BADANIA OPERACYJNE I DECYZJE
Nr 3 2008

Jacek JUZWISZYN*

SYMFONIA RYNKU

Trajektorie wirowe jakie tworzą muzyczne dźwięki (amplituda, częstotliwość) są uderzająco podobne do ekonomicznych trajektorii wirowo-spiralnych (cena, wolumen). Kształty spiralne trajektorii sprawiają, że istnieją przedziały czasu, w których formy wirowe zawierają złotą proporcję. Występuje ona zarówno w utworach muzycznych, jak i w „utworach ekonomicznych", komponowanych przez rynek. Czy wobec tego rynek może wydobyć harmonijne dźwięki tworząc symfonię?

Słowa kluczowe: *Trójwymiarowa wizualizacja utworów Beethovena, trójwymiarowe trajektorie wirowe, nowa trójwymiarowa interpretacja, produkt kartezjański: cena, wolumen, czas*

Wstęp

Pomysł artykułu zrodził się podczas moich kolejnych sierpniowych (2007 r.) odwiedzin Muzeum Ludwiga van Beethovena przy Bonngasse 20 w Bonn. Aktualnie Dom Beethovena w Bonn – Muzeum i Cyfrowy *Beethoven – Haus Bonn* to jedna instytucja, która mieści się w zespole dzisiejszych budynków, niegdyś przez kilka lat zamieszkałych przez rodzinę Beethovenów. Powołane w 1889 roku Stowarzyszenie *Beethoven – Haus Boon* zgromadziło we wspomnianym miejscu największy w świecie zbiór *beethovenaliów*. Od 2004 roku w *cyfrowym domu Beethovena* istnieje możliwość odsłuchania i obejrzenia utworów mistrza, w całkowicie nowej, trójwymiarowej interpretacji. Trójwymiarowa komputerowa wizualizacja utworów Beethovena wyrażana jest za pomocą trójwymiarowych trajektorii wirowo-spiralnych. Ich kształt jest uderzająco podobny do trajektorii ekonomicznych jakie wyznaczają wektory dóbr o składowych: cena, ilość, czas. Trójwymiarowa wizualizacja utworów Beethovena była możliwa, ponieważ zostały napisane równania,

* Katedra Matematyki i Cybernetyki, Uniwersytet Ekonomiczny, ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław, e-mail: jacek.juzwiszyn@ue.wroc.pl

które zamieniają zapis muzycznych dźwięków (dowolnego instrumentu) na położenie punktu w R_+^3.

Przykładowo dwadzieścia różnych instrumentów uwalnia dźwięki utworu *In des Lebens Frűhlingstagen* („W wiośnie życia"), które zwizualizowane tworzą dwadzieścia różnokolorowych, harmonijnie wirujących trajektorii. Kształt i charakter trajektorii instrumentalnych jest uderzająco podobny do kształtu trajektorii wirowo-spiralnych, jakie wyznaczają spółki (wektory należące do $R_+^3 = P \times Q \times T$ – produktu kartezjańskiego: ceny, wolumenu i czasu), wchodzące np. w skład indeksu WIG20 Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Jeżeli teraz założymy istnienie odwzorowań odwrotnych, tzn. takich, które pozwalają zapisać jednoznaczne położenie punktu w $R_+^3 = P \times Q \times T$ za pomocą nut, to wówczas jesteśmy w stanie wydobyć dźwięki z instrumentów muzycznych. Usłyszymy więc instrumentalną grę ekonomicznych wektorów, o powyżej wymienionych składowych.

Harmonijne utwory muzyczne nacechowane są niezwykłą melodyjnością. Jeśli słuchamy i przeżywamy takie utwory po raz pierwszy, to w momencie kiedy utwór zostaje przerwany, jesteśmy w stanie wyobrażać sobie jeszcze dźwięki, podczas gdy nasz zmysł słuchu już żadnych dźwięków nie wychwytuje (w tzw. stanie głuchej ciszy). Czy słysząc dźwięki, które wydaje do dnia dzisiejszego indeks WIG20, jesteśmy w stanie efektywnie prognozować jego wartość w dniu jutrzejszym?

Od czasów pitagorejczyków wiemy, że wysokość dźwięku zależy od długości wytwarzającej ten dźwięk struny. Współbrzmiące interwały skali odpowiadają prostym proporcjom liczbowym (2:1 – oktawa, 3:2 – kwinta, 4:3 – kwarta). Obecnie uważa się owe odkrycie uczniów Pitagorasa za pierwszą epokową próbę sprowadzenia jakości do ilości. Ten pierwszy, uwieńczony sukcesem krok w kierunku matematyzacji ludzkiego doświadczenia miał wielkie znaczenie w rozwoju nauki. Dla pitagorejczyków matematyzacja doświadczenia oznaczała jego wzbogacanie. Liczby były dla nich święte, traktowano je jako najczystsze idee, ubezcieleśnione i eteryczne. Zaślubienie muzyki z liczbami mogło ją tylko uszlachetnić. Ludzie zdolni i wrażliwi zawsze potrafili przekształcić religijną i emocjonalną *ekstasis* w ekstazę intelektualną, kontemplację boskiego tańca liczb. Same struny od strony materialnej nie miały dla pitagorejczyków większego znaczenia. Można je wykonywać z różnych materiałów, mogą mieć różną długość i grubość. Najważniejsze jednak, by zachowywały podstawowe proporcje. Muzykę wytwarzają stosunki liczbowe, liczby, schemat skali. Za pitagorejczykami uważamy liczby za wieczne i niezniszczalne, wszystko inne zaś za zniszczalne. Liczby nie pochodzą z materii, lecz z ludzkiego umysłu. Pozwalają dokonywać najbardziej zaskakujących działań naukowych. Połączenie form geometrycznych i praw matematycznych jest często najskuteczniejszym sposobem na oczyszczenie duszy z ziemskich namiętności i wydaje się być najważniejszym łącznikiem, ułatwiającym podążanie człowieka do ideału. Trajektoria łącząca muzykę z liczbami stała się więc linią systemu pitagorejskiego. Linia ta została przedłużona w obu kierunkach: z jednej strony ku gwiazdom, z drugiej ku człowiekowi. Łożyskami, w ogniskach których wirowała oś i cały system, były dwa podstawowe pojęcia: harmonia (gr. *armonia*) oraz oczyszczenie (gr. *katharsis*).

W czasach kiedy żyli pitagorejczycy, byli oni uważani za uzdrowicieli. Powiada się, że do uzdrawiania ciała używali lekarstw, a do uzdrawiania duszy – muzyki. Głównym efektem leczenia muzyką było doprowadzanie chorego (często tylko zmęczonego) umysłu do stanu równowagi i porządku. Dzisiaj ta metoda leczenia uważana jest za pierwowzór psychoterapii i polega na wtrąceniu pacjenta w stan tanecznego transu, po którym następuje wyczerpanie i hipnotyczny leczniczy sen, pozwalający osiągać stan równowagi umysłowej. Odpowiednio skomponowane proporcje liczbowe powodują harmonijne drgania strun. Te z kolei wydają dźwięki, które mogą pomagać w osiąganiu na ogół pożądanych stanów równowagi. Liczby nie wzięły się znikąd, nie zostały również „wrzucone” do naszego świata jak popadnie. Układają się one w wyważone wzory i piękne naturalne formy. Przykład takiego uniwersalnego wzoru, opisującego różnorodność kształtów w geometrii natury podał Johan Gielis[1].

$$r(\varphi) = f(\varphi)\left\{\left[\left|\frac{1}{a}\cos\left(\frac{m\varphi}{4}\right)\right|\right]^{k} + \left[\left|\frac{1}{b}\sin\left(\frac{m\varphi}{4}\right)\right|\right]^{l}\right\}^{\frac{-1}{n}}. \tag{1}$$

Wzór opisuje krzywą we współrzędnych biegunowych r i φ, gdzie r jest odległością punktu od pozycji środka dla danego kąta φ, φ – zmienna – kąt, m – współczynnikiem symetrii, n, k, l – współczynnikami kształtu, a, b to wymiary – poziomy i pionowy. I tak np. dla: $a = b = 1$, $n = 250$, $k = l = 100$, $m = 6$ (otrzymujemy wirowy kształt kryształu grafitu), $a = b = 1$, $n = k = l = 100$, $m = 4$ (wirowy kształt kryształu bizmutu), $a = b = 1$, $n = k = l = 2$, $m = 4$ (kształt spirali).

Wzór Gielisa pozwala matematycznie opisywać przeróżne spłaszczenia form wirowych, jakie powszechnie występują w naturze. Wiadomo, że zarówno muzyka jak i ekonomia (ekonomia wektorów o składowych: cena, ilość, czas) tworzą również formy (trajektorie) wirowe.

W momentach, gdy formy, wzory oraz odpowiednie interwały skali współbrzmią, rodzą się dźwięki zgodnie z powszechnymi prawami harmonii. Powstaje więc naturalne pytanie: Czy istnieje matematyczna formuła łącząca trójwymiarowe formy wirowe tych pozornie rozłącznych światów?

Pitagorejczycy twierdzili, że Ziemia jest kulą, wokół której po koncentrycznych kręgach wędrują: Słońce, Księżyc i planety, z których każda jest przypięta do sfery lub koła (kres ich poglądom zadał dopiero Mikołaj Kopernik, publikując w 1543 r. dzieło *De Revolutionibus Orbium Coelestium*).

---

[1] Johan Gielis (ur. 8 lipca 1962 r.), belgijski inżynier, matematyk i przedsiębiorca. W 1997 roku opublikował swój wzór – superformułę (uogólnienie wzoru superelipsy). Wzór ten pozwala odtworzyć różne kształty występujące w naturze.

Szybkie okrążanie Ziemi przez te ciała sprawia, że pojawia się szelest (dźwięczne buczenie). Oczywiście, buczenie każdej planety miało by mieć (według pitagorejczyków) inną wysokość, zależną od stosunków liczbowych pomiędzy orbitami – tak samo jak ton struny zależy od jej długości. Orbity, po których poruszają się planety, tworzą instrument w rodzaju przeogromnej liry o kolistych strunach. Interwałami międzyorbitalnymi – strunami muszą rządzić prawa harmonii. Pitagoras nazwał interwał tworzony przez Ziemię i Księżyc tonem. Interwały utworzone przez inne ciała niebieskie przedstawiały się następująco: przez Księżyc i Merkurego – półton, przez Merkurego i Wenus – półton, przez Wenus i Słońce – półtora tonu, przez Słońce i Marsa – cały ton, przez Marsa i Jowisza – półton, przez Jowisza i Saturna – półton, przez Saturna i sferę gwiazd stałych – półtora tonu. Wynikała z tego odpowiednia „skala pitagorejska": C, D, bE, G, A, bB, B, D [8][2]. Marzenie pitagorejczyków o muzycznej harmonii rządzącej kinematycznymi ruchami planet, do dnia dzisiejszego nie utraciło nic ze swej magicznej siły oddziaływania. Dowodem mogą być badania prowadzone przez NASA[3], związane z analizą pozaziemskich dźwięków. Jak dotąd jednak pitagorejska „harmonia sfer" jest tylko i wyłącznie poetyckim konceptem. Od czasów, kiedy do wymiany handlowej został wprowadzony pieniądz, ludzie bardzo szybko zorientowali się, że za tą samą ilość pieniędzy w zmieniającym się czasie można nabywać różne ilości tego samego dobra. Zasadniczy wpływ na tego typu zawirowania ilościowo-cenowe mają zmieniające się w czasie wielkości popytu i podaży oraz inflacja. Czynniki, które powodują zmiany popytowo-podażowe są różnorodne i na ogół nie do końca znane (czy też jednoznacznie przewidywalne). Zwykle podczas omawiania przykładów takich zmian zwraca się uwagę na te czynniki, które miały zasadniczy wpływ na wzrost lub spadek cen (lub inflacji). Natomiast z całą pewnością nie omawia się wszystkich. Nikt z poważnych ekonomistów nie zaryzykuje wypowiedzi, w której na przykład z pełną stanowczością będzie twierdzić, że cena jednego metra kwadratowego nowo wybudowanego mieszkania – nieruchomości położonej w centrum dużego miasta nie ulegnie zmianie w przyszłym półroczu, czy też, że cena jednej baryłki ropy naftowej będzie w najbliższym miesiącu stała. Powszechnie wiadomo, że choć dbałość większości państw o względną stabilność (równowagę) cenowo-ilościową (inflacyjną) jest obecnie ogromna, mimo to w gospodarkach państw występują stale zawirowania cenowo-ilościowe. Prawdopodobnie jest jeszcze za wcześnie na precyzyjną odpowiedź na pytanie: Dlaczego wektory dóbr ekonomicznych o składowych – cena, ilość, czas dosłownie wirują w R_+^3? Podobnie jak w astronomii nikt do tej pory (po odkryciach M. Kopernika, T. Brahe'a, J. Keplera, I. Newtona

[2] Istnieją źródła, w których autorzy przedstawiają nieco odmienną wersję „skali pitagorejskiej".

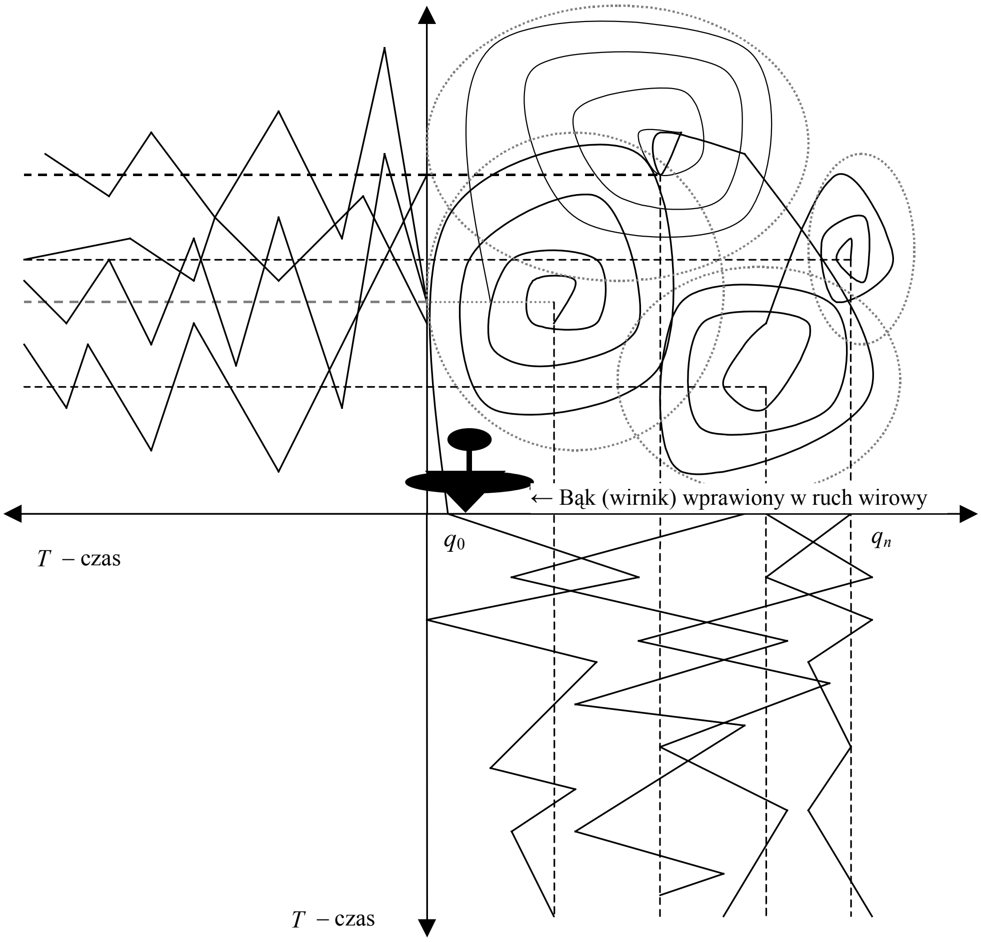
[3] Narodowa Agencja Aeronautyki i Przestrzeni Kosmicznej – NASA (ang. *National Aeronautics and Space Administration*) – wydział administracji rządowej USA zajmujący się amerykańskim programem kosmicznym oraz rozwojem techniki lotniczej. NASA została ustanowiona przez Kongres Stanów Zjednoczonych 29 lipca 1958 roku. Agencja prowadzi zaawansowane badania, polegające na analizach dźwięków pochodzących z nasłuchu kosmosu.

i in.) nie odpowiedział precyzyjnie na zasadnicze pytanie: Dlaczego nasza planeta Ziemia wykonuje podwójny ruch wirowy (wokół własnej osi i Słońca)? Wprawdzie zostały wyjaśnione: ruchy precesji i nutacji Ziemi, skutki oddziaływania siły Coriolisa, ale odpowiedzi na zasadnicze pytanie nie ma do dnia dzisiejszego.

Jeśli założymy, że w dwuwymiarowym układzie współrzędnych mamy zobrazowane zmieniające się w czasie ceny (wartości) giełdowej spółki *x*, to – niezależnie od panującego w czasie obserwacji giełdowego trendu – na wykresie ukażą się płaskie zygzaki, przedstawiające wzrost lub spadek wartości spółki *x*. Podobnie będzie w przypadku zmieniającego się wolumenu. Możemy więc oglądać dwa różne wykresy (dwa różne zygzaki), które niezależnie od siebie przedstawiają dynamikę zmian wektora *x* w dwóch różnych układach współrzędnych: układzie cenowo-czasowym lub wolumenowo-czasowym. Obserwacja spółki *x* jako wektora o dwóch składowych: cena, wolumen jest bardzo trudna wówczas, gdy analizuje się dużą liczbę notowań spółki. Praktycznie pewne wirowe regularności są dostrzegalne tylko w przypadkach, gdy obserwacji w układzie cenowo-wolumenowym jest niewiele (por. rys. 1). Dla dużej ilości notowań spółki *x*, płaskie trajektorie wektora o składowych: cena, wolumen, praktycznie bardzo „gęsto" nakładają się na siebie, tworząc obraz nieczytelny. Dostrzeżenie na takim obrazie jakiejkolwiek regularności jest wręcz niemożliwe.

Zupełnie inaczej wygląda trajektoria spółki *x* w momencie, gdy podniesiemy o jeden wymiar przestrzeni, w której dokonujemy obserwacji. W układzie trójwymiarowym nasze płaskie trajektorie zostają rozciągnięte w czasie (można też powiedzieć, że płaskie kinematyczne trajektorie zostaną dosłownie oderwane od płaszczyzny cena–wolumen), jednocześnie odkrywając przed nami swoją prawdziwą, kinematycznie wirową naturę.

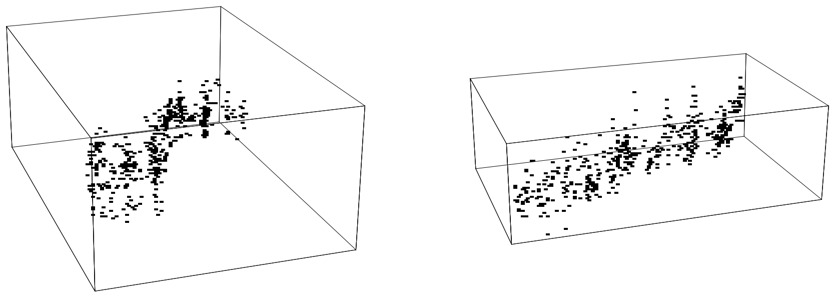
Identyczny wizualny efekt osiągniemy w momencie, gdy dokonamy rozciągnięcia (wzdłuż osi czasu, położonej prostopadle do płaszczyzny cena – ilość) modelu pajęczynowego (*Cobweb Model*). W takim przypadku otrzymamy graniastosłup ścięty o podstawie czworokąta, z nawiniętą na powierzchnię boczną graniastosłupa linią śrubową. Najprawdopodobniej w latach trzydziestych ubiegłego wieku takie trójwymiarowe eksperymenty, związane z dosłownym rozciąganiem mechanizmu pajęczynowego nie były dokonywane przez jego trzech niezależnych od siebie twórców i propagatorów modelu, tj. J. Timbergena, R. Ricciego i T. Hanau. Gdyby tak było, wówczas modelowa próba wyjaśnienia ekstrapolacyjnego dostosowania się cyklicznych wahań cen i ilości wytwarzanych dóbr do poziomów równowagi ekonomicznej mogłaby już wtedy podążyć w kierunku problematyki związanej z trójwymiarowymi wirami ekonomicznymi. Empirycznie zweryfikowana przeze mnie hipoteza wirowej równowagi ekonomicznej [4] jest kompatybilna zarówno z walrasowską hipotezą nadwyżkowego popytu, jak i z marshallowską hipotezą nadwyżkowej ceny. Weryfikacja empiryczna polegała na wizualnych obserwacjach amerykańskiego indeksu DJIA (*Dow Jones Industrial Average*) giełdy papierów wartościowych w Nowym Jorku – NYSE (*New York Stock Exchange*), z okresu ponad stu lat. Dodatkowo trójwymiarowe trajektorie wirowo-spiralne zostały dostrzeżone również w dynamicznych układach, które przedstawiały np.: wolumeny i wartości polskich indeksów giełdowych, ilości i ceny sprzedawanych zbóż, ilości kupowanych mieszkań – uzależnione od średniej ceny m^2 powierzchni, ceny i ilości wydobycia węgla kamiennego. Wartym zaznaczenia w tym miejscu jest również przykład występowania trajektorii wirowo-spiralnej w momencie przedstawiania zależności między bezrobociem a inflacją.



Rys. 1. Płaskie dwuwymiarowe trajektorie wirowe spółki x. Prostopadłe rzuty trójwymiarowej trajektorii wirowo-spiralnej spółki x, wyznaczające w R_+^3 precesujące powierzchnie obrotowe stopnia drugiego. Zmodyfikowany model pajęczynowy (*Cobweb Model*). Dostosowywanie się poziomów cen i ilości dóbr ekonomicznych do poziomów równowagi w czterech różnych przedziałach czasowych. Składowe wektora $(p, q, t) \in R_+^3 = P \times Q \times T$. Trajektoria ruchu wirowego bąka.

Ź r ó d ł o: Opracowanie własne.

Ruch wektorów ekonomicznych jest skutkiem zasady równowagi [7, s. 41–50]. Można powiedzieć, że wszystkie sekrety równowagi są ukryte w ruchu. Sekrety równowagi ekonomicznej są ukryte w ruchu wirowym, wyznaczającym poziomy cenowe i ilościowe dowolnych wektorów ekonomicznych. Ruch wspomnianych wektorów w ekonomii jest efektem oddziaływania na owe wektory sił podaży i popytu. Trójwymiarowe zawirowania ekonomiczne zwykle obserwujemy w postaci ich ortogonalnych rzutów na płaszczyzny, na których ich obrazami są przecinające się wykresy funkcji liniowych (zygzaki). Dwuwymiarowe zygzaki były przedmiotem badań R.N. Elliotta. Zbudował on intuicyjną teorię fal, w której integralnymi elementami są liczby zygzaków – odpowiadające liczbom Fibonacciego oraz złota proporcja. To właśnie na bazie tych dwóch elementów dokonywane są prognozy giełdowe. Jednak ani Elliott, ani żaden z licznych propagatorów jego teorii nie wyjaśnili istoty pojawiania się w analizie technicznej liczb Fibonacciego czy też złotej liczby. Moim zdaniem, ich częste pojawianie się na dwuwymiarowych wykresach indeksów giełdowych to tylko i wyłącznie geometryczny efekt ortogonalnych rzutów na płaszczyznę trójwymiarowej trajektorii wirowej. Pojawianie się złotej liczby na wykresach przedstawiających płaskie zygzaki jest możliwe tylko i wyłącznie wtedy, gdy na powierzchnie obrotowe (oprócz walca)[4], rynek „nawija” trójwymiarową spiralę logarytmiczną. To ona właśnie, zrzutowana ortogonalnie na płaszczyzny, zachowuje swoją złotą proporcję. Każda giełdowa spółka (indeks) ma swój własny indywidualny wir. Różnorodność trajektorii wirowych spółek (indeksów) giełdowych sprawia takie wrażenie, jakby każda nich miała inny „wirowy kod genetyczny” (por. rys. 2b).



a) b)

Rys. 2. a) Trójwymiarowa wizualizacja utworu Ludwiga van Beethovena,
b) trójwymiarowa trajektoria wirowa indeksu DJIA (*Dow Jones Industrial Average*)
w okresie (10.09.1908 r.–31.12.1909 r.) układu dziennego.
Ź r ó d ł o: Opracowanie własne na podstawie Mathematica Wolfram 3.0

Na rysunku 2 przedstawione zostały dwa trójwymiarowe różne zawirowania. Trajektoria wirowa widoczna na rysunku a) to wizualizacja utworu Ludwiga van Beethovena, na-

[4] Pisząc o powierzchniach brył obrotowych mam na myśli takie jak: stożek, sferę, paraboloidę, hiperboloidę i elipsoidę.

tomiast rysunek b) to wirowa trajektoria giełdowego indeksu DJIA. Przedstawienie kompozycji Beethovena jako trójwymiarowej trajektorii wirowej jest możliwe, ponieważ istnieje formuła (wzór), pozwalająca zamieniać różne nuty na różne położenia punktu w R_+^3. Efektywność tej translacji jest zdumiewająca – dochodzi się wprost do wniosku „że fortuna nie kołem się toczy, lecz wiruje". Wirujące punkty bardzo dobrze oddają dynamikę utworu muzycznego, jak również jego melodyjność, rytm i metrum, harmonię, agogikę oraz barwę dźwięku. Załóżmy, że znamy wzór przekształcenia, dokonującego zamiany dźwięków na położenie punktu w R_+^3. W momencie, gdy wyznaczymy wzór przekształcenia odwrotnego, będziemy w stanie wirującym punktom trójwymiarowego układu przyporządkować dźwięki muzyczne. Przechodząc teraz do ekonomicznych układów współrzędnych, możemy w identyczny sposób przypisać jednoznaczne dźwięki do położenia wektora o składowych: cena, ilość, czas. Prawdopodobnie odtworzone przez komputer dźwięki, opisujące np. ruch punktów indeksu DJIA, miałyby niewiele wspólnego z kompozycjami muzycznymi, do których słuchania przywykliśmy. Na uwadze należy mieć jednak również takie okresy działalności inwestorów, kiedy to trajektorie wirowe tworzą pewne spiralne regularności[5], ukrywające w swojej geometrii złotą liczbę. Być może wówczas usłyszelibyśmy dźwięki harmonijne, których efektem byłaby symfonia rynku. Ekonomiczna symfonia muzyczna, charakteryzująca się odpowiednią dynamiką, melodyjnością, rytmem i metrum, harmonią, agogiką oraz barwą dźwięku, z założenia powinna być łatwo rozpoznawalna oraz łatwiejsza w prognozowaniu zakończenia wirowych dźwięków ekonomii.

Aktualnie istnieje niewiele prób badania wirów ekonomicznych. Prawdopodobnie jest to spowodowane tym, że do obecnej chwili jeszcze nie zbudowano teorii prognostycznej, u podstaw której leżałyby ekonomiczne wiry, i która by dobrze prognozowała zjawiska rynkowe. Dodatkowo wiadomo, że matematyczny opis zjawisk wirowych jest bardzo skomplikowany, trudny, ale z pewnością wart zainteresowania.

Nie tak dawno temu ludzie prognozowali pogodę na podstawie: ogólnej obserwacji nieba, zmian przyrodniczych, wahań temperatury, siły wiatru, zachowań zwierząt i może jeszcze zmian zachodzących w ludzkich organizmach. Obecnie prognozy meteorologiczne uzupełniane są wiedzą klimatologów dotyczącą np. trajektorii, jakie wyznaczają przemieszczające się masy powietrza i ich rozmiarów, ruchów oceanów, wahań ciśnienia atmosferycznego jak również prędkości i sąsiedztwa wirów. Trafność dzisiejszych prognoz meteorologicznych jest zdumiewająco wysoka. Praktycznie wszyscy z tych prognoz korzystamy. Jeśli więc udaje nam się tworzyć trafne prognozy, obserwując meteorologiczne wiry, to być może niedługo badania rynkowych wirów pozwolą nam szybciej niż dotychczas dostrzegać nadchodzące kataklizmy ekonomiczne.

---

[5] $(x,y,z)=(x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi)=\left(ae^{\lambda\varphi}\cos\varphi,\, ae^{\lambda\varphi}\sin\varphi,\, a\frac{l}{s}e^{\lambda\varphi}\right)$ – równanie wektorowe spirali logarytmicznej nawiniętej na stożek w R_+^3.

Bibliografia

[1] GIELIS J., *Inventing the circle. The geometry of nature*, Geniaal Press, Antwerpen 2003.
[2] GIELIS J., *A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural an abstract shapes*, American Journal of Botany 2003.
[3] JAKIMOWICZ A., *Od Keynesa do teorii chaosu*, PWN, Warszawa 2003.
[4] JUZWISZYN J., *Zawirowany świat ekonomii. Ekonofizyczna próba pomiaru wirów równowagi. Efektywność – rozważania nad istotą i pomiarem* (red. T. Dudycz), Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2007.
[5] JUZWISZYN J., *Eassy on econopysical formulation of the Elliott's waves*, Mathematical Economics 2(9), (red. A. Smoluk), Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2006.
[6] JUZWISZYN J., *Precesja i nutacja jako mechanizmy zrównoważonego rozwoju. Uwarunkowania i mechanizmy zrównoważonego rozwoju*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Białymstoku, Białystok 2007.
[7] SMOLUK A., *Giełda, fale Elliotta, stożki i walce* (red. T. Kufel, M. Piłatowska), *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2003.
[8] KOESTLER A., *Lunatycy*, Wydawnictwo Zysk i Spółka, Poznań 2002.
[9] NEWTON R., *Zrozumieć przyrodę*, Wydawnictwo Prószyński i S-ka, Warszawa 1996.
[10] OPERA J., *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, PWN, Warszawa 2002.
[11] PANEK E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000.
[12] PENROSE R., *Droga do rzeczywistości. Wyczerpujący przewodnik po prawach rządzących Wszechświatem*, Wydawnictwo Prószyński i S-ka, Warszawa 2007.
[13] WOJTYNA A., *Czy ekonomia nadąża z wyjaśnianiem rzeczywistości?*, t. 1, (red. A. Wojtyna), Bellona, Warszawa 2001.
[14] WRÓBLEWSKI A.K., *Historia fizyki*, PWN, Warszawa 2006.

Market symphony

The idea for this article was conceived on my subsequent visit at Ludwig van Beethoven's Museum at Bonngase 20 in Bonn in August 2007. Since 2004 in *The Digital Beethoven's House* there has been an opportunity to listen to and watch Beethoven's works, in totally new three-dimensional interpretation. This 3D computer visualisation of Beethoven's works is expressed with the use of three-dimensional rotary-spiral trajectories. Their shape is strikingly similar to economic trajectories which designate vectors of goods with such components as: price, quality, and time. The 3D visualisation of the master's works was possible due to equations which change the notation of sounds of music (of any instrument) onto the location of a point in R_+^3. Each economic phenomenon presented in the Cartesian product (price, volume, time) eases sounds. In the paper the author poses a fundamental question. Is it possible to forecast the value of WIG 20 for tomorrow, hearing its sounds emitted up till today?

Keywords: *The 3D computer visualisation of Beethoven's works, three-dimensional rotary-spiral trajectories, new three-dimensional interpretation, Cartesian product: price, volume, time*