

## B A D A N I A O P E R A C Y J N E I D E C Y Z J E

Nr 3–4

2006

Henryk GURGUL\*, Tomasz WÓJTOWICZ\*

DŁUGOOKRESOWE WŁASNOŚCI WOLUMENU OBROTÓW  
I ZMIENNOŚCI CEN AKCJI  
NA PRZYKŁADZIE SPÓŁEK Z INDEKSU DJIA

W artykule zaprezentowano wyniki badania długiej pamięci wolumenu obrotów oraz zmienności stóp zwrotu akcji (mierzonej jako wartości bezwzględne stóp zwrotu oraz jako ich kwadraty) największych spółek, wchodzących w skład indeksu DJIA. Wyestymowane zostały parametry długiej pamięci oraz zbadano, czy wolumen obrotów i zmienność cen akcji mają tę samą długą pamięć oraz czy są ze sobą ułamkowo skointegrowane. Obliczenia przeprowadzono na podstawie danych dziennych dla całego okresu od stycznia 1990 r. do listopada 2005 r. oraz dla czterech podokresów: styczeń 1990 – grudzień 1993, styczeń 1994 – grudzień 1997, styczeń 1998 – grudzień 2001 i styczeń 2002 – listopad 2005.

Słowa kluczowe: *indeks DJIA, wielkość obrotów, jednowymiarowa i dwuwymiarowa długa pamięć*

## 1. Wstęp

Zagadnienie długiej pamięci, zwane też własnością długoterminowej zależności, przejawia się w istnieniu autokorelacji obserwacji tworzących szereg czasowy i to autokorelacji wysokiego rzędu. Oznacza to, że istnieje zależność między obserwacjami nawet znacznie odległymi czasowo. Zjawisko długiej pamięci odkrył brytyjski hydrolog Hurst [40], który badał autokorelację dla wylewów Nilu w Egipcie.

Własności szeregu czasowego są charakteryzowane przede wszystkim za pomocą funkcji autokorelacji (ang. *autocorrelation function*, skrót ACF) i funkcji autokorelacji cząstkowej (ang. *partial autocorrelation function*, skrót PACF). W przypadku istnienia własności długiej pamięci funkcja autokorelacji ACF opada w tempie hiperbolicznym, a więc powoli. Szereg czasowy posiadający własność długiej pamięci ma

---

\* Wydział Zarządzania, Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica, ul. Kawiorów 40, 30-055 Kraków, e-mail: [henryk.gurgul@uni-graz.at](mailto:henryk.gurgul@uni-graz.at), [twojtow@agh.edu.pl](mailto:twojtow@agh.edu.pl)

w dziedzinie spektralnej rozkład o niskiej częstotliwości. Szeregi czasowe o krótkiej pamięci wykazują istotne autokorelacje tylko niskich rzędów, co oznacza, że obserwacje, które oddziela nawet stosunkowo niewielki przedział czasu, nie są już skorelowane. Szeregi z krótką pamięcią dają się stosunkowo łatwo rozpoznać, bo z jednej strony w dziedzinie czasu ACF szybko zanika, a z drugiej strony w dziedzinie spektralnej występują rozkłady o wysokiej częstotliwości. Dla przykładu, szeregi czasowe, które dają się opisać za pomocą modelu liniowego typu ARMA mają krótką pamięć. Występowanie długiej pamięci ogranicza możliwości stosowania tradycyjnych modeli liniowych szeregów czasowych. Rzeczywistość ekonomiczna ma przeważnie naturę stochastyczną (prawa ekonomiczne ujawniają się dopiero w „masie” przypadków), poza tym związki między zmiennymi ekonomicznymi mają najczęściej charakter nieliniowy. Dlatego modele martyngałowe (zakładające prognozę np. ceny akcji na poziomie zrealizowanym w ostatnim okresie) nie mogą wynikać z zasady arbitrażu, ponieważ nowa, napływająca na rynek informacja nie może być całkowicie „odizolowana”. Poważne problemy powoduje zjawisko długiej pamięci przy wycenie instrumentów pochodnych za pomocą metod martyngałowych. Jeśli towarzyszący tej wycenie ciągły proces stochastyczny wykazuje długą pamięć, to martyngałowe metody wyceny mogą zawodzić. W przypadku długiej pamięci przeważnie zawodzą procedury statystyczne, stosowane np. w kontekście modeli wyceny aktywów.

W literaturze rozważa się trzy rodzaje efektywności rynków finansowych: słabą, półsilną i silną. Z badań empirycznych nad efektywnością rynków akcji wynika, że rozwinięte rynki akcji, a także tzw. rynki wschodzące, wykazują co najmniej efektywność informacyjną w sensie słabym i półsilnym. Ten ostatni rodzaj efektywności ma miejsce, gdy wszyscy uczestnicy rynku mają równy dostęp do publicznej informacji, a ceny reagują natychmiast na nową istotną informację, która dotarła na rynek i to tylko w dniu jej dotarcia. Istnienie długiej pamięci jest, przynajmniej do pewnego stopnia, sprzeczne z hipotezą efektywności rynku w sensie półsilnym. W przypadku długiej pamięci ceny i/lub wielkość obrotów niekoniecznie reagują tylko w dniu dotarcia informacji do uczestników rynku. Reakcja może się rozciągać na wiele dni. Poza tym występowanie długiej pamięci świadczy o istnieniu składowej systematycznej w szeregu czasowym, która może być prognozowana. W szczególności, nawet odległe czasowo stopy zwrotu czy wielkości obrotów mogą wykazywać istotną autokorelację. Oznacza to, że znajomość historycznych stóp zwrotu bądź historycznych wielkości obrotów może być pomocna w odgadnięciu przyszłych stóp zwrotu lub przyszłych wielkości obrotów, a to mogłoby prowadzić do zysków spekulacyjnych na tego rodzaju rynku. W świetle teorii rynku efektywnego takie spekulacyjne zyski nie są jednak możliwe. Jak więc widać, istnienie długiej pamięci w szeregach finansowych, pochodzących z danego rynku, jeśli nawet nie przeczy efektywności informacyjnej tego rynku, to co najmniej stawia ją pod znakiem zapytania.

Po tym krótkim wstępie w następnym rozdziale przedstawimy zagadnienia rozważane w literaturze w kontekście trzech podstawowych zmiennych, charakteryzujących

giełdowe rynki akcji: stopy zwrotu, zmienności stóp zwrotu, a przede wszystkim wielkości obrotów. W literaturze przedmiotu prezentowany jest coraz częściej pogląd, że dla oceny skuteczności inwestowania na rynkach akcji konieczne jest kompleksowe badanie zachowania poszczególnych akcji z uwzględnieniem wszystkich wymienionych powyżej zmiennych. W rozdziale trzecim przedstawimy szczegółowo metodykę badania zjawiska długiej pamięci oraz metody estymacji parametru długiej pamięci. Dane, które posłużyły do badań zostaną pokrótce scharakteryzowane w rozdziale czwartym. Rozdział piąty zawiera zestawienie i omówienie wyników obliczeń. Główne wnioski, wynikające z przeprowadzonych badań, zostaną przedstawione w uwagach końcowych.

## 2. Wielkość obrotów a ceny i ich zmienność

Jeszcze nie tak dawno temu inwestorzy giełdowi skupiali swoją uwagę niemal wyłącznie na cenach akcji i tendencjach ich zmian w czasie. Ceny akcji, na które bez wątplenia mają wpływ rozmaite informacje docierające na giełdę, wyrażają przekonania inwestorów dotyczące perspektyw rozwojowych danej spółki. Powszechnie przyjmuje się, że napływające na rynek informacje są główną przyczyną zmian oczekiwań inwestorów, a zatem i główną przyczyną zmian cen. Musimy tu podkreślić, że zdarzają się sytuacje, w których pomimo napływu nowych informacji ceny nie ulegają zmianie. Powody mogą być dwa. Po pierwsze: różni inwestorzy mogą różnie interpretować różne informacje. Po drugie: inwestorzy mogą interpretować daną informację identycznie, ale mogą mieć różne oczekiwania początkowe. Jeśli np. ktoś spodziewał się znacznego wzrostu dywidendy, a wzrost ten jest minimalny, to jest to dla niego zła informacja. Jeśli zaś inny inwestor spodziewał się spadku dywidendy, to zapowiedź nawet minimalnego jej wzrostu będzie dla niego zapewne dobrą informacją. Jak widać, różnice w ocenie zdarzenia (w tym przypadku ogłoszenia dywidendy) wynikają z różnic w początkowych oczekiwaniach inwestorów. Zmiany cen akcji reprezentują sumę lub średnią oczekiwań inwestorów. Zmiany te można zauważyć tylko dzięki aktywności handlowej inwestorów, a więc pod warunkiem, że ma miejsce dodatnia wielkość obrotów.

Spośród kilku miar aktywności handlowej najczęściej występują:

- a) liczba transakcji w pewnym okresie (ang. *number of trades per period*),
- b) liczba akcji sprzedanych  $X_{j,t}$  (ang. *share volume*),
- c) iloraz liczby akcji sprzedanych i wystawionych do sprzedaży  $\tau_{i,j} = X_{j,t} / N_{j,t}$

(ang. *turnover ratio*).

Dane dotyczące obrotów są obecnie dostarczane przez różne media łącznie z danymi dotyczącymi cen akcji. Między innymi dlatego w najnowszej literaturze

przedmiotu autorzy usiłują rozstrzygnąć dylemat, czy wielkość obrotów jest tylko jednym z parametrów opisowych aktywności handlowej, czy też wielkość obrotów może być źródłem dodatkowych cennych informacji, które mogą przyczynić się do bardziej adekwatnego modelowania stóp zwrotu i ich zmienności. Przyjmuje się, że – podobnie jak to jest w przypadku cen – zarówno wielkość obrotów, jak i ich zmienność zależą od napływu informacji na rynek. W przeciwieństwie do cen zakłada się, że nowe informacje prowadzą do coraz to nowych chwilowych stanów równowagi. W konsekwencji napływające informacje przyczyniają się do wzrostu wielkości obrotów, bo wielkość obrotów odzwierciedla nie średnią (jak to jest w przypadku cen), lecz sumę decyzji inwestorów, podejmowanych w odpowiedzi na nadchodzące z rynku impulsy. Proces uśredniania, w wyniku którego kształtują się ceny akcji, nie zachodzi w przypadku wielkości obrotów. Nie dochodzi zatem do utraty części informacji, dotyczących procesów występujących na giełdowym rynku akcji. Można wysunąć hipotezę, że tak jak o monecie świadczy nie tylko jej awers, ale i rewers, tak i akcja jest charakteryzowana nie tylko przez jej cenę, ale też przez wielkość obrotów.

Można więc przypuszczać, że równoczesna obserwacja zmian zarówno cen akcji, jak i wielkości obrotów pozwala lepiej zrozumieć zachowanie rynku akcji w czasie i wpływ treści napływających na rynek informacji na ceny i wielkość obrotów. Trzeba tu jednak wyraźnie zaznaczyć, że aktywność handlowa jest niekoniecznie odpowiedzią na nowe informacje napływające na rynek. Może ona zaistnieć nawet przy braku nowych okoliczności na giełdzie, bo transakcje kupna-sprzedaży odbywają się często np. z powodów czysto spekulacyjnych.

Od połowy lat siedemdziesiątych pojawiło się wiele prac teoretycznych, usiłujących uzasadnić rolę wielkości obrotów w procesie kształtowania się cen. Pierwszą istotną pracą w tym zakresie jest praca Clarka [24], który sformułował i uzasadnił hipotezę o mieszance rozkładów (ang. *Mixture of Distribution Hypothesis*, w skrócie MDH). Zgodnie z tą hipotezą zmienne: stopa zwrotu i wielkość obrotów wykazują pewien związek, bo każda z nich zależy od tej samej ukrytej zmiennej reprezentującej napływ informacji na rynek (ang. *latent information flow variable*), a napływające na rynek informacje są źródłem zmienności cen (ang. *price volatility*). Clark zaproponował użycie danych, charakteryzujących wielkość obrotów jako estymatorów wartości stochastycznego procesu napływu informacji. Wykazał, że z założeń MDH wynika silny równoczesny związek między wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu akcji. Brak jednak przesłanek do przypuszczenia, że może istnieć związek przyczynowy między tymi zmiennymi. Z założeń tej teorii nie wynika istnienie związku między stopami zwrotu i wielkością obrotów.

Teoria Clarka została uogólniona przez innych badaczy, w tym między innymi przez Andersena [2]. Badacz ten argumentował, że w związku z istniejącymi na rynku asymetriami i dla zapewnienia płynności akcji konieczna jest aktywność handlowa w reakcji na napływające na rynek informacje.

Alternatywną hipotezę wobec hipotezy Clarka, znaną jako model sekwencyjnego napływu informacji (ang. *sequential information flow model*), stworzył Copeland [26]. W przeciwieństwie do Clarka zasugerował on, że informacje napływają do inwestorów nie równocześnie, lecz w sposób sekwencyjny. Wskutek takiego sposobu napływu informacji na dany rynek tworzą się na tym rynku chwilowe stany równowagi między popytem i podażą. Stanom tym towarzyszy trwale utrzymujący się wysoki poziom obrotów. Z hipotezy Copelanda wynika możliwość istnienia nie tylko równoczesnej zależności między wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu, ale także związków przyczynowych między tymi wielkościami.

Jedną z najstarszych hipotez dotyczących kształtowania się cen akcji na rynku jest hipoteza błędzenia losowego (ang. *random walk*). Biorąc za punkt wyjścia tę hipotezę, niektórzy badacze jak np. Blume i in. [14] czy Suominen [66], usiłują zweryfikować hipotezę, że wielkość obrotów jest istotną zmienną, dostarczającą uczestnikom rynku ważnych informacji, które nie są zawarte w cenach. Blume i in. w swoim modelu przyjmują, że dobrze poinformowani inwestorzy przekazują swoje informacje pozostałym uczestnikom rynku poprzez swoje transakcje. Niepoinformowani uczestnicy rynku natomiast zwracają większą uwagę na wielkość obrotów, ponieważ w ich opinii z obserwacji tej zmiennej wynika stopień precyzji obserwacji sygnałów cenowych. Badacz ten wyprowadził ze swojej hipotezy wniosek, że zmienność stóp zwrotu i wielkość obrotów muszą się charakteryzować wysoką persystencją, także w tych przypadkach, w których sam proces napływu informacji jej nie wykazuje. W modelu zdefiniowanym przez Suominena [66], wielkość obrotów jest traktowana przez niepoinformowanych inwestorów jako sygnał prywatnych informacji na rynku, który łagodzi asymetrię informacji między różnymi kategoriami uczestników rynku.

Z wymienionych teorii wynika, że wielkość obrotów jest nie tylko wielkością opisową danego rynku akcji, lecz także że wielkość ta ma istotny wpływ na sam rynek i jego rozwój. Od poziomu obrotów zależą decyzje inwestorów, co powinno pociągać za sobą istnienie silnych związków zarówno równoczesnych, jak i przyczynowych między wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu.

Bardzo istotnym kierunkiem badań były próby udokumentowania związków między wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu, podejmowane między innymi przez Karpoffa [42], Bessembindera i Seguina [13], Brocka i LeBarona [19], Avouyi-Dovi i Jondeau [5] oraz Lee i Rui [47]. Wszyscy wymienieni autorzy potwierdzili istnienie silnej zależności, równoczesnej i przyczynowej, między zmiennością stóp zwrotu a wielkością obrotów.

Jedyny wyjątek stanowi praca Darrata i in. [28], w której baza danych obejmowała dane wysokiej częstotliwości, zaczerpnięte z giełdy nowojorskiej, czyli dla spółek wchodzących w skład indeksu Dow Jonesa (DJIA). Wymienieni autorzy znaleźli istotne statystycznie związki między obydwoma zmiennymi, nie stwierdzili jednak zależności równoczesnych między zmiennością stóp zwrotu a wielkością obrotów.

Wraz z pojawieniem się modeli GARCH i dostatecznie długich szeregów czasowych danych pojawiły się nowe możliwości badania zależności na giełdowych rynkach akcji. Lamoureux i Lastrapes [45] byli pierwszymi badaczami, którzy za pomocą modeli GARCH badali zależności równoczesne pomiędzy zmiennością stóp zwrotu a wielkością obrotów. Ustalili, że persistencja wariancji stóp zwrotu zanika w przypadku, gdy do równania warunkowej wariancji zostanie włączona wielkość obrotów. Jeśli traktować wielkość obrotów jako miarę napływu informacji na rynek, to fakt ten może być uznany za przemawiający na rzecz hipotezy MDH. Należy podkreślić, że Lamoureux i Lastrapes [45] zauważyli w swoich badaniach, że wielkość obrotów i zmienność stóp zwrotu mają tę samą przyczynę. Badacze ci nie wskazali jednak wyraźnie, o jaką wspólną dla obu zmiennych przyczynę może tu chodzić. W toku dalszych badań, takich jak Lamoureux i Lastrapes [46], Andersena [2], Brailsforda [18], Gallo i Pacini [33], Omrana i McKenzie [55], McKenzie i Faffa [54], za pomocą modelu zwanego GARCH *cum volume* autorzy sprawdzali związki między wielkością obrotów a autokorelacją stóp zwrotu. Udało się im ustalić, że wielkość obrotów jest odpowiedzialna za zmienną w czasie autokorelację stóp zwrotu.

Z badań empirycznych wynika, że wzrost wielkości obrotów powoduje na ogół spadek autokorelacji stóp zwrotu. Z badań Connolly i Stiversa [25] nad autokorelacją tygodniowych stóp zwrotu i wielkością zwykłych (w porównaniu ze średnimi) obrotów wynika istnienie zależności równoczesnej między badanymi wielkościami. Chordia i Swaminathan [23] badali znaczenie wielkości obrotów w kontekście autokorelacji krzyżowej między wielkością obrotów i stopami zwrotu. Z badań tych w szczególności wynika, że stopy zwrotu odpowiadające wysokiemu poziomowi obrotów poprzedzają stopy zwrotu odpowiadające niskim obrotom. Wynik ten przemawia na rzecz prawdziwości hipotezy o szybkości dopasowania (ang. *speed of adjustment hypothesis*). Hipoteza ta głosi, że akcje o wysokim poziomie obrotów szybciej reagują na nowe informacje niż akcje o niskim poziomie obrotów. Chordia i in. [22] wykazali w swoich badaniach ujemną korelację krzyżową pomiędzy oczekiwanymi stopami zwrotu oraz wielkością obrotów i ich zmianami.

Jak już wcześniej zasygnalizowano, w wielu finansowych szeregach czasowych daje się zaobserwować persistencję autokorelacji. Ta właśnie cecha szeregu czasowego jest właściwie sednem pojęcia długiej pamięci. Oprócz wspomnianej już pracy Hursta [40] do pionierskich opracowań w zakresie długiej pamięci w szeregach czasowych należą artykuły Mandelbrota i Van Ness [53] oraz Mandelbrota [52], którzy sformalizowali wyniki Hursta, a także prace Geweke i Porter-Hudaka [34] oraz Hoskinga [39]. Istotny wkład do tej teorii wnieśli ponadto Granger i Joyeux [35]. To właśnie oni wprowadzili do literatury przedmiotu modele ARIMA o ułamkowym stopniu integracji. Modele te szczegółowo badali później m.in. Sowell [65], Beran [11], Baillie [7] oraz Robinson [58].

Możliwość obecności długiej pamięci w finansowych szeregach czasowych była i jest tematem intensywnych badań teoretycznych i empirycznych, prowadzonych

przez ekonometryków i finansistów. Przedmiotem wielu dotychczasowych prac było zagadnienie długiej pamięci szeregów stóp zwrotu. Już we wstępie podkreśliliśmy, że istnienie długiej pamięci w szeregach stóp zwrotu stoi w opozycji do hipotezy rynków efektywnych w wersji sformułowanej przez Famę [31]. Założenie o obowiązywaniu martyngałowego modelu zachowania się cen akcji, a więc o stacjonarności ze względu na średnią i niezależności bieżących cen akcji od cen historycznych jest, jak już o tym pisaliśmy, trudne do pogodzenia z którąkolwiek z trzech form efektywności informacyjnej rynku akcji. Dlatego stało się konieczne uogólnienie teorii efektywności informacyjnej giełdowych rynków akcji w wersji podanej przez Famę. Zrobił to Peters [56], formułując swoją teorię rynków fraktalnych, w której ważne miejsce znalazło pojęcie długiej pamięci. Pierwszą pracą, w której podano wyniki empiryczne badań nad długą pamięcią w szeregach stóp zwrotu był artykuł Greene'a i Fielitza [36]. Autorzy ci za pomocą skalowanej metody (R/S) Hursta potwierdzili obecność długiej pamięci w analizowanych szeregach finansowych. Wyników tych nie potwierdził jednak Lo [48], który badał dzienne stopy zwrotu za pomocą ulepszonej wersji metody R/S. Także w innych pracach, takich jak Aydogan i Booth [6], Crato [27], Cheung i Lai [21], Barkoulas i Baum [9], wyniki Greene'a i Fielitza w zakresie badań nad długą pamięcią szeregów czasowych stóp zwrotu nie zostały potwierdzone.

Równocześnie poszukiwano długiej pamięci w innych finansowych szeregach czasowych, takich jak kursy walutowe (*spot* i *future*) czy szeregi cen rozmaitych dóbr. Wyniki empirycznych badań Bootha i in. [15], Helmsa i in. [38], Cheung i Lai [20], Fang i in. [32] oraz Barkoulasa i in. [10] potwierdzają istnienie długiej pamięci w wymienionych wyżej kursach wymiany walut.

W najnowszych badaniach daje się ponownie zaobserwować zainteresowanie zagadnieniem długiej pamięci w szeregach charakteryzujących akcje. Dotyczy ono przede wszystkim szeregów zmienności stóp zwrotu, wyrażanych za pomocą bezwzględnych wartości stóp zwrotu lub ich kwadratów, a także szeregów wielkości obrotów. Chodzi tu już nie tylko o „skalarną” długą pamięć, ale również o dwuwymiarową długą pamięć (ang. *bivariate long memory*).

Tak ujętym zagadnieniem długiej pamięci zajmowali się także Bollerslev i Jubinski [16]. Badali oni zachowanie się wielkości obrotów i zmienności stóp zwrotu dla spółek, wchodzących w skład indeksu *Standard & Poor's 100*. Ich badania stanowią potwierdzenie hipotezy MDH. Wykazali bowiem, że szeregi zmienności stóp zwrotu oraz logarytmów wolumenu obrotów mają wspólny parametr długiej pamięci. Autorzy ci wykazali ponadto, że w przypadku szeregów czasowych wielkości obrotów i zmienności stóp zwrotu procesy o ułamkowym stopniu integracji opisują najlepiej zależności długoterminowe (ang. *long-run dependencies*) pomiędzy tymi szeregami.

Jedną z nowszych prac poświęconych długiej pamięci jest praca Lobato i Velasco [50]. Zbadali oni własności akcji 30 spółek, wchodzących w skład indeksu DJIA, ze szczególnym uwzględnieniem długiej pamięci. Autorzy potwierdzili w swoich bada-

niach istnienie długiej pamięci w szeregach czasowych wielkości obrotów, a także pokazali, że zmienność stóp zwrotu i wielkość obrotów wykazują ten sam stopień długiej pamięci. W swoich badaniach nie znaleźli jednak wspólnej składowej długiej pamięci dla obu rozważanych szeregów czasowych.

Nasze badania, podobnie jak badania Lobato i Velasco, koncentrują się na określeniu długoterminowych powiązań między wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu spółek, wchodzących w skład indeksu DJIA. W badaniu wykorzystaliśmy najnowsze dane, pozyskane z *Reuters Austria* i *Deutsche Börse*, z których usunięto nieciągłości i niedopasowania, uwzględniono zaś splity i wypłaty dywidend.

Celem artykułu jest sprawdzenie, czy tezy Lobato i Velasco także mają potwierdzenie w obliczeniach dla najnowszych danych, a zwłaszcza czy istnieje wspólna składowa długiej pamięci dla wielkości obrotów i zmienności stóp zwrotu.

### 3. Długa pamięć

Mówimy, że proces stochastyczny ma długą pamięć z parametrem  $d$ , jeżeli jego funkcja gęstości spektralnej  $f(\lambda)$  spełnia warunek

$$f(\lambda) \sim c\lambda^{-2d}, \quad \text{gdy } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (1)$$

gdzie  $c$  jest stałą, a symbol  $\sim$  oznacza, że stosunek lewej i prawej strony zmierza do jedynki. Gdy proces spełnia taki warunek oraz gdy  $d > 0$ , wówczas jego funkcja autokorelacji zanika w sposób hiperboliczny (Granger i Joyeux [35], Hosking [39], Beran [12]), tzn.

$$\rho_k \sim c_\rho k^{2d-1}, \quad \text{gdy } k \rightarrow \infty.$$

Jak już wspomniano, parametr  $d$  opisuje pamięć procesu. Gdy  $d > 0$ , wtedy funkcja gęstości spektralnej jest nieograniczona w otoczeniu 0. Mówimy wówczas, że proces posiada długą pamięć. Gdy  $d = 0$ , gęstość spektralna jest ograniczona w zerze, a o procesie mówimy, że ma krótką pamięć. Jeżeli natomiast  $d < 0$ , to gęstość spektralna jest równa 0 i proces przejawia ujemną pamięć i jest nazywany antypersystentnym. Najpopularniejszą klasą modeli spełniających warunek (1) są ułamkowo zintegrowane procesy autoregresji i średniej ruchomej (ARFIMA), zaproponowane przez Grangera i Joyeux [35]. Mówimy, że  $x_t$  jest procesem ARFIMA( $p, d, q$ ), jeżeli

$$\Phi(L)(1-L)^d(x_t - \mu) = \Theta(L)\varepsilon_t,$$

gdzie  $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$  i  $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$  są wielomianami opóźnień odpowiednio stopnia  $p$  i  $q$ , których pierwiastki leżą na zewnątrz koła jednostkowego.



Ponadto  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ , a symbol  $(1-L)^d$  jest zdefiniowany za pomocą rozwinięcia w szereg

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} L^j,$$

gdzie  $\Gamma$  jest funkcją gamma Eulera. Jeżeli parametr ułamkowej integracji  $d$  jest większy niż  $-1/2$ , to proces ARFIMA( $p, d, q$ ) jest odwracalny, gdy natomiast  $d < 1/2$ , proces jest stacjonarny. Dla  $0 < d < 1/2$  proces ARFIMA( $p, d, q$ ) jest zatem procesem odwracalnym stacjonarnym z długą pamięcią. Biorąc odpowiednie  $k$ -te różnice, można sprowadzić wiele procesów niestacjonarnych do procesów stacjonarnych spełniających warunek (1), rozszerzając tym samym pojęcie długiej pamięci na procesy niestacjonarne.

W literaturze dostępnych jest wiele metod estymacji parametru długiej pamięci  $d$ . Można je podzielić na dwie zasadnicze grupy: metody parametryczne i semiparametryczne. Dokładniejszego ich omówienia dokonamy w następnych podrozdziałach.

### 3.1. Metoda największej wiarygodności

Do estymacji metodą największej wiarygodności (ang. *maximum likelihood estimation* – MLE) w dziedzinie stanów konieczne jest założenie konkretnej postaci estymowanego modelu z klasy ARFIMA. Wówczas, dla realizacji  $\{x_t\}_{t=1..T}$ , funkcja wiarygodności ma postać

$$L(d, \phi, \theta, \sigma^2, \mu) = -\frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} (X - \mu \mathbf{1})^T \Sigma^{-1} (X - \mu \mathbf{1}), \quad (2)$$

gdzie  $\phi$  i  $\theta$  są wektorami parametrów wielomianu autoregresji i średniej ruchomej,  $\mu$  jest estymatorem wartości oczekiwanej procesu,  $\Sigma$  jest jego macierzą kowariancji, natomiast  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ ,  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_T)^T$ . Sowell [65] wykazał, że estymator maksymalizujący powyższą funkcję wiarygodności jest zgodny i ma asymptotyczny rozkład normalny

$$\hat{d}_{EML} \sim N(d, (\pi^2 T / 6 - c)^{-1}),$$

gdzie  $c = 0$  dla  $p = q = 0$  oraz  $c > 0$  w pozostałych przypadkach. Inne własności tego estymatora oraz różne aspekty, związane z jego numerycznym wyznaczaniem zostały omówione w pracach Sowella [65] oraz Doornika i Oomsa [30].

Podstawowym problemem pojawiającym się przy stosowaniu powyższej metody największej wiarygodności jest konieczność określenia całego modelu ARFIMA, a w konse-

kwencji wrażliwość uzyskanego estymatora długiej pamięci na ewentualne błędy w specyfikacji wielomianów AR oraz MA, odpowiadających za dynamikę o krótkiej pamięci.

### 3.2. Estymator GPH

Kolejną klasą estymatorów parametru  $d$  długiej pamięci są estymatory semiparametryczne, korzystające z aproksymacji gęstości spektralnej w otoczeniu 0, wynikającej z warunku (1). Wśród nich najpopularniejszy jest estymator oparty na regresji log-periodogramu, zaproponowany w pracy Geweke i Porter-Hudak [34], a szczegółowo zbadany przez Robinsona [59]. Estymatory semiparametryczne wykorzystują informację zawartą w periodogramie, obliczonym tylko dla bardzo niskich częstotliwości. To czyni te estymatory niewrażliwymi na wszelkiego rodzaju krótkookresowe zaburzenia jak w przypadku prezentowanego estymatora parametrycznego.

Estymator GPH można obliczyć następująco. Opierając się na związku (1), po zlogarytmowaniu i podstawieniu estymatorów z próby, uzyskujemy przybliżony związek:

$$\ln(I(\lambda_j)) \approx \text{const} - 2d \ln(\lambda_j),$$

gdzie  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$  dla  $j = 1, \dots, m$  są częstotliwościami, a  $I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T x_t e^{it\lambda} \right|^2$  jest perio-

dogramem obliczonym z próbki  $x_1, \dots, x_T$ . Estymator GPH jest wyznaczany z powyższej relacji metodą najmniejszych kwadratów, przy czym parametr  $m = m(T)$  powinien spełniać warunek

$$\frac{1}{m} + \frac{m}{T} \rightarrow 0, \quad \text{gd}y \quad T \rightarrow \infty.$$

Geweke i Porter-Hudak w swojej pracy sugerują wybór  $m = \sqrt{T}$ . Kolejne rozważania dotyczące doboru optymalnego parametru  $m$  można znaleźć w pracach Hurvich i in. [41] oraz Henry i Robinson [37]. Asymptotyczna normalność estymatora GPH została początkowo udowodniona dla  $d \in (-1/2, 1/2)$  przez Robinsona [59]. W późniejszych pracach (Kim i Phillips [43] oraz Velasco [67]) pokazano zgodność dla  $d \in (-1/2, 1)$  oraz asymptotyczną normalność dla  $d \in (-1/2, 3/4)$ :

$$\hat{d}_{GPH} \sim N\left(d, \frac{\pi^2}{24m}\right).$$

Zaprezentowana metoda estymacji ma kilka modyfikacji. Agiakloglou i in. [1] sugerują zastąpienie stałej w regresji przez wielomian w celu redukcji obciążenia estymatora (także Andrews i Guggenberger [3]). Shimotsu i Phillips [64] natomiast proponują estymator, uwzględniający dynamikę krótkookresową.

Estymator GPH zdefiniowany powyżej może być z łatwością uogólniony na przypadek procesu wielowymiarowego. Niech więc  $\mathbf{x}_t = (x_{1,t}, \dots, x_{N,t})$  będzie  $N$ -wymiarowym procesem stacjonarnym z wektorem wartości oczekiwanej  $\boldsymbol{\mu}$ , macierzami kowariancji  $\boldsymbol{\Gamma}_j$  oraz wektorem długiej pamięci  $(d_1, \dots, d_N)^T$ . Dla dowolnych  $a, b = 1, \dots, N$  oraz  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$  zdefiniujemy periodogram krzyżowy procesu  $x_t$

$$\mathbf{I}_{ab}(\lambda) = \left( \frac{1}{(2\pi T)^{1/2}} \sum_{i=1}^T x_{a,t} e^{it\lambda} \right) \left( \frac{1}{(2\pi T)^{1/2}} \sum_{i=1}^T x_{b,t} e^{it\lambda} \right)^*$$

gdzie gwiazdką oznaczono sprzężenie. Dla ustalonego  $m$  niech  $\mathbf{Y}_{kj} = \ln(\mathbf{I}_{kk}(\lambda_j))$ ,  $k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m$ . Wówczas wielowymiarowy estymator GPH długiej pamięci  $(d_1, \dots, d_N)^T$  jest dany wzorem

$$\hat{d}_k = -\frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j \mathbf{Y}_{kj}}{2 \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j^2}, \quad \text{gdzie } \mathbf{v}_j = \ln \lambda_j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \ln \lambda_j. \quad (3)$$

W oparciu o asymptotyczną normalność powyższego estymatora można skonstruować test dla następującej hipotezy głównej (Robinson [59]):

$$H_0: \mathbf{P}\mathbf{d} = \boldsymbol{\rho},$$

gdzie  $\mathbf{P}$  jest macierzą  $u \times N$ , a  $\boldsymbol{\rho}$  jest wektorem  $u \times 1$ . Statystyka testująca

$$4m(\mathbf{P}\hat{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\rho})^T (\mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{P}^T)^{-1} (\mathbf{P}\hat{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\rho})$$

ma asymptotyczny rozkład  $\chi_u^2$ , przy czym  $\hat{\mathbf{d}} = (\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_N)$ , a  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$  jest zgodnym estymatorem wariancji  $2\sqrt{m}(\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d})$ . W przypadku testowania istnienia wspólnego parametru długiej pamięci  $\boldsymbol{\rho}$  jest wektorem zerowym, a  $\mathbf{P} = (\mathbf{I}_{N-1}; \mathbf{0}) - (\mathbf{0}; \mathbf{I}_{N-1})$  jest macierzą  $(N-1) \times N$ , przy czym  $\mathbf{I}_{N-1}$  jest macierzą jednostkową wymiaru  $N-1$ . Jeśli zakładamy istnienie wspólnego parametru  $d$  długiej pamięci, to jego estymator jest dany wzorem

$$\hat{d} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{1}_N^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{Y}_j \mathbf{v}_j}{\mathbf{1}_N^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{1}_N \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j^2}, \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{Nj})^T$ , a  $\mathbf{1}_N$  jest wektorem złożonym z jedynek.

### 3.3. Estymator Whittle'a

Inną klasą estymatorów semiparametrycznych są lokalne estymatory Whittle'a (ang. *local Whittle estimators* – LW) zaproponowane w pracy Künscha [44], a rozwijane później przez Robinsona [60] oraz Lobato [49]. W przypadku procesu jednowymiarowego lokalny estymator Whittle'a jest zdefiniowany jako argument maksymalizujący następującą funkcję wiarygodności:

$$Q(\mathbf{g}, d) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \ln(g\lambda_j^{-2d}) + \frac{I(\lambda_j)}{g\lambda_j^{-2d}} \right]. \quad (5)$$

Wartości  $d$ , dla których wykazano zgodność oraz asymptotyczną normalność są identyczne jak dla estymatora GPH (Velasco [68] oraz Phillips i Shimotsu [57]). Jednak estymator Whittle'a jest bardziej efektywny, ponieważ asymptotycznie

$$\hat{d}_{LW} \sim N\left(d, \frac{1}{4m}\right).$$

Modyfikacje podstawowej metody można znaleźć np. w pracach Shimotsu i Phillipsa [64], Andrews i Sun [4]. Analogicznie jak w przypadku estymatora GPH, estymator LW może być rozszerzony na przypadek procesów wielowymiarowych. Wówczas funkcja wiarygodności ma postać:

$$Q(\mathbf{d}) = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i \sum_{j=1}^m \ln \lambda_j - \ln |\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{d})|, \quad (6)$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{d}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \Lambda_j \operatorname{Re}\{\mathbf{I}(\lambda_j)\} \Lambda_j, \quad (7)$$

przy czym  $\Lambda_j = \operatorname{diag}(\lambda_j^{d_1}, \dots, \lambda_j^{d_N})$ , a  $\mathbf{I}(\lambda)$  jest macierzą periodogramu krzyżowego.

Estymator  $\hat{\mathbf{d}} = (\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_N)$  jest zdefiniowany jako argument maksymalizujący funkcję wiarygodności (6). Może on być również wyznaczony za pomocą dwukrokowej procedury, zaproponowanej przez Lobato [49]. Pierwszy krok polega na obliczeniu wektora  $\hat{\mathbf{d}}^{(1)}$  jednowymiarowych estymatorów każdego szeregu. W drugim kroku obliczany jest ostateczny estymator długiej pamięci, dany wzorem

$$\hat{\mathbf{d}}^{(2)} = \hat{\mathbf{d}}^{(1)} - \left( \frac{\partial^2 Q(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}^T} \Big|_{\hat{\mathbf{d}}^{(1)}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial Q(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{\hat{\mathbf{d}}^{(1)}} \right).$$

Jak zostało to pokazane w pracy Lobato [49], powyższy estymator ma takie same własności jak estymator uzyskany w wyniku maksymalizacji funkcji wiarygodności (6) i ma asymptotycznie następujący rozkład normalny:

$$\hat{\mathbf{d}}^{(2)} \sim N\left(\mathbf{d}, \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{E}^{-1}\right),$$

gdzie  $\mathbf{E} = 2(\mathbf{I}_N + \mathbf{R} \circ \mathbf{R}^{-1})$  oraz  $\circ$  oznacza iloczyn Hadamarda macierzy.

Pozwala to na konstrukcję testu do weryfikacji hipotez o własnościach  $d$ . Niech  $\mathbf{P}$  będzie macierzą  $u \times N$ , a  $\boldsymbol{\rho}$  wektorem  $u \times 1$  oraz niech hipoteza główna będzie postaci:  $H_0: \mathbf{P}\mathbf{d} = \boldsymbol{\rho}$ .

Wówczas statystyka

$$m(\mathbf{P}\hat{\mathbf{d}}^{(2)} - \boldsymbol{\rho})^T (\mathbf{P}\hat{\mathbf{E}}^{-1}\mathbf{P}^T) (\mathbf{P}\hat{\mathbf{d}}^{(2)} - \boldsymbol{\rho})$$

ma asymptotyczny rozkład  $\chi_q^2$ . W przypadku testowania istnienia wspólnego parametru długiej pamięci  $\boldsymbol{\rho}$  jest wektorem zerowym długości  $N - 1$ , a macierz  $\mathbf{P}$  jest postaci  $\mathbf{P} = (\mathbf{I}_{N-1} : 0) - (0 : \mathbf{I}_{N-1})$ . Podana powyżej postać hipotezy głównej pozwala również na testowanie, czy proces jest wielowymiarowym procesem  $\mathbf{I}(0)$  (białym szumem) lub też  $\mathbf{I}(1)$  (błądzeniem losowym). W tym przypadku  $\mathbf{P} = \mathbf{I}_N$ , a  $\boldsymbol{\rho}$  jest  $N$ -wymiarowym wektorem odpowiednio zer lub jedynek.

W przypadku założenia istnienia wspólnego parametru długiej pamięci funkcja wiarygodności ma postać

$$Q_*(d) = -\frac{2Nd}{m} \sum_{j=1}^m \ln \lambda_j + \ln |\hat{\mathbf{R}}(d\mathbf{1}_N)|. \quad (8)$$

Estymator  $\mathbf{d}_*$  wspólnej długiej pamięci ma asymptotyczny rozkład normalny

$$\hat{d}_* \sim N\left(d_*, \frac{1}{4Nm}\right).$$

### 3.4. Ułamkowa kointegracja

Stwierdzenie istnienia wspólnego parametru długiej pamięci nie gwarantuje jeszcze, że rozważane procesy są powiązane ze sobą zależnością długookresową. Aby to stwierdzić, należy zbadać, czy są ze sobą skointegrowane. W literaturze można znaleźć różne definicje ułamkowej kointegracji (np. Robinson i Yajima [62]). Poniżej przedstawiamy najpopularniejszą. Mówimy, że dwa ułamkowo zintegrowane procesy  $x_t$  oraz  $y_t$  są skointegrowane w stopniu  $d$ , jeżeli:

- $x_t$  oraz  $y_t$  mają wspólny parametr długiej pamięci, tzn.  $d_x = d_y = d_0$ ,

• istnieje stała  $\beta$  taka, że proces  $\varepsilon_t = y_t - \beta x_t$  posiada długą pamięć stopnia  $d$  oraz  $d < d_0$ .

Parametr  $\beta$  można wyestymować za pomocą metody najmniejszych kwadratów zastosowanej w przestrzeni częstości. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia analogiczne jak w poprzednich podrozdziałach, to możemy dla dowolnej częstości  $\lambda_j$  zdefiniować uśredniony periodogram krzyżowy jako

$$\hat{\mathbf{F}}_{ab}(m) = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{2\pi}{T} \sum_{j=1}^m \mathbf{I}_{ab}(\lambda_j) \right),$$

gdzie  $m < \lfloor T/2 \rfloor$ . Wówczas estymator parametru  $\beta$  jest dany wzorem

$$\hat{\beta} = \hat{\mathbf{F}}_{xy}(m) \hat{\mathbf{F}}_{xx}^{-1}(m).$$

Własności asymptotyczne tego estymatora zostały zbadane w pracy Robinsona i Marinucci [61].

Analogicznie jak w przypadku estymatorów długiej pamięci, tak i w przypadku kointegracji można zastosować podejście oparte na estymacji Whittle'a. W tym przypadku warunkiem koniecznym istnienia kointegracji pomiędzy procesami  $x_t$  i  $y_t$  jest, aby koherencja pomiędzy tymi szeregami była równa jeden dla zerowej częstości. Estymator kwadratu koherencji wynosi

$$\hat{H}_{xy}(0)^2 = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{xy}^2}{\hat{\mathbf{R}}_{xx} \hat{\mathbf{R}}_{yy}},$$

gdzie  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{yy}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{xy}$  są odpowiednimi elementami macierzy  $\hat{\mathbf{R}}$ , danej wzorem (7).

## 4. Dane

Wszystkie obliczenia i rozważania zostały przeprowadzone na szeregach zmienności stóp zwrotu (liczonych jako wartość bezwzględna stóp zwrotu oraz jako kwadraty stóp zwrotu) oraz na szeregach logarytmów wolumenu obrotów 19 spółek, które w okresie od stycznia 1990 do końca listopada 2005 roku wchodziły w skład indeksu DJIA. Dane dotyczące notowań oraz wolumenu obrotów zostały uzyskane z *Reuters Austria* i *Deutsche Börse*. Logarytmiczne stopy zwrotu obliczono na podstawie dziennych cen zamknięcia, po uwzględnieniu splitów akcji oraz wypłat dywidend. Badania obejmowały cały okres od początku 1990 roku do grudnia 2005. Założenie, by spółka przez cały rozważany okres była składnikiem indeksu spowodowało redukcję liczby

rozważanych spółek właśnie do 19. W celu sprawdzenia zachowania estymowanych parametrów wraz z upływem czasu badany okres podzielono na cztery podokresy: od stycznia 1990 do grudnia 1993, od stycznia 1994 do grudnia 1997, od stycznia 1998 do grudnia 2001 oraz od stycznia 2002 do końca listopada 2005 roku.

## 5. Wyniki empiryczne

Aby zbadać występowanie długiej pamięci szeregów obrotów oraz zmienności stóp zwrotu rozważanych spółek, zastosowano metody zaprezentowane w rozdziale 3. W niektórych przypadkach, jak np. do estymacji indywidualnych parametrów długiej pamięci, zastosowano kilka różnych metod. Ponieważ jednak dały one podobne wyniki, prezentujemy tylko rezultaty uzyskane za pomocą dwóch podstawowych, czyli regresji log-periodogramu (estymator GPH) oraz lokalnej metody Whittle'a. Wszystkie obliczenia były prowadzone zarówno dla całego rozważanego okresu, jak i dla podokresów. Przyjęto parametr  $m$  równy  $T^{0,65}$ .

Jako pierwszy krok wyestymowano parametry długiej pamięci każdego z rozważanych szeregów z osobna. Następnie obliczono parametry długiej pamięci dla dwuwymiarowych szeregów, składających się z szeregu zmienności stóp zwrotu (liczonych jako wartość bezwzględna oraz jako kwadraty stóp zwrotu) oraz log-wolumenu. Wyniki tych obliczeń zestawiono w tabelach 1–4. Jak już wspomniano w rozdziale 3, wielowymiarowe estymatory GPH mają takie same własności jak jednowymiarowe. Nie jest także zaskoczeniem, że wyestymowane parametry długiej pamięci obu miar zmienności stóp zwrotu są podobne. Ponadto prawie wszystkie (z wyjątkiem LW dla kwadratów stóp zwrotu spółki Exxon w ostatnim podokresie) wartości estymatorów długiej pamięci szeregów zmienności są mniejsze niż 0,5. Oznacza to, że szeregi te są stacjonarne, co jest zgodne z wcześniejszymi wynikami badania długiej pamięci szeregów zmienności cen akcji (Ding i in. [29], Bollerslev i Mikkelsen [17], Baillie i in. [8], Lobato i Savin [51]). Jeżeli zaś weźmiemy pod uwagę szeregi log-wolumenu, to mają one przeważnie dłuższą pamięć niż szeregi zmienności (wyższa wartość parametru  $d$ ). Ponadto w dziewięciu przypadkach uzyskane estymatory długiej pamięci są nieznacznie wyższe niż 0,5, co sugeruje niestacjonarność szeregów w rozważanych okresach. Jednak po porównaniu tabel 1 i 2 oraz 3 i 4 (zawierających wyniki różnych metod) okazuje się, że parametr  $d$  dla obu prezentowanych metod estymacji jest wyższy od 0,5 tylko dla szeregów zmienności Honeywell (01.1998–12.2001) i JPMorgan (01.1990–11.2005). Należy zauważyć, że wszystkie występujące w tabelach wartości 0,50 powstały w wyniku zaokrąglenia liczb mniejszych niż 0,5. Jeżeli natomiast weźmiemy pod uwagę zmiany parametrów w poszczególnych podokresach, to łatwo można zauważyć, że estymatory długiej

Tabela 1

Wartości estymatora GPH długiej pamięci wartości bezwzględnych stóp zwrotu (komórki górne) oraz log-wolumenu (komórki dolne)

	Wartości bezwzględne stóp zwrotu – log-wolumen									
	01.90–11.05		01.90–12.93		01.94–12.97		01.98–12.01		01.02–11.05	
Alcoa	0,30	0,30	0,11	0,35	0,10	0,17	0,25	0,26	0,38	0,36
	0,28				0,26		0,27		0,34	
Altria	0,23	0,28	0,18	0,44	0,25	0,27	0,11		0,37	0,33
	0,31				0,31		0,39		0,32	
AmEx	0,36	0,38	0,19	0,23	0,18	0,23	0,22		0,37	0,35
	0,40				0,27		0,40		0,34	
Boeing	0,23		0,24		0,13		0,13		0,32	0,30
	0,42		0,48		0,33		0,35		0,27	
Caterpillar	0,19		0,12	0,18	0,05		0,18	0,25	0,14	0,18
	0,35		0,33		0,34		0,32		0,22	
CocaCola	0,32	0,31	0,20		0,27	0,23	0,24	0,31	0,27	0,30
	0,29		0,44		0,21		0,35		0,32	
Disney	0,28	0,30	0,06		0,06		0,27		0,40	0,38
	0,32		0,35		0,28		0,33	0,31	0,36	
DuPont	0,28		0,12	0,17	0,27	0,29	0,17		0,39	0,36
	0,46		0,22		0,33		0,36		0,35	
Exxon	0,32		0,21	0,26	0,26	0,25	0,21		0,41	0,41
	0,50		0,34		0,24		0,47		0,41	
GE	0,33	0,37	0,28	0,34	0,20	0,21	0,21		0,38	0,37
	0,40		0,38		0,22		0,48		0,36	
GM	0,33		0,23	0,27	0,06		0,18		0,28	0,32
	0,44		0,30		0,28		0,51		0,38	
Honeywell	0,23		0,22	0,28	0,15		0,12		0,32	0,30
	0,46		0,34		0,31		0,55		0,28	
IBM	0,31	0,34	0,31	0,29	0,10		0,28	0,36	0,31	
	0,38		0,28		0,26		0,40		0,49	
JPMorgan Chase	0,41	0,46	0,28	0,31	0,17		0,34	0,37	0,34	0,39
	0,51		0,37		0,40		0,40		0,42	
McDonald's	0,21		0,16		0,08		0,09		0,18	
	0,40		0,38		0,27		0,36		0,44	
3M	0,24		0,14	0,24	0,12	0,22	0,25		0,23	
	0,42		0,32		0,31		0,41		0,42	
Merck	0,24		0,24		0,24	0,28	0,21	0,24	0,17	
	0,39		0,43		0,33		0,30		0,37	
Pro&Gamble	0,32	0,37	0,29	0,34	0,12		0,23		0,25	0,27
	0,40		0,38		0,36		0,39		0,31	
UnitTech	0,28	0,30	0,14	0,21	0,14	0,20	0,27		0,42	0,35
	0,34		0,26		0,27		0,50		0,31	

Jeżeli na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o istnieniu wspólnej długiej pamięci, podano wartość wspólnego parametru  $d$ .



Tabela 2

Wartości dwuwymiarowego estymatora LW długiej pamięci wartości bezwzględnych stóp zwrotu (komórki górne) oraz log-wolumenu (komórki dolne)

	Wartości bezwzględne stóp zwrotu – log-wolumen						
	01.90–11.05	01.90–12.93	01.94–12.97	01.98–12.01	01.02–11.05		
Alcoa	0,35 0,33	0,34 0,32	0,15 0,30	0,20 0,24	0,22 0,35	0,40 0,38	
Altria	0,26 0,29	0,27 0,31	0,05 0,27	0,22 0,27	0,24 0,33	0,17 0,27	0,27 0,27
AmEx	0,37 0,40	0,38 0,31	0,25 0,27	0,17 0,22	0,22 0,50	0,26 0,37	0,43 0,41
Boeing	0,24 0,39	0,21 0,46	0,10 0,35	0,11 0,25	0,11 0,25	0,28 0,27	0,28 0,28
Caterpillar	0,28 0,37	0,11 0,27	0,15 0,30	0,15 0,36	0,15 0,33	0,25 0,33	0,28 0,28
CocaCola	0,35 0,38	0,37 0,43	0,19 0,13	0,22 0,42	0,19 0,23	0,23 0,35	0,33 0,34
Disney	0,32 0,39	0,36 0,41	0,07 0,27	0,11 0,27	0,21 0,36	0,37 0,35	0,36 0,36
DuPont	0,31 0,46	0,11 0,27	0,20 0,25	0,22 0,38	0,16 0,37	0,43 0,37	0,41 0,41
Exxon	0,32 0,50	0,09 0,26	0,21 0,27	0,24 0,44	0,22 0,44	0,37 0,44	0,40 0,40
GE	0,33 0,38	0,36 0,36	0,20 0,18	0,17 0,44	0,21 0,44	0,40 0,35	0,38 0,38
GM	0,29 0,49	0,21 0,32	0,28 0,29	0,09 0,43	0,15 0,43	0,29 0,36	0,32 0,32
Honeywell	0,27 0,53	0,22 0,31	0,27 0,25	0,13 0,25	0,21 0,51	0,16 0,23	0,31 0,29
IBM	0,34 0,40	0,37 0,27	0,26 0,37	0,25 0,40	0,24 0,40	0,33 0,44	0,38 0,38
JPMorgan Chase	0,42 0,54	0,23 0,27	0,25 0,46	0,17 0,38	0,34 0,38	0,30 0,37	0,36 0,37
McDonald's	0,24 0,40	0,14 0,36	0,09 0,32	0,16 0,37	0,16 0,37	0,22 0,37	0,22 0,37
3M	0,28 0,47	0,11 0,32	0,04 0,35	0,20 0,44	0,20 0,44	0,24 0,40	0,24 0,40
Merck	0,23 0,41	0,20 0,41	0,18 0,28	0,23 0,32	0,19 0,32	0,22 0,43	0,22 0,43
Pro&Gamble	0,34 0,47	0,23 0,47	0,18 0,34	0,25 0,42	0,25 0,38	0,25 0,38	0,32 0,32
UnitTech	0,30 0,35	0,33 0,30	0,23 0,21	0,12 0,17	0,17 0,41	0,21 0,29	0,35 0,33

Jeżeli na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o istnieniu wspólnej długiej pamięci, podano wartość wspólnego parametru  $d$ .

Tabela 3

Wartości estymatora GPH długiej pamięci kwadratów stóp zwrotu (komórki górne)  
oraz log-wolumenu (komórki dolne)

	Kwadraty stóp zwrotu – log-wolumen							
	01.90–11.05	01.90–12.93	01.94–12.97	01.98–12.01	01.02–11.05			
Alcoa	0,32 0,33	0,33	0,13 0,30	0,12 0,30	0,17 0,25	0,20	0,37 0,35	0,36
Altria	0,13 0,27	0,37	0,15 0,26	0,20	0,14 0,33		0,18 0,28	0,24
AmEx	0,28 0,39	0,16 0,30	0,10 0,27		0,24 0,49		0,39 0,38	0,38
Boeing	0,15 0,39	0,14 0,44	0,08 0,34		0,03 0,23		0,26 0,28	0,27
Caterpillar	0,21 0,37	0,07 0,27	0,08 0,30		0,12 0,37		0,23 0,32	0,27
CocaCola	0,28 0,37	0,15 0,42	0,18 0,12	0,16	0,17 0,42		0,23 0,31	0,27
Disney	0,23 0,39	0,01 0,41	0,10 0,28		0,11 0,35		0,29 0,34	0,31
DuPont	0,28 0,46	0,09 0,27	0,17 0,26	0,21	0,14 0,39		0,44 0,33	0,39
Exxon	0,30 0,50	0,08 0,26	0,15 0,27	0,23	0,18 0,43		0,45 0,44	0,44
GE	0,26 0,37	0,19 0,36	0,15 0,19	0,17	0,17 0,43		0,35 0,36	0,35
GM	0,20 0,47	0,19 0,32	0,07 0,28	0,26	0,09 0,43		0,16 0,33	
Honeywell	0,16 0,51	0,08 0,30	0,09 0,24		0,05 0,51		0,24 0,24	0,24
IBM	0,21 0,39	0,17 0,27	0,12 0,35	0,23	0,13 0,37		0,25 0,46	
JPMorgan	0,30	0,23	0,09		0,27	0,34	0,24	
Chase	0,54	0,27	0,46		0,38		0,37	
McDonald's	0,18 0,39	0,12 0,36	0,08 0,31		0,17 0,35		0,12 0,35	
3M	0,23 0,47	0,03 0,33	0,34		0,15 0,44		0,20 0,41	
Merck	0,03 0,38	0,20 0,41	0,12 0,27		0,13 0,32		0,01 0,42	
Pro&Gamble	0,12 0,45	0,24 0,48	0,14 0,35		0,07 0,38		0,27 0,37	0,32
UnitTech	0,11 0,34	0,16 0,30	0,10 0,22	0,17	0,04 0,40		0,35 0,30	0,33

Jeżeli na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o istnieniu wspólnej długiej pamięci, podano wartość wspólnego parametru długiej pamięci.

Tabela 4

Wartości dwuwymiarowego estymatora LW długiej pamięci kwadratów stóp zwrotu (komórki górne) oraz log-wolumenu (komórki dolne)

	Kwadraty stóp zwrotu – log-wolumen							
	01.90–11.05		01.90–12.93	01.94–12.97	01.98–12.01		01.02–11.05	
Alcoa	0,32	0,33	0,13	0,12	0,17	0,20	0,37	0,36
	0,33		0,30	0,30	0,25		0,35	
Altria	0,13		-0,02	0,15	0,14		0,18	0,24
	0,27		0,37	0,26	0,33		0,28	
AmEx	0,28		0,16	0,10	0,24		0,39	0,38
	0,39		0,30	0,27	0,49		0,38	
Boeing	0,15		0,14	0,08	0,03		0,26	0,27
	0,39		0,44	0,34	0,23		0,28	
Caterpillar	0,21		0,07	0,08	0,12		0,23	0,27
	0,37		0,27	0,30	0,37		0,32	
CocaCola	0,28		0,15	0,18	0,17		0,23	0,27
	0,37		0,42	0,12	0,42		0,31	
Disney	0,23		0,01	0,10	0,11		0,29	0,31
	0,39		0,41	0,28	0,35		0,34	
DuPont	0,28		0,09	0,17	0,14		0,44	0,39
	0,46		0,27	0,26	0,39		0,33	
Exxon	0,30		0,08	0,15	0,18		0,45	0,44
	0,50		0,26	0,27	0,43		0,44	
GE	0,26		0,19	0,15	0,17		0,35	0,35
	0,37		0,36	0,19	0,43		0,36	
GM	0,20		0,19	0,07	0,09		0,16	
	0,47		0,32	0,28	0,43		0,33	
Honeywell	0,16		0,08	0,09	0,05		0,24	0,24
	0,51		0,30	0,24	0,50		0,24	
IBM	0,21		0,17	0,12	0,13		0,25	
	0,39		0,27	0,35	0,37		0,46	
JPMorgan	0,30		0,23	0,09	0,27		0,24	
Chase	0,54		0,27	0,46	0,38		0,37	
McDonald's	0,18		0,12	0,08	0,17		0,12	
	0,39		0,36	0,31	0,35		0,35	
3M	0,23		0,03	-0,01	0,15		0,20	
	0,47		0,33	0,34	0,44		0,41	
Merck	0,03		0,20	0,12	0,13		0,01	
	0,38		0,41	0,27	0,32		0,42	
Pro&Gamble	0,12		0,24	0,14	0,07		0,27	0,32
	0,45		0,48	0,35	0,38		0,37	
UnitTech	0,11		0,16	0,10	0,04		0,35	0,33
	0,34		0,30	0,22	0,40		0,30	

Jeżeli na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o istnieniu wspólnej długiej pamięci, podano wartość wspólnego parametru  $d$ .

pamięci szeregów zmienności osiągają w większości najwyższe wartości w ostatnim podokresie, tj. 01.2002–11.2005. Jeżeli chodzi o log-wolumen, to również można dostrzec wzrost parametru  $d$  w ostatnim podokresie, jednak nie jest on już tak istotny jak w przypadku zmienności stóp zwrotu. W ostatnim podokresie dostrzegamy jeszcze jedną interesującą rzecz. W blisko jednej trzeciej przypadków estymator długiej pamięci zmienności jest większy niż obrotów. Świadczy to o tym, jak duży jest wzrost długiej pamięci zmienności stóp zwrotu w ostatnim podokresie.

Asymptotyczna normalność estymatorów pozwoliła na przeprowadzenie testów, czy rzeczywiście badane szeregi są ułamkowo zintegrowane, czyli czy  $d > 0$  oraz  $d < 1$ . Hipoteza o błędzeniu przypadkowym ( $d = 1$ ) została na poziomie istotności 0,05 odrzucona w przypadku wszystkich badanych szeregów. W kilku przypadkach natomiast nie było podstaw do odrzucenia hipotezy, że  $d = 0$ .

Następnym krokiem było sprawdzenie, czy szeregi zmienności i obrotów mają tę samą długą pamięć. Jeżeli nie było podstaw do odrzucenia tej hipotezy, to estymowany był wspólny parametr długiej pamięci. Jego wartości zestawiono również w tabelach 1–4. O ile nie da się powiedzieć, że zmienność cen akcji oraz wielkość obrotów mają tę samą pamięć w całym rozważanym okresie, to w większości przypadków (15 dla zmienności liczonej jako wartości bezwzględne oraz 13 dla kwadratów stóp zwrotu) można stwierdzić, że w ostatnim podokresie zmienność cen akcji oraz wielkość obrotów mają tę samą długą pamięć. Jednak samo istnienie wspólnego parametru długiej pamięci nie świadczy jeszcze o wspólnej długoterminowej zależności między badanymi szeregami. Wyniki estymacji parametru  $\beta$  oraz kwadratu koherencji zostały zebrane w tabelach 5–8. Widać z nich, że zaledwie w 16 przypadkach dla kwadratów stóp zwrotu (15 dla wartości bezwzględnych) parametr długiej pamięci reszt równania kointegrującego jest istotnie mniejszy niż wspólny parametr długiej pamięci zmienności i log-wolumenu. Podobne wnioski o braku długookresowych zależności można wysnuć na podstawie zbyt odległych od jedynki wartości kwadratów koherencji. Jest to zgodne z obserwacjami, poczynionymi przez Lobato i Velasco [50].

Omówione wyniki, a zwłaszcza wykryty w ostatnim podokresie duży wzrost wartości estymatorów długiej pamięci zmienności, prowokują pytanie o charakter zmian estymowanych parametrów w czasie; czy wykryty wzrost świadczy o jakiejś stałej tendencji, czy miał charakter przypadkowy? Aby to dokładniej zbadać, wszystkie obliczenia powtórzono z zastosowaniem następującej procedury. Najpierw zbadano próbki złożone z pierwszych 1024 wyrazów każdego szeregu (w przybliżeniu 4 lata). Następnie to okno estymacyjne było przesuwane o 25 wyrazów w przód (w przybliżeniu 1 miesiąc). W ten sposób uzyskano ciągi 119 wartości każdego z estymowanych parametrów. Obliczenia powtórzono jeszcze dla okna o długości 512 wyrazów (2 lata). Wykresy 1 i 2 (rys. 1, 2) przedstawiają zachowanie się średnich z indywidualnych parametrów długiej pamięci (estymatory GPH) szeregów wartości bezwzględnych stóp zwrotu, kwadratów stóp zwrotu i log-wolumenu. Łatwo można zauważyć w ostatnich pięciu latach wyraźną tendencję wzrostową długiej pamięci szeregów zmienności stóp

Tabela 5

Wartości estymatora parametru  $\beta$  oraz długiej pamięci reszt regresji kointegrującej dla log-wolumenu i wartości bezwzględnych stóp zwrotu

	Wartości bezwzględne stóp zwrotu – log-wolumen									
	01.90–11.05		01.90–12.93		01.94–12.97		01.98–12.01		01.02–11.05	
	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$
Alcoa	22,0	0,31			26,0	0,26	20,1	0,27	9,6	0,41
Altria	33,8	0,30			31,7	0,20			35,1	0,20
AmEx	24,0	0,35	23,5	0,32	25,3	0,26			20,4	0,34
Boeing									19,4	0,25
Caterpillar			26,0	0,27			20,6	0,32	20,2	0,36
CocaCola	19,9	0,34			31,7	0,19	27,0	0,34	23,2	0,40
Disney	27,9	0,36					21,3	0,27	18,6	0,29
DuPont			27,6	0,20	32,1	0,28			13,0	0,42
Exxon			31,8	0,22	36,3	0,21			22,5	0,42
GE	28,0	0,41	44,0	0,31	23,8	0,21			25,5	0,37
GM			24,5	0,32					25,9	0,39
Honeywell			24,1	0,36					15,9	0,20
IBM	27,5	0,40	37,1	0,27			17,6	0,44		
JPMorgan	24,6	0,53	34,9	0,27			23,2	0,27	14,0	0,42
McDonald's										
3M			53,3	0,26	35,3	0,34				
Merck					31,7	0,18	25,2	0,29		
Pro&Gamble	24,6	0,42	42,5	0,38					37,3	0,41
UnitTech	28,0	0,33	20,7	0,27	42,4	0,16			29,3	0,14

Podano wartości tylko dla przypadków, gdy nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o wspólnej długiej pamięci obu szeregów.

Tabela 6

Wartości estymatorów kwadratu koherencji pomiędzy szeregami log-wolumenu i wartości bezwzględnych stóp zwrotu

	Wartości bezwzględne stóp zwrotu – log-wolumen				
	01.90–11.05	01.90–12.93	01.94–12.97	01.98–12.01	01.02–11.05
Alcoa	0,22	0,21	0,18	0,28	0,25
Altria	0,52	0,46	0,46	0,34	0,56
AmEx	0,24	0,27	0,18	0,38	0,23
Boeing	0,36	0,33	0,42	0,47	0,23
Caterpillar	0,26	0,17	0,26	0,28	0,26
CocaCola	0,28	0,23	0,29	0,42	0,35
Disney	0,31	0,26	0,32	0,36	0,23
DuPont	0,20	0,19	0,27	0,21	0,29
Exxon	0,21	0,17	0,26	0,20	0,30
GE	0,33	0,31	0,18	0,41	0,35
GM	0,31	0,27	0,24	0,23	0,46
Honeywell	0,28	0,20	0,19	0,42	0,24
IBM	0,42	0,42	0,46	0,40	0,40
JPMorgan	0,26	0,26	0,27	0,36	0,29
McDonald's	0,26	0,26	0,21	0,31	0,34
3M	0,30	0,26	0,19	0,29	0,48
Merck	0,34	0,28	0,28	0,36	0,40
Pro&Gamble	0,30	0,32	0,18	0,41	0,29
UnitTech	0,22	0,13	0,25	0,28	0,30

Tabela 7

Wartości estymatora parametru  $\beta$  oraz długiej pamięci reszt regresji kointegrującej dla log-wolumenu i kwadratów stóp zwrotu

	Kwadraty stóp zwrotu – log-wolumen									
	01.90–11.05		01.90–12.93		01.94–12.97		01.98–12.01		01.02–11.05	
	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$	$\beta$	$d_e$
Alcoa	346,8	0,31			542,6	0,26	248,7	0,28	157,3	0,39
Altria									410,7	0,29
AmEx	341,3	0,32							265,2	0,33
Boeing									366,6	0,25
Caterpillar			464,5	0,31					352,8	0,30
CocaCola	443,2	0,33			639,1	0,16	386,4	0,36	454,6	0,37
Disney									291,5	0,25
DuPont			632,7	0,19	680,9	0,32			223,3	0,37
Exxon			1072,0	0,19	807,8	0,16			368,7	0,44
GE					492,2	0,23			413,6	0,26
GM			443,4	0,29						
Honeywell									190,0	0,17
IBM			492,0	0,26						
JPMorgan			672,1	0,28			284,5	0,28		
McDonald's					790,8	0,30				
3M									1076,0	0,29
Merck							386,3	0,27		
Pro&Gamble			1149,7	0,40					848,6	0,40
UnitTech			513,4	0,25	1025,9	0,21			521,6	0,14

Podano wartości tylko dla przypadków, gdy nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o wspólnej długiej pamięci obu szeregów.

Tabela 8

Wartości estymatorów kwadratu koherencji pomiędzy szeregami log-wolumenu i kwadratów stóp zwrotu

	Kwadraty stóp zwrotu – log-wolumen				
	01.90–11.05	01.90–12.93	01.94–12.97	01.98–12.01	01.02–11.05
Alcoa	0,22	0,20	0,18	0,27	0,22
Altria	0,30	0,15	0,34	0,27	0,39
AmEx	0,20	0,29	0,17	0,34	0,11
Boeing	0,26	0,22	0,34	0,37	0,22
Caterpillar	0,22	0,16	0,25	0,27	0,22
CocaCola	0,23	0,21	0,22	0,33	0,26
Disney	0,26	0,23	0,27	0,34	0,19
DuPont	0,17	0,16	0,25	0,25	0,17
Exxon	0,19	0,23	0,22	0,19	0,23
GE	0,26	0,24	0,15	0,35	0,24
GM	0,21	0,24	0,16	0,10	0,32
Honeywell	0,22	0,19	0,14	0,33	0,20
IBM	0,27	0,30	0,31	0,27	0,26
JPMorgan	0,17	0,18	0,26	0,31	0,16
McDonald's	0,20	0,20	0,19	0,21	0,28
3M	0,28	0,22	0,20	0,32	0,40
Merck	0,16	0,29	0,27	0,33	0,16
Pro&Gamble	0,09	0,33	0,16	0,11	0,20
UnitTech	0,11	0,16	0,22	0,14	0,22

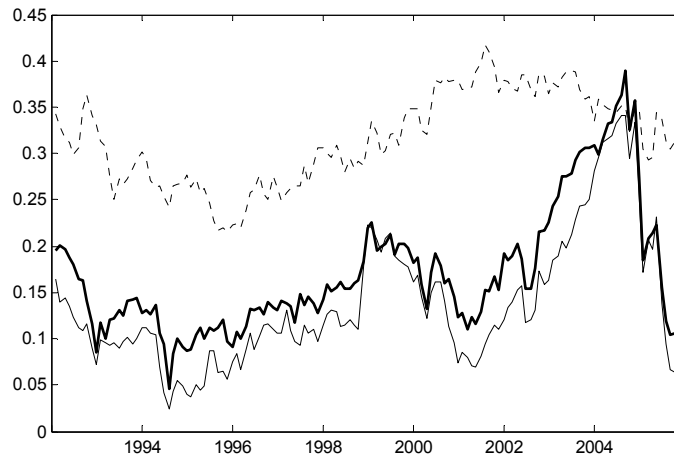
zwrotu. Jednak wyniki estymacji dla okna o długości 512 wskazują, że tendencja ta uległa odwróceniu i obecnie mamy do czynienia z gwałtownym skracaniem się pamięci szeregów zmienności. Efektem tego jest zmniejszenie się możliwości prognozowania wariacji stóp zwrotu.

## 6. Uwagi końcowe

Różnymi metodami zbadano długą pamięć zmienności stóp zwrotu (mierzonej jako kwadraty oraz jako wartości bezwzględne stóp zwrotu) i logarytmu wolumenu obrotów 19 spółek, wchodzących w latach 1990–2005 w skład indeksu DJIA. W badaniach zostało potwierdzone występowanie długiej pamięci w tych szeregach czasowych. Ustalono ponadto, że w ostatnim badanym podokresie (styczeń 2002–listopad 2005) szeregi zmienności i log-wolumenu wykazują wspólną długą pamięć. Przeprowadzone obliczenia nie pozwalają jednak na stwierdzenie, że istnieje między nimi zależność o charakterze długookresowym.



**Rys. 1.** Średnie parametrów długiej pamięci dla szeregów kwadratów stóp zwrotu, wartości bezwzględnych stóp zwrotu (linia pogrubiona) oraz log-wolumenu (linia przerywana). Przyjęto długość okna estymacyjnego równą 1024



**Rys. 2.** Średnie wartości parametrów długiej pamięci dla szeregów kwadratów stóp zwrotu, wartości bezwzględnych stóp zwrotu (linia pogrubiona) oraz log-wolumenu (linia przerywana). Przyjęto długość okna estymacyjnego równą 512

### Bibliografia

- [1] AGIAKLOGLOU C., NEWBOLD P., WOHAR M., *Bias in an estimator of the fractional difference parameter*, Journal of Time Series Analysis, 1993, Vol. 14, s. 235–246.
- [2] ANDERSEN T.G., *Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility*, Journal of Finance, 1996, Vol. 51, s.169–204.
- [3] ANDREWS D., GUGGENBERGER P., *A bias-reduced log-periodogram regression estimator for the long-memory parameter*, Econometrica, 2003, Vol. 71, s. 675–712.
- [4] ANDREWS D., SUN Y., *Adaptive local polynomial Whittle estimation of long-range dependence*, Econometrica, 2004, Vol. 72, s. 569–614.
- [5] AVOUYI-DOVI S., JONDEAU E., *International transmission and volume effects in G5 stock market returns and volatility*, BIS Conference Papers 2000, No. 8, s. 159–174.
- [6] AYDOGAN K., BOOTH G.G., *Are there long cycles in common stock returns?* Southern Economic Journal, 1988, Vol. 55, s.141–149.
- [7] BAILLIE R.T., *Long memory processes and fractional integration in econometrics*, Journal of Econometrics, 1996, Vol. 73, s. 5–59.
- [8] BAILLIE R.T., BOLLERSLEV T., MIKKELSEN H.O., *Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 1996, Vol.74, s. 3–30.
- [9] BARKOULAS J.T., BAUM C.F., *Long term dependence in stock returns*, Economics Letters, 1996, Vol. 53, s. 253–259.
- [10] BARKOULAS J.T, LABYS W.C., ONOCHIE J., *Fractional dynamics in international commodity prices*, Journal of Futures Markets, 1997, Vol. 17, s. 161–189.
- [11] BERAN J.A., *Statistical methods for data with long-range dependence*, Statistical Science, 1992, Vol. 7, s. 404–427.



- [12] BERAN J.A., *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman and Hall, 1994.
- [13] BESSEMBINDER H., SEGUIN P.J., *Price volatility, trading volume and market depth: evidence from futures markets*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1993, Vol. 28, s. 21–39.
- [14] BLUME L., EASLEY D., O'HARA M., *Market statistics and technical analysis: The role of volume*, Journal of Finance, 1994, Vol. 49, s. 153–181.
- [15] BOOTH G.G., KAEN F.R., KOVEOS P.E., *R/S analysis of foreign exchange markets under two international monetary regimes*, Journal of Monetary Economics, 1982, Vol. 10, s. 407–415.
- [16] BOLLERSLEV T., JUBINSKI D., *Equity trading volume volatility: latent information arrivals and common long-run dependencies*, Journal of Business & Economic Statistics, 1999, Vol. 17, s. 9–21.
- [17] BOLLERSLEV T., MIKKELSEN H.O., *Modeling and pricing long memory in stock market volatility*, Journal of Econometrics, 1996, Vol. 73, s. 151–184.
- [18] BRAILSFORD T.J., *The empirical relationship between trading volume, returns and volatility*, Accounting and Finance, 1996, Vol. 35, s. 89–111.
- [19] BROCK W.A., LEBARON B.D., *A dynamic structural model for stock return volatility and trading volume*, The Review of Economics and Statistics, 1996, Vol. 78, s. 94–110.
- [20] CHEUNG Y., LAI K., *Do gold market returns have long memory?* Financial Review, 1993, Vol. 28, s. 181–202.
- [21] CHEUNG Y., LAI K., *A search for long memory in international stock market returns*, Journal of International Money and Finance, 1995, Vol. 14, s. 597–615.
- [22] CHORDIA T., SUBRAHMANYAM A., ANSHUMAN V.R., *Trading activity and expected stock returns*, Journal of Financial Economics, 2001, Vol. 59, s. 3–32.
- [23] CHORDIA T., SWAMINATHAN B., *Trading volume and cross-autocorrelations in stock returns*, Journal of Finance, 2000, Vol. 55, s. 913–935.
- [24] CLARK P.K., *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*, Econometrica, 1973, Vol. 41, s. 135–155.
- [25] CONNOLLY R., STIVERS C., *Momentum and reversals in equity-index returns during periods of abnormal turnover and return dispersion*, Journal of Finance, 2003, Vol. 58, s. 1521–1555.
- [26] COPELAND T., *A model of asset trading under the assumption of sequential information arrival*, Journal of Finance, 1976, Vol. 31, s. 135–155.
- [27] CRATO N., *Some international evidence regarding the stochastic memory of stock returns*, Applied Financial Economics, 1994, Vol. 4, s. 33–39.
- [28] DARRAT A.F., RAHMAN S., ZHONG M., *Intraday trading volume and return volatility of the DJIA stocks: A note*, Journal of Banking and Finance, 2003, Vol. 27, s. 2035–2043.
- [29] DING Z., GRANGER C.W.J., ENGLE R.F., *A long memory property of stock market returns and a new model*, Journal of Empirical Finance, 1993, Vol. 1, s. 83–106.
- [30] DOORNIK J.A., OOMS M., *Computational aspects of maximum likelihood estimation of autoregressive fractionally integrated moving average models*, Computational Statistics and Data Analysis, 2003, Vol. 42, s. 333–348.
- [31] FAMA E.F., *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*, Journal of Finance, 1970, Vol. 25, s. 383–417.
- [32] FANG H., LAI K., LAI M., *Fractal structure in currency futures prices*, Journal of Futures Markets, 1994, Vol. 14, s. 169–181.
- [33] GALLO G.M., PACINI B., *The effects of trading activity on market volatility*, The European Journal of Finance, 2000, Vol. 6, s. 163–175.
- [34] GEWEKE J., PORTER-HUDAK S., *The estimation and application of long memory time series models*, Journal of Time Series Analysis, 1983, Vol. 4, s. 221–238.

- [35] GRANGER C.W.J., JOYEUX R., *An introduction to long-memory time series models and fractional differencing*, Journal of Time Series Analysis, 1980, Vol. 1, s. 15–29.
- [36] GREENE M.T., FIELITZ B.D., *Long-term dependence in common stock returns*, Journal of Financial Economics, 1977, Vol. 5, s. 339–349.
- [37] HENRY M., ROBINSON P.M., *Bandwidth choice in Gaussian semiparametric estimation of long range dependence*, [w] Robinson P.M., Rosenblatt M. (eds.), *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis*, Vol. II. *Time Series Analysis, In Memory of E.J. Hannan*, New York, Springer, 1996, s. 220–232.
- [38] HELMS B.P., KAEN F.R., ROSENMAN R.E., *Memory in commodity futures contracts*, Journal of Futures Markets, 1984, Vol. 4, s. 559–567.
- [39] HOSKING J.R.M., *Fractional differencing*, Biometrika, 1981, Vol. 68, s. 165–176.
- [40] HURST H.R., *Long-term storage capacity of reservoirs*, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, Vol. 1, s. 519–543.
- [41] HURVICH C.M., DEO R.S., BRODSKY J., *The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter of a long memory time series*, Journal of Time Series Analysis, 1998, Vol. 19, s. 19–46.
- [42] KARPOFF J.M., *The relation between price changes and trading volume: A survey*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, Vol. 22, s. 109–126.
- [43] KIM C.S., PHILLIPS P.C., *Log periodogram regression in the nonstationary case*, Mimeo, Yale University. 1999.
- [44] KÜNSCH H.R., *Statistical aspects of self-similar processes*, [w:] Y. Prokhorov, V.V. Sazanov (eds.), *Proceedings of the First World Congress of the Bernoulli Society*, Utrecht, VNU Science Press, 1987, s. 67–74.
- [45] LAMOUREUX C.G., LASTRAPES W.D., *Heteroscedasticity in stock return data: Volume versus GARCH effects*, Journal of Finance, 1990, Vol. 45, s. 221–229.
- [46] LAMOUREUX C.G., LASTRAPES W.D., *Endogenous trading volume and momentum in stock-return volatility*, Journal of Business and Economic Statistics, 1994, Vol. 12, s. 253–260.
- [47] LEE B.S., RUI O.M., *The dynamic relationship between stock returns and trading volume: Domestic and cross-country evidence*, Journal of Banking and Finance, 2002, Vol. 26, s. 51–78.
- [48] LO A.W., *Long-term memory in stock market prices*, Econometrica, 1991, Vol. 59, s. 1279–1313.
- [49] LOBATO I.N., *A semiparametric two-step estimator in a multivariate long memory model*, Journal of Econometrics, 1999, Vol. 90, s.129–153.
- [50] LOBATO I.N., VELASCO C., *Long memory in stock-market trading volume*, Journal of Business and Economic Statistics, 2000, Vol. 18 (4), s. 410–427.
- [51] LOBATO I.N., SAVIN N.E., *Real and spurious long-memory properties of stock-market data*, Journal of Business and Economic Statistics, 1998, Vol. 16, s. 261–283.
- [52] MANDELBROT B.B., *When can a price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models*, Review of Economics and Statistics, 1971, Vol. 53, s. 225–236.
- [53] MANDELBROT B.B., VAN NESS J.W., *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*, SIAM Review, 1968, Vol. 10 (4), s. 422–437.
- [54] MCKENZIE M.D., FAFF R.W., *The determinants of conditional autocorrelation in stock returns*, Journal of Financial Research, 2003, Vol. 26, s. 259–274.
- [55] OMRAN M.F., MCKENZIE E., *Heteroscedasticity in stock returns data revisited: Volume versus GARCH effects*, Applied Financial Economics, 2000, Vol. 10, s. 553–560.
- [56] PETERS E.E., *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*, J. Wiley & Sons. 1994.
- [57] PHILLIPS P.C., SHIMOTSU K., *Local Whittle estimation in nonstationary and unit root cases*, Annals of Statistics, 2004, Vol. 34 (2), s. 656–692.

- [58] ROBINSON P.M., *Semiparametric analysis of long-memory time series*, Annals of Statistics, 1994, Vol. 22, s. 515–539.
- [59] ROBINSON P.M., *Log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics, 1995, Vol. 23, s. 1048–1072.
- [60] ROBINSON P.M., *Gaussian semiparametric estimation of long range dependence*, Annals of Statistics, 1995, Vol. 23, s. 1630–1661.
- [61] ROBINSON P.M., MARINUCCI D., *Narrow-band analysis of nonstationary processes*, Annals of Statistics, 2001, Vol. 29 (4), s. 947–986.
- [62] ROBINSON P.M., YAJIMA Y., *Determination of cointegrating rank in fractional systems*, Journal of Econometrics, 2002, Vol. 106 (2), s. 217–241.
- [63] SHIMOTSU K., PHILLIPS P.C., *Pooled log-periodogram regression*, Journal of Time Series Analysis, 2002, Vol. 23, s. 57–93.
- [64] SHIMOTSU K., PHILLIPS P.C., *Exact local Whittle estimation of fractional integration*, Cowles Foundation Discussion Paper, 2002, 1367.
- [65] SOWELL F.B., *Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models*, Journal of Econometrics, 1992, Vol. 53, s. 165–188.
- [66] SUOMINEN M., *Trading volume and information revelation in stock markets*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2001, Vol. 36, s. 545–565.
- [67] VELASCO C., *Non-stationary log-periodogram regression*, Journal of Econometrics, 1999, Vol. 91, s. 325–371.
- [68] VELASCO C., *Gaussian semiparametric estimation of non-stationary time series*, Journal of Time Series Analysis, 1999, Vol. 20, s. 87–127.

### **Long-run properties of trading volume and volatility of equities listed in DJIA index**

In this paper, the authors explain the notion of long memory and report their results concerned with the long memory properties of trading volume and the volatility of stock returns (given by absolute returns and alternatively by square returns) of American companies listed in DJIA index. The contributors focus on calculation of long memory parameters and try to answer the question of whether or not the degree of long memory is the same for the trading volume and for the return volatility data and whether these are fractionally cointegrated. Computations are performed on a daily basis for the whole period from January 1990 to November 2005 and in four sub-periods: January 1990 to December 1993, January 1994 to December 1997, January 1998 to December 2001 and January 2002 to November 2005. We established that for the equities listed in the DJIA index the log-volume (the logarithm of trading volume) and returns volatility exhibit long memory. Moreover, these two series have the same long-memory parameters for most of the equities. This common long memory of both series is especially strongly pronounced in the latest data. On the other hand, there is no evidence that log-volume and volatility share the same long memory component. One important question which arises here concerns the source of long memory in the series. The existence of long memory in the series under investigation may reflect the statistical properties of fundamental factors underlying their behaviour or qualitative changes which take place on stock markets. According to empirical investigations, the growing share of stocks by institutional investors is accompanied by an increasing autocorrelation in returns and trading volume data. On the other hand, long memory is related to autocorrelation. Thus, in our opinion the

increasing presence of long memory in the latest American trading-volume data may be caused by the growing share of equities by institutional investors.

Keywords: *DJIA, trading volume; univariate and bivariate long memory*