Revista de Administración, Finanzas y Economía (*Journal of Management, Finance and Economics*), vol. 2, núm. 2 (2008), pp. 92-103.

Sobre la convergencia del modelo GARCH(1,1)-M al movimiento geométrico browniano con reversión a la media

Francisco Venegas-Martínez[†]
Francisco J. Sánchez-Torres[††]

Recibido 11 de abril 2008, Aceptado 30 de septiembre 2008

Resumen

Esta investigación muestra, bajo ciertas condiciones, la convergencia del modelo GARCH(1,1)-M al movimiento geométrico Browniano con reversión a la media (proceso de difusión GARCH). La importancia de este resultado radica en que el problema de inferencia sobre los parámetros de modelos de valuación de opciones con volatilidad estocástica puede ser reducido a la estimación del modelo GARCH(1,1)-M. Asimismo, se lleva a cabo una discusión sobre los supuestos que garantizan la existencia y unicidad del proceso límite. Por último, se presenta una prueba rápida de convergencia menos formal, pero más intuitiva y fácil de recordar.

Abstract

This paper shows, under certain conditions, the convergence of the GARCH (1.1)-M model to the geometric Brownian motion with mean reversion (diffusion GARCH process). The importance from this result is that the problem of inference on the parameters of the valuation models of options with stochastic volatility can be reduced by estimating the model GARCH (1.1)-M. It is also carried out a discussion on the assumptions that ensure the existence and uniqueness of the limit process. Finally, it is provided a quick demonstration of the convergence, which is less formal, but more intuitive and easy to remember.

Clasificación JEL : G13, C13, y C22.

Palabras clave: Convergencia de procesos estocásticos, valuación de derivados, volatilidad estocástica

1. Introducción

Esta investigación muestra, bajo ciertas condiciones, la convergencia de una ecuación en diferencias estocástica del tipo GARCH(1,1)-M a una ecuación

[†] Profesor-Investigador de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. Correo electrónico: fvenegas@ipn.mx

[††] Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional.

diferencial estocástica del tipo del movimiento geométrico Browniano con reversión a la media; este último, por simplicidad será llamado proceso de difusión GARCH. La importancia de esta convergencia radica en que el problema de inferencia sobre los parámetros de modelos de valuación de opciones con volatilidad conducida por procesos de difusión GARCH puede ser reducido a la estimación del modelo GARCH(1,1)-M. Por ejemplo, los parámetros de los modelos de valuación de opciones de Engle y Lee (1996), Lewis (2000) y Hull y White (1987), podrían ser estimados por métodos muy simples.

En los últimas décadas, los modelos ARCH (modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional) han sido ampliamente aplicados en la literatura financiera y particularmente en la literatura de valuación opciones. El desarrollo de los modelos ARCH se debe a Engle (1982) y su versión generalizada conocida como GARCH se debe a Bollerslev (1986). Estos modelos suponen rendimientos distribuidos normalmente con una varianza condicional dependiente del tiempo y tienen la característica de describir de manera más adecuada las series de tiempo de rendimientos que los modelos tradicionales. El éxito inicial de los modelos ARCH al capturar no linealidades de las series de tiempo ha llevado a muchas extensiones del modelo original. Al mismo tiempo se observa frecuentemente el la literatura especializada el replanteamiento de los modelos de valuación de opciones que incorporan procesos ARCH a la dinámica de la varianza. Los modelos propuestos que explican la leptocurtosis son dos: aquellos realacionades con las leyes de estabilidad de Pareto (sugerido por Mandelbrot (1963)) y los modelos autorregresivos generalizados de heteroscedasticidad constante (GARCH) (debidos a Engle y Bollerslev (1986)).

El enfoque de tiempo discreto sobre valuación de opciones se debe a Brennan (1979) y Rubinstein (1976), el cual considera combinaciones de distribuciones y preferencias. Una conexión entre el enfoque de tiempo discreto y las innovaciones heteroscedásticas de los precios logarítmicos fue presentada por Duan (1995), en donde la dinámica del precio del activo es conducida por un proceso Gaussiano GARCH del tipo Bollerslev (1986). Duan indicó que debido a este ajuste se requiere una forma nueva de neutralidad al riesgo, a saber, la relación de valuación local neutral al riesgo (LRNVR), la cual se mantiene bajo requerimientos muy restrictivos en las preferencias del inversionista y de los supuestos distribucionales. La principal desventaja en los modelos más populares de precios de activos, incluyendo el de valuación de opciones GARCH de Duan, es el supuesto de lognormalidad en los rendimientos, pues al examinar la información del mercado claramente se contradice la hipótesis Gaussiana, además de que la valuación de la opción necesita de simulación numérica.

Cuando se quieren contrastar un conjunto de modelos de valuación con la realidad, en un marco de volatilidad estocástica, se requiere de fórmulas cerradas para obtener los precios activos. Afortunadamente, los modelos de Hull y White (1987), y Heston (1993) tienen, respectivamente, fórmulas de aproximación analíticas y semi-analíticas para valuar opciones europeas. Es importante destacar que para muchos modelos de volatilidad estocástica se encuentran disponibles en la literatura varios métodos numéricos. Sin embargo, estos procedimientos son computacionalmente intensivos y cuando hay portafolios grandes que tienen que ser valuados rápido y frecuentemente, esto no resulta práctico. Si una fórmula cerrada de solución estuviera disponible para un modelo GARCH, se podría combinar información de corte transversal de las opciones con información en series de tiempo del activo subyacente.

El desarrollo de la presente investigación es como sigue. En la siguiente sección se presentan y discuten los resultados preliminares para garantizar la convergencia. A través de la sección 3 se muestra la convergencia del modelo GARCH(1,1)-M a un proceso de difusión GARCH. En la sección 4 se lleva a cabo una demostración rápida (más intuitiva y menos formal). Por último, en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. Resultados preliminares para garantizar convergencia

La presente sección toma como marco de referencia a las opciones europeas sobre divisas, ya que típicamente la volatilidad de éstas presenta reversión a la media. Sea $S = (S_t)_{t\geq 0}$ el precio de una divisa subyacente y $V = (V_t)_{t\geq 0}$ su varianza instantánea. Suponga que $(S_t, V_t)_{t\geq 0}$ satisface el modelo de difusión GARCH bidimensional (véanse, al respecto, los trabajos de Wong (1964) y Nelson (1990)):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t \mathrm{d}B_t, \\ \mathrm{d}V_t &= (c_1 - c_2 V_t)dt + c_3 V_t \mathrm{d}W_t, \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes positivas y B_t y W_t son movimientos brownianos unidimensionales independientes en un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ con $\mathbb{P}$ como medida objetivo. En lo que sigue se fijan el tiempo inicial $t = 0$ y el vector $(S_0, V_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Como puede observarse, el proceso de V presenta reversión a la media con c_1/c_2 como el valor medio de largo plazo y c_2 como la tasa de reversión. Para un parámetro c_2 de valor pequeño, la velocidad de reversión es débil y V_t tiende a permanecer por arriba (o por abajo) del valor medio de largo plazo por períodos largos, generando clusters de volatilidad. El parámetro c_3 determina el comportamiento aleatorio de la volatilidad: para $c_3 = 0$ el proceso de la volatilidad es determinista y para $c_3 > 0$ la curtosis de la distribución de los rendimientos logarítmicos es mayor a 3. Cuando $c_1 = c_2 = 0$, el proceso de difusión GARCH se reduce al proceso lognormal sin tendencia del modelo de volatilidad estocástica de Hull y White (1987). A continuación se presentan las condiciones generales para que una serie en tiempo discreto de dimensión finita de procesos markovianos $\{{}_hX_t\}_{h\downarrow 0}$ converja débilmente a un proceso de Itô.

2.1 Especificación de supuestos

Sea $D([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ el espacio que mapea $[0,\infty)$ en $\mathbb{R}^n$ y suponga que es continuo por la derecha con límite izquierdo finito y sea $B(\mathbb{R}^n)$ la σ-álgebra de los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$. D es un espacio métrico cuando está dotado con una métrica del tipo de Skorohod (véase, por ejemplo, Billingsley (1968)). Para cada $h > 0$, sea M_{kh} la σ-álgebra generada por kh, es decir, ${}_hX_0, {}_hX_h, {}_hX_{2h}, ..., {}_hX_{kh}$, y sea v_h una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$. Para cada $h > 0$ y cada $k = 0, 1, 2, ...$, sea $\prod_{h,kh}(x, \cdot)$ un proceso de transición Markoviano en $\mathbb{R}^n$, es decir,

(*a*) $\prod_{h,kh}(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\prod_{h,kh}(\cdot,\Gamma)$ es $B(\mathbb{R}^n)$ medible para toda $\Gamma \in B(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $h > 0$, sea $\mathbb{P}_h$ la medida de probabilidad en $D([0,\infty),\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mathbb{P}_h[{}_hX_0 \in \Gamma] = \nu_h(\Gamma) \text{ para cualquier } \Gamma \in B(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$
$$\mathbb{P}_h[{}_hX_t =_h X_{kh}, kh \leq t < (k+1)h] = 1, \tag{2}$$
$$\mathbb{P}_h[{}_hX_{(k+1)h} \in \Gamma \,|M_{kh}] = \prod\nolimits_{h,kh}({}_hX_{kh},\Gamma) \text{ casi seguramente bajo } \mathbb{P}_h$$
$$\text{para toda } k \geq 0 \text{ y } \Gamma \in B(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Para cada $h > 0$, (1) especifica la distribución del punto inicial aleatorio y (33) las probabilidades de transición de los procesos de Markov en tiempo discreto n-dimensional ${}_hX_{kh}$. Se define el proceso en tiempo continuo ${}_hX_t$ a partir de los procesos en tiempo discreto ${}_hX_{kh}$ mediante la ecuación (2), al definir ${}_hX_t$ como una función de pasos en tiempos discretos h, $2h$, $3h$, y asísucesivamente. La notación en la función de pasos considera tres tipos distintos de procesos:

(a) la sucesión de procesos en tiempo discreto ${}_hX_{kh}$ que depende tanto de h como del índice tiempo (discreto) kh, $k = 0, 1, 2, ...,$
(b) la sucesión de procesos en tiempo continuo $\{{}_hX_t\}$ formado como funciones de pasos del proceso en tiempo discreto en (a) utilizando (2) (este proceso también depende de h y de un índice de tiempo (continuo) t, $t \geq 0$),
(c) un proceso límite de difusión X_t al cual, bajo condiciones dadas abajo, la sucesión de procesos $\{{}_hX_t\}_{h\downarrow 0}$ converge débilmente.

Si A' denota la transpuesta de la matriz (vector) A, se define la norma de A, denotada por $\|A\|$ como

$$\|A\| = \begin{cases} [A'A]^{1/2} \text{ cuando } A \text{ es un vector columna,} \\ [\text{traza}(A'A)]^{1/2} \text{ cuando } A \text{ es una matriz.} \end{cases} \tag{4}$$

Para cada $h > 0$ y cada $\varepsilon > 0$, se define

$$a_h(x,t) \equiv h^{-1} \int_{\|y-x\| \leq 1} (y-x)(y-x)' \prod\nolimits_{h,h[t/h]}(x,dy), \tag{5}$$
$$b_h(x,t) \equiv h^{-1} \int_{\|y-x\| \leq 1} (y-x) \prod\nolimits_{h,h[t/h]}(x,dy), \tag{6}$$
$$\Delta_{h,\varepsilon}(x,t) \equiv h^{-1} \int_{\|y-x\| \geq \varepsilon} \prod\nolimits_{h,h[t/h]}(x,dy), \tag{7}$$

donde $[t/h]$ es la parte entera de t/h, es decir, el entero mayor $k \leq t/h$. La integración en (5)-(6) es tomada sobre $\|y - x\| \leq 1$ más que sobre $\mathbb{R}^n$ porque los momentos condicionales usuales pueden no ser finitos[1]. Las funciones $a_h(x,t)$ y $b_h(x,t)$ son medidas (truncadas) del segundo momento y de la tendencia

[1] Por ejemplo, X_t=exp[exp(W_t)], con W_t como movimiento Browniano, es una difusión pero no tiene momentos de ningún orden sobre cualquier intervalo de tamaño positivo.

por unidad de tiempo, respectivamente. Los resultados de convergencia que se presentan a continuación requieren que $a_h(x,t)$ y $b_h(x,t)$ converjan a límites finitos, y que $\Delta_{h,\varepsilon}(x,t)$ tienda a cero para todo $\varepsilon > 0$. Asimismo, $\Delta_{h,\varepsilon}(x,t)$ es una medida de la probabilidad por unidad de tiempo de un salto de tamaño ε o mayor. Dado que los procesos de difusión tienen trayectorias muestrales que son continuas con probabilidad uno, no debería sorprender que la probabilidad de los saltos discretos de cualquier tamaño fijo ε ($\varepsilon > 0$) o mayor tienda a cero. El primer resultado que se presentará sobre la convergencia en cuestión requiere de los siguientes supuestos:

Supuesto 1. Existe un mapeo continuo, medible $a(x,t)$ de $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ en el espacio de matrices de $n \times n$ definidas no negativas y simétricas y un mapeo medible continuo $b(x,t)$ de $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $R > 0$, $T > 0$ y $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{\|x\|\leq R, 0\leq t\leq T} \|a_h(x,t) - a(x,t)\| = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{\|x\|\leq R, 0\leq t\leq T} \|b_h(x,t) - b(x,t)\| = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{\|x\|\leq R, 0\leq t\leq T} \Delta_{h,\varepsilon}(x,t) = 0. \tag{10}$$

Las ecuaciones (8) y (9) requieren que el segundo momento y la tendencia por unidad de tiempo converjan uniformemente en conjuntos compactos para funciones de tiempo bien comportadas y variables de estado x. La ecuación (10) requiere que la probabilidad por unidad de tiempo de un salto de tamaño ε o mayor se desvanezca uniformemente en conjuntos compactos para toda $\varepsilon > 0$, por lo que las trayectorias muestrales del proceso límite son continuas con probabilidad uno. Otro supuesto necesario es que

Supuesto 2. Existe un mapeo continuo y medible $\sigma(x,t)$ de $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ en el espacio de matrices de $n \times n$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \geq 0$,

$$a(x,t) = \sigma(x,t)\sigma(x,t)'. \tag{11}$$

El supuesto anterior requiere que la función $a(x,t)$, que determina el segundo momento por unidad de tiempo del proceso límite, tenga una matriz raíz cuadrada bien comportada $\sigma(x,t)$. El siguiente supuesto requiere que la medida de probabilidad v_h de los puntos aleatorios iniciales ${}_hX_0$ converjan a una medida límite v_0 conforme $h \downarrow 0$, de tal forma que

Supuesto 3. Conforme $h \downarrow 0$, ${}_hX_0$ converge en distribución a una variable aleatoria X_0 con medida de probabilidad v_0 en $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$.

En resumen, se ha especificado una medida de probabilidad v_0 para el valor inicial del proceso límite X_t, una función instantánea de tendencia $b(x,t)$, una matriz instantánea de covarianzas[2] $a(x,t)$, que garantizan que el proceso límite

[2] Conforme $h\downarrow 0$, la diferencia entre la matriz de covarianzas condicional y la matriz de segundos momentos condicionales se disminuye, por lo que en el límite en tiempo continuo las dos son idénticas.

exista y que tenga trayectorias muestrales que sean continuas con probabilidad uno. En este punto, hay dos cosas que requieren de una aclaración adicional: primero, un proceso límite puede no existir, porque cuando se consideran juntas v_0, $a(x,t)$, y $b(x,t)$ puede ser que el proceso explote (con probabilidad positiva) a infinito en tiempo finito. Segundo, v_0, $a(x,t)$, y $b(x,t)$ puede no definir *únicamente* un proceso límite. Por ejemplo, se podría requerir información adicional en forma de condiciones frontera[3]. Existen algunas investigaciones en la literatura sobre la condiciones bajo las cuales v_0, $a(x,t)$ y $b(x,t)$ definen únicamente una difusión límite (véase, por ejemplo, Stroock y Varadhan (1979)). Al respecto se adopta el siguiente supuesto.

Supuesto 4. Las funciones v_0, $a(x,t)$ y $b(x,t)$ determinan únicamente la distribución del proceso de difusión X_t, con distribución inicial v_0, matriz de difusión $a(x,t)$ y vector de tendencia $b(x,t)$.

2.2 Planteamiento del teorema de convergencia

Una vez que se han planteado los supuestos necesarios para garantizar la existencia y unicidad del proceso límite, a continuación, se presenta el primer resultado:

Teorema 1. Bajo los Supuestos 1 al 4, la sucesión de los procesos ${}_hX_t$ definidos por (1)-(3) converge débilmente (es decir, en distribución) conforme $h \downarrow 0$ al proceso X_t definido por la ecuación integral estocástica

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s, s)\mathrm{d}W_{n,s}, \tag{12}$$

donde $W_{n,t}$ es un movimiento Browniano estándar n-dimensional[4], independiente de X_0 y donde para cualquier $\Gamma \in B(\mathbb{R}^n)$ se cumple que $\mathbb{P}(X_0 \in \Gamma) = v_0(\Gamma)$. El proceso X_t es único. La distribución de X_t no depende de la elección de $\sigma(\cdot,\cdot)$ hecha en el Supuesto 2. Por último, X_t permanece finita en intervalos finitos de tiempo casi seguramente, es decir, para toda $T > 0$,

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t\| < \infty] = 1. \tag{13}$$

La convergencia en distribución en el Teorema 1 no es meramente una convergencia en distribución de $\{{}_hX_t\}$ para un valor fijo de t: aún más para cualquier T, $0 \leq T < \infty$, las leyes de probabilidad que generan las trayectorias muestrales completas $\{{}_hX_t\}$, $0 \leq T < \infty$ convergen a la ley de probabilidad que genera la trayectoria muestral de $X_t, 0 \leq T < \infty$. De ahora en adelante, se denotará este tipo de convergencia en distribución mediante el símbolo $\Rightarrow$, mientras que $\xrightarrow{d}$ denotará la convergencia en distribución de las variables aleatorias en $\mathbb{R}^1$ ó $\mathbb{R}^n$.

[3] Para ejemplos de explosión y no unicidad, véase Stroock y Varadhan (1979).

[4] Es decir, $W_{n,t}$ es un movimiento Browniano n-dimensional tal que para toda t, $\mathbb{E}[W_{n,t}]= W_{n,0}=0_n$ y $\mathrm{d}W_{n,t}\mathrm{d}W'_{n,t}=I_{n,n}\mathrm{d}t$, donde $I_{n,n}$ es la matriz identidad de $n\times n$.

2.3 Un conjunto alternativo de condiciones para convergencia

El Supuesto 1 es complicado de verificar, dado que las integrales son tomadas sobre $\| y-x \| \leq 1$ y sobre $\| y-x \| \geq \varepsilon$. De alguna manera esto limita la utilidad del Teorema 1. Por lo tanto, es importante contar con una alternativa más simple, aunque de alguna forma menos general que el Supuesto 1. Primero, para cada i, $i = 1, ..., n$, cada $\delta > 0$ y cada $h > 0$ se define

$$c_{h,i,\delta}(x,t) \equiv h^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |(y-x)_i|^{2+\delta} \prod\nolimits_{h,h[t/h]} (x, \mathrm{d}y), \tag{14}$$

donde $(y-x)_i$ es el i-ésimo elemento del vector $y-x$. Si para algún $\delta > 0$ y todo i, $i = 1, ..., n$, $c_{h,i,\delta}(x,t)$ es finito, entonces las siguientes integrales están bien definidas y son finitas:

$$a_h^*(x,t) \equiv h^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} (y-x)(y-x)' \prod\nolimits_{h,h[t/h]} (x, \mathrm{d}y), \tag{15}$$

$$b_h^*(x,t) \equiv h^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} (y-x) \prod\nolimits_{h,h[t/h]} (x, \mathrm{d}y). \tag{16}$$

En virtud de que $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$, $a^*(\cdot,\cdot)$ y $b^*(\cdot,\cdot)$ son medidas del segundo momento y de la tendencia por unidad de tiempo, la diferencia ahora es que las integrales son tomadas sobre $\mathbb{R}^n$ en lugar de $\| y-x \| \leq 1$. A continuación se establece el siguiente supuesto alternativo al supuesto 1:

Supuesto 5. Existe una $\delta > 0$ tal que para cada $R > 0$, cada $T > 0$ y cada $i = 1, ..., n$,

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\| x \| \leq R, 0 \leq t \leq T} c_{h,i,\delta}(x,t) = 0. \tag{17}$$

Además, existe una mapeo continuo $a(x,t)$ de $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ en el espacio de matrices de $n \times n$ definidas no negativas simétricas y un mapeo continuo $b(x,t)$ de $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\| x \| \leq R, 0 \leq t \leq T} \| a_h^*(x,t) - a(x,t) \| = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\| x \| \leq R, 0 \leq t \leq T} \| b_h^*(x,t) - b(x,t) \| = 0. \tag{19}$$

De esta forma, se tiene que

Teorema 2. Bajo los Supuestos 2 al 5, las conclusiones del Teorema 1 se mantienen.[5]

Los Teoremas 1 y 2 proveen una forma relativamente simple de garantizar la convergencia a un proceso límite de Itô. En esencia, el Teorema 2 dice que si la tendencia y el segundo momento de ${}_hX_{kh}$ por unidad de tiempo convergen a límites bien comportados, y si las primeras diferencias de ${}_hX_{kh}$ tienen un

[5] véase, por ejemplo, Arnold (1974).

momento absoluto mayor a dos que se colapsa a cero a una tasa apropiada de $h \downarrow 0$, entonces los procesos ${}_hX_t$ convergen en distribución a la solución del sistema de la ecuación integral estocástica (12).

3. Convergencia de GARCH(1,1)-M a un proceso de difusión GARCH

En esta sección se demuestra la convergencia de modelo GARCH(1,1)-M a un proceso de difusión GARCH. l proceso GARCH(1,1)-M de Engle y Bollerslev (1986) para el logaritmo de rendimientos de los excedentes acumulativos Y_t en un portafolio está dado por

$$Y_t = Y_{t-1} + c\sigma_t^2 + \sigma_t Z_t, \tag{20}$$
$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sigma_t^2(\beta + \alpha Z_t^2), \tag{21}$$

donde Z_t son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $\mathcal{N}(0,1)$. A continuación se consideran las propiedades del sistema de ecuaciones estocásticas en diferencia (20)-(21) conforme se una partición del intervalo de tiempo del modelo GARCH(1,1)-M se hace cada vez más y más fina. Sin pérdida de generalidad, se permite que los parámetros del sistema α, β y ω dependan de h, y se supone que tanto el término de tendencia en (20) como la varianza de Z_t sean proporcional a h, es decir:

$${}_hY_{kh} = {}_hY_{(k-1)h} + h \cdot c \cdot {}_h\sigma_{kh}^2 + {}_h\sigma_{kh} \cdot {}_hZ_{kh}, \tag{22}$$
$${}_h\sigma_{(k+1)h}^2 = \omega_h + {}_h\sigma_{kh}^2(\beta_h + h^{-1}\alpha_h \cdot {}_hZ_{kh}^2), \tag{23}$$

y

$$\mathbb{P}[({}_hY_0, {}_h\sigma_0^2) \in \Gamma] = \nu_h(\Gamma) \;\text{ para cualquier }\; \Gamma \in \mathrm{B}(\mathrm{R}^2), \tag{24}$$

donde $\{{}_hZ_{kh}\}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $\mathcal{N}(0,h)$. También se supone que la sucesión de medidas $\{\nu_h\}_{h\downarrow 0}$ satisface el Supuesto 3, y que para $h \geq 0$, $\nu_h((Y_0, \sigma_0^2) : \sigma_0^2 > 0) = 1$. Para concluir, se crea el proceso en tiempo continuo ${}_hY_t$ y ${}_h\sigma_t^2$ por

$${}_hY_t \equiv {}_hY_{kh} \quad \text{y} \quad {}_h\sigma_t^2 \equiv {}_h\sigma_{kh}^2 \quad \text{para} \quad kh \leq t < (k+1)h. \tag{25}$$

Se permite que ω, α y β dependan de h a fin de descubrir qué sucesiones $\{\omega_h\}$, $\{\alpha_h\}$ y $\{\beta_h\}$ hacen que los procesos $\{{}_h\sigma_t^2\}$ y $\{{}_hY_t\}$ (en donde ahora ${}_h\sigma_t^2$ representa la varianza por unidad de tiempo y $c \cdot {}_h\sigma_t^2$ la prima de riesgo por unidad de tiempo) converjan en distribución a un límite de proceso de Itô conforme h tiende a cero. Asimismo, se requiere que para toda h, ω_h, α_h y β_h sean no negativas, lo cual asegura que el proceso σ_t^2 permanezca positivo con probabilidad uno (véase Bollerslev (1986)).

El proceso de tiempo discreto (22)-(24) es claramente Markoviano y la tendencia por unidad de tiempo (condicionada en la información al tiempo $(k-1)h$) está dada por

$$\mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} -{}_h Y_{(k-1)h}) \,|M_{\,kh}] = c \cdot_h \sigma_{kh}^2, \tag{26}$$
$$\mathbb{E}[h^{-1}({}_h\sigma_{(k+1)h}^2 -{}_h \sigma_{kh}^2) \,|M_{\,kh}] = h^{-1}\omega_h + h^{-1}(\beta_h + \alpha_h - 1){}_h\sigma_{kh}^2, \tag{27}$$

donde M_{kh} es la σ-álgebra generada por kh, ${}_hY_0, \ldots, {}_hY_{(k-1)h}$, y ${}_h\sigma^2_0, \ldots, {}_h\sigma^2_{kh}$. Para que la tendencia por unidad de tiempo converja como es requerido por el Supuesto 5, los límites

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}\omega_h = \omega \geq 0, \tag{28}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(1-\beta_h-\alpha_h) = \theta, \tag{29}$$

deben existir y ser finitos. Observe que se requiere que ω sea no negativo y donde θ puede ser de cualquier signo. El segundo momento por unidad de tiempo está dado por

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})^2/h\,|M_{kh}] \\
&= h^{-1}\omega_h^2 + 2h^{-1}\omega_h(\beta_h+\alpha_h-1)_h\sigma^2_{kh} \\
&+ h^{-1}(\beta_h+\alpha_h-1)^2{}_h\sigma^4_{kh} + 2h^{-1}\alpha^2_{h\,h}\sigma^4_{kh}, && (30)\\
&\mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} -{}_h Y_{(k-1)h})^2\,|M_{kh}] = hc_h^2\sigma^4_{kh} + {}_h\sigma^2_{kh}, && (31)\\
&\mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} -{}_h Y_{(k-1)h})({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})\,|M_{kh}] \\
&= c\cdot{}_h\sigma^2_{kh}\cdot\omega_h + c\cdot{}_h\sigma^4_{kh}(\beta_h+\alpha_h-1). && (32)
\end{aligned}$$

Si se sustituyen (28)-(29) en (30)-(32) y se supone que

$$\lim_{h\downarrow 0} 2h^{-1}\alpha_h^2 = \alpha^2 > 0, \tag{33}$$

existe y es finito, entonces se tiene que

$$E[h^{-1}({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})^2\,|M_{kh}] = \alpha^2{}_h\sigma^4_{kh} + o(1), \tag{34}$$

$$E[h^{-1}({}_hY_{kh} -{}_h Y_{(k-1)h})^2\,|M_{kh}] = {}_h\sigma^2_{kh} + o(1), \tag{35}$$

$$E[h^{-1}({}_hY_{kh} -{}_h Y_{(k-1)h})({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})\,|M_{kh}] = o(1), \tag{36}$$

donde el término $o(1)$ disminuye uniformemente en conjuntos compactos. No es difícil encontrar sucesiones de $\{\omega_h\}$, $\{\alpha_h\}$ y $\{\beta_h\}$ que satisfagan (28), (29) y (33), basta tomar $\omega_h = \omega h$, $\beta_h = 1 - \alpha(h/2)^{1/2} - \theta h$ y $\alpha_h = \alpha(h/2)^{1/2}$. Ahora bien, se puede verificar en forma directa, aunque resulta tedioso, que los límites de

$$\mathbb{E}[h^{-1}({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})^4\,|M_{kh}] \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} -{}_h Y_{(k-1)h})^4\,|M_{kh}]$$

existen y convergen a cero, por lo que con $\delta = 2$,

$$b(Y,\sigma^2) \equiv \begin{bmatrix} c\cdot\sigma^2 \\ \omega - \theta\sigma^2 \end{bmatrix},$$

$$a(Y,\sigma^2) \equiv \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2\sigma^4 \end{bmatrix},$$

y si además ω_h, α_h y β_h satisfacen (28), (29) y (33), entonces el Supuesto 5 se mantiene. Si se hace que $\sigma(\cdot,\cdot)$ en el Supuesto 2 sea igual elemento por elemento a la raíz cuadrada de $a(Y,\sigma^2)$, entonces se mantiene el Supuesto 2. Las ecuaciones (37)-(38) sugiere un proceso de difusión límite de la forma:

$$\mathrm{d}Y_t = c\cdot\sigma_t^2\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}W_{1,t}, \tag{39}$$

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{t}}^2 = (\omega-\theta\sigma_t^2)\mathrm{d}t + \alpha\sigma_t^2\mathrm{d}W_{2,t}, \tag{40}$$

$$\mathbb{P}[(Y_0,\sigma_0^2)\in\Gamma] = \nu_0(\Gamma) \quad \text{para cualquier} \quad \Gamma\in B(\mathbb{R}^2), \tag{41}$$

donde $W_{1,t}$ y $W_{2,t}$ son movimientos Brownianos estándar estocásticamente independientes e independientes de sus valores iniciales (Y_0,σ_0^2).

4. Prueba rápida de convergencia

En esta sección se presenta una prueba rápida de convergencia que aunque es menos formal es muy intuitiva. Considere el modelo GARCH(1,1)-M:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + c\sigma_t^2 + \sigma_t Z_t,\\ \sigma_{t+1}^2 &= \omega + \sigma_t^2(\beta+\alpha Z_t^2), \end{aligned}$$

$Z_t \sim N(0,1)$; $\omega_h,\ \alpha_h,\ \beta_h \geq 0$. Considere una partición con $kh\leq t\leq (k+1)h$ y $h=1/N$, de la forma $t_k=hk$, es decir,

$$\begin{aligned} t_0 &= 0\\ t_1 &= h\\ t_2 &= 2h = 2/N\\ t_N &= Nh = 1 \end{aligned}$$

Para el proceso Y_t, se define

$$\begin{aligned} {}_hY_{kh} &= {}_hY_{(k-1)h} + c\cdot {}_h\sigma_{kh}^2 + {}_h\sigma_{kh}\cdot {}_hZ_{kh},\\ {}_hY_{kh} - {}_hY_{(k-1)h} &= c\cdot {}_h\sigma_{kh}^2 + {}_h\sigma_{kh}\cdot {}_hZ_{kh}. \end{aligned}$$

Esta última expresión converge a

$$\mathrm{d}Y_t = c\cdot\sigma_t^2\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}W_{1,t}.$$

Asimismo, para σ_t se tiene que

$${}_h\sigma_{(k+1)h}^2 = \omega_h + {}_h\sigma_{kh}^2[\beta_h + \alpha_h\cdot {}_hZ_{kh}^2],$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} {}_h\sigma_{(k+1)h}^2 - {}_h\sigma_{kh}^2 &= \omega_h + {}_h\sigma_{kh}^2\cdot\beta_h - {}_h\sigma_{kh}^2 + {}_h\sigma_{kh}^2\cdot\alpha_h\cdot {}_hZ_{kh}^2 + \alpha_h\cdot {}_h\sigma_{kh}^2\\ &\quad - \alpha_h\cdot {}_h\sigma_{kh}^2,\\ &= \omega_h - (1-\alpha_h-\beta_h)\,{}_h\sigma_{kh}^2 + \alpha_h\cdot {}_h\sigma_{kh}^2({}_hZ_{kh}^2 - 1),\\ &= \omega_h - \theta_h\sigma_{kh}^2 + \alpha_h\cdot {}_h\sigma_{kh}^2({}_hZ_{kh}^2-1). \end{aligned}$$

Si se utiliza ahora la aproximación $\ln(x) \approx x - 1$ válida cuando $x \approx 1$, se tiene que la ecuación anterior puede ser aproximada de la siguiente forma:

$$_h\sigma^2_{(k+1)h} - {_h\sigma^2_{kh}} = \omega_h - \theta_h \sigma^2_{kh} + \alpha_h \cdot {_h\sigma^2_{kh}} \cdot \ln({_hZ^2_{kh}}).$$

Observe que las variables aleatorias $\ln({_hZ^2_{kh}})$ toman valores entre $-\infty$ y ∞. Como las variables aleatorias $\ln({_hZ^2_{kh}})$ son independientes con varianza finita, por el teorema del límite central se tiene que $\ln({_hZ^2_{kh}}) \to Y$ donde $Y \sim \mathcal{N}(0,t)$, siempre y cuando el número de subintervalos se vaya a infinito. Si se escribe ahora $Y = \mathrm{d}W_{2,t}$, se obtiene que

$$\mathrm{d}\sigma^2_{\mathrm{t}} = (\omega - \theta\sigma^2_t)\mathrm{d}t + \alpha\sigma^2_t \mathrm{d}W_{2,t}$$

donde se ha supuesto que

$$\begin{aligned} &\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}\omega_h = \omega \geq 0, \\ &\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(1 - \beta_h - \alpha_h) = \theta. \end{aligned}$$

5. Conclusiones

Este trabajo ha mostrado, bajo ciertas condiciones (Supuestos (1)-(2) ó (2)-(6)), la convergencia del modelo GARCH(1,1)-M al movimiento geométrico Browniano con reversión a la media (proceso de difusión GARCH). Con este resultado el problema de inferencia sobre los parámetros de modelos de valuación de opciones europeas con volatilidad estocástica (como los de Engle y Lee (1996), Lewis (2000) y Hull y White (1987)) puede ser reducido a la estimación del modelo GARCH(1,1)-M. Asimismo, se lleva a cabo una discusión detallada sobre los supuestos que garantizan la existencia y unicidad del proceso límite. Por último, se desarrollo una prueba rápida de convergencia menos formal, pero más intuitiva y fácil de recordar.

Bibliografía

Arnold, L. (1974).*Stochastic differential equations: Theory and applications*, Wiley, New York, NY.

Billingsley, P. (1968).*Convergence of probability measures*, Wiley, New York, NY.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

Brennan, M. J. (1979). The pricing of contingent claims in discrete time models, *Journal of Finance*, 34, pp. 5368.

Duan, J. (1995). The GARCH option pricing model, *Mathematical Finance*, 5, pp. 1332.

Engle, R. F., and T. Bollerslev (1986). Modelling the persistence of conditional variances, *Econometric Review*, 5, pp. 1-50.

Engle, R. F., and G. G. J. Lee (1996).*Estimating diffusion models of stochastic volatility*, In: Rossi, P.E. (Ed.), Modeling Stock Market Voletility: Bridging the Gap to Continuous Time, Academic Press, New York.

Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, 6, pp. 327-343.

Hull, J., and A. White (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, 42, pp. 281-300.

Lewis, A. L. (2000).*Option valuation under stochastic volatility*, Finance Press, CA, USA.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, 36, pp. 394-419.

Nelson, D. B. (1990). ARCH Models as diffusion approximations, *Journal of Econometrics*, 45, pp. 7-38.

Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options, Bell Journal of Economics and Management Science, 7, pp. 407-425

Sabanis, S. (2002). Stochastic volatility, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 5, pp. 515-530.

Stroock, D. W. and S. R. S. Varadhan (1979). Multidimensional diffusion processes Springer Verlag, Berlin.

Wong, E. (1964). The construction of a class of stationary markoff processes. In: Belleman, R. (Ed.), 16th Symposium in Applied Mathematics, Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering, *American Mathematical Society*, Providence, pp. 264-276.