PARIS SCHOOL OF ECONOMICS
ECOLE D'ECONOMIE DE PARIS

WORKING PAPER N° 2011 - 03

Optimisation de l'entretien et de la régénération d'une infrastructure : exploration d'hypothèses

Marc Gaudry

Emile Quinet

Codes JEL: C61, D61, D92, H54, R41, R48
Mots-clés : optimisation inter-temporelle, analyse coût-bénéfice, programmation dynamique, entretien, régénération, entretien d'infrastructure

PARIS-JOURDAN SCIENCES ECONOMIQUES
48, BD JOURDAN – E.N.S. – 75014 PARIS
TÉL. : 33(0) 1 43 13 63 00 – FAX : 33 (0) 1 43 13 63 10
www.pse.ens.fr

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE – ECOLE DES HAUTES ETUDES EN SCIENCES SOCIALES
ÉCOLE DES PONTS PARISTECH – ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE – INSTITUT NATIONAL DE LA RECHERCHE AGRONOMIQUE

Optimisation de l'entretien et de la régénération d'une infrastructure : exploration d'hypothèses

Marc Gaudry[1] et Émile Quinet[2]

1 Agora Jules Dupuit (AJD), Département de sciences économiques
Université de Montréal
Montréal, marc.gaudry@umontreal.ca

2 Paris-Jourdan Sciences Économiques (PSE)
École des Ponts ParisTech (ENPC)
Paris, quinet@enpc.fr

Codes JEL: C61, D61, D92, H54, R41, R48

Mots-clés : optimisation inter-temporelle, analyse coût-bénéfice, programmation dynamique, entretien, régénération, entretien d'infrastructure

Université de Montréal
Agora Jules Dupuit, Publication AJD-136

Paris-Jourdan Sciences Économiques
Working Paper N° 2011-03

Version 3 du 9 février 2011

Résumé

La présente note a pour objet de présenter un cadre formalisé de l'optimisation de la maintenance d'une voie, la maintenance en question comportant d'une part des opérations continues d'entretien courant et d'autre part, à intervalles espacés, des opérations de régénération de l'infrastructure. On supposera à titre principal qu'on est en avenir certain, et dans certains cas on explorera aussi la situation d'incertitude. On en déduira également une expression du coût marginal de maintenance qui comprend comme cas particulier emboîté le résultat routier de Newbery (1988a, 1988b). On proposera enfin des spécifications pour l'économétrie des coûts d'entretien utilisables dans des travaux empiriques en cours avec une base de données sur le réseau ferroviaire français de 1999.

Abstract

This paper proposes a formalized framework for the joint economic optimization of continuous maintenance and periodic regeneration activities often required for instance for transport infrastructure. Derivations are principally made under certainty assumptions but some variants address uncertainty conditions. A general expression for the marginal maintenance cost nests Newbery's result derived with roads in mind (1988a, 1988b). Some implications for the econometric formulation of maintenance cost functions are considered for use in ongoing empirical work with a French rail network database for 1999.

Table des matières

1. Introduction[1]

La présente note a pour objet de présenter un cadre formalisé de l'optimisation de la maintenance d'une voie, la maintenance en question comportant d'une part des opérations continues d'entretien courant et d'autre part, à intervalles espacés, des opérations de régénération de l'infrastructure. On supposera à titre principal qu'on est en avenir certain, et dans certains cas on explorera aussi la situation d'incertitude. On en déduira également une expression du coût marginal de maintenance et on proposera des spécifications pour l'économétrie des coûts d'entretien.

L'optimisation de l'entretien d'une infrastructure a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Mais la majorité de ceux-ci se rattachent à la recherche opérationnelle ; ils visent à fournir des logiciels de gestion indiquant par exemple à partir de quelles valeurs de certains paramètres il convient de procéder à une régénération, ou de combiner plusieurs opérations différentes d'entretien. D'autres, également nombreux, concernent l'économétrie des coûts d'entretien, et visent à expliquer la fonction de coût du gérant d'infrastructure. Mais les analyses de la maintenance tournées vers ses propriétés économiques sont rares ; la note jointe ne peut pas être rattachée à une littérature volumineuse[2]. Les travaux les plus proches sont ceux de Newbery, par exemple Newbery (1988a, 1988b). Celui-ci analyse la situation d'une infrastructure routière dont la qualité de service se dégrade au fur et à mesure du passage des essieux ; au bout d'un intervalle de temps dont on peut déterminer la durée optimale, la chaussée est régénérée et retrouve sa qualité de service initiale ; le résultat fondamental auquel l'auteur aboutit est que, dans la situation d'un réseau stationnaire (trafic constant sur toutes les routes, durées de vie des routes du réseau uniformément réparties dans le temps), la dépense de régénération optimale est égale à la recette qui serait obtenue d'une tarification au coût marginal des usagers de la route.

La différence avec les situations objets du présent texte est que, pour Newberry, il n'y a pas d'entretien courant, ou que tout au moins cet entretien courant n'influe pas sur la qualité de la chaussée. La présente note étudie la situation où un entretien courant influe sur la qualité de service de l'infrastructure. Alors l'optimisation de la durée de vie entre deux régénérations doit être menée conjointement avec celle de l'entretien annuel. Les résultats auxquels on aboutit sont moins simples. Ils montrent cependant que le taux de recouvrement des dépenses qui serait issu d'une tarification au coût marginal est inférieur à un. Ils permettent aussi de faire apparaître la manière dont les coûts d'entretien et les durées inter-régénérations varient avec les principaux paramètres tels que niveau de trafic, taux d'intérêt, efficacité de l'entretien ou le coefficient de restriction des crédits. Ils montrent enfin que les expressions du coût marginal d'entretien que l'on considère habituellement ne traduisent pas le vrai coût collectif de la maintenance, et suggèrent des formulations plus conformes à l'analyse économique.

On présentera d'abord un cadre général d'optimisation, mais ce cadre général ne permet de déduire qu'un très petit nombre de résultats. Cela conduira à donner aux fonctions qui interviennent dans l'optimisation des spécifications plus précises pour aboutir à des conclusions opérationnelles.

[1] Les auteurs remercient Bernard Caillaud et Matthieu de Lapparent de leurs commentaires sur une première version de ce texte.
[2] La modélisation probabiliste du choix entre entretien et remplacement d'un équipement de durée variable, en l'occurrence le moteur d'un autobus en service (Rust, 1987), en est un exemple.

2. Le cas général

Considérons une infrastructure qui supporte un trafic de densité $q(t)$ à chaque instant t. Ce trafic crée des dommages à l'infrastructure, dommages auxquels il peut être remédié par des dépenses d'entretien courant dont le montant est, pour un intervalle de temps dt, $u(t)dt$, et par une régénération qui coûte D et restaure l'état initial de l'infrastructure. Entre la précédente régénération et l'instant *t*, le cumul des dépenses d'entretien est $X(t) = \int_0^t u(v)dv$.

La qualité de service offerte par l'infrastructure est, à chaque instant *t*, $S(t)$, et elle varie dans le temps selon une relation qui fait intervenir la dépense d'entretien, la densité du trafic et l'état de la qualité de service. On l'écrira sous une forme assez générale :

$$dS(t) = G(u(t), X(t), f(q(t)), S(t), t)dt$$

La formulation $f(q(t))$ permet d'englober sous la même écriture différentes spécifications pour les conséquences du trafic sur la dégradation de la chaussée : par exemple seul le trafic de l'instant *t* a un effet sur la variation de qualité de service (alors : $f(q(t)) = q$) ; ou encore, l'effet provient du cumul de trafic depuis la dernière régénération (alors : $f(q(t)) = f(\int_0^t q(t)dt)$) ; on peut aussi prendre une moyenne pondérée des trafics passés (par exemple : $f(q(t)) = f(\int_0^t q(u)e^{-\mu(t-u)}du)$. Dans la suite, on s'attachera à la situation où la qualité de service dépend du trafic cumulé et on supposera en outre que la densité de trafic est constante : $q(t) = q$ et donc $f(q(t)) = f(qt)$, et que la fonction *f* est croissante.

L'optimisation porte sur la chaîne des séquences de renouvellement, et la fonction à optimiser est la somme actualisée des services rendus par l'infrastructure (produit du trafic par la valorisation de la qualité de service dont il bénéficie) et des dépenses de maintenance, composées de l'entretien courant —$u(t)dt$ pour chaque durée *d*— et de la dépense de régénération qui intervient à des instants T_i, lesquels, en raison de la stationnarité du trafic, sont espacés régulièrement. La fonction à maximiser s'écrit :

$$\underset{u(t),T}{Max}\{\{\int_0^T [-u(t) + qS(t)]e^{-jt}dt - De^{-tT}\}\frac{1}{1-e^{-jT}}\} = \underset{u(t),T}{Max}\{[J(u(t),T) - De^{-tT}]\frac{1}{1-e^{-jT}}\}$$

Pour le résoudre on va d'abord, à durée de vie *T* donnée, trouver l'entretien courant $u(t)$ qui maximise $J(u(t),T)$. Puis on maximisera l'expression ainsi trouvée par rapport à *T*.

2.1. Définition de la politique d'entretien optimale à durée de vie donnée

Maximiser $J(u(t),T)$ à *T* donné est un problème classique de programmation dynamique. À la fonction à optimiser, s'adjoint l'équation qui définit la manière dont *S(t)* varie dans le temps :

$$dS(t) = G(u(t), X(t), f(q(t)), S(t), t)dt \text{ ; où } 0 \le u(t) \le M .$$

On supposera en effet que la fonction à trouver, *u(t)*, est bornée inférieurement par *0* (on ne peut pas faire d'entretien négatif) et supérieurement par une valeur *M* (par exemple pour des contraintes de temps, on ne peut pas dépasser un montant de travaux d'entretien par unité de temps. La solution passe par la maximisation du Hamiltonien *H* en fonction du contrôleur *u(t)* et en introduisant la fonction duale *y(t)* :

$$\underset{u}{Max}\, H = \underset{u}{Max}\{[-u(t)+q(t)S(t)]e^{-jt} + yG\ .$$

On y adjoint l'autre relation classique:

$$H_S + \dot{y}(t) = 0\ .$$

L'ensemble de ces relations conduit à des équations différentielles permettant de déterminer les fonctions u(t), y(t) et R(t). Les solutions intérieures (0<u(t)<M) vérifient, pour la maximisation de H par rapport à u :

$$-e^{-jt} + y(t)\frac{\partial G}{\partial u} = 0\ .$$

Notons que, pour *t=T*, on a (condition de transversalité) *y(T)=0*, donc la solution de la maximisation précédente n'est pas intérieure, et donc *u(T)=0*. La seconde relation donne:

$$-qe^{-jt} + y(t)\frac{\partial G}{\partial S} = 0\ .$$

Une fois qu'on a déterminé la politique d'entretien optimale entre *0* et *T*, on en déduit d'abord la valeur de *J*, qui dépend de *T* : *J(T).*

2.2. Coût marginal social et coût marginal du gérant d'infrastructure

On en déduit ensuite le coût marginal à l'instant θ donné par la variation de *J* résultant de l'augmentation du trafic de l'instant θ à politique d'entretien inchangée. Cette variation correspond à la réduction de la qualité de service pour les années ultérieures jusqu'à la régénération. Son expression se déduit de la définition de *S(t)* par sa dérivée :

$$dS(t) = G(u(t), X(t), S(t), f(qt), t)dt \quad .$$

Lorsque en θ, *q* augmente de δq, à tous les instants ultérieurs, la fonction *f((t)* augmente de :

$$\delta f = f(qt+\delta q) - f(qt) = \frac{1}{q}\frac{\partial f}{\partial t}\delta q(\theta)\,,$$

et la fonction *S(t)* devient :

$$S(t)+\delta S(t)=h(u(t), S(t)+ \delta S(t),f(q(t+\delta q/q),t)).$$

Du rapport $\delta S(t)/\delta q(\theta)$, on déduit δJ et le coût marginal en θ :

$$Cm(\theta) = -\delta J = -\int_{\theta}^{T} q\frac{\delta S(u)}{\delta q(\theta)}e^{-ju}du\ .$$

La recette annuelle (constante au cours des ans) issue de la tarification au coût marginal d'un réseau en état stationnaire (c'est-à-dire où la répartition des âges des sections entre *0* et *T* est uniforme) sera :

$$R = q\int_{0}^{T} Cm(\theta)d\theta\ .$$

Quant à la dépense annuelle, elle aussi constante, elle est :

$$M = D + \int_{0}^{T} u(t)dt\ .$$

2.3. Détermination de la durée de vie optimale d'une régénération

Ayant déterminé *J(T)* par les procédures précédentes, on en déduit la durée optimale inter-régénérations *T* qui obéit à la relation :

$$\underset{T}{Max}\, M(T) = \frac{(J(T) - De^{-jT})}{1 - e^{-jT}} .$$

La dérivée première de *M(T)* est :

$$0 = jD + J'(1 - e^{-jT}) - jJ .$$

Or, puisque : *u(T)=0* :

$$J' = H(T) = qS(T)e^{-jT} .$$

En outre :

$$J(T) = \int_0^T [-u(t) + qS(t)]e^{-jt} dt .$$

Donc :

$$D = \int_0^T [-u(t) + qS(t)]e^{-jt} dt - \frac{1}{j}(1 - e^{-jT})qS(T)e^{-jT} .$$

Notons que la considération du coût de régénération ne change pas l'expression du coût marginal précédemment dégagée. En effet le calcul de la variation de la qualité de service résultant du trafic supplémentaire doit être fait à politique de maintenance constante, englobant à la fois l'entretien courant et la régénération. Une autre manière de le dire est de considérer que, lorsque le trafic de l'instant θ augmente, la date de régénération change certes, mais comme cette date est optimale, son changement n'entraîne, au second ordre près, aucun changement dans le coût collectif incluant le coût pour les usagers et celui pour le gérant d'infrastructure ; c'est une application du théorème de l'enveloppe.

On peut des relations précédentes, déduire le sens de variation de *T* lorsque *D* augmente : dans la mesure où la valeur de *T* déterminée par la relation précédente est un maximum, les deux variables évoluent dans le même sens.

3. Cinq cas particuliers

Il est difficile de déduire des résultats significatifs à partir des spécifications très larges précédentes. Pour y arriver, il faut spécifier les fonctions. On analysera ci-dessous différentes spécifications, choisies pour leur vraisemblance technique et pour leur facilité de traitement algébrique et qui sont chacune plus propres à des développements sur tel ou tel point d'intérêt, et en même temps permettent d'illustrer la variété des comportements des trajectoires optimales. Elles diffèrent par la manière dont est définie la perte de qualité de service et sa dépendance à l'égard des dépenses d'entretien et du volume de trafic.

Dans tous les cas, on sépare l'effet, positif, de l'entretien courant *u(t)* et celui, négatif, de la dégradation du trafic :

1ère Spécification : $\boxed{\begin{array}{l} S = S(qt, X(t)] \\ \dfrac{dX}{dt} = u(t) \end{array}}$, où *X(t)* représente l'entretien cumulé ;

2ème Spécification : $\boxed{\begin{array}{l} J = \int [-u(t) - bqe^{-\lambda S(t)}]e^{-jt} \\ dS(t) = au(t) - f(qt) \end{array}}$;

3ème Spécification : $\boxed{\dfrac{dS(t)}{dt} = (S_0 - S)[au(t) - f(qt)]}$;

4ème Spécification : $\boxed{\dfrac{dS(t)}{dt} = a(S_0 - S)u(t) - f(qt)}$;

5ème Spécification : $\boxed{\dfrac{dS}{dt} = f(qt)\log(au(t))}$.

Dans ces relations, *a* est un paramètre numérique qui mesure l'efficacité d'une dépense unitaire d'entretien courant *u(t)*, *b* et λ sont d'autres paramètres liés à la sensibilité de la qualité de service dans l'utilité des usagers et $S_0=S(0)$ est la qualité de service juste après la régénération, supposée être la meilleure qualité de service possible, ce qui signifie que $S(t) \leq S(0)$.

3.1. La 1ère spécification : phases et coût marginal d'entretien

S'agissant de la première spécification, le Hamiltonien s'écrit :

$$H = [-u(t) + qS(qt, X(t))]e^{-jt} + yu(t)$$

et sa maximisation par rapport à *u* est équivalente à celle de :

$$u[-e^{-jt} + y(t)].$$

Trois cas se présentent selon que la solution est intérieure à l'intervalle *0-M* ou à une de ses extrémités, correspondant chacune à une phase de la trajectoire.

A. Formulation des trois phases

- Phase A : $y(t) - e^{-jt} < 0$.

  Alors *u(t)=0*, et *X(t)* est constant.

  De $H_X + \dot{y} = 0$, on tire :

  $$\dot{y} = -qS_X(qt, X_0)e^{-jt},$$

  X_0 étant la valeur de *X* pour un instant t_0 quelconque de la phase.
  D'où l'on tire *y(t).*

- Phase B : $y(t) - e^{-jt} > 0$.

  Alors *u(t)=M* et $X(t) = X(t_0) + M(t - t_0)$, relation dans laquelle t_0 est un instant quelconque de cette phase.

  De $H_X + \dot{y} = 0$, on tire :

  $$\dot{y} = -qS_X(qt, X_0 + M(t - t_0))e^{-jt}$$

- Phase C : $y(t) = e^{-jt}$.

  Alors *u(t)* est déterminé par $H_X + \dot{y} = 0$,

  équation qui fournit directement la fonction *X(t)* : $qS_X(qt, X(t)) - j = 0$

  d'où on tire *u(t)*, dérivée de *X(t).*

A partir de là, on peut décrire l'évolution du système entre *0* et *T* ; il est commode pour cela de dérouler le temps à rebours. À l'instant *T*, la fin de la période, on a, en raison des conditions de transversalité :

$$y(T)=0.$$

On est donc dans la phase A, où l'entretien *u(t)* est nul. Quand on remonte le temps, il y a alors deux possibilités :

- soit on reste constamment dans cette phase, ce qui se traduit par le fait que *y(t)* satisfait la condition d'inégalité correspondante : $y(t) - e^{-jt} < 0$. Alors la politique optimale d'entretien consiste à ne pas faire d'entretien courant, et à régénérer périodiquement. C'est la situation étudiée par Newbery (1988b) ;
- soit à un certain instant t_f on a : $y(t) - e^{-jt} = 0$. Alors on entre dans la phase C où $0 < u(t) < M$. La qualité de service suit une trajectoire *S(t)* obéissant aux équations de la phase C. Quand ensuite on se rapproche de l'instant initial *t=0*, plusieurs cas pourraient se présenter selon la manière dont la qualité de service fournie par la régénération précédente, *S(0)*, se compare à *S(t)* ; mais on a exclu le cas où $S(0) \leq S(t)$; alors à un certain instant on entre de nouveau dans la phase A où l'entretien annuel *u(t)* est nul.

Cette dernière situation correspond à la pratique fréquente de l'entretien où durant une certaine période de quelques mois à quelques années après une régénération l'entretien est, sinon annulé, au moins allégé. De même la situation où, un peu avant la régénération, l'entretien annuel est égal à 0 correspond à une pratique fréquente des politiques d'entretien usuelles où peu de temps avant la régénération il y a allégement des opérations d'entretien.

B. Coût marginal d'entretien

On calcule le coût marginal d'entretien :

$$Cm(\theta) = -\int_{\theta}^{T} qS_Q e^{-jt} dt .$$

Ce coût marginal prend une expression particulière dans le cas où la politique optimale est de maintenir la qualité de service constante dans la période, en général la plus longue, où l'on est dans la phase C. Alors, si on suppose négligeable ce qui se passe aux deux extrémités de la phase C, le long de la trajectoire optimale :

$$dS = S_X dX + S_Q dQ = 0 .$$

Or la variation de J lorsque le trafic augmente de $\delta q(\theta)$ peut s'écrire :

$$\delta J = \int_{\theta}^{T} [-\delta u(t) + q[S_Q \delta Q + S_X \delta X] e^{-jt} dt ,$$

donc :

$$\delta J = \int_{\theta}^{T} -\delta u(t) e^{-jt} dt ,$$

et le coût marginal à l'instant θ est l'opposé de δJ soit, actualisé à l'instant θ :

$$Cm(\theta) = e^{j\theta} \int_{\theta}^{T} \delta u(t) e^{-jt} dt .$$

Le coût marginal à l'instant θ est donc la somme actualisée des suppléments de dépenses d'entretien futures occasionnées par le trafic marginal à l'instant θ. Cette expression est bien différente de celle habituellement admise. Notons également que la tarification au coût marginal ne doit pas inclure d'élément correspondant à la régénération.

3.2. La 2ème spécification

On ne détaillera pas les calculs dans le cas de la deuxième spécification : on esquissera simplement leur déroulement par référence au cas précédent. En suivant la même démarche que précédemment, on maximise $u(t)[ay(t) - e^{-jt}]$, ce qui permet d'identifier les trois phases précédentes.

A. Nouvelle identification des trois phases

- Phase A : $ay(t) < e^{-jt}$, alors *u(t)=0* et,
  par la relation $H_S + \dot{y} = 0$, on peut déterminer *y(t), S(t)* et *u(t).*
- Phase B : $ay(t) > e^{-jt}$, alors u(t)=M et,
  par la même relation, on détermine *y(t), S(t)* et *u(t).*
- Phase C : $ay(t) = e^{-jt}$ et
  la relation $H_S + \dot{y} = 0$ aboutit à $bq\lambda e^{-\lambda S - jt} - \frac{j}{a} e^{-jt} = 0$. Soit : $S = \frac{1}{\lambda} Log \frac{\lambda aqb}{j}$.

La politique correspondante consiste maintenir le niveau de service constant tout au long de la phase C, qui est une phase de croisière. On voit que le niveau de service de croisière augmente avec le niveau de trafic q, avec l'efficacité de l'entretien a, avec l'importance de la qualité de service dans l'utilité mesurée par b et λ, et décroît avec le taux d'intérêt j.

B. Effet de l'incertitude sur l'efficacité de l'entretien

Avec cette spécification, recherchons l'effet de l'incertitude. Pour cela, supposons qu'une incertitude frappe l'efficacité de l'entretien :

$$dS(t) = [au(t) - f(qt)]dt + \sigma^2 dz\ ,$$

où le dernier terme correspond au mouvement brownien classique. La résolution du problème fait appel à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$-J_t = \underset{u}{Max}\{[-u(t) - bqe^{-\lambda S(t)}]e^{-jt} + J_S(au(t) - f(qt)) + \sigma^2 J_{SS}\}\ .$$

L'analyse de cette équation ferait apparaître les trois phases précédentes, mais concentrons nous sur la phase C, correspondant à la trajectoire de croisière. Alors l'équation précédente devient:

$$-J_t = bqe^{-\lambda S - jt} - J_S f(qt) + \sigma^2 J_{SS}\ .$$

Recherchons une solution de la forme :

$$J(S,t) = \varphi(t)e^{-\lambda S} + \psi(t)$$

L'identification des termes donne :

$$-\varphi' e^{-\lambda S} = bqe^{-\lambda S - jt} + \lambda\varphi e^{-\lambda S} f(qt) + \sigma^2\lambda^2\varphi,$$
$$-\psi' = 0.$$

La première de ces deux équations est une équation différentielle classique qui permet de déterminer φ ; on trouve :

$$\varphi = Ce^{-\lambda F + \sigma^2\lambda^2 t}\ .$$

C étant une fonction qu'on détermine par assimilation de cette expression à la relation principale ; on trouve :

$$C = \int_{t_0}^{t} aqe^{-jt + \lambda F - \sigma^2\lambda^2 t}dt + C_0\ ,$$

expression dans laquelle C_0 est une constante numérique dépendant des conditions aux extrémités, et F est la primitive de *f(qt)* par rapport au temps *t*. Au total :

$$J = e^{-\lambda S - \lambda F(t) + \sigma^2\lambda^2 t}[\int_{t_0}^{t} aqe^{-jt + \lambda F - \sigma^2\lambda^2 t}dt - e^{-jt_0 + \lambda S(t_0) + \lambda F(t_0) - \sigma^2\lambda^2 t_0}]\ .$$

La valeur de J_S, qui définit la règle pour entrer dans la trajectoire de la phase C, est donnée à la fois par sa valeur d'équilibre définie par ailleurs, e^{-jt}/b, et par :

$$J_S = -\lambda e^{-\lambda S - \lambda F(t) + \sigma^2\lambda^2 t}[\int_{t_0}^{t} aqe^{-jt + \lambda F - \sigma^2\lambda^2 t}dt - e^{-jt_0 + \lambda S(t_0) + \lambda F(t_0) - \sigma^2\lambda^2 t_0}]\ .$$

Dans cette expression, t_0 représente un autre instant de la phase C. Pour voir comment J_S varie avec l'importance de l'incertitude, mesurée par σ, supposons que les instants t et t_0 sont très voisins. On peut écrire la relation précédente :

$$\frac{e^{-jt}}{b} = J_S = -\lambda e^{-\lambda S - \lambda F(t) + \sigma^2\lambda^2 t}\{\int_{t_0}^{t} aqe^{-jt + \lambda F - \sigma^2\lambda^2 t}dt + \frac{e^{-jt_0}}{b}[e^{-\lambda(F(t) - F(t_0)) + \sigma^2\lambda^2(t - t_0)}]\}\ .$$

On voit que si σ augmente, alors S doit diminuer pour que J_S maintienne sa valeur de e^{-jt}/b. Ainsi l'incertitude entraîne une diminution du niveau de service d'équilibre par rapport à la situation d'avenir certain.

La règle de politique à appliquer dans cette situation d'incertitude ressemble à celle obtenue en avenir certain, à ceci près que la trajectoire de croisière ne peut pas être tenue avec certitude : des aléas viennent en écarter constamment. Au total on a la politique suivante.

Au début, juste après la régénération, l'entretien annuel est nul tant que la qualité de service, qui diminue constamment, n'a pas atteint la valeur de croisière. Puis, si la qualité de service atteint la trajectoire de croisière, l'entretien prend la valeur correspondante conduisant à maintenir l'évolution sur la trajectoire de croisière. Mais l'aléa écarte constamment de la trajectoire de croisière ; alors si l'aléa conduit à être en dessous, l'entretien prend la valeur M tant qu'on n'a pas rejoint la trajectoire de croisière, et s'il conduit à être en dessus, l'entretien s'annule tant qu'on n'a pas atteint la trajectoire de croisière. En somme l'entretien passe constamment de la valeur 0 à la valeur M, avec une probabilité nulle de se stabiliser sur la trajectoire de croisière.

C. Coût marginal et taux de recouvrement des dépenses

Revenant au cas certain, examinons avec cette spécification le taux de recouvrement des dépenses à laquelle aboutit la tarification au coût marginal.

La tarification au coût marginal s'obtient en calculant la variation d'utilité résultant d'une augmentation d'une unité du trafic à une année donnée, et calculée comme la diminution de la qualité de service, soit :

$$\frac{\delta S(t)}{\delta q(\theta)} = -\frac{f(qt)}{q}$$

$$\frac{\delta J}{\delta q} = \int_{\theta}^{T} bq\lambda e^{-\lambda S(t)-jt}\left(-\frac{f(qt)}{q}\right)dt$$

$$\frac{\delta J}{\delta q(\theta)} = -\int_{\theta}^{T} b\lambda e^{-\lambda S(t)-jt} f(qt)dt$$

dont on déduit le coût marginal actualisé à l'instant θ :

$$Cm(\theta) = e^{j\theta}\int_{\theta}^{T} b\lambda e^{-\lambda S(t)-jt} f(qt)dt \,.$$

La recette issue du coût marginal est :

$$R = b\lambda q\int_{0}^{T} e^{j\theta}\left[\int_{\theta}^{T} e^{-\lambda S(t)-jt} f(qt)dt\right]d\theta \,.$$

Après interversion des ordres d'intégration :

$$R = \frac{b\lambda q}{j}\left\{\int_{0}^{T} e^{-\lambda S(t)} f(qt)dt + \int_{0}^{T} e^{-\lambda S(t)-jt} f(qt)dt\right\} .$$

Quant à la dépense annuelle de maintenance, elle est :

$$M = D + \int_{0}^{T} u(t)dt = D + \int_{0}^{T} \frac{1}{b} f(qt)dt \,,$$

avec :

$$D = -\int_{0}^{T} u(t)e^{-jt}dt + \int_{0}^{T} aqe^{-\lambda S(t)-jt}dt - \frac{J'}{j}(1-e^{-jT}) \,.$$

On a donc :

$$M = \int_0^T \frac{1}{b} f(qt)(1-e^{-jt})dt + \int_0^T \frac{1}{b\lambda} e^{-jt}dt + \frac{1}{j}(1-e^{-jT})(aqe^{-\lambda S(t)-jT})$$

et, en comparant les expressions de R et M, on voit que $M>R$ et qu'en conséquence le taux de recouvrement des dépenses est inférieur à l'unité.

D. Effet de l'insuffisance des crédits

On peut également sur cette spécification étudier l'effet d'une restriction des crédits. Celle-ci sera traduite, très classiquement, par un coefficient k supérieur à l'unité et qui s'applique à toutes les dépenses. La fonction à maximiser est donc :

$$J = \int [-ku(t) - bqe^{-\lambda S(t)}]e^{-jt}$$

$$dS(t)/dt = au(t) - f(qt)$$

Il est nécessaire d'analyser la manière dont se comporte la qualité de service *S(t)*. Au début dans la période où l'entretien est nul, la qualité de service diminue en raison de l'effet du trafic, en partant de la qualité de service fournie par la régénération et supposée donnée *S(0)* :

$$S(t) = S_0 - \int_0^t f(qt)dt = S_0 - F(qt)\ .$$

en appelant *F(qt)* la primitive de *f(qt)* qui est nulle pour $t=0$. La qualité de service diminue jusqu'au moment où la qualité de service atteint le niveau de la trajectoire d'équilibre qui est, par transposition élémentaire de la formule trouvée au début de la section :

$$Sc = \frac{1}{\lambda}\log\frac{\lambda abq}{jk}\ .$$

On le voit, la qualité de service est d'autant plus faible que le coût d'opportunité k est élevé.

Dans la dernière phase on revient à une situation où l'entretien annuel est nul. Cette phase commence à un instant t_0. Elle est déterminée par les équations suivantes :

$$S(t) = S(t_0) - F(qt)$$

$$0 = H_S + \dot{y} = aq\lambda e^{-\lambda S(t)}$$

$$y(t) = \int -aq\lambda e^{-\lambda(S_0 - \int_{t_0}^{w} f(av)dv)} dw + C$$

où la constante C est déterminée par le fait que $y(T)=0$. Il s'ensuit :

$$y(t) = \int_t^T aq\lambda e^{-\lambda[S_0 - \int_{t_0}^{w} f(qv)dv]} dw$$

ainsi que :

$$y(t_0) = \frac{k}{b}e^{-jt_0}$$

et on a donc :

$$k = aq\lambda b e^{jt_0}\frac{jk}{\lambda ab}\int_{t_0}^T e^{\lambda\int_{t_0}^{T} f(qv)dv} dw\ .$$

Il en résulte que dans la spécification choisie, la date t_0 à partir de laquelle on décroche de la trajectoire est indépendante du coefficient k.

Par ailleurs, la durée T est déterminée par la maximisation suivante :

$$\underset{T}{Max}\frac{J(T)-kDe^{-jT}}{1-e^{-jT}}=\underset{T}{Max}\,M(K,T)\,.$$

Remarquons que $T(k)$ est déterminé par :

$$\frac{\partial M(T,k)}{\partial T}=0\,.$$

Etudions la variation de T en fonction de k. Elle résulte de la relation :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial k}+\frac{\partial^2 M}{\partial T\partial k}=0\,,$$

où la première dérivée seconde est négative puisque $M(T,k)$ est maximal en T. Étudions la seconde. On peut écrire :

$$\frac{\partial M}{\partial T}=\frac{N(T,k)}{D(T,k)}=\frac{(J_T^{'}+kjDe^{-jT})(1-e^{-jT})-j(J(T)-kDe^{-jT})e^{-jT}}{(1-e^{-jT})^2}=\frac{J_T^{'}(1-e^{-jT})+kjDe^{-jT}-jJ(T)e^{-jT}}{(1-e^{-jT})^2}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial T^2}=\frac{N_k^{'}D-ND_k^{'}}{D^2}=\frac{N_k^{'}}{D}$$

Or :

$$J_T^{'}=aqe^{-\lambda S(T)-jT}$$

$$J(T)=\int_0^T[-ku(t)-aqe^{-\lambda S(t)}]e^{-jt}dt$$

Donc :

$$J_{Tk}^{''}=aq(-\lambda)e^{-\lambda S(T)-jT}\frac{\partial S(t)}{\partial k}=aq(-\lambda)e^{-\lambda S(T)-jT}(-\frac{1}{\lambda k})=\frac{aq}{k}e^{-\lambda S(T)-jT}$$

$$J_k^{'}=\int_0^T[-u(t)-aq(-\lambda)e^{-\lambda S(t)}\frac{\partial S(t)}{\partial k}]e^{-jt}dt=\int_0^T[-u(t)-\frac{aq}{k}e^{-\lambda S(t)}]e^{-jt}dt=\frac{1}{k}J(T,k)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial N}{\partial k}=\frac{aq}{k}e^{-jT}(1-e^{-jT})e^{-\lambda S(t)}+jDe^{-jT}+jke^{-jT}\int_0^T[u(t)+\frac{aq}{k}e^{-\lambda S(t)}]e^{-jt}dt\,,$$

dont le membre gauche $\partial N/\partial k$, somme de trois termes positifs, est positif. Donc $\partial T/\partial k$ est positif, c'est-à-dire que T, la durée entre deux renouvellements, augmente avec k, le coefficient de restriction des crédits.

3.3. La 3ème spécification

Dans le cas de la troisième spécification, la maximisation du Hamiltonien s’écrit :

$$\underset{u}{Max}\,H=\underset{u}{Max}\{[-u(t)+q(S_0-S(t))]e^{-jt}+y(S_0-S)[a(u(t)-f(qt)]\}$$

et elle se réduit à :

$$\underset{u}{Max}[u(t)(a(S_0-S)y(t)-e^{-jt})]$$

et on retrouve les trois cas selon que la solution est intérieure à l’intervalle *0-M* ou à une de ses extrémités, correspondant chacune à une phase de la trajectoire.

A. Identification des trois phases

- Phase A : $a(S_0 - S)y(t) - e^{-jt} < 0$.

  Alors *u(t) =0*. Et on a :

$$\frac{dS(t)}{dt} = (S - S_0)\, f(qt)$$

$$S(t) - S_{t_0} = e^{\int_{t_0}^{t} f(qu)du}$$

  relation où t_0 est un instant de l'intervalle sur lequel *u(t)=0* et *y(t)* est donné par :

$$H_S + \dot{y}(t) = -qe^{-jt} + y(t)[au(t) - f(qt)] + \dot{y}(t) = -qe^{-jt} - y(t)f(qt) + \dot{y}(t) = 0.$$

- Phase B : $a(S_0 - S)y(t) - e^{-jt} > 0$.

  Alors *u(t)=M*. Et on a :

$$\frac{dS(t)}{dt} = (S - S_0)(f(qt) - aM)$$

$$S(t) - S_{t_0} = e^{\int_{t_0}^{t} [f(qu) - aM]du}$$

  et *y(t)* est donné par :

$$H_S + \dot{y}(t) = -qe^{-jt} + y(t)[aM - f(qt)] + \dot{y}(t) = 0.$$

- Phase C : $a(S_0 - S)y(t) - e^{-jt} = 0$.

  Comme *y(t)* est alors donné par :

$$0 = H_S + \dot{y}(t) = -qe^{-jt} + y(t)[au(t) - f(qt)] + \dot{y}(t) = 0$$

  et que :

$$y(t) = e^{-jt} \,/\, a(S_0 - S)$$

$$\dot{y} = -jy(t) + e^{-jt} \,/\, a(S_0 - S)^2$$

$$-qe^{-jt} + e^{-jt}[au(t) - f(qt)] / a(S_0 - S) + jy(t) - e^{-jt} \,/\, a(S_0 - S)^2 = 0$$

  On a finalement, en combinant les 4 dernières équations :

$$S_0 - S(t) = \frac{j}{aq}$$

$$y(t) = \frac{q}{j} e^{-jt}$$

$$u(t) = \frac{1}{a} f(qt)$$

ce qui signifie que la qualité de service reste constante. Comme déjà vu dans une spécification précédente, elle est d'autant plus élevée que le trafic est élevé, que l'efficacité de l'entretien est élevée, que le taux d'intérêt est faible. L'entretien annuel varie comme la dégradation, c'est-à-dire qu'il va croissant avec le temps.

A partir de là, on peut, comme précédemment, décrire l'évolution du système entre *0* et *T* et il est de nouveau commode pour cela de dérouler le temps à rebours. A l'instant *T*, la fin de la période, on a, en raison des conditions de transversalité :

y(T)=0,

et on est donc dans la phase A, où l'entretien *u(t)* est nul. Quand on remonte le temps, il y a alors deux possibilités :

- soit on reste constamment dans cette phase, ce qui se traduit par le fait que *y(t)* satisfait la condition d'inégalité correspondante : $a(S_0 - S)y(t) - e^{-jt} < 0$. Alors la politique optimale d'entretien consiste à ne pas faire d'entretien courant, et à régénérer périodiquement. C'est la situation étudiée par Newbery (1988b) ;
- soit à un certain instant t_f on a : $a(S_0 - S)y(t) - e^{-jt} = 0$. Alors on entre dans la phase C où $0<u(t)< M$. D'après les développements précédents, la qualité de service y est constante et telle que $S_0 - S(t) = \frac{j}{aq}$. On retrouve la même dépendance du niveau de service au regard du taux d'intérêt, du volume de trafic, et de l'efficacité de l'entretien.

  Quand on se rapproche de l'instant initial *t=0*, plusieurs cas peuvent se présenter selon la manière dont la qualité de service fournie par la régénération précédente, qu'on appelera *S(0)*, se compare à *S(t)* ; on exclue le cas où *S(0)<S(t)* ; on a alors deux cas selon que *S(0)=S(t)* —et alors on reste dans la phase C jusqu'à l'instant initial *t=0*— ou *S(0)>S(t)* —et alors à un certain instant on entre de nouveau dans la phase A où l'entretien annuel *u(t)* est nul.

On retrouve les situations déjà rencontrées dans plusieurs spécifications précédentes.

B. Expression du coût marginal

Le coût marginal de l'infrastructure se détermine par application de la méthode générale décrite dans la section précédente. Lorsque *q* varie de $\delta q(\theta)$ à l'instant *θ*, *S(t)* devient S(t)+δS et, de $\frac{dS(t)}{dt} = (S_0 - S)[au(t) - f(qt)]$, on tire :

$$S(t) - S_0 = (S(t_0) - S_0)e^{-a\int_0^t u(v)dv + \int_0^t f(qv)dv}$$

$$S(t) + \delta S - S_0 = (S(t_0) - S_0)e^{-a\int_0^t u(v)dv + \int_0^t f(q(v+\delta q/q)dv}$$

$$\delta S(t) = (S(t_0) - S_0)e^{-a\int_0^t u(v)dv + \int_0^t f(qv)dv}\{e^{\int_0^t f(q(v+\delta q/q)dv - \int_0^t f(qv)dv} - 1\}$$

$$\delta S(t) = (S(t) - S_0)\{\int_0^t f(q(v+\delta q/q)dv - \int_0^t f(qv)dv\} = (S(t) - S_0)\{\int_\theta^t f(q(v+\delta q/q)dv - \int_\theta^t f(qv)dv\}$$

$$\delta S(t) = -\frac{j}{aq^2}\{\int_\theta^t f'(qt)dt\}\delta q(\theta)$$

D'où le coût marginal :

$$Cm(\theta) = -q\int_\theta^T \delta S(t)e^{-jt}dt = \frac{j}{aq}\int_\theta^T[\int_\theta^t f'(qv)dv]e^{-jt}dt$$

ou encore, en actualisant le coût marginal à l'instant *θ* et non à l'instant initial :

$$Cm(\theta) = \frac{e^{j\theta}}{aq}\int_\theta^T f'(qv)[e^{-jv} - e^{-jT}]dv.$$

Remarquons que lorsque le trafic de l'année *v* augmente de *1*, la fonction *f(qv)/a* augmente de *f'(qv)/aq* ce qui représente le coût marginal d'infrastructure usuellement calculé, soit *c(t)*. On a donc alors la relation entre le coût marginal social *Cm(θ)* et le coût marginal usuel *c(t)* :

$$Cm(\theta)=e^{j\theta}\int_{\theta}^{T}c(t)[e^{-jv}-e^{-jT}]dv\,.$$

3.4. La 4ème spécification

Dans le cas de la quatrième spécification la maximisation du Hamiltonien par rapport à *u(t)* revient à maximiser :

$$u[y(t)(S_0-S(t))a-e^{-jt}]\,,$$

et on retrouve comme dans les cas précédents trois phases.

A. Étude de la phase de croisière

Concentrons nous sur la troisième correspondant à un régime de croisière :

$$y(t)(S_0-S(t))a=e^{-jt}\,.$$

Alors la condition : $H_S+\dot{y}=0$ donne :

$$qe^{-jt}-au(t)y(t)+\dot{y}=0\,.$$

Combinée avec la précédente, cette équation fournit, après manipulations simples, la valeur de la qualité de service :

$$S(t)-S_0=\frac{-\sqrt{j^2+4aqf}+j}{2aq}\,,$$

ce qui signifie qu'on est dans une situation où, dans la phase de croisière, la qualité de service varie, et diminue au fur et à mesure du temps.

B. Coût marginal et relation au résultat de Newbery

Examinons les relations entre coût marginal et dépenses d'entretien avec cette spécification lorsque la trajectoire optimale se déroule en totalité dans la phase A où il n'y a pas de dépense d'entretien courant. On est alors dans la situation étudiée par Newbery (1988b), et on va, en utilisant le formalisme présenté ici, retrouver son résultat que la tarification au coût marginal fournit une recette égale aux dépenses.

Les recettes sont liées à la variation de qualité de service, qui répond à :

$$dS(t)=f(qt)\,.$$

Soit :

$$S(t)=-\int_0^t f(qv)dv=F(qt)-F(0)=F(qt)$$

et le coût marginal, actualisé à l'année origine, est :

$$Cma(\theta)=\frac{1}{\delta q}\int_{\theta}^{T}q(F(qt+\delta q)-F(qt))e^{-jt}dt=\int_{\theta}^{T}f(qv)e^{-jv}dv\,.$$

La recette annuelle qu'on en tire dans une situation de réseau en état stationnaire est :

$$R=q\int_0^T Cm(\theta)d\theta=q\int_0^T\{\int_{\theta}^{T}f(qt)e^{-jt}dt\}e^{j\theta}d\theta=q\int_0^T e^{-jt}f(qt)\{\int_0^t e^{j\theta}d\theta\}dt$$

$$R=\frac{q}{j}\int_0^T f(qt)dt-\frac{q}{j}\int_0^T f(qt)e^{-jt}dt$$

Quant aux dépenses annuelles, elles correspondent aux dépenses de régénération, qui dépendent de la périodicité des régénérations. Or celle-ci est définie par la maximisation de :

$$\frac{J(T) - De^{-jT}}{1 - e^{-jT}} .$$

La condition d'optimisation de cette quantité s'écrit :

$$J'(1 - e^{-jT}) + jDe^{-jT} - jJe^{-jT} = 0 .$$

Or :

$$J' = H(T) = -qF(qT)e^{-jT}$$

$$J(T) = -q\int_0^T F(qt)e^{-jt}dT$$

où F(qt) est la primitive de f(qt). D'où :

$$D = J(T) + \frac{q}{j}F(qT)(1 - e^{-jT}) .$$

Après quelques manipulations, on trouve :

$$D = \frac{q}{j}\{\int_0^T [f(qt) - f(qt)e^{-jt}]dt$$

et on a bien :

$$D=R.$$

3.5. La 5ème spécification

Dans la dernière spécification, la maximisation de *H* par rapport à *u* est celle de :

$$-ue^{-jt} + yf(qt)\log au ,$$

ce qui donne :

$$u = yf(qt)/e^{-jt} .$$

Par ailleurs,

$$H_S + \dot{y} = 0 = qe^{-jt} + \dot{y}$$

d'où :

$$y(t) = \frac{q}{j}(e^{-jt} - e^{-jT})$$

$$u(t) = \frac{q(e^{-jt} - e^{-jT})}{je^{-jT}} f(qt)$$

4. Conséquences pour les ajustements relatifs au coût marginal

Il ressort de ce qui précède que deux variables peuvent être considérées comme endogènes :

- la qualité de service à un instant donné *t* , soit *S(t)*; cette qualité de service dépend de la chronique des opérations d'entretien passées et de celle des trafics passés, le tout mesuré depuis la dernière régénération ;
- l'entretien annuel, *u(t)* ; cet entretien annuel dépend des caractéristiques techniques de la voie, du trafic passé cumulé depuis la dernière régénération et de l'écart entre la qualité de service au début de l'année et l'objectif de qualité de service résultant de la politique optimale.

En termes mathématiques :

$$S(t) = f(\sum_{v=0}^{t-1} u(v)) + g(\sum_{v=0}^{t-1} q(v))$$

$$u(t) = h(\sum_{v=0}^{t} q(v)) + l(S^*(t) - S(t))$$

Les fonctions *f, g, h* et *l* font intervenir en tant que paramètres les caractéristiques techniques des voies (variables d'état et de qualité). La fonction $S^*(t)$ représente la qualité de service représentant la politique optimale d'entretien à l'année *t*.

5. Conclusions

De ces développements, on tire quelques conclusions soit d'ordre général soit dépendantes de la spécification.

Sur un plan général, il ressort qu'il est possible d'optimiser conjointement l'entretien courant et les dépenses de régénération, mais qu'il faut pour cela faire intervenir et mesurer la qualité de service rendue par la voie et les lois qui la relient au trafic d'une part et aux opérations d'entretien d'autre part. Les résultats généraux qu'on peut tirer sans spécification des fonctions qui interviennent dans cette optimisation sont limités : l'un des rares est que lorsque le coût de régénération augmente, la durée inter-régénération augmente. L'autre résultat est que le coût marginal d'entretien, qui comprend non seulement le coût pour le gérant d'infrastructure mais également les coûts externes imposés aux autres usagers, est différent du coût marginal d'infrastructure usuellement utilisé.

Pour aller plus loin et mettre en évidence des résultats plus précis, il faut spécifier les fonctions qui interviennent. Dans ce but on étudie les conséquences de plusieurs spécifications qui diffèrent essentiellement par la manière dont la qualité de service dépend de l'entretien courant et du trafic supporté par la voie ; elles ont en commun que la variable de trafic qui intervient est le trafic cumulé depuis la dernière régénération et que l'on suppose que le trafic annuel est constant (situation d'état stationnaire), une hypothèse dont on voit le caractère simplificateur, et qu'il conviendrait de lever. Elle s'impose pour les tests empiriques en cours sur le réseau ferroviaire français parce que la base de données disponible (Gaudry & Quinet, 2010) est une coupe transversale pour la seule année 1999.

Les résultats les plus importants et les plus sûrs —soit parce qu'on les retrouve dans plusieurs spécifications, soit parce que ces résultats confirment l'intuition— sont les suivants :

- À un instant donné, et toutes choses égales par ailleurs, le volume d'entretien annuel et la qualité de service sont croissants avec le trafic annuel et décroissant avec le taux d'intérêt.
- Le profil temporel d'une politique d'entretien optimale sera souvent constitué de 3 phases. Dans la première, juste après la régénération, l'entretien est nul (ou de façon plus réaliste, limité essentiellement à de la surveillance), ensuite se développe une phase de croisière où l'entretien est constant, ou au moins peu variable ; enfin dans la phase finale, juste avant la régénération suivante, l'entretien est de nouveau nul (ou de façon plus réaliste, limité à peu de chose).
- La plupart des spécifications aboutissent au résultat que la qualité de service commence par diminuer juste après la régénération puis suit une trajectoire de croisière — avec en général une qualité de service constante— et, peu de temps avant la prochaine régénération, diminue de nouveau.
- Lorsque l'impact des opérations d'entretien sur la qualité de service comporte un aléa, la conséquence est que le niveau optimal de qualité de service est réduit par rapport à la situation où il n'y a pas d'incertitude.
- En situation de restriction des crédits la politique optimale consiste à augmenter la durée inter-régénérations.
- Il est possible de calculer dans chaque spécification le coût marginal et celui-ci semble dépendre assez étroitement de la spécification.
- En situation de régime stationnaire, le taux de recouvrement de la dépense —qui est de 1 lorsque l'on se situe dans l'hypothèse limite de Newbery où il n'y a pas de dépense d'entretien courant— est inférieur à l'unité dans le cas général.

6. Références

Gaudry, M. and E. Quinet (2010). Track Wear and Tear Cost by Traffic Class: Functional Form, Zero-Output Levels and Marginal Cost Pricing Recovery on the French Rail Network. Publication AJD-130, Agora Jules Dupuit, Université de Montréal, et Working Paper N° 2009-32, Paris-Jourdan Sciences Économiques, 50 pages, 26 avril.

Newbery, D. M. (1988a). *Charging for roads*. World Bank.

Newbery, D. M. (1988b). Road damage externalities and road user charges. *Econometrica* 56, 2, 295-316, March.

Rust, J. (1987). Optimal replacement of GMC bus engines: an empirical model of Harold Zurcher. *Econometrica* 55, 5, 999-1033, September.