Automatismos y racionalidad en la toma de decisiones para sustituir a un deportista en momentos decisivos

Automation and rationality in decision-making to replace a sportman at decisive moments

Jaime Gil Lafuente
Universitat de Barcelona

Recibido el 29 de octubre de 2007. Aceptado el 29 de febrero de 2008
Nº de clasificación JEL: C69

Resumen:

Cada vez más el deporte-espectáculo se está abriendo paso como objeto de estudio en los centros de investigación avanzada, como consecuencia de la necesidad de gestionar los altos presupuestos de las entidades deportivas.

Vencer en un partido de fútbol o de baloncesto, por ejemplo, depende de muchos factores, casi todos estudiados minuciosamente. Se pone de manifiesto, sin embargo, que en uno de ellos la decisión se adopta de manera precipitada e intuitiva. Se trata de la sustitución de un jugador en juego por otro que debe entrar en la cancha para cumplir ciertos cometidos que el sustituido, por las razones que sea, no puede realizar. El entrenador se ve obligado, entonces, a tomar una decisión casi siempre bajo la presión del ambiente y del conflicto de sensaciones muchas veces contradictorias.

En este trabajo proponemos un algoritmo de fácil utilización y aplicación para dar respuesta a la pregunta: ¿debe sustituirse un jugador? Y en caso afirmativo, por cual de ellos debe hacerse la sustitución.

Abstract:

Increasingly, the sport entertainment is emerging as an object of study in advanced research centers, as a result of the need to manage the high budgets of sport entities. To win in sports like football or basketball depends on many factors, almost all studied thoroughly. It shows, however, that in one of them, the decision making is hastily and intuitive. It's the substitution of a player by another one that should enter into the pitch to fulfill some tasks that the replaced one, for whatever reason, can't carry out. The coach is forced, then, to take a decision almost always under ambient pressure and conflict of sensations often contradictory. In this paper we propose an algorithm easy to use and apply for answer to the following question: is it necessary to replace a player? And if so, on which of them should be replaced.

Palabras Clave:

Cierre de Moore, Convolución Maxmin, Deportista, Pretopología.

*La dirección de contacto es: Jaime Gil Lafuente, Área de Comercialización e Investigación de Mercados, Universitat de Barcelona, Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials, Av. Diagonal, 690, 08034-Barcelona, e-mail: j.gil@ub.edu

Key Words:

Maxmin Convolution, Moore's Closing, Sportman, Pretopology.

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de los últimos años, han sido aportados distintos algoritmos (Gil-Lafuente, 2002) que han permitido enfrentarse con éxito a distintos problemas específicos, en los que se arriesgan fuertes sumas de dinero. Entre ellos destacan los que tienen como finalidad el fichaje de un jugador de fútbol o de baloncesto, ligado siempre a una importante inversión.

Pero existen otros ámbitos del deporte que, sino de una manera directa si indirectamente, ejercen una fuerte incidencia en los resultados económicos de una sociedad deportiva. Nos referimos a los éxitos en las contiendas que deben conducir al podium de los campeones.

No olvidemos que las victorias o derrotas forman parte del «producto deportivo» y sólo los grandes resultados llevarán a éxitos comerciales (Bolle y Desbordes, 2005). Por ello, conviene detenernos en configurar grupos de deportistas capaces de llevar a su club a los más altos niveles deportivos, empleando, a su vez, métodos que permitan gestionarlos antes, durante y después de cada partido. De ello depende, en gran parte, los ingresos de la entidad.

2. PLANTEAMIENTO TEÓRICO

Para buscar los automatismos necesarios que hagan viable el algoritmo que deseamos emplear es conveniente acercarnos a la racionalidad teórica de unos elementos capaces de sustentar con solidez las estructuras formales sobre las que hemos asentado nuestra propuesta. Para ello se ha recurrido a la pretopología combinatoria (Kaufmann, 1983).

Iniciamos este trabajo fijando la atención en un conjunto de n deportistas que forman parte de la plantilla de un club:

$$D = \{D_i \, / \, i = 1, 2, ..., n\}$$

Estos deportistas pueden poseer un conjunto de m atributos (cualidades, características o singularidades):

$$E = \{ \chi_j \, / \, j = 1, 2, ..., m\},$$

Cada deportista D_i puede ser descrito a través de un subconjunto booleano del referencial E de sus atributos:

$$P_i = \{ \chi_j \in E, \mu_{Pi} (\chi_j)\}, \qquad i = 1, 2, ..., n \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

en donde $\mu_{Pi} (\chi_i) \in \{0,1\}$

Se dispone, así, de un referencial de subconjuntos booleanos:

$$S = \{ P_i \, / \, i = 1, 2, ..., n\}$$

en los que cada P_i describe su correspondiente deportista $D_{i.}$

A partir del conjunto de deportistas, cada uno de ellos descrito por sus atributos, se obtiene el conjunto de sus partes o «power set» (Clebsch, A., et al., 1869), que se designa por P(S):

$$P(S) = \{\varnothing, \{P_1\}, \{P_2\}, ..., \{P_n\}, \{P_1, P_2\}, \dots, \{P_{n-1}, P_n\}, ..., S\}$$

Este «power set» recoge todas las agrupaciones posibles de deportistas considerados de uno en uno, de dos en dos, ..., hasta la agrupación de todos ellos que se expresa por el conjunto S.

Expresamos los 2^n elementos del «power set», de la siguiente manera:

$$P(S) = \{A_k \,/\, k = 1, 2, ..., 2^n\}, \qquad A_1 = \varnothing, A_{2^n} = S$$

Una vez puesto de manifiesto el sentido que adquiere el referencial S y el conjunto P(S) vamos a recordar la axiomática de la pretopogía adaptada a nuestras necesidades.

3. AXIOMAS PARA UNA PRETOPOLOGÍA

Se dice que una aplicación funcional Γ de P(S) en P(S) es una pretopogía de S si, y solamente si, cumple los siguientes axiomas (Gil Aluja, 2001):

1) $\Gamma \; \varnothing = \varnothing$
2) $\forall \; A_k \in P(S)$

   $A_k \subset \Gamma \; A_k$

Como es conocido, este segundo axioma comporta:

$$\Gamma(S) = S$$

Cuando deseamos trasladar esta idea a la representación de un fenómeno de gestión deportiva como el que nos ocupa, debemos interpretar la «aplicación funcional» en un sentido tal que pueda incluir la noción de relación. Diremos, entonces, que la pretopología exige, en este segundo axioma, que una agrupación de deportistas está relacionada con otra que comprende, por lo menos, a los mismos deportistas.

La aplicación funcional Γ para todos los elementos de P(S) se llama «aplicación adherente» o «adherencia». De igual manera, a Γ se le puede asociar una «aplicación interior» o «interior» δ, definida por (Gil Aluja y Gil Lafuente, 2007):

$$\forall \; A_k \in P(S):$$

$$\text{ä}A_k = \overline{\Gamma \overline{A}}_k$$

en donde $\overline{A}_k$ es el complemento de $A_{k.}$ En otras palabras $\overline{A}_k$ representa la agrupación de aquellos deportistas que no se hallan en el grupo designado por $A_{k.}$

Llegamos, así, a las definiciones de cerrados y de abiertos (Höhle y Sostek, 1999).

Se dice que A_k es un cerrado de una pretopología cuando:

$$A_k = \Gamma\, A_k$$

También se dice que A_k es un abierto de una pretopología cuando:

$$A_k = \delta\, A_k$$

En uno y otro caso se cumple que un grupo de deportistas se halla relacionado con el propio y mismo grupo.

Hasta aquí la noción más amplia de pretopología. Al añadirle nuevos axiomas van apareciendo nuevos espacios pretopológicos con características y propiedades de especial interés para la descripción y tratamiento de nuestro problema. Así, cuando se une a los dos axiomas anteriores un tercero nos situamos en la pretopología isotona con la siguiente axiomática:

1) $\Gamma\, \emptyset = \emptyset$
2) $\forall\ A_k \in P(S)$:
   $A_k \subset \Gamma\, A_k$, extensividad
3) $\forall\ A_k, A_l \in P(S)$:
   $(A_k \subset A_l) \Rightarrow (\Gamma A_k \subset \Gamma A_l)$, isotonía

Este nuevo axioma que expresa la isotonía pone en evidencia que si un grupo de deportistas incluye a otro grupo (igual o más reducido) aquel grupo con el que tiene relación también incluye el grupo con el que el segundo se halla relacionado. Así, por ejemplo si los deportistas $\{P_2, P_4, P_5\}$ se hallan relacionados con el grupo formado por $\{P_2, P_3, P_4, P_5\}$ entonces $\{P_2, P_5\}$ deberá estar relacionado con un grupo que comprenda como máximo los deportistas $\{P_2, P_3, P_4, P_5\}$.

Dentro de las pretopologías isótonas prestaremos atención a una de ellas. Aquella que cumple la propiedad de idempotencia[1], la cual podemos presentar como cuarto axioma.

4) $\Gamma\ (\Gamma A_k) = \Gamma A_k$, idempotencia

Pues bien, estos cuatro axiomas proporcionan un cierre de Moore (Kaufmann, 1977), diríamos que por exceso, ya que, además, posee la propiedad $\Gamma \emptyset = \emptyset$, no exigida en la axiomática de este cierre.

El cierre de Moore va a ocupar un lugar relevante en el proceso de elaboración del algoritmo para el tratamiento de problemas de agrupaciones máximas, paso previo a la determinación del deportista que debe sustituir a otro en actividad o en juego. Ello nos obliga a establecer un camino que permita hallar los cierres de Moore a partir de un concepto suficientemente asequible para ser hallado fácilmente en las informaciones normalmente disponibles en un momento cualquiera de una contienda deportiva.

[1] Nuestro interés por la **idempotencia** se justifica por cuanto los elementos de P (S) que son objeto de relación con otro elemento de P (S) se hallan, del mismo modo, relacionados consigo mismo. Son los llamados **cerrados**.

Cuaderno de Gestión Vol. 8. Nº 1 (Año 2008), pp. 39-58 ISSN: 1131 - 6837

4. OBTENCIÓN DEL CIERRE DE MOORE

Amparándonos en este pragmatismo hemos encontrado un concepto que parece se adapta bien a estas necesidades que acabamos de poner en evidencia. Se trata de la noción de grafo.

En efecto, es conocida la utilidad de la teoría de grafos (Roy, 1969) para desarrollar esquemas en los que la relación juega un papel fundamental. Y ahora esta categoría la adquiere la relación que deseamos establecer: entre los deportistas, por un lado, y sus posibles atributos, por otro.

Se acostumbra a formalizar un grafo en forma matricial o bien en forma sagitada. Nos limitaremos, aquí, a la primera de estas formas.

Vamos a partir de una relación [R] entre los elementos de un referencial de deportistas $D = \{D_i / i = 1,2,\ldots, n\}$ y del referencial de atributos $E =\{ \chi_j / j = 1,2,\ldots, m\}$.

$$[R] = D \text{ x } E$$

a) Con esta información se define un grafo booleano de la siguiente manera:

$$[R] = \{ (D_i, \chi_j) \subset E \text{ x } D / \mu_R (D_i, \chi_j) \in \{0, 1\}\}$$

Cuando este grafo se representa en forma de matriz, cada casilla pone de manifiesto, mediante unos y ceros, si el deportista posee o no el atributo correspondiente.

b) Se definen los predecesores y sucesores de D_i de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} \chi_j \text{ es un sucesor de } D_i \\ D_i \text{ es un predecesor de } \chi_j \end{array}\right\} \quad \text{si: } (D_i, \chi_j) \in [R]$$

Estas definiciones permiten hallar la conexión de la derecha $R^+ A_k$ (Gil Aluja, 1999), es decir, la aplicación funcional R^+ de P (S) en T (E) tal que[2], para todo $A_k \in$ P (S), R^+ es el subconjunto de elementos de E que son sucesores de todo elemento que pertenece a A_k. En otras palabras, para cada grupo de deportistas A_k se tienen todos los grupos de atributos que son poseídos por todos ellos. Se escribe:

$$R^+ A_k = \{ \chi_j \in E / (D_i, \chi_j) \in [R], \forall D_i \in A_k \}$$

$$R^+ \varnothing = E$$

así como la conexión a la izquierda $R^- B\ell$ (Gil Aluja, 1999), como la aplicación funcional[3] R^- de P (S) en T (E) tal que para todo $B\ell \in$ T (E), R^- es el subconjunto de elementos de D que son predecesores de todo elemento perteneciente $B\ell \in$ T(E). De esta manera cada

[2] T(E) representa el «power set» del conjunto de los atributos $E = \{ \chi_j / j = 1, 2, \ldots, m\}$

[3] $B\ell,\ \ell = 1, 2, \ldots 2^m$ expresa uno de los elementos del «power set» de $E = \{ \chi_j / j = 1, 2, \ldots, m\}$, conjunto de atributos, que hemos designado por T(E)

ISSN: 1131 - 6837 *Cuaderno de Gestión* Vol. 8. Nº 1 (Año 2008), pp. 39-58

grupo de atributos quedará relacionado con todos los grupos de deportistas que los poseen. Se expresa:

$$R^- B\ell = \{ D_i \in D / (D_i, \chi_j) \in [R], \forall \chi_j \in B\ell \}$$

$$\text{con } R^- \varnothing = D$$

c) La conexión a la derecha $R^+ A_k$ y la conexión a la izquierda $R^- B\ell$ pueden hallarse directamente por simple lectura en la relación [R] de la siguiente manera:

$$\forall \quad D_i \subset A_k \in P(S):$$

$$R^+ A_k = \bigcap_{D_i \subset A_k} R^+ \{D_i\}$$

$$R^- B\ell = \bigcap_{\chi_j \subset B\ell} R^- \{\chi_j\}$$

Estas expresiones muestran que basta con observar para cada grupo de filas (columnas) aquellas columnas (filas) en las que existen unos en las casillas de todas las filas (columnas) que forman el grupo.

d) Las convoluciones maxmin (Kaufmann, 1977) de R^- con R^+ y de R^+ con R^- proporcionan los dos cierres de Moore correspondientes a la relación o grafo [R]. Se escribe:

$$M^{(1)} = R^- \circ R^+$$
$$M^{(2)} = R^+ \circ R^-$$

en donde $M^{(1)}$ y $M^{(2)}$ son los cierres de Moore[4].

Uno de estos cierres expresa todas las relaciones de cada grupo de deportistas con los otros grupos de deportistas que poseen los mismos atributos y el otro las relaciones de este grupo de atributos con los otros grupos de atributos que son poseídos por los mismos deportistas.

5. LOS CERRADOS DE MOORE COMO AGRUPACIONES MÁXIMAS

Al igual que en cualquier pretopología, el conjunto de cerrados de Moore está formado por aquellos elementos para los que se cumple:

$$\forall A_k \in P(S): \quad A_k = M A_k \qquad\qquad \forall B\ell \in T(E): \quad B\ell = M B\ell$$

Los cerrados escogen para cada relación posible entre grupos de deportistas con los mismos atributos aquel en el que existen más deportistas y también para cada relación posible entre grupos de atributos con los mismos deportistas aquel en el que hay mayor número de atributos.

[4] Hemos utilizado la letra M para designar la aplicación Γ en honor a Moore

Vamos a designar (Gil Aluja, 1999, p. 205-206) por C (E, $M^{(2)}$) al subconjunto de cerrados de T(E) correspondiente al cierre de Moore $M^{(2)}$. Dado que $R^- B\ell$ es un cerrado T(E) para $M^{(2)}$, se puede escribir:

$$C(E, M^{(2)}) = \bigcup_{B\ell \in T(E)} R^- B\ell$$

y al ser $R^+ A_k$ un cerrado para $M^{(1)}$ y designar mediante C (E, $M^{(1)}$) al subconjunto de cerrados de P(S) correspondiente al cierre de Moore $M^{(1)}$, se tiene:

$$C(E, M^{(1)}) = \bigcup_{A_k \in P(S)} R^+ A_k$$

Las dos familias C (E, $M^{(1)}$) y C (E, $M^{(2)}$) son isomorfas entre sí y duales la una en relación con la otra, de naturaleza antitona. Escribimos:

$$A_k \in C(E, M^{(1)}) \Rightarrow (B\ell = R^- A_k \in C(E, M^{(2)}) \text{ y } R^+ B\ell = A_k$$
$$B\ell \in C(E, M^{(2)}) \Rightarrow (A_k = R^+ B\ell \in C(E, M^{(1)}) \text{ y } R^- A_k = B\ell$$

Estas familias de cerrados, que comprenden grupos de deportistas por un lado y grupos de atributos por el otro, se pueden asociar entre si y forman, cada una de ellas, un retículo finito. Además, como ha sido señalado, por la convolución maxmin, tanto una como otra de estas familias de cerrados proporciona las agrupaciones con el mayor número posible de elementos tanto del referencial D de deportistas como del referencial E de atributos. De esta manera, en todos los vértices de cada retículo colocaremos en uno de ellos las agrupaciones de elementos de una familia de cerrados que representan los distintos grupos máximos de deportistas con los mismos atributos y en el otro las agrupaciones de la otra familia de cerrados que ponen de manifiesto los distintos grupos máximos de atributos que son poseídos por los mismos deportistas. Este hecho reviste una capital importancia para la elaboración del algoritmo.

6. HACIA LA OBTENCIÓN DEL ALGORITMO

Es fácil de comprobar que al superponer los dos retículos se obtiene uno solo, que recoge en cada uno de los vértices la relación de las agrupaciones máximas de elementos de un conjunto D de deportistas con las agrupaciones máximas del otro conjunto E de atributos. Cuando esto sucede se dice que existe una afinidad. Este retículo establece una ordenación y estructuración de estas relaciones entre grupos máximos de deportistas y sus atributos, también máximos. En efecto, a medida que tiene lugar un desplazamiento desde el vértice inferior hacia el vértice superior, o viceversa, aumenta el número de elementos agrupados del referencial de deportistas y disminuye el número de elementos agrupados de atributos.

Si, cuando el extremo superior o inferior es distinto de (D, $\emptyset$) y el extremo inferior o superior es distinto de ($\emptyset$, E) se les añaden estos vértices nos hallamos ante un retículo de Galois (1908), que configura los dos conjuntos de cerrados de Moore que poseen como extremos superior e inferior las citadas relaciones (D, $\emptyset$), ($\emptyset$, E).

ISSN: 1131 - 6837 *Cuaderno de Gestión* Vol. 8. Nº 1 (Año 2008), pp. 39-58

Esta estructura formal amparada bajo el manto de la pretopología ha permitido elaborar el algoritmo denominado algoritmo de la correspondencia inversa máxima presentado a continuación.

– Se parte de una relación [R].
– Se elige entre D, conjunto de deportistas, y E, conjunto de atributos, aquel conjunto que posee el menor número de elementos.
– Construimos el conjunto P(D), si D es el conjunto con menos elementos. En caso contrario se construirá T(E).
– Se obtiene la «conexión derecha» R^+, es decir, para todo grupo de deportistas $A_k \in P(S)$, $R^+ A_k$ recoge los sucesores de todos los elementos que pertenecen a $A_{k,}$ lo que dará lugar a un conjunto de atributos.
– Escogemos para cada uno de los conjuntos no vacío de $R^+ A_k$, es decir de atributos, el correspondiente de A_k, es decir del grupo de deportistas que tiene el mayor número de elementos.
– Las relaciones halladas forman un retículo. Si, en su ocurrencia, se le añaden los vértices vacío-referencial, referencial-vacío, nos hallamos ante un retículo de Galois.
– Cada vértice del retículo de Galois proporciona una afinidad.

7. CONSTATACIÓN DE LA VALIDEZ DEL ALGORITMO

Procedemos, a continuación, a comprobar el funcionamiento del algoritmo propuesto en una situación real, modificada y esquematizada convenientemente para guardar la necesaria reserva a la vez que hacerla operativa a los efectos de esta presentación.

Nos situamos, para ello, en un momento del juego de un partido de fútbol en el cual la estrategia adoptada por el equipo contrario no permite desarrollar la actividad que el entrenador presumía realizar antes de formar la alineación de los jugadores que se hallan en el terreno. Se impone, entonces un cambio rápido de deportistas antes de que la derrota sea irreversible, dado que algunos de los colocados inicialmente no se desempeñan como se esperaba en relación a los atributos establecidos.

El entrenador del juego propio debería tener clara la idea de lo que debe hacerse y, por tanto, cuales deben ser los atributos de los deportistas llamados a entrar en la contienda, lo que no tiene tan claro es determinar cuales de los jugadores que se hallan en el banquillo los cumplen globalmente. La palabra globalmente exige un breve comentario. En efecto, la solución sería sencilla si sólo se demandara uno o dos atributos, pero cuando son varios e incluso bastantes, ya no lo es tanto, puesto que un deportista puede poseer dos de ellos, el otro tres (alguno común, algún otro distinto, etc.) pero es más, la urgencia de la toma de decisión y la presión ambiental pueden ser elementos nocivos para la elección basada en la intuición del momento.

Nuestra propuesta, creemos inédita, va en el camino de suministrar una ayuda rápida y razonada, basada en las informaciones acumuladas sobre los atributos de los deportistas del club, puestas permanentemente al día. Estas informaciones se introducen en la memoria de un ordenador, de manera que se pueda disponer de ellas en todo momento. Es precisamente el algoritmo propuesto quien debe recuperarlas y transformarlas en un elemento básico de la decisión, en el instante del juego en que el entrenador lo solicita.

Hechas las anteriores consideraciones, pasamos a desarrollar, tal como hemos enunciado en forma resumida, la simulación preparada para el desarrollo práctico de nuestro esquema conceptual. Para ello vamos a establecer que, además del guardameta, hay en el banquillo de reservas 4 deportistas:

$$D = \{D_i \ / \ i=1, 2, 3, 4\}$$

y para simplificar esta exposición se consideran 6 atributos

$$E = \{ \chi_j \ / \ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

que podrían ser tales como: juego de cabeza, fortaleza física, carácter ganador, buen posicionamiento en el campo, fuerte disparo a portería y liderazgo entre los deportistas.

Se suponen conocidos los subconjuntos booleanos que describen cada uno de los 4 deportistas mediante los 6 atributos:

$$S = \{P_i \ / \ i = 1, 2, 3, 4\}$$

que detallamos a continuación:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
$P_1 =$	1		1	1		1

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
$P_2 =$	1		1			1

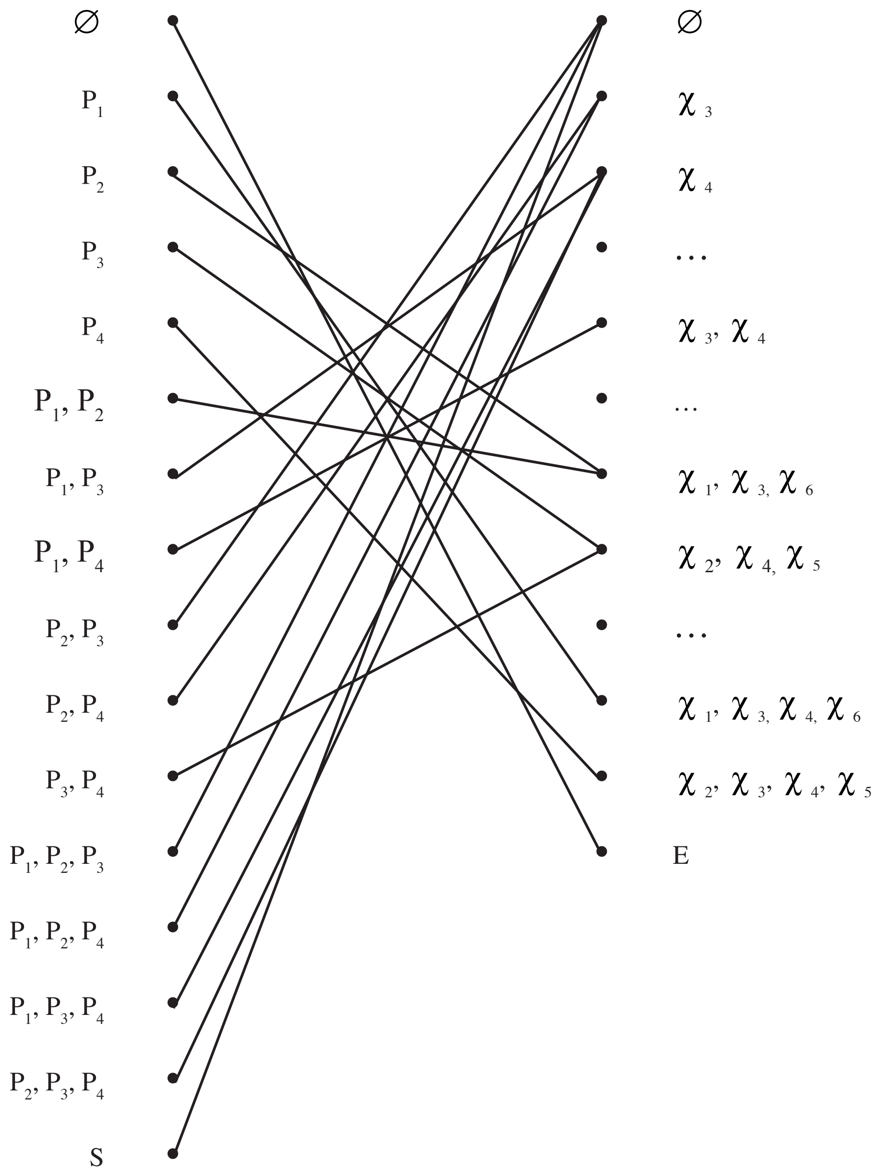
	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
$P_3 =$		1		1	1	

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
$P_4 =$		1	1	1	1	

A de esta información se construye un grafo booleano en forma matricial:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
P_1	1		1	1		1
P_2	1		1			1
P_3		1		1	1	
P_4		1	1	1	1	

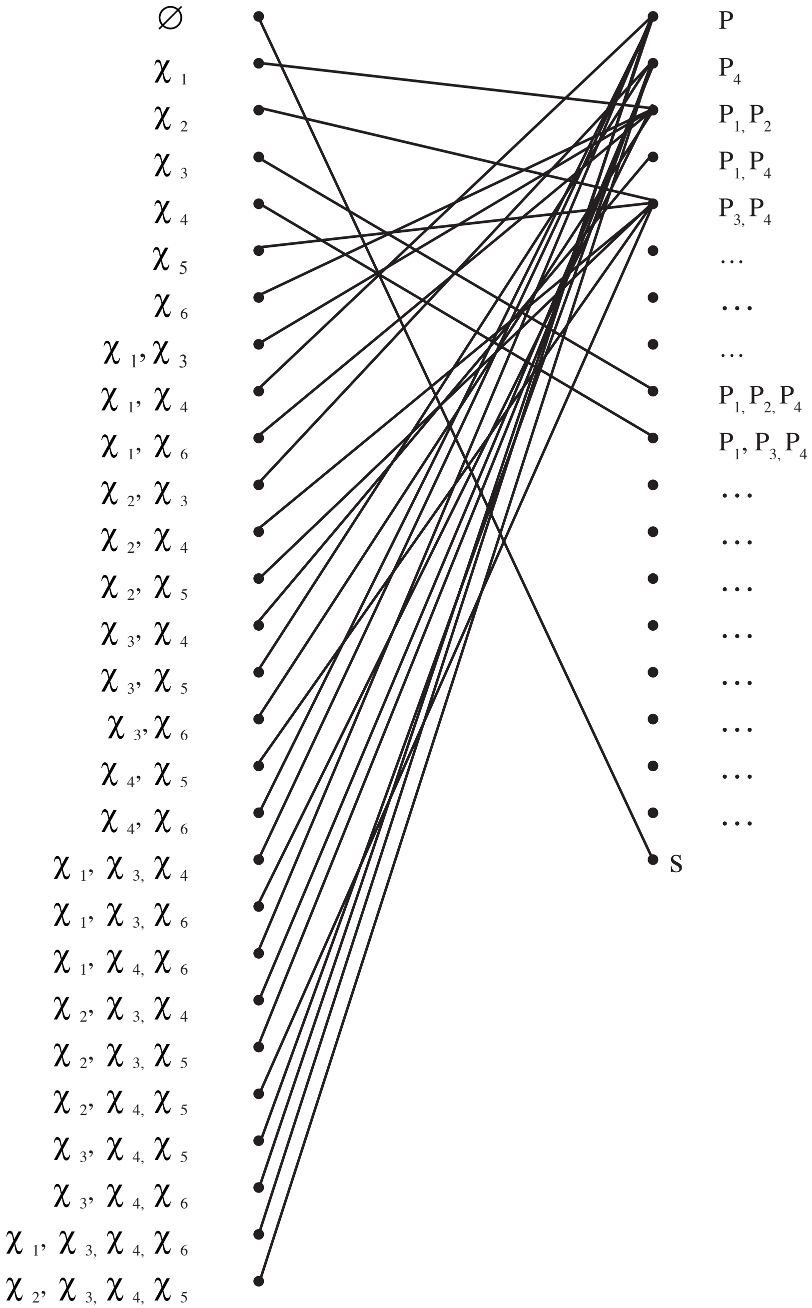
Se halla la conexión a la derecha $R^+ A_k$



Así pues:

$R^+ \varnothing = E$, $R^+ \{P_1\} = \{\chi_1, \chi_3, \chi_4, \chi_6\}$, $R^+ \{P_2\} = \{\chi_1, \chi_3, \chi_6\}$, $R^+ \{P_3\} = \{\chi_2, \chi_4, \chi_5\}$, $R+ \{P_4\} = \{\chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}$, $R+ \{P_1, P_2\} = \{\chi_1, \chi_3, \chi_6\}$, $R+ \{P_1, P_3\} = \{\chi_4\}$, $R+ \{P_1, P_4\} = \{\chi_3, \chi_4\}$, $R+ \{P_2, P_4\} = \{\chi_3\}$, $R+ \{P_3, P_4\} = \{\chi_2, \chi_4, \chi_5\}$, $R+ \{P_1, P_2, P_4\} = \{\chi_3\}$, $R+ \{P_1, P_3, P_4\} = \{\chi_4\}$

Para la conexión a la izquierda $R^{-} B\ell$ se hará[5]:

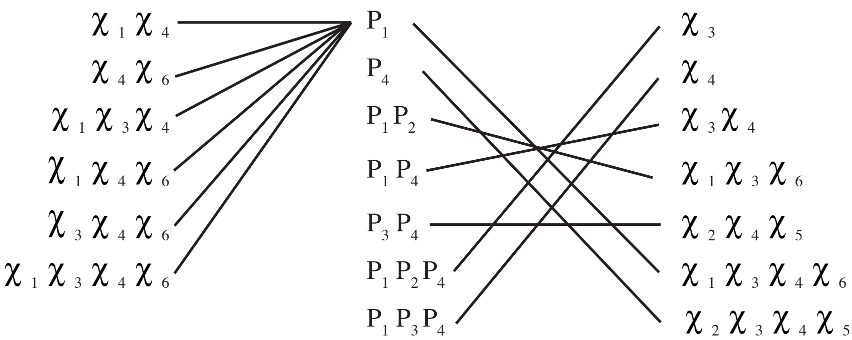


[5] Unicamente hacemos explícitas aquellas fuentes cuyas aplicaciones son no vacías

Que se puede presentar de la siguiente manera:

$R^- \varnothing = S$, $R^-\{\chi_1\} = \{P_1, P_2\}$, $R^-\{\chi_2\} = \{P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_3\} = \{P_1, P_2, P_4\}$, $R^-\{\chi_4\} = \{P_1, P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_5\} = \{P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_5\} = \{P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_6\} = \{P_1, P_2\}$, $R^-\{\chi_1, \chi_3\} = \{P_1, P_2\}$, $R^-\{\chi_1, \chi_4\} = \{P_1\}$, $R^-\{\chi_1, \chi_6\} = \{P_1, P_2\}$, $R^-\{\chi_2, \chi_3\} = \{P_4\}$, $R^-\{\chi_2, \chi_4\} = \{P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_2, \chi_5\} = \{P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_3, \chi_4\} = \{P_1, P_4\}$, $R^-\{\chi_3, \chi_5\} = \{P_4\}$, $R^-\{\chi_3, \chi_6\} = \{P_1, P_2\}$, $R^-\{\chi_4, \chi_5\} = \{P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_4, \chi_6\} = \{P_1\}$, $R^-\{\chi_1, \chi_3, \chi_4\} = \{P_1\}$, $R^-\{\chi_1, \chi_3, \chi_6\} = \{P_1, P_2\}$, $R^-\{\chi_1, \chi_4, \chi_6\} = \{P_1\}$, $R^-\{\chi_2, \chi_3, \chi_4\} = \{P_4\}$, $R^-\{\chi_2, \chi_3, \chi_5\} = \{P_4\}$, $R^-\{\chi_2, \chi_4, \chi_5\} = \{P_3, P_4\}$, $R^-\{\chi_3, \chi_4, \chi_5\} = \{P_4\}$, $R^-\{\chi_3, \chi_4, \chi_6\} = \{P_1\}$, $R^-\{\chi_1, \chi_3, \chi_4, \chi_6\} = \{P_1\}$, $R^-\{\chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\} = \{P_4\}$

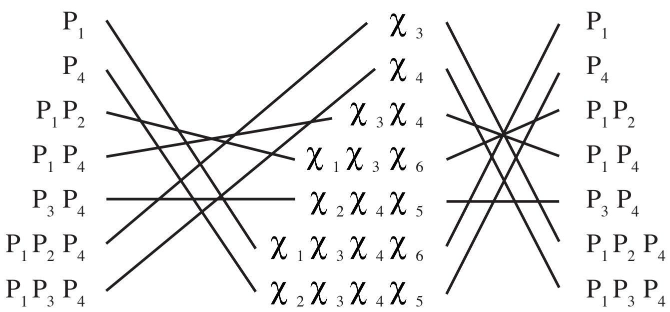
La convolución maxmin $R^- B\ell$ o $R^+ A_k$ proporciona[6]:



Y de ahí los cerrados, para los que se cumple: $B\ell = M\, B\ell$:

$$C(E, M^{(2)}) = \{\varnothing, \chi_3, \chi_4, \chi_3\chi_4, \chi_1\chi_3\chi_6, \chi_2\chi_4\chi_5, \chi_1\chi_3\chi_4\chi_6, \chi_2\chi_3\chi_4\chi_5, E\}$$

Asimismo, la convolución maxmin R^+A_k o R^-B_l dará lugar a:

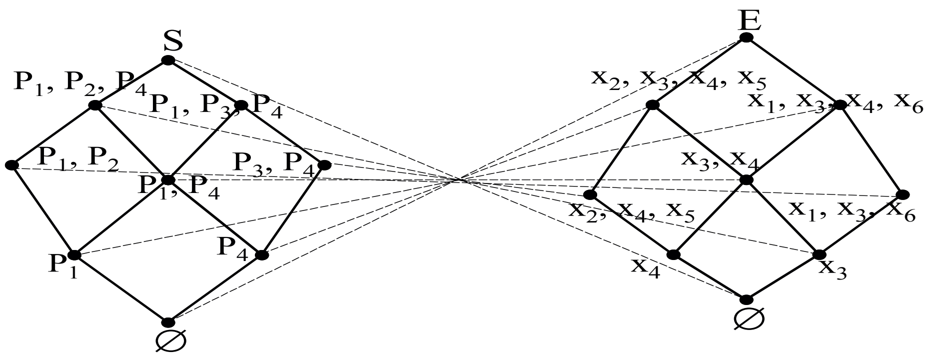


[6] De la conexión a la izquierda $R^- B\ell$ solo hemos representado a título ilustrativo, los arcos que confluyen en el vértice P_1

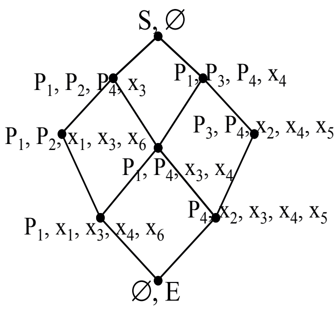
Hemos representado, únicamente, las convoluciones que han dado lugar a los cerrados, en los que $A_k = M\,A_k$. Se escribe:

$$C\,(S, M^{(1)}) = \{\ \emptyset, P_{1,} P_{4,}\ P_1 P_{2,}\ P_1\ P_{4,}\ P_3 P_{4,}\ P_1\ P_2 P_{4,}\ P_1\ P_3 P_{4,} S\ \}$$

Basta una simple mirada a estas dos últimas representaciones gráficas para observar que las dos familias tienen el mismo cardinal, son duales de naturaleza antitona. Al representar los retículos veremos también que son isomorfos:



Al superponer los dos retículos se halla uno solo en el que cada vértice expresa para cada grupo de deportistas los atributos que poseen todos los componentes del grupo.



Dado que este retículo posee, ya, como vértice superior S, $\emptyset$ y como vértice inferior $\emptyset$, E nos hallamos ante el retículo de Galois. Las afinidades se hallan, entonces, estructuradas y ordenadas.

El objetivo ha sido alcanzado siguiendo el proceso que el desarrollo teórico nos ha marcado. Sin embargo las necesidades prácticas aconsejan elaborar un procedimiento operativo que va a venir de la mano del algoritmo propuesto. Seguiremos, pues, las fases que señala el algoritmo.

Se dispone de la relación [R] y del conjunto S que posee un menor numero de elementos. Su «power set» es:

$$P(S) = \{\emptyset, P_1, P_2, P_3, P_4, P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_2P_3, P_2P_4, P_3P_4, P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_1P_3P_4, P_2P_3P_4, S\}$$

Reproduciremos, en doble columnado, la conexión a la derecha $R^+ A_k$, que ya ha sido elaborado en las páginas anteriores:

$$\begin{aligned}
\emptyset &\longrightarrow E \\
P_1 &\longrightarrow \chi_1\chi_3\chi_4\chi_6 \\
P_2 &\longrightarrow \chi_1\chi_3\chi_6 \\
P_3 &\longrightarrow \chi_2\chi_4\chi_5 \\
P_4 &\longrightarrow \chi_2\chi_3\chi_4\chi_5 \\
P_1P_2 &\longrightarrow \chi_1\chi_3\chi_6 \\
P_1P_3 &\longrightarrow \chi_4 \\
P_1P_4 &\longrightarrow \chi_3\chi_4 \\
P_2P_3 &\longrightarrow \emptyset \\
P_2P_4 &\longrightarrow \chi_3 \\
P_3P_4 &\longrightarrow \chi_2\chi_4\chi_5 \\
P_1P_2P_3 &\longrightarrow \emptyset \\
P_1P_2P_4 &\longrightarrow \chi_3 \\
P_1P_3P_4 &\longrightarrow \chi_4 \\
P_2P_3P_4 &\longrightarrow \emptyset \\
S &\longrightarrow \emptyset
\end{aligned}$$

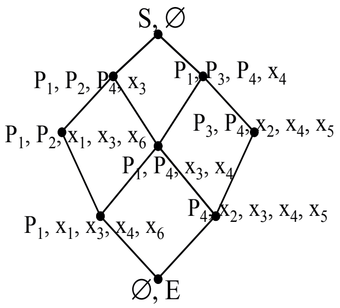
Cuando en la columna de la derecha existen dos o más grupos con los mismos elementos, se escoge en la columna de la izquierda aquel grupo con más elementos. Así, para χ_3 de la columna de la derecha se elige, entre $\{P_2 P_4\}$ y $\{P_1 P_2 P_4\}$, el grupo $\{P_1 P_2 P_4\}$ por cuanto contiene más deportistas. Se hace lo mismo con χ_4, $\chi_1\chi_3\chi_6$ y $\chi_2\chi_4\chi_5$:

Se llega, así, al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\chi_3 &\longrightarrow P_1P_2P_4 \\
\chi_4 &\longrightarrow P_1P_3P_4 \\
\chi_3\chi_4 &\longrightarrow P_1P_4 \\
\chi_1\chi_3\chi_6 &\longrightarrow P_1P_2 \\
\chi_2\chi_4\chi_5 &\longrightarrow P_3P_4 \\
\chi_1\chi_3\chi_4\chi_6 &\longrightarrow P_1 \\
\chi_2\chi_3\chi_4\chi_5 &\longrightarrow P_4
\end{aligned}$$

Cuaderno de Gestión Vol. 8. Nº 1 (Año 2008), pp. 39-58 ISSN: 1131 - 6837

Se añade el vacío de deportistas y referencial de atributos $\varnothing$, E y el referencial de deportistas y vacío de atributos S, $\varnothing$ y se construye el correspondiente retículo de Galois, ya conocido:



Realizada, ya, la descripción de algoritmo y obtenido el resultado en forma de retículo veamos, finalmente, su operatividad.

9. LA DECISIÓN A PARTIR DEL RESULTADO DEL ALGORITMO

Las bases teóricas sobre las que se ha elaborado el algoritmo, descritas en las primeras fases de este trabajo, avalan el carácter óptimo de los resultados obtenidos en su aplicación. Pero lo que más distingue nuestra propuesta y la hace, a nuestro entender, preferible a otros procesos de segmentación y agrupación es la disponibilidad por parte del sujeto decisor de una información valiosísima: cada agrupación homogénea de deportistas lleva aparejada, explícitamente, el conjunto de atributos poseídos por todos ellos. De esta manera, cuando el responsable del juego desea colocar en el terreno a un deportista que posea determinados atributos bastará con teclearlos en el ordenador para que aparezcan en pantalla aquel o aquellos que los poseen. Si se da la circunstancia que es más de uno, podrá elegir entre ellos o bien probar si existe otro u otros con algún atributo complementario interesante para el objetivo buscado. Así, en la anterior aplicación, se puede observar que si el director del juego desea cambiar a un deportista que a su entender no realiza las funciones encomendadas y quiere sustituirlo por otro que posee los atributos x_1, x_3, x_6 podrá elegir entre P_1 y P_2. Puede que en otro caso, desee conseguir que posea otro atributo más, concretamente x_4, pero entonces sólo podrá saltar al terreno de juego P_1. Se ha conseguido, pues, el objetivo buscado.

El hecho de poder presentar las agrupaciones de afinidad mediante un retículo de Galois proporciona un beneficio adicional no despreciable. Mediante el retículo se dispone de manera visual, clara y simultánea de todas, absolutamente todas las agrupaciones óptimas de deportistas acompañadas, cada una de ellas, por los grupos de atributos poseídos por todos los deportistas del grupo. De esta manera, una simple mirada al retículo proporciona al decisor la totalidad de posibilidades de elección a lo largo de la duración de la contienda deportiva.

No nos cabe la menor duda sobre la posible eficacia de este algoritmo en otros ámbitos de la gestión de sociedades y entidades deportivas. A título indicativo señalaríamos: la agrupación de deportistas en las distintas habitaciones de los hoteles de concentración (escogiendo atributos de compatibilización); búsqueda de nuevos deportistas cuando la entidad o club no dispone de jugadores con ciertos atributos, para sólo citar un par de ejemplos.

10. **A MODO DE RESUMEN**

El trabajo presentado ha sido concebido en tres partes, principalmente. En la primera de ellas hemos intentado sintetizar los aspectos formales sobre los que se ha constituido, después, el algoritmo. Para ello se ha recurrido a la axiomática de la pretopología combinatoria, desarrollando los aspectos que pudieran llevarnos a los esquemas deseados. Nos ha sido de extraordinaria utilidad los trabajos de Moore, dado que a partir de la noción de cerrados y de sus propiedades creemos haber llegado a las puertas de nuestro objetivo.

Una segunda fase permite entrar de pleno en el núcleo centra de este trabajo: la construcción de un algoritmo. Para ello se establece un paralelismo entre el desarrollo teórico escogido y cada paso a seguir en cada momento de la realidad. Resulta, pues, necesario llevar a cabo ciertas modificaciones para facilitar la fluidez y simplicidad, en vistas a su fácil aplicabilidad. Una muestra de cuanto acabamos de señalar se tiene cuando después de hallar la conexión a la derecha no se exige la obtención de la conexión a la izquierda para realizar posteriormente la convolución maxmin de ambas (a efectos de optimización) sino que nos limitamos a escoger para los elementos de la aplicación que se repiten aquel elemento de la fuente con mayor número de componentes. El resultado es, evidentemente, el mismo.

La tercera y última fase se compone de dos partes. La primera consiste en un «test» del algoritmo en un supuesto real simplificado. A partir de unas informaciones iniciales dadas van utilizándose los dispositivos marcados por el algoritmo hasta llegar a la solución final con la construcción del retículo de Galois. En una segunda parte se razonan las ventajas de este algoritmo en relación con los existentes. Se insiste en su rapidez y facilidad de utilización cuando se recurre a un ordenador.

Como colofón desearíamos poner en evidencia que si bien en ese trabajo hemos partido de informaciones expresadas en términos booleanos y que, por ello, los subconjuntos que describen cada uno de los deportistas a través del conjunto de sus atributos tiene esta naturaleza, con las ventajas e inconvenientes que ello comporta. Consideramos que no va a resultar difícil convertir este esquema para hacerlo válido en el ámbito de la incertidumbre, con la descripción de los deportistas mediante subconjuntos borrosos o Φ-borrosos, creando unos umbrales a partir de los cuales se considera la posesión de cada atributo.

Cuaderno de Gestión Vol. 8. Nº 1 (Año 2008), pp. 39-58 ISSN: 1131 - 6837

11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADÁMEK, J., HERRLICH, H. Y STRECKER, G.E. (1990). «Abstract and concrete categories the joy of cats». New York, Wiley.

BEER, G.: «TOPOLOGIES ON CLOSED AN CLOSED CONVEX SETS». *KLUWER ACADEMIC PULISHERS*, DORDRECHT.

BELMANDT, Z. Y FORTET, R.M. (1993). «Manuel de prétopologie et ses applications sciences humaines et sociales, réseaux, jeux, reconnaissance des formes, processus et modèles, classification, imagerie, mathématiques». *Interdisciplinarité et nouveaux outils*. Paris, Hermès.

BOLLE, G. Y DESBORDES, M. (2005). «Marketing et football: une perspective internationale». Paris, PUS (Presses Universitaires du Sport).

BOOLE, G. (1948). «The mathematical analysis of logic». Philosophical Library.

BOOLE, G. (1951). «An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities». New York, Dover Publications.

BRÜMMER, G.C.L. (1984). «Topological categories». Cape Town, Dept., Univ, (páginas 27 – 41).

CLEBSCH, A., ET AL. (1869). *Mathematische Annalen*. Berlin [etc.], J. Springer [etc.].

DAS, P. (1999). «A fuzzy topology associated with a fuzzy finite state machine». *Fuzzy Sets and Systems*. 105, (páginas 469 – 479).

DURU, G. (1977). «Nouveaux e´ le´ments de pretopologie». Besançon, *Faculté de droit et des sciences e´conomiques et politiques*.

ERTÜRK, R. (1995). «Some results on fuzzy compacts spaces». *Fuzzy Sets and Systems*. 70, (páginas 107 – 112).

ETKIN, J. R. (2005). «Gestio´n de la complejidad en las organizaciones la estrategia frente a lo imprevisto y lo impensado». Buenos Aires, Argentina, Granica.

FRELICOT, C., LEBOURGEOIS, F. Y DE LYON, I. (1998). «A pretopology-based supervised pattern classifier». *Proceedings*. 1, (páginas 106 y siguentes).

GALOIS, E. (1908). «Manuscrits de Évariste Galois» *[Papiers et écrits mathématiques.]. University of Michigan Historical Mathematics Collection*. Paris, Gauthier-Villars.

GARCI´A MA´YNEZ, A. (1971). «Introduccio´n a la topologi´a de conjuntos». *Serie Sociedad Matema´tica Mexicana*, 4. México, Editorial Trillas.

GIL ALUJA Y GIL LAFUENTE, A.M. (2007). «Algoritmos para el tratamiento de fenómenos económicos complejos. Bases, desarrollos y aplicaciones». Madrid, Ramón Areces.

GIL ALUJA, J. (1999). «Elements for a theory of decision in uncertainty». *Applied optimization*, v. 32. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

GIL ALUJA, J. (2001). «La pretopología en la gestión de la incertidumbre». *Discurso de investidura como Doctor «Honoris Causa» por la Universidad de León*. Publ. Universidad de León.

GIL LAFUENTE, J. (2001). «Model for the homogeneous gruping of the sales force». *Proceedings del Congreso M.S.'2001.* Changsha (Hunan) R.P. China.

GIL LAFUENTE, J. (2002). «Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva». Vigo, Milladoiro.

GILES, J.R. (1987). «Introduction to the análisis of metric». Cambridge, Cambridge.

HÖHLE, U. (2001). «Many valued topology and its applications». Boston, Kluwer Academic Publishers.

HÖHLE, U., SOSTEK, A.: «AXIOMATIC FOUNDATIONS OF FIXED-BASIS FUZZY TOPOLOGY» EN HÖHLE, U., Y RODABAUGH, S.E. (1999). *Mathematics of fuzzy sets logic, topology, and measure theory*. Boston, Kluwer Academic Publishers, (páginas 123 – 272).

HUTTENLOCHER, D.P., KLANDERMAN, G.A., RUCKLIDGE, W.J. (1992). Comparing images using the Hausdorff distance, *IEEE Trans. Pattern Anal Mach Intelligence* 15, (páginas 850 – 863).

JAMESON, G.J.O. (1974). «Topology and normed spaces. London», Chapman and Hall; [Distributed by Halsted Press], New York.

JOHNSTONE, P.T. (1982). «Stone spaces». *Cambridge studies in advanced mathematics*, 3. Cambridge [Cambridgeshire], Cambridge University Press.

KAUFMANN, A. (1977). «Introduction a` la the´orie des sous-ensembles flous a` l'usage des inge´nieurs. applications a` la linguistique, a` la logique et a` la se´mantique». *4 Compléments et nouvelles applications*. Paris, Masson.

KAUFMANN, A. (1983). «Prétopologie ordinaire et prétopologie floue». *Note de Travail* 115. La Tronche.

KAUFMANN, A. Y GIL ALUJA, J. (1991). «Selection of affinities by means of fuzzy relations and Galois latices». *Proceedings dek XI Euro O.R. Congress*. Aachen.

KHEDR, F.H., ZEYADA, F.M., & SAYED, O.R. (2001). «On separation axioms in fuzzifying topology». *Fuzzy Sets and Systems*. 119, (páginas 439 – 458).

KISIELEWICZ, M. (1991). «Differential inclusions and optimal control». Dordrecht, Kluwer Academic.

KURATOWSKI, K. (1972). «Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos y a la topología». Vicens Vives. Barcelona.

LOWEN, R. (1978). «A comparison of different compactness notions in fuzzy topological spaces». *J. Math Anal Appl. 64*, (páginas 446 – 454).

MALIK, D.S., & MORDESON, J.N. (2000). «Fuzzy discrete structures». Heidelberg, Physica-Verlag.

MARTIN, H.W. (1980). «Weakly induced fuzzy topological spaces». *J. Math. Anal Appl.* 78, (páginas 634 – 639).

MENGER K. (1942). «Statistical Metrics». *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 28, (páginas 535 – 537).

MUNROE, M. E. (1953). «Introduction to measure and integration». *Addison-Wesley mathematics series*. Cambridge, Mass, Addison-Wesley.

PONSARD, C. (1969). «Un Modèle topologique d'équilibre économique interrégional». Paris, Dunod.

PRALONG, G., PRALONG, G., & PRALONG, G. (1987). «Affaiblissement et extension de la structure d'espace topologique». *Working papers / Institut des sciences e´conomiques et sociales, Universite´ de Fribourg*, (páginas 111 y siguientes).

QIU, D. (2004). «Fuzzifying topological linear spaces». *Fuzzy Sets and Systems*. 147, (páginas 249 – 272).

RADABAUGH, S. E. (1980). «The Hausdorff separation axiom for fuzzy topological spaces». *Toppology Appl*. 11, (páginas 319 – 334).

ROY, B. (1970). «Procédures d'exploration P.S.E.P. et description segmentée». Paris, Dunod.

ROY, B. Y HORPS, M. (1969). «Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales». Paris, Dunod.

SAPENA, A. (2001). «A contribution to the study of fuzzy metric spaces». *Appl. Gen. Topology* 2, (páginas 63 – 76).

SUGENO, M. (1977). «Fuzzy measures and fuzzy integrals, a survey». En Gupta M.M., Saridis, G.N. y Gaines, B.R. (Eds.): *Fuzzy autómata and proceses*. North-Holland Ámsterdam.

SUTHERLAND, W.A. (1987). «Introduction to metric and topological spaces». *Oxford science publications*. Oxford, Clarendon Press.

VEERAMANI, P. (2001). «Best approximation in fuzzy metric spaces». *J. Fuzzy. Math* 9, (páginas 75 – 80).

XIAO, J. Y ZHU, X. (2002). «On linearly topological structure and property of fuzzy normed linear space». *Fuzzy Sets and Systems*. 125, (páginas 153 – 161).

XIAO, J.Z. Y ZHU, X.H. (2004). «Topological degree theory and fixed point theorems in fuzzy normed space». *Fuzzy Sets and Systems*. 147, (páginas 437 – 452).

YING, M. S. (1991). «A new approach to fuzzy topology (I)». *Fuzzy Sets and Systems* 39 (3), (páginas 303 – 321).

ZADEH, L. (1965). «Fuzzy Sets». *Information and Control*, 8 de Junio.

ZIMMERMANN, H. J. (1978). «Results of empirical studies in fuzzy sets theory» en KLIR, G.J.: INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED GENERAL SYSTEMS RESEARCH y KLIR, G.J. *Applied general systems research recent developments and trends : [proceedings of the NATO international conference held in Binghamton, New York, August 15-19, 1977, sponsored by the NATO Special Program Panel on Systems Science*. NATO conference series : II, Systems science, v. 5. New York, Plenum Press.

ZIMMERMANN, H.J. (1985). «Fuzzy set theory and its applications». *International series in management science/operations research*. Boston, Kluwer-Nijhoff Pub.