de grandeur des flux, l'ajustement porte sur la structure de la matrice. Cette structure est représentée par la répartition du total entre les éléments, répartition qui est formellement une distribution de probabilité. Le second principe de Kapur et Kesavan (1992) consiste donc à choisir, parmi les matrices qui respectent les contraintes marginales, celle qui est la plus proche de la matrice *a priori*.

L'application de ce principe exige donc la définition d'une mesure de différence. Celle-ci est donnée par la mesure de l'entropie croisée de Kullback-Leibler (1951) :

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} \log \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \quad (6)$$

où les q_{ij} sont les probabilités *a priori* et les p_{ij} , les probabilités *a posteriori*.

Dans son approche axiomatique à la théorie de l'information, Theil (1967, p. 5) a montré que, pour un événement aléatoire A de probabilité q , la quantité d'information contenue dans un message disant que l'événement A s'est produit est mesurée par $\ln \frac{1}{q}$. Il s'ensuit

que $\ln \frac{1}{q}$ mesure réciproquement la quantité d'information *qui manque*, c'est-à-dire le degré d'*incertitude* qui subsiste lorsque l'on ne connaît que la probabilité d'occurrence q de A . Soit maintenant un ensemble exhaustif d'événements mutuellement exclusifs $\{A_i\}$ ¹⁴ auxquels sont associées des probabilités p_i . Il découle de ce qui précède que l'incertitude que laisse subsister cette distribution de probabilités est mesurée par l'espérance mathématique de la quantité d'information contenue dans un message qui dirait *lequel* des événements mutuellement exclusifs s'est produit :

$$E = \sum_{i=1}^I p_i \log \left(\frac{1}{p_i} \right) = - \sum_{i=1}^I p_i \log p_i \quad (7)$$

C'est la mesure d'entropie de Shannon. La même définition axiomatique de l'information implique par ailleurs ceci : si l'on veut mesurer la quantité d'information d'un message

¹³ Traduction libre de Kapur et Kesavan (1992) p.12.

¹⁴ On aura minimalement A et $\sim A$.

disant que la probabilité de A , que l'on croyait initialement être égale à q , est plutôt de p , alors il faut la mesurer par la différence entre l'information manquante *ex ante* et l'information manquante *ex post*, une fois reçu le message que la probabilité est de p , non pas de q ; cela donne

$$\ln \frac{1}{q} - \ln \frac{1}{p} = \ln \frac{p}{q} \quad (8)$$

Et quelle quantité d'information est contenue dans un message qui dit qu'une distribution de probabilités est donnée désormais par la distribution *a posteriori* $\{p_i\}$, plutôt que par la distribution *a priori* $\{q_i\}$? Cette quantité d'information est forcément mesurée par l'espérance mathématique

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^I p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \quad (9)$$

C'est la mesure de Kullback-Leibler pour une distribution uni-dimensionnelle. La méthode MinXEnt utilise la version bi-dimensionnelle de la même mesure.

Là se trouvent donc les assises épistémologiques de la méthode : la minimisation de l'entropie croisée est très rigoureusement la minimisation de l'information « injectée » dans la distribution *a priori* par le processus d'ajustement aux contraintes. Cette méthode est donc bel et bien la traduction opérationnelle du principe de la neutralité scientifique. Et dans l'esprit de l'approche bayésienne, les probabilités *a priori* sont révisées, mais en s'en éloignant le moins possible, à la lumière de l'information nouvelle (les contraintes).

L'application du principe de minimisation de l'entropie croisée consiste donc simplement à minimiser la mesure d'apport d'information de Kullback-Leibler, sous contrainte des identités habituelles respectées par les probabilités¹⁵, auxquelles peuvent s'ajouter d'autres restrictions propres à chaque situation concrète. Formellement, le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Min } D(p : q) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} \log \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \\ \text{s / c.} \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} &= 1 \\ p_{ij} &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} g_{ijr} &= a_r \end{aligned} \quad (10)$$

où le dernier ensemble de contraintes, formulé ici de manière générale, peut notamment prendre la forme particulière du respect de totaux marginaux imposés. La solution de ce problème est unique puisque la fonction objectif est convexe (voir la démonstration à l'annexe 3).

¹⁵ Le problème d'optimisation posé sous la forme d'un Lagrangien nous assure automatiquement que la solution ne pourra pas contenir de probabilités négatives.

Lorsque la distribution de départ n'est pas connue, la méthode de minimisation de l'entropie croisée peut aussi s'appliquer en considérant que la distribution de probabilité *a priori* est uniforme. Dans le cas particulier où le dernier ensemble de contraintes est constitué uniquement des contraintes de totaux marginaux, la solution obtenue est alors une matrice bi-proportionnelle constituée à partir des vecteurs de totaux marginaux.

Appliqué au cas des flux d'échanges interrégionaux, le problème d'estimation portant sur n régions, R , est résumé dans le tableau de contingence suivant (Tableau 1). Les flux de transport d'une région i vers une région j , x_{ij} , servent d'information *a priori* sur la répartition des flux d'échanges entre les régions, alors que les données par région sur la production, $\bar{x}_{j\bullet}$, et sur l'absorption, $\bar{x}_{\bullet j}$, jouent le rôle de contraintes.

Tableau 1
Tableau de contingence portant sur les échanges entre n régions

Origine	Destination				Total
	R_1	R_2	...	R_n	
R_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{1j} = \bar{x}_{1\bullet}$
R_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{2j} = \bar{x}_{2\bullet}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
R_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{nj} = \bar{x}_{n\bullet}$
Total	$\sum_{i=1}^n \bar{x}_{i1} = \bar{x}_{\bullet 1}$	$\sum_{i=1}^n \bar{x}_{i2} = \bar{x}_{\bullet 2}$...	$\sum_{i=1}^n \bar{x}_{in} = \bar{x}_{\bullet n}$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \bar{x}_{\bullet\bullet}$

En vue de l'application de la méthode MinXEnt, les flux de la matrice sont transformés en probabilités. La distribution de probabilité *a priori*, q , est donnée par

$$q_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H x_{gh}} \quad (11)$$

Par ailleurs, les contraintes de production et d'absorption se traduisent par les identités (7) et (8) :

$$\bar{p}_{i\bullet} = \frac{\bar{x}_{i\bullet}}{\sum_{g=1}^G \bar{x}_{g\bullet}} \quad (12)$$

$$\bar{p}_{\bullet,j} = \frac{\bar{x}_{\bullet,j}}{\sum_{h=1}^H \bar{x}_{\bullet,h}} \quad (13)$$

Ainsi, dans le problème d'optimisation énoncé en (10), on remplace la distribution *a priori*, q , par (11) et le dernier ensemble de contraintes par les équations (12) et (13). Dans l'application que nous avons faite de la méthode MinXEnt, les seules contraintes posées viennent du respect des totaux marginaux. Il a été démontré par Macgill (1977) que, dans ces conditions, la méthode MinXEnt conduit aux mêmes résultats numériques que la technique RAS. Mais contrairement à cette dernière, la méthode MinXEnt a des fondements théoriques. Et d'un point de vue pratique, il faut retenir que d'autres contraintes pourraient s'ajouter pour tenir compte de toute information supplémentaire.

Les données

Il existe plusieurs sources de données sur les flux de transports entre les régions. Cependant il s'agit de flux entre des régions telles que les provinces canadiennes et les états américains. Peu de données fiables sont disponibles pour un découpage plus fin des régions tel que les RMR et les RA (régions administratives). Les échantillons tirés lors des sondages pour établir les flux de transports entre les régions sont trop petits lorsqu'ils sont ramenés à des découpages plus fins. De plus, la méthode de sondage exclut souvent les transporteurs qui œuvrent sur de courtes distances (le vrac par exemple) ou à leur propre compte (compte propre).

Les données sur les flux de transports que nous avons utilisées proviennent d'une étude sur le transport de marchandises au Québec réalisée pour le Ministère des transports du Québec par AGRA-Monenco Québec (1999). L'étude d'AGRA-Monenco reconstitue, à partir de diverses sources, une matrice des flux de marchandises entre les régions administratives du Québec et entre ces dernières et différents points de passage aux frontières du Québec. L'estimation des flux se base sur trois sources de données, soit l'enquête annuelle de 1997 de Statistique Canada (Statistique Canada, 1999), l'enquête nationale de 1995 du CCATM¹⁶ et une enquête du Ministère des transports du Québec sur le débit de camions.

La base principale des estimations d'AGRA-Monenco est l'enquête de Statistique Canada. Or, celle-ci porte exclusivement sur les entreprises faisant du camionnage pour compte d'autrui, déclarant des recettes de un million de dollars et plus et ayant réalisé au moins la moitié de leur chiffre d'affaires sur des trajets de plus de 80 kilomètres. Cette dernière restriction en particulier entraîne presque certainement une sous-estimation des flux d'échanges intrarégionaux. Semblable lacune existe dans les données du CCATM. Dans ce dernier cas, le problème vient du fait que les postes d'enquête sont tous situés à l'extérieur des agglomérations urbaines, de sorte que les flux de transport intraurbains ne sont pas observés.

Il faut en outre reconnaître d'emblée qu'il y a une différence de nature entre les données de transport et les données de flux d'échanges. Car la destination d'un camion n'est pas

¹⁶ CCATM : Conseil canadien des administrateurs de transport motorisé.

nécessairement le point de livraison finale de ce qu'il transporte. C'est le problème du transbordement, dont l'importance varie d'un produit à l'autre. Seul un examen au cas par cas de la logistique du transport des différents biens permettrait de faire une évaluation qualitative de l'importance du phénomène et de ses conséquences sur l'estimation des flux. Étant donné le caractère exploratoire de notre étude et les ressources limitées que nous pouvions y consacrer, nous avons dû nous contenter de prendre acte de cette faiblesse, sans pouvoir y remédier.

Malgré ces lacunes, notamment quant aux flux intrarégionaux, les données d'AGRA-Monenco étaient, au moment de l'étude, les plus précises qui soient disponibles.

Les flux estimés par AGRA-Monenco ont été réagregés en fonction du découpage territorial de la présente étude. Toutefois, les régions métropolitaines de recensement ne coïncident pas avec un regroupement de régions administratives : il y a des régions administratives dont une partie, mais pas la totalité, appartient à une région métropolitaine. Les flux ayant ces régions pour origine ou pour destination ont été répartis entre la partie RMR et la partie hors RMR au prorata de la population¹⁷. Les données servant de matrice d'information a priori sont présentées au tableau 2.

Tableau 2

Tonnage des produits transportés par route entre les Régions métropolitaines de Recensement de Montréal et de Québec, le reste du Québec, le reste du Canada et le reste du monde, 1997 (en milliers de tonnes)

Destination						
	<i>RMR Montréal</i>	<i>RMR Québec</i>	<i>Reste du Québec</i>	<i>Reste du Canada</i>	<i>Reste du Monde</i>	<i>Total offre</i>
Origine						
RMR Montréal	7816,29	2227,72	7703,38	12647,29	3806,04	34200,72
RMR Québec	1765,80	256,47	2541,51	1023,87	441,09	6028,74
Reste du Québec	5440,56	537,25	6872,51	4380,25	1826,07	19056,64
Reste du Canada	10653,70	865,27	2499,73			14018,70
Reste du Monde	2420,91	282,32	649,86			3353,09
Total demande	28097,26	4169,03	20266,99	18051,41	6073,20	76657,89

Sources :

AGRA-Monenco Québec (1999)

Institut de la statistique du Québec pour les données démographiques

Calculs : Dubé (2003)

Les données économiques qui jouent le rôle de contraintes sur les totaux marginaux, proviennent, quant à elles, des matrices de comptabilité sociale des RMR de Québec et de Montréal et du reste du Québec (Fréchette et Robichaud, 1998; Lemelin et Robichaud, 1998; et Fréchette, Lemelin et Robichaud, 1998). Il est important de souligner que les estimations que nous avons extraites des MCS sont les flux de production (offre) et d'absorption (demande) intérieures régionales, lesquels n'ont pas été obtenus par des

¹⁷ Les détails de ce traitement sont donnés au chapitre 7 de Dubé (2003).

méthodes palliatives; mais plutôt par la méthode des indicateurs. Notre estimation des flux interrégionaux ne s'appuie donc pas sur le résultat d'une méthode palliative (ce qui serait le cas si nous avions pris comme point de départ les exportations nettes vers les autres régions). En somme, la méthode d'estimation que nous avons appliquée se situe *en amont* du calcul du solde régional : les données qui jouent le rôle de contraintes sont la production intérieure régionale et la demande intérieure régionale (demande intermédiaire, consommation privée et publique et investissements), qui sont les deux termes de l'équation du solde régional.

Examen des résultats

Dans cette section nous discutons les résultats de l'application de la méthode MinXEnt à l'estimation des flux d'échanges pour 31 produits entre les RMR de Montréal et de Québec, le Reste du Québec, le Reste du Canada et le Reste du Monde, en nous appuyant sur une matrice de flux de transport qui joue le rôle de matrice d'information *a priori*. Les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel GAMS. Le programme est reproduit à l'annexe 4. Il faut noter que les calculs doivent être faits avec une précision suffisante (ici, 8 décimales) pour que les totaux marginaux soient exactement respectés.

Les résultats agrégés de nos estimations sont présentés aux tableaux 3 à 7, où sont rapportés les flux d'échanges de produits primaires, de produits manufacturiers de consommation, de produits manufacturiers d'assemblage, de produits manufacturiers intermédiaires et enfin de services¹⁸.

Tableau 3

*Flux d'échanges interrégionaux estimés entre les régions économiques
(aux prix à la production hors taxes et marges, en millions de dollars constants de 1992)
Produits primaires*

Absorption (destination)	RMR Montréal	RMR Québec	Reste du Québec	Reste du Canada	Reste du Monde	Total offre
Production (origine)						
RMR Montréal	79,56	51,34	198,50	58,65	253,95	642,00
RMR Québec	26,10	8,82	100,42	7,67	55,58	198,60
Reste du Québec	1178,05	264,21	3795,33	438,61	2683,19	8359,40
Reste du Canada	1576,46	357,49	1368,06			3302,00
Reste du Monde	1857,18	645,36	2004,46			4507,00
Total demande	4717,35	1327,23	7466,77	504,93	2992,72	17009,00

¹⁸ Le détail des agrégations est donné en annexe.

Tableau 4

*Flux d'échanges interrégionaux estimés entre les régions économiques
(aux prix à la production hors taxes et marges, en millions de dollars constants de 1992)
Produits manufacturiers de consommation*

Absorption (destination)						
	RMR Montréal	RMR Québec	Reste du Québec	Reste du Canada	Reste du Monde	Total offre
Production (origine)						
RMR Montréal	3673,77	1253,93	4579,86	4100,37	1335,78	14943,70
RMR Québec	364,63	74,90	740,53	147,39	97,25	1424,70
Reste du Québec	2930,18	387,59	5293,25	1968,30	1082,28	11661,60
Reste du Canada	3328,48	367,99	1156,53			4853,00
Reste du Monde	3900,54	586,88	1633,58			6121,00
Total demande	14197,60	2671,29	13403,75	6216,05	2515,31	39004,00

Tableau 5

*Flux d'échanges interrégionaux estimés entre les régions économiques
(aux prix à la production hors taxes et marges, en millions de dollars constants de 1992)
Produits manufacturiers d'assemblage*

Absorption (destination)						
	RMR Montréal	RMR Québec	Reste du Québec	Reste du Canada	Reste du Monde	Total offre
Production (origine)						
RMR Montréal	618,26	197,08	1175,16	2507,62	4084,67	8582,80
RMR Québec	63,53	14,26	200,67	126,78	312,87	718,10
Reste du Québec	524,34	95,93	1239,43	1347,19	2709,21	5916,10
Reste du Canada	2755,73	426,48	2386,09	696,01	686,69	6951,00
Reste du Monde	8054,93	1557,33	7545,93	2092,10	2064,72	21315,00
Total demande	12016,79	2291,08	12547,28	6769,70	9858,15	43483,00

Tableau 6

*Flux d'échanges interrégionaux estimés entre les régions économiques
(aux prix à la production hors taxes et marges, en millions de dollars constants de 1992)
Produits manufacturiers intermédiaires*

Absorption (destination)						
	RMR Montréal	RMR Québec	Reste du Québec	Reste du Canada	Reste du Monde	Total offre
Production (origine)						
RMR Montréal	1985,93	801,22	3341,95	3677,31	2400,90	12207,30
RMR Québec	485,17	95,50	1034,50	205,67	228,76	2049,60
Reste du Québec	2269,33	362,35	5577,64	3419,02	6234,77	17863,10
Reste du Canada	3752,19	442,79	1920,02			6115,00
Reste du Monde	3150,98	525,25	1807,77			5484,00
Total demande	11643,60	2227,11	13681,87	7301,99	8864,43	43719,00

Tableau 7

*Flux d'échanges interrégionaux estimés entre les régions économiques
(aux prix à la production hors taxes et marges, en millions de dollars constants de 1992)
Services*

Absorption (destination)						
	RMR Montréal	RMR Québec	Reste du Québec	Reste du Canada	Reste du Monde	Total offre
Production (origine)						
RMR Montréal	22331,96	6586,49	19240,19	3180,24	1715,33	53054,20
RMR Québec	4001,97	613,00	4963,46	201,80	150,56	9930,80
Reste du Québec	15134,07	1528,51	16611,47	1048,75	787,20	35110,00
Reste du Canada	4559,40	436,15	1035,45			6031,00
Reste du Monde	2199,98	307,25	564,77			3072,00
Total demande	48227,38	9471,41	42415,34	4430,79	2653,08	107198,00

À titre d'illustration plus détaillée, nous présentons les flux d'échanges interrégionaux estimés pour deux produits en particulier, soit : *Papier et les produits connexes* et *Machines et matériel*. Les flux estimés pour ces deux produits sont donnés aux tableaux 8 et 9.

Tableau 8

*Flux d'échanges interrégionaux estimés entre les régions économiques
(aux prix à la production hors taxes et marges, en millions de dollars constants de 1992)
Papier et produits connexes*

Absorption (destination)						
	RMR Montréal	RMR Québec	Reste du Québec	Reste du Canada	Reste du Monde	Total offre
Production (origine)						
RMR Montréal	132,25	60,33	246,16	492,75	701,31	1632,80
RMR Québec	45,62	10,61	124,02	60,92	124,13	365,30
Reste du Québec	629,50	99,51	1501,80	1167,05	2301,05	5698,90
Reste du Canada	658,55	85,62	291,84			1036,00
Reste du Monde	342,44	63,93	173,62			580,00
Total demande	1808,36	320,00	2337,44	1720,71	3126,49	9313,00

Tableau 9

*Flux d'échanges interrégionaux estimés entre les régions économiques
(aux prix à la production hors taxes et marges, en millions de dollars constants de 1992)
Machines et matériel*

Absorption (destination)						
	RMR Montréal	RMR Québec	Reste du Québec	Reste du Canada	Reste du Monde	Total offre
Production (origine)						
RMR Montréal	339,46	70,93	390,32	241,05	250,85	1292,60
RMR Québec	16,60	3,19	18,79	12,40	12,72	63,70
Reste du Québec	281,12	58,60	315,97	216,20	206,80	1078,70
Reste du Canada	949,67	198,94	1106,69	696,01	686,69	3638,00
Reste du Monde	2911,88	621,97	3427,34	2092,10	2064,72	11118,00
Total demande	4498,73	953,63	5259,10	3257,76	3221,78	17191,00

Les tableaux de flux d'échanges se lisent comme une MCS : les lignes donnent la ventilation des destinations d'un produit ou d'un groupe de produits, alors que les colonnes donnent la ventilation des origines du même produit ou groupe de produits. Un élément général d'une matrice représente la valeur des expéditions d'un produit donné de la région d'origine i vers la région de destination j .

Ainsi, les données de contraintes économiques nous indiquent que la RMR de Québec produit pour 365,30 millions de dollars¹⁹ de papier et de produits connexes et qu'elle en consomme pour 320,00 millions de dollars. La répartition de la production de la RMR se fait comme suit : une valeur de 10,61 millions de dollars est consommée localement alors que les exportations vers la RMR de Montréal, le reste du Québec (RdQ), le reste du

¹⁹ Aux prix à la production, hors taxes et marges, en dollars constants de 1992.

Canada (RdC) et le reste du monde (RdM) se chiffrent respectivement à 45,62 millions, 124,02 millions, 60,92 millions et 124,13 millions de dollars. La ventilation de l'absorption de papier et de produits connexes par la RMR de Québec est la suivante : d'abord, la consommation locale est égale par définition à la production locale destinée au marché local, soit 10,61 millions de dollars; quant aux importations, elles proviennent de la RMR de Montréal, du RdQ, du RdC et du RdM, respectivement pour 60,33 millions, 99,51 millions, 85,62 millions et 63,93 millions de dollars. On peut faire la même lecture pour les flux relatifs aux autres régions et pour les tableaux des flux des autres produits.

Il est à noter que les échanges intérieurs au Reste du Canada et au Reste du Monde et entre ces deux régions ont été exclus de l'estimation et fixés à zéro : en conséquence, la partie correspondante des tableaux est vide. Le groupe des produits manufacturiers d'assemblage, et plus précisément le produit *Machines et matériel*, fait toutefois exception. Dans ce cas en effet, étant donné les totaux marginaux, il n'y a pas de solution possible sans flux de réexportation. Car, d'une part, le total de l'absorption pour l'ensemble du Québec est égal à 10 711,46 millions (4 498,73 + 953,63 + 5 259,10), ce qui est inférieur aux importations, égales à 14 756,00 millions (3 638,00 + 11 118,00); d'autre part, le total de la production est de 2 435, millions (1 292,60 + 63,70 + 1 078,70), ce qui est inférieur au total des exportations, qui est de 6 479,54 millions (3 257,76 + 3 221,78). Seul le phénomène de réexportation de produits importés permet de réconcilier ces chiffres qui, répétons-le, sont considérés comme des données « dures » et fixent les contraintes du processus d'estimation. C'est pourquoi, en ce qui concerne le produit *Machines et matériel*, le processus d'estimation a été modifié pour permettre l'équilibrage du tableau par les flux de réexportation. Incidemment, les données du produit *Machines et matériel* nous rappellent que la méthode d'estimation pourrait être améliorée si l'on possédait des données relatives aux réexportations, un phénomène qui peut toucher n'importe quel produit.

Globalement, quelle évaluation peut-on faire des estimations obtenues ? Évidemment, l'idéal pour en juger serait de pouvoir les comparer à des valeurs observées. Mais ces observations n'existent pas. Alors force est de recourir à une appréciation de la vraisemblance des chiffres obtenus à la lumière de ce que l'on connaît de l'économie du Québec.

Il faut aussi garder à l'esprit que l'objectif poursuivi par cette application expérimentale de la méthode MinXEnt était de trouver un substitut à la méthode du solde régional. Or, par rapport à cette dernière, la méthode MinXEnt surmonte plusieurs restrictions importantes. D'abord, elle n'exclut pas l'existence de flux croisés («cross-hauling») et, par conséquent, ne minimise pas *a priori* le volume des échanges interrégionaux. Par le fait même (ce sont les deux faces d'une même médaille), elle évite de maximiser le volume des échanges intérieurs à la région. Enfin, la méthode MinXEnt permet, non seulement d'estimer les importations et exportations de chaque région, mais encore de les répartir entre origines pour les importations, et entre destinations pour les exportations. La méthode du solde régional en elle-même ne permet pas cela.

Cela dit, la qualité de l'estimation par la méthode MinXEnt est tributaire de la qualité des données sur les flux de transport. Mais bien que nous ayons utilisé les meilleures données disponibles, celles-ci comportent encore de sérieuses lacunes. D'abord, elles ne permettent pas de tenir compte du phénomène du transbordement. De plus, elles se rapportent exclusivement au transport par camion. La matrice *a priori* qui en résulte est donc moins adéquate pour certains produits que pour d'autres. On peut penser, par exemple, que ces données sur le transport par camion conviennent moins bien à l'estimation des flux de services échangeables²⁰. De même, on peut s'attendre à des distorsions en ce qui concerne les marchandises transportées en grande partie par bateau ou par train et qui sont plus susceptibles d'être transbordées.

Ensuite, comme nous l'avons déjà souligné, nous avons de bonnes raisons de croire que les données de l'étude d'AGRA-Monenco (1999) sous-estiment le volume des flux intrarégionaux. Cette dernière caractéristique des données a pour effet de pervertir en quelque sorte un des avantages de la méthode MinXEnt sur celle du solde régional, en menant à une sous-évaluation des flux intérieurs. À cause de cela, les estimations expérimentales que nous avons obtenues représentent en quelque sorte une position extrême, le contre-pied de la méthode du solde régional. Par exemple, la valeur estimée des échanges intrarégionaux de *Papier et produits connexes* au sein de la RMR de Québec est de 10,61 millions; la méthode du solde régional conduirait à une valeur estimée de 320,00 millions (soit le minimum entre la production locale de 365,30 millions et l'absorption locale de 320,00 millions). La méthode apparentée de Fréchette, Lemelin et Robichaud (1998), décrite précédemment, produit pour sa part une valeur estimée de 204,20 millions.

En dépit du fait que les données de transport conduisent à sous-estimer les flux intérieurs, les résultats obtenus nous semblent néanmoins plus crédibles en général que ceux de la méthode du solde régional. C'est le cas en particulier pour les *Voitures, camions et autres*, où, malgré la forte concentration de la production québécoise dans la région de Montréal, les flux estimés respectent bien la prévalence des flux croisés propres à cette famille de produits.

Insistons enfin sur le fait que, selon l'évaluation qu'en fait AGRA-Monenco (1999), les données de transport sont assez fiables en ce qui concerne les flux interrégionaux, de sorte que si l'on pouvait résoudre le problème de la sous-estimation des flux intrarégionaux dans les données *a priori*, la méthode serait pleinement opérationnelle (bien que mieux adaptée aux flux de biens qu'aux flux de services).

Conclusion

²⁰ Par exemple, nous sommes insatisfaits des résultats obtenus pour *Autres finances, assurances et affaires immobilières*. Selon les estimations obtenues par la méthode MinXEnt, la région de Montréal importerait davantage de ces services en provenance du Reste du Québec qu'en provenance du Reste du Canada (incluant Toronto), ce qui est contraire à la perception commune.

Cet article rend compte d'une application expérimentale de la méthode de minimisation de l'entropie croisée à l'estimation des flux d'échanges interrégionaux.

La plupart des méthodes qui visent à suppléer à l'absence de données sur les flux d'échanges interrégionaux ont pour point de départ une estimation des exportations nettes, selon la technique du solde régional ou une technique apparentée. Cette approche exclut *a priori* la possibilité de flux d'échanges croisés (*cross-hauling* en anglais) et conduit donc à maximiser les échanges intrarégionaux.

La méthode de minimisation de l'entropie croisée offre une solution élégante à ce problème. Comme toutes les méthodes d'estimation des flux interrégionaux, à l'exception des méthodes naïves, elle exige l'apport de données supplémentaires. En l'occurrence, nous avons combiné des données de comptabilité économique de Fréchette et Robichaud (1998) et Lemelin et Robichaud (1998) avec les données de l'étude menés par AGRA-Monenco pour le compte du Ministère des Transports du Québec sur les flux de transport par camion au Québec.

À partir de la matrice des flux de transport, il s'agit de produire des flux d'échange qui respectent les totaux marginaux de l'absorption et de la production intérieures des régions, un problème formellement équivalent à celui de l'équilibrage d'une matrice. La méthode de minimisation de l'entropie croisée permet de résoudre ce problème en s'appuyant sur des assises épistémologiques explicites : la minimisation de l'entropie croisée est très rigoureusement la minimisation de l'information « injectée » dans la distribution *a priori* par le processus d'ajustement aux contraintes. Cette méthode est donc une traduction opérationnelle du principe de la neutralité scientifique.

Cela dit, la qualité de l'estimation par la méthode MinXEnt est tributaire de la qualité des données sur les flux de transport. Or ces données, bien qu'elles soient les meilleures disponibles, comportaient des lacunes importantes, qui ont entraîné une nette sous-estimation des flux intrarégionaux. Nous avons donc démontré l'applicabilité de la méthode MinXEnt, mais elle ne pourra être considérée comme pleinement opérationnelle que lorsque sera résolu le problème de sous-estimation des flux intra-régionaux.

On peut aussi espérer qu'à l'avenir, d'autres sources de données deviendront disponibles, par exemple, sur les télécommunications ou le trafic de passagers, qui sont probablement de meilleurs indicateurs quant aux flux de services échangeables.

Bibliographie

- AGRA-Monenco Québec (1999), *Étude sur le transport de marchandises au Québec, Rapport final*, Montréal, 174 pages et 5 annexes.
- BATTEN, D.F. (1983) *Spatial analysis of interacting economies: the role of entropy and information theory in spatial input-output modeling*. Kluwer-Nijhoff, Boston, 306 pages.
- BYRON, R.P. (1978), The Estimation of Large Social Account Matrices, dans *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 141 (3), p. 359-367.

- DUBÉ, J. (2003), *Estimation des flux d'échanges interrégionaux par la méthode de minimisation de l'entropie croisée*, Mémoire de maîtrise, Université Laval, 106 pages.
- DUBÉ, J. et M. DUPÉRÉ (2004) *Expérimentation de la méthode d'entropie croisée pour l'estimation d'échanges économiques à partir de flux de transport*. Québec: Ministère des Transports du Québec; Études et recherches en transport - socioéconomie des transports.
- FRÉCHETTE, P. et V. ROBICHAUD (1998) Construction de la matrice de comptabilité sociale de la région métropolitaine de Québec pour 1992 : aspects techniques, Sainte-Foy, CRAD, Université Laval, mai, 53 pages et 259 tableaux.
- GOLAN, A., G. JUDGE et D. MILLER (1996) *Maximum entropy econometrics: robust estimation with limited data*, John Wiley & Sons.
- ISARD, W. (1953), Regional Commodity Balances and Interregional Commodity Flows, dans *The American Economic Review*, vol. 43 (2), p. 167-180.
- ISARD, W. (1972), Méthodes d'analyse régionale : une introduction à la science régionale, Dunod, Traduction française de *Methods of Regional Analysis : An Introduction to Regional Science*, 229 pages.
- ISSERMAN, A.M. (1980), Estimating Export Activity in a Regional Economy : A Theoretical and Empirical Analysis of Alternative Methods, dans *International Regional Science Review*, vol.5 (2), p. 155-184.
- JACKSON, R. W. et A. T. MURRAY (2004), Alternative input-output matrix updating formulations. *Economic Systems Research*. 16(2):135-148.
- JAYNES, E. T. (1957) Information theory and statistical mechanics, *Physical Review*, vol. 106, p. 620-630 et vol. 108, p. 171-190.
- KAPUR J.N. et H.K. KESAVAN (1992), *Entropy Optimization principles with applications*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 405 pages.
- KULLBACK, S. (1959), *Information Theory and Statistics*, John Wiley & Sons Inc., Canada, 395 pages.
- LEMELIN, A. (1993), Construction d'une matrice de comptabilité sociale pour la région métropolitaine de Montréal, INRS-Urbanisation, Collection Inédits in-05, 61 pages.
- LEMELIN, A. (1997), Matrices régionales de comptabilité sociale, flux d'échanges interrégionaux et modèles régionaux et multirégionaux, INRS-Urbanisation, mai, non publié, 68 pages.
- LEMELIN, A. (2004) *Méthodes quantitatives des sciences sociales appliquées aux études urbaines et régionales*, édition révisée, INRS-UCS, Montréal, pagination multiple; version électronique : <http://www.inrs-ucs.quebec.ca/Cours/Lemelin/EUR8213/index.htm> (dernière révision le 3 mars 2005).
- LEMELIN, A., P. FRÉCHETTE et M. BOISVERT (1994), Spécification d'un modèle d'équilibre général appliqué pour les régions métropolitaines de Québec et de Montréal, INRS-Urbanisation, Collection Inédits in-15, 71 pages.
- LEMELIN, A. et V. ROBICHAUD (1998) Construction de la matrice de comptabilité sociale de la région métropolitaine de Montréal pour 1992 : aspects techniques, Montréal, INRS-Urbanisation, mai, 53 pages et 259 tableaux.
- LEONTIEF, W., et A. STROUT. 1963. Multiregional input-output analysis, dans Barna, Tibor, William I. Abraham et Zoltan Zenessey, *Structural interdependence and economic development*, St. Martin's Press, New York.

- MACGILL, S. M. (1977), Theoretical properties of biproportional matrix adjustments, *Environment and Planning A*, 9: 687-701.
- MILLER, R. E. et P. BLAIR (1985), Nonsurvey and partial-survey methods, chap. 8 dans *Input-output analysis : foundations and extensions*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J, p. 266-316.
- MINISTÈRE DES TRANSPORTS DU QUÉBEC. GIASSON, M. (1994), *Analyse des résultats de comptages/calssifications des véhicules lourds dans la région de Québec*, 10 pages et 4 annexes.
- MINISTÈRE DES TRANSPORTS DU QUÉBEC. GIASSON, M. (1994), *Analyse des résultats de l'enquête cordon sur le transport routier des marchandises dans la région de Québec*, 5 pages et 5 annexes.
- MINISTÈRE DES TRANSPORTS DU QUÉBEC. GONTHIER, G. (1999), *Évaluation et analyse statistique du transport routier des marchandises au Québec en 1997*, 9 pages.
- ROBICHAUD, V., A. LEMELIN et P. FRÉCHETTE (1998), *Construction de la matrice de comptabilité sociale du Québec pour 1992: aspects techniques*, Montréal, INRS-Urbanisation, et Sainte-Foy, Université Laval (CRAD), 34 pages et 131 tableaux.
- ROBILLIARD A-S. et S. ROBINSON (2003), Reconciling Household Surveys and National Accounts Data Using a Cross Entropy Estimation Method, *Review of Income and Wealth*, Vol. 49, pp. 395-406, September 2003
- ROBINSON, S., A CATTANEO et M. EL-SAID (1998), Estimating a Social Accounting Matrix Using Cross Entropy Methods, *TMD Discussion Paper*, 33, 35 pages.
- ROBINSON, S., A CATTANEO et M. EL-SAID (2000), Updating and Estimating a Social Accounting Matrix Using Cross Entropy Methods, *TMD Discussion Paper*, 58, 28 pages.
- ROUND, J. I. (1983), Nonsurvey Techniques Review of the theory and the Evidence, dans *International Regional Science Review*, vol. 8 (3), p. 189-212.
- ROUND, J. I. (2003), Constructing SAMs for development policy analysis. Lessons learned and challenges ahead. *Economic Systems Research*. juin 2003, 15(2):161-183.
- SCHAFFER, W. (1999) *Regional Impact Models*, Regional Research Institute, West Virginia University : <http://www.rr.i.wvu.edu/WebBook/Schaffer/regionalGT.pdf>.
- SCHNEIDER, M.H. et S.A. ZENIOS (1990), A Comparative Study of Algorithms for Matrix Balancing, dans *Operations Research*, vol.38, p.439-455.
- STATISTIQUE CANADA. (1999), *Le camionnage au Canada : 1997*, catalogue n° 53-222-XPB, périodique annuel, 127 pages.
- STATISTIQUE CANADA (1996), *La structure par entrées-sorties de l'économie canadienne 1992*, Statistique Canada 15-201-XPB.
- STONE, R. (1977), 'Forward' to G Pyatt and A Roe et al, *Social Accounting for Development Planning*, Cambridge University Press, Cambridge; xvi-xxxii.
- STONE, R. D. CHAMPERNOWNE et J.E. MEADE (1942), The Precision of National Income Estimates, dans *Review of Economic Studies*, vol. 9, no. 2, p.111-125.
- THEIL, H. (1967), *Economics and information theory*, Rand McNally & Company, Chicago, Studies in mathematical and managerial economics, 7, 488 pages.
- THEIL, H. (1971), *Principles of econometrics*, A Wiley/Hamilton Publications, John Wiley & Sons, Inc., 736 pages.
- ULLMAN, E. L., et DACEY, M. F. (1960) "The Minimum Requirements Approach to the Urban Economic Base." *Regional Science Association Papers*, 6, 175-194.

Annexe 1 – Classification des biens

Les calculs ont été effectués au niveau S de la classification des biens et services des tableaux entrées-sorties de Statistique Canada (1996), sauf pour les biens 3 à 8, qui ont été regroupés sous la rubrique « Autres produits primaires ». Le tableau qui suit donne la correspondance entre cette classification et les groupes de produits des tableaux 3 à 7.

1	Céréales	Produits primaires
2	Autres produits agricoles	Produits primaires
3	Produits de la forêt	Produits primaires
4	Produits de la pêche et du piégeage	Produits primaires
5	Minerais métalliques et concentrés	Produits primaires
6	Combustibles minéraux	Produits primaires
7	Minéraux non métalliques	Produits primaires
8	Services auxiliaires aux mines	Produits primaires
9	Viande, poisson et produits laitiers	Produits manufacturiers de consommation
10	Fruits, légumes, aliments pour animaux et divers	Produits manufacturiers de consommation
11	Boissons	Produits manufacturiers de consommation
12	Tabac et produits du tabac	Produits manufacturiers de consommation
13	Produits en caoutchouc, en cuir, matières plastiques	Produits manufacturiers de consommation
14	Produits textiles	Produits manufacturiers de consommation
15	Produits en tricot et vêtements	Produits manufacturiers de consommation
16	Sciages, produits de scierie et divers produits du bois	Produits manufacturiers intermédiaires
17	Meubles et articles d'ameublement	Produits manufacturiers de consommation
18	Papier et produits connexes	Produits manufacturiers intermédiaires
19	Impression et édition	Produits manufacturiers de consommation
20	Produits métalliques primaires	Produits manufacturiers intermédiaires
21	Semi-produits métalliques	Produits manufacturiers intermédiaires
22	Machines et matériel	Produits manufacturiers d'assemblage
23	Voitures, camions et autres équipements de transport	Produits manufacturiers d'assemblage
24	Appareils électriques et de télécommunication	Produits manufacturiers d'assemblage
25	Produits minéraux non métalliques	Produits manufacturiers intermédiaires
26	Produits du pétrole et du charbon	Produits manufacturiers intermédiaires
27	Produits chimiques	Produits manufacturiers intermédiaires
28	Produits manufacturiers divers	Produits manufacturiers de consommation
29	Construction de résidences	Exclu
30	Construction non-résidentielle	Exclu
31	Construction de réparation	Exclu
32	Transports et entreposage	Services
33	Services de communications	Services
34	Autres services d'utilité publique	Services
35	Marges de commerce de gros	Services
36	Marges de commerce de détail	Services
37	Loyer imputé des logements occupés par leur propriétaire	Exclu
38	Autres finance, assurance et affaires immobilières	Services
39	Services commerciaux	Services
40	Services personnels et autres services	Services
41	Marges de transport	Exclu
42	Fournitures d'exploitation, de bureau, de labo. et de cafétéria	Exclu
43	Tourisme, loisirs, promotion et publicité	Exclu
44	Importations non concurrentielles	Exclu
45	Importations et exportations non réparties	Exclu
46	Impôts indirects nets	Exclu
47	Revenu du travail	Exclu
48	Revenu net des entreprises individuelles	Exclu
49	Autres excédents d'exploitation	Exclu

Annexe 2 – Énoncé de la méthode Fréchette-Lemelin-Robichaud

La production intérieure x_i^r et l'absorption intérieure d_i^r (demande intermédiaire, consommation privée et publique et investissements) ont été préalablement obtenues pour chaque région par la méthode des indicateurs. Pour chacune des deux régions métropolitaines et pour chaque produit, le solde régional est égal à la différence entre la production et l'absorption locales. Ce dernier peut se diviser en trois composantes :

$$b_i^{RMr} = \left(E_i^{RMr,RdM} - M_i^{RMr,RdM} \right) + \left(E_i^{RMr,RdC} - M_i^{RMr,RdC} \right) + \left(E_i^{RMr,RdQ} - M_i^{RMr,RdQ} + E_i^{RMr,RMs} - M_i^{RMr,RMs} \right)$$

où

RMr et $RMs \neq RMr$ désignent les régions métropolitaines ($RMM =$ Montréal et $RMQ =$ Québec); RdQ désigne le Reste du Québec, hors les RMR de Montréal et Québec; RdC désigne le Reste du Canada hors Québec; RdM désigne le Reste du Monde hors Canada;

b_i^{RMr} est le solde régional de la région métropolitaine RMr dans les échanges du bien i ;

$E_i^{RMr,s}$ désigne les exportations du bien i par la région RMr vers le marché extérieur s ;

$M_i^{RMr,s}$ désigne les importations du bien i par la région RMr en provenance de s ;

$s = RdM, RdC, RdQ, RMs$ et $RMs \neq RMr$.

La première composante du solde régional est le solde des échanges avec le Reste du Monde, la seconde, le solde des échanges avec le Reste du Canada et la troisième, le solde des échanges avec les autres régions du Québec.

Fréchette *et al.* font les hypothèses suivantes :

1. les propensions moyennes à exporter $\left(\frac{E_i^{RMr,RdM}}{x_i^{RMr}} \right)$ et $\left(\frac{E_i^{RMr,RdC}}{x_i^{RMr}} \right)$ sont les mêmes pour chaque région que pour l'ensemble du Québec;
2. Les propensions moyennes à importer $\left(\frac{M_i^{RMr,RdM}}{d_i^{RMr}} \right)$ et $\left(\frac{M_i^{RMr,RdC}}{d_i^{RMr}} \right)$ sont les mêmes pour chaque région que pour l'ensemble du Québec.

En appliquant ces hypothèses d'homomorphisme (similitude structurelle), on estime les exportations nettes de chaque région vers l'ensemble des autres régions du Québec au moyen de la formule

$$\begin{aligned} & \left(E_i^{RMr,RdQ} - M_i^{RMr,RdQ} + E_i^{RMr,RMs} - M_i^{RMr,RMs} \right) \\ & = \left(x_i^{RMr} + M_i^{RMr,RdC} + M_i^{RMr,RdM} \right) \\ & \quad - \left(d_i^{RMr} + E_i^{RMr,RdC} + E_i^{RMr,RdM} \right) \end{aligned}$$

Annexe 3 – Démonstration de la convexité de la fonction objectif de la méthode MinXEnt

Lorsque la fonction objectif d'un problème d'optimisation est convexe, les conditions de premier ordre suffisent à définir un minimum et c'est un minimum global (et non seulement local). Or pour qu'une fonction soit convexe, il est suffisant que ses dérivées partielles directes de second ordre soient positives et ses dérivées partielles croisées de second ordre, nulles. La démonstration de ces propriétés est donnée ci-après.

La dérivée partielle première de la fonction objectif par rapport à la probabilité *a posteriori* p_{hk} est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[p_{hk} \ln \left(\frac{p_{hk}}{q_{hk}} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] &= \ln \left(\frac{p_{hk}}{q_{hk}} \right) \frac{\partial}{\partial p_{hk}} p_{hk} + p_{hk} \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \ln \left(\frac{p_{hk}}{q_{hk}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] &= \ln \left(\frac{p_{hk}}{q_{hk}} \right) + p_{hk} \frac{\partial}{\partial p_{hk}} (\ln p_{hk} - \ln q_{hk}) \\ \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] &= \ln \left(\frac{p_{hk}}{q_{hk}} \right) + p_{hk} \left(\frac{1}{p_{hk}} \frac{\partial}{\partial p_{hk}} p_{hk} - \frac{1}{q_{hk}} \frac{\partial}{\partial p_{hk}} q_{hk} \right) \\ \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] &= \ln \left(\frac{p_{hk}}{q_{hk}} \right) + p_{hk} \left(\frac{1}{p_{hk}} - 0 \right) \\ \frac{\partial}{\partial p_{hk}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] &= 1 + \ln p_{hk} - \ln q_{hk} \end{aligned}$$

La dérivée seconde par rapport à la probabilité *a posteriori* p_{hk} est donc

$$\frac{\partial^2}{\partial p_{hk}^2} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] = \frac{1}{p_{hk}} > 0 \text{ pour } p_{hk} > 0$$

Enfin, les dérivées partielles croisées sont nulles :

$$\frac{\partial^2}{\partial p_{hk} \partial p_{st}} \left[\sum_i \sum_i p_{ij} \ln \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \right] = 0$$

Annexe 4 – Programme GAMS

```

$title          ENTROPIECROISEE
$stitle  Resolution du probleme de minimisation de l'entropie croisee dans le
*          but d'estimer les flux d'echanges interregionaux

*=====CALIBRATION=====*

*-----Les ensembles utilises-----*
SET B PRODUITS INDUSTRIELS /P158      Cereales
                                         P159      Autres produits agricoles
                                         P160      Autres produits alimentaires
                                         P161      Viande, poisson et produits laitiers
                                         P162      Fruits, legumes, aliments pour animaux et
divers
                                         P163      Boissons
                                         P164      Tabac et produits du tabac
                                         P165      Produits en caoutchouc, en cuir, matieres
plastiques
                                         P166      Produits textiles
                                         P167      Produits en tricot et vetements
                                         P168      Sciage, produits de scierie et divers
                                         P169      Meubles et articles d'ameublement
                                         P170      Papier et produits connexes
                                         P171      Impression et edition
                                         P172      Produits metalliques primaires
                                         P173      Semi-produits metalliques
                                         P174      Machines et materiel
                                         P175      Voitures, camions et autres
                                         P176      Appareils electriques et de
telecommunications
                                         P177      Produits mineraux non-metalliques
                                         P178      Produits du petrole et du charbon
                                         P179      Produits chimiques
                                         P180      Produits manufacturiers divers
                                         P181      Construction de residences
                                         P182      Construction non-residentielle
                                         P183      Construction de reparation
                                         P184      Transports et entreposage
                                         P185      Services de communications
                                         P186      Autres services d'utilite publique
                                         P187      Marge, commerce de gros
                                         P188      Marge commerce de detail
                                         P189      Loyer impute logements occupes par le
proprietaire
                                         P190      Autres finances, assurances et affaires
immobilieres
                                         P191      Services commerciaux
                                         P192      Services personnels et autres services
                                         P193      Marge, transport
                                         P194      Furniture, exploitation, bureau,
laboratoire, cafeteria
                                         P195      Tourisme, loisirs, promotion et publicite/

II TOUTES REGIONS SAUF TOTAL
/RMRQC RMR de Quebec
/RMRMTL RMR de Montreal
/RDQ   Reste de la province
/RDC   Reste du Canada
/RDM   Reste du monde/

```

```
ALIAS (B,C);
ALIAS (II,JJ);
```

```
*-----Liste des variables-----*
```

```
PARAMETER
  ECHO(II,JJ)   Matrice d'echange de la region I vers la region J
  ECHJO(JJ)    Totaux marginaux des lignes
  ECHIO(II)    Totaux marginaux des colonnes
  ECHTOTO      Somme des totaux marginaux

  QIJO(II,JJ)  Matrice de la distribution de probabilite a priori
  QPTJO(JJ)    Totaux marginaux des lignes en distribution de probabilite a
priori
  QIPTO(II)    Totaux marginaux des colonnes en distribution de probabilite
a priori

  PRODO(II,C)  Production du produit B dans la region J
  TOTPRODO(C)  Total de la production d'un produit B dans l'ensemble des
regions
  PIPTO(II,C)  Totaux marginaux des lignes en distribution de probabilite

  ABSO(B,JJ)   Absorption du produit C dans la region I
  TOTABSO(B)   Total de l'absorption d'un produit C dans l'ensemble des
regions
  PPTJO(B,JJ)  Totaux marginaux des colonnes en distribution de probabilite

  EPSILON      Empeche des divisions par zero
```

```
*Les donnees sont incluses dans les fichiers suivants
$INCLUDE OD.txt;
*fichier contenant la matrice d'information a priori
$INCLUDE contraintes.txt;
*fichier contenant les contraintes des totaux marginaux
```

```
*-----Assignation des valeurs de base-----*
```

```
*Donnees servant a la matrice d'information a priori
  ECHO(II,JJ)=OD(II,JJ);
  ECHTOTO=SUM(II,JJ,ECHO(II,JJ));
  QIJO(II,JJ)=ECHO(II,JJ)/ECHTOTO;
```

```
*Donnees servant a la construction des contraintes
EPSILON=0.000001;
```

```
*Pour la production
  PRODO(II,C)=PRODUCTION(II,C);
  TOTPRODO(C)=SUM(II,PRODO(II,C));
  PIPTO(II,C)=PRODO(II,C)/TOTPRODO(C);
*Pour l'absorption
  ABSO(B,JJ)=ABSORPTION(B,JJ);
  TOTABSO(B)=SUM(JJ,ABSO(B,JJ));
  PPTJO(B,JJ)=ABSO(B,JJ)/TOTABSO(B);
```

```
*Verification
*DISPLAY QIJO, PPTJO, PIPTO;
```

```
*-----Nom des variables utilisees-----*
```

```
VARIABLE
```

QIJ(II, JJ) Matrice de la distribution de probabilite a priori
 QPTJ(JJ) Totaux marginaux des lignes en distribution de probabilite
 a priori
 QIPT(II) Totaux marginaux des colonnes en distribution de
 probnabilite a priori

PIJP158(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 158
 PIJP159(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 159
 PIJP160(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 160
 PIJP161(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 161
 PIJP162(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 162
 PIJP163(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 163
 PIJP164(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 164
 PIJP165(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 165
 PIJP166(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 166
 PIJP167(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 167
 PIJP168(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 168
 PIJP169(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 169
 PIJP170(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 170
 PIJP171(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 171
 PIJP172(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 172
 PIJP173(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 173
 PIJP174(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 174
 PIJP175(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 175
 PIJP176(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 176
 PIJP177(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 177
 PIJP178(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 178
 PIJP179(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 179
 PIJP180(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 180
 PIJP181(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 181
 PIJP182(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 182
 PIJP183(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 183
 PIJP184(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 184
 PIJP185(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 185
 PIJP186(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 186
 PIJP187(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 187
 PIJP188(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 188
 PIJP189(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 189
 PIJP190(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 190
 PIJP191(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 191
 PIJP192(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 192
 PIJP193(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 193
 PIJP194(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 194
 PIJP195(II, JJ) Matrice des prob a posteriori pour le produit 195

EPTJ(B, JJ) Tot. margin. des lignes en distrib. de prob., produit B
 PIPT(II, C) Tot. margin. des col. en distrib. de prob., produit C

OBJ Fonction objectif pour chaque produit

;

-----Assignment des valeurs-----

*L'assignation des valeurs se fait dans le meme bloc que les equations pour
 *chaque produit.

-----Les equations-----

EQUATIONS

EQCTM(B, JJ) Equation de contrainte de respect des tot. margin. (colonnes)

EQLTM(II, C) Equation de contrainte de respect des tot. margin. (lignes)

```

      EQSE          Contrainte des elements a donner un une fois additionnes
      EQCE          Equation de minimisation de l'entropie croisee
;

*=====NOTE=====*
$ONTEXT
On doit faire rouler de facon independante le programme pour chaque produit
La raison est simplement que le nom de la variable a minimiser est la meme
pour l'ensemble des produits.
Les resultats obtenus, lorsqu'on fait tourner tout le modele en meme temps,
ne sont pas des plus fiables.
$OFFTEXT

*=====Pour le produit 158=====*
*Assignment de la matrice de depart
QIJ.FX(II,JJ)=QIJO(II,JJ);
PIJP158.LO(II,JJ)=0;
PIJP158.UP(II,JJ)=1;
PPTJ.FX(B,JJ)=PPTJO(B,JJ);
PIPT.FX(II,C)=PIPTO(II,C);
OBJ.LO=0;
*On gele les cellules de flux entre les regions RdC et RdM
PIJP158.FX('RDC','RDC')=0;
PIJP158.FX('RDC','RDM')=0;
PIJP158.FX('RDM','RDC')=0;
PIJP158.FX('RDM','RDM')=0;

*Les equations CTM et LTM concernent le respect des totaux marginaux
*(colonnes et lignes)
*L'equation SE est une contrainte naturelle posee par les probabilites
*L'equation CE est simplement la fonction de minimisation d'entropie croisee

      EQCTM('P158',JJ)..      SUM(II,PIJP158(II,JJ))=E=PPTJ('P158',JJ);
      EQLTM(II,'P158')..     SUM(JJ,PIJP158(II,JJ))=E=PIPT(II,'P158');

      EQSE..                  SUM((II,JJ),PIJP158(II,JJ))=E=1;

      EQCE..
OBJ=E=SUM((II,JJ),(PIJP158(II,JJ)*log(PIJP158(II,JJ)+EPSILON)-
PIJP158(II,JJ)*log(QIJ(II,JJ)+EPSILON)));

*=====Pour le produit 159=====*

```

Pour alléger la présentation du programme, nous avons supprimé ici les énoncés relatifs aux produits 159 à 195, qui suivent le modèle du produit 158.

```

*-----Resolution du probleme de CE-----*

OPTION ITERLIM=100000;
OPTION DECIMALS=8;
MODEL ENTROPIECROISEE /ALL/;
OPTION NLP=MINOS5;
*OPTION NLP=MINOS;
*OPTION NLP=CONOPT;
*OPTION NLP=CONOPT2;
SOLVE ENTROPIECROISEE USING NLP MINIMIZING OBJ;

```