Wilhelm, Jochen

Working Paper

Das Gaußsche Zinsstrukturmodell: Eine Analyse auf der Basis von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Passauer Diskussionspapiere, Betriebswirtschaftliche Reihe, No. 6

Provided in cooperation with:
Universität Passau

Editor:
Department of Business Administration
Faculty of Business Administration and Economics
Passau University
Germany

Jochen Wilhelm

Series in Business Administration
ISSN 1435-3539

Address:

Professor Dr. Jochen Wilhelm
Chair of Finance
Faculty of Business Administration and
Economics
Passau University
D-94030 Passau
Germany
Phone: +49–851/509–2510
Fax: +49–851/509–2512
Email: Jochen.Wilhelm@uni–passau.de

DAS GAUßSCHE ZINSSTRUKTURMODELL - EINE ANALYSE AUF DER BASIS VON WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

von Jochen Wilhelm

I. Einführung

Die seit den Arbeiten von *Ross* (1978), *Harrison/Kreps* (1979) und *Harrison/Pliska* (1981) dominierende Methode zur simultanen Arbitrage-freien Bewertung komplexer Finanztitel besteht in der Transformierung der stochastischen Preis- und Zinsprozesse aus ihrem empirischen Wahrscheinlichkeitsmaß in ein so genanntes äquivalentes Martingalmaß durch Einführung von Pseudowahrscheinlichkeiten. Die Existenz eines solchen Maßes ist notwendige Folge der Annahme von Arbitrage-freien Finanztitelmärkten. In letzter Zeit zunehmend, tritt daneben die Analyse des ebenfalls aus Gründen der Arbitrage-Freiheit existierenden stochastischen Diskontierungfaktors (besonders auch in Zusammenhang mit empirischen Fragestellungen; vgl. *Cochrane* (1996), *Ahn/Gao* (1999), *Franke/Stapleton/Subrahmanyam* (1999), *Kan/Zhou* (1999), *Wilhelm* (1999)). Vereinfacht gesagt, transformiert der Martingalansatz die Finanztitelmärkte in risikoneutral bewertende Märkte, während der stochastische Diskontierungsfaktor es erlaubt, heutige Preise durch Diskontierung zukünftiger Zahlungen zu gewinnen. Zwar sind beide Ansätze, wie unten kurz skizziert wird, mathematisch äquivalent, doch kann sich die Anwendung des einen in einzelnen Fragestellungen als geeigneter erweisen als die des anderen. Insbesondere dann, wenn es um Eigenschaften der empirischen Wahrscheinlichkeiten der Preisprozesse geht, hat die Verwendung des stochastischen Diskontierungsfaktors den Vorzug, sie ungeändert zu verwenden.

Allein auf Arbitrageargumente gestützte Aussagen zur korrekten Bewertung von Finanztiteln sind im Kern Aussagen über <u>Zusammenhänge</u> von Preisen, der Preis eines Finanztitels wird als Funktion der Preise anderer Finanztitel erkannt ("relatives" Bewertungsmodell). Präferenzgestützte Aussagen zur Bewertung von Finanztiteln, wie z. B. das CAPM, liefern hingegen "Erklärungen" für den empirischen Marktpreis ("absolutes" Bewertungsmodell). Der Ansatz eines stochastischen Diskontierungsfaktors hat nun den zweiten Vorzug, eine plausible Brücke zwischen relativen und absoluten Bewertungsmodellen zu bieten: Sie besteht in der Präferenzbestimmtheit des zu verwendenden Diskontierungsfaktors: während Arbitrage-orientierte Modelle mit der Annahme der Existenz eines solchen Faktors auskommen, liefern

Präferenz-gestützte Ansätze Argumente für die konkrete Ausgestaltung des stochastischen Diskontierungsfaktors.

Der vorliegende Beitrag versucht an Hand eines vergleichsweise einfachen Modells für den stochastischen Diskontierungsfaktor, das sich noch vollständig analytisch handhaben lässt, die Leistungsfähigkeit der Methode am Beispiel der Modellierung der Zinsstruktur zu verdeutlichen. Da der stochastische Diskontierungsfaktor im Prinzip nicht direkt beobachtet werden kann, wird hier die umgekehrte Frage gestellt, welche Beschränkungen man diesem Konstrukt auferlegen muss, damit bestimmte beobachtbare Größen, in unserem Fall die Zinsstrukturentwicklung und die anfängliche Zinsstruktur, sowohl Arbitragefrei sind als auch gewisse empirische Eigenschaften aufweisen (zur Bedeutung der Zinsarbitrage für die relative Abstimmung der Zinssätze in der historischen Perspektive vgl. auch *Stützel* (1978: 147-149)). Dabei wird der Schwerpunkt der Ausführungen weniger in der Darstellung formaler Zusammenhänge liegen, als vielmehr in dem Versuch der Aufdeckung des ökonomischen Kerns der Konstrukte. Das wird durch die methodische Vorgehensweise erleichtert, die im Unterschied zu den meisten Literaturbeiträgen nicht die Pfaddarstellung von Prozessen durch stochastische Integrale verwendet, sondern alle Aussagen auf die Wahrscheinlichkeitsverteilungen stützt, wobei Korrelationen und Standardabweichungen die wichtigsten Rollen spielen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Nach einem einführenden Abschnitt, der in allgemeiner Form das Konstrukt des stochastischen Diskontierungsfaktors und seine Bedeutung für die Preise an Finanztitelmärkten erläutert und den Zusammenhang mit der Pseudowahrscheinlichkeit der Martingalansätze skizziert, werden in den folgenden Abschnitten Varianten des Gaußschen Modells untersucht. Dieses Modell stellt jenen Fall in den Mittelpunkt, in dem gewisse Normalverteilungsannahmen gültig sind; dieser Fall hat den Vorteil, dass mit recht einfachen mathematischen Mitteln analytische Lösungen gewonnen werden können, die einen besonderen Einblick in die ökonomischen Zusammenhänge erlauben. Dabei werden zunächst in Abschnitt II. 2. die Grundlagen gelegt, woran sich in Abschnitt III. der allgemeine Gaußsche Fall der Zinsstrukturentwicklung anschließt, der dann wiederum in Kapitel IV in Spezialfällen mit Literaturbezug näher untersucht wird. Kapitel V bietet einige zusammenfassende Bemerkungen.

II. Der stochastische Diskontierungsfaktor bei gegebener Zinsstruktur

1. Die allgemeine Formulierung

Wir legen ein Arbitrage-freies Finanzmarktsegment mit gegebener anfänglicher Fristigkeitsstruktur der Zinssätze (kurz: Zinsstruktur) zu Grunde. Zu ihrer Kennzeichnung verwenden wir die folgende Symbolik: ${}_{\theta}r_{t,\tau}$ ist der (konforme) Zinssatz, der im Zeitpunkt θ für die Kapitalüberlassungsperiode $[t,\tau]$, d.h. für eine zukünftige Laufzeit der Länge τ-t, die im Zeitpunkt t beginnt, (explizit oder implizit) vereinbart wird; ist t größer als θ, handelt es sich also um einen <u>Terminzinssatz</u>, bei t = θ liegt ein <u>Spotzinssatz</u> vor, den wir kurz mit $r_{t,\tau}$ bezeichnen. Schließlich liegt immer dann ein zukünftiger Zinssatz vor, wenn θ größer als null ist. Einen weiteren Spezialfall stellt der <u>Grenzterminzinssatz</u> dar, der sich im Grenzübergang einer gegen null strebenden Kapitalüberlassungsperiode τ - t ergibt; auch seine Bezeichnung vereinfachen wir durch die Vereinbarung ${}_{\theta}r_t = \lim_{\tau \to t} {}_{\theta}r_{t,\tau}$. Die anfängliche Zinsstruktur ist nun durch die anfänglichen Spotzinssätze $r_{0,\tau}$ oder, dazu bekanntlich äquivalent, durch die anfänglichen Grenzterminzinssätze ${}_{0}r_{\tau}$ gegeben, aus denen sich die Informationen über die übrigen Zinssätze jeweils mathematisch herleiten lassen.

Für alle Zins- und Preisprozesse im betrachteten Marktsegment wird nun angenommen, dass sie ex ante als stochastische Prozesse zu betrachten seien; speziell ist also ${}_{\theta}r_{\theta+\Delta}$ bei konstantem Δ der stochastische Prozess eines Grenzterminzinssatzes, der jeweils in θ für die infinitesimale Periode nach θ + Δ vereinbart wird. Wenn der Preisprozess für einen beliebigen repräsentativen Finanztitel, auf den im gesamten Betrachtungszeitraum mit Sicherheit keine Ausschüttungen entfallen, mit p_t bezeichnet wird, dann stellt der nun zu charakterisierende stochastische Diskontierungsfaktor Q_τ eine Beziehung zwischen den zukünftigen unsicheren Preisrealisationen p_τ und dem heutigen Preis p_0 her. Diese Beziehung lautet

$$p_0 = E(Q_\tau \cdot p_\tau) \tag{2.1}$$

oder allgemeiner

$$p_t = E_t\left(\frac{Q_\tau}{Q_t} \cdot p_\tau\right) \tag{2.2}$$

wobei E_t die entsprechende bedingte Erwartung darstellt. Aus Gründen der Arbitragefreiheit kann Q_τ stets nicht-negativ gewählt werden.

Auch für die Zinsstruktur gelten Arbitragerestriktionen; da die risikofreie Kapitalanlage stets mit der Kassenhaltung konkurriert, müssen alle Zinssätze nicht-negativ sein. Für den stochastischen Diskontierungsfaktor hat das Konsequenzen, da Zinssätze definitorisch mit den Preisen bestimmter Finanztitel, den Zero-Bonds, verknüpft sind (auf den Unterschied, aber auch den Zusammenhang zwischen dem Kaufpreis eines Zero-Bonds und dem Zinssatz als Preis für seine Bestandhaltung, weist *Stützel* (1978: 260-261) hin, wobei wie in (2.3) der Charakter des Bestandhaltepreises als Ableitung des Kaufpreises nach der Zeit je Einheit des Kaufpreises deutlich wird); aus (2.2) folgt

$$e^{-(\tau-t)\cdot r_{t,\tau}} = E_t\left(\frac{Q_\tau}{Q_t}\cdot 1\right) \tag{2.3}$$

wenn $p_\tau = 1$ der "Preis" eines Zero-Bonds im Rückzahlungszeitpunkt τ, d. h. die Tilgungsleistung, ist. Da die linke Seite in (2.3) zwangsläufig (nicht-negativer Zinssatz!) kleiner oder gleich eins sein muss, folgt aus (2.3)

$$E_t(Q_\tau) \leq Q_t \tag{2.4}$$

d. h. die so genannte Supermartingaleigenschaft des stochastischen Dskontierungsfaktors.

Wir verknüpfen nun den stochastischen Diskontierungsfaktor mit der anfänglichen, empirisch beobachtbaren Zinsstruktur; dabei ergibt sich zwangsläufig die Beziehung

$$e^{-t\cdot r_{0,t}} = E(Q_t)$$

oder

$$E\left(e^{t\cdot r_{0,t}}\cdot Q_t\right) = 1 \tag{2.5}$$

Ein sich anbietender Weg, den stochastischen Diskontierungsfaktor mit der anfänglich herrschenden Zinsstruktur kompatibel zu gestalten, besteht in einem Rückgriff auf (2.5): Setzt man nämlich $h_t = e^{t\cdot r_{0,t}}\cdot Q_t$, so ergibt sich $Q_t = e^{-t\cdot r_{0,t}}\cdot h_t$; für h_t ist lediglich (2.5), d. h.

$$E(h_t) = 1 \tag{2.6}$$

sicher zu stellen. Die Gleichung (2.3) wird dann zu

$$e^{-(\tau-t)\cdot r_{t,\tau}} = E_t\left(\frac{e^{-\tau\cdot r_{0,\tau}}}{e^{-t\cdot r_{0,t}}}\cdot\frac{h_\tau}{h_t}\right) \quad ,$$

woraus unmittelbar

$$e^{-(\tau-t)(r_{t,\tau}-{}_0r_{t,\tau})} = E_t\left(\frac{h_\tau}{h_t}\right) \tag{2.7}$$

folgt. Gleichung (2.7) stellt einen Zusammenhang zwischen den Schwankungen des zukünftigen Spotzinssatzes und dem anfänglichen Terminzinssatz für dieselbe Kapitalüberlassungsperiode einerseits und dem Prozess h_t andererseits dar. (2.7) kann als Ausgangspunkt für das Studium der Anforderungen an den Prozess h_t dienen, die verschiedene Formen der so genannten Erwartungshypothese der Zinsstruktur an ihn stellen (vgl. zu diesem Problemkreis *Ingersoll* (1987: 387-409), wir kommen weiter unten darauf zurück).

Der Prozess h_t hat einen weiteren theoretisch interessanten Aspekt: Er stellt eine Beziehung zwischen dem stochastischen Diskontierungsfaktor und den in der Einleitung angesprochenen Pseudowahrscheinlichkeiten und Martingalmaßen her. Wegen der Eigenschaft (2.6) und der Nicht-Negativität des Prozesses lässt sich durch

$$\mu^*(A) = E(h_T \cdot \mathbf{1}_A)$$

für beliebige Ereignisse A (mit der charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_A$) eine Pseudowahrscheinlichkeit, das so genannte "Forward-Maß", definieren (dabei ist T der Horizont des Gesamtmodells). Dann gilt

$$p_0 = E(Q_T \cdot p_T) = E\left(e^{-T\cdot r_{0,T}} \cdot h_T \cdot p_T\right) = e^{-T\cdot r_{0,T}} \cdot E(h_T \cdot p_T) = e^{-T\cdot r_{0,T}} \cdot E^*(p_T) \text{ d. h.}$$

$$p_0 \cdot e^{T\cdot r_{0,T}} = E^*(p_T) \tag{2.8}$$

was sich wie folgt interpretieren lässt: Die linke Seite von (2.8) ist der durch Cash-und-Carry Arbitrage erzwungene Terminpreis ("Forward"-Preis) im Zeitpunkt 0 für Lieferung des Finanztitels im Zeitpunkt T, während das Argument in der rechten Seite den betreffenden "Terminpreis" im Zeitpunkt T darstellt; der heutige Terminpreis ist also gemäß (2.8) der erwartete zukünftige Terminpreis, Terminpreise bilden unter dem Forward-Maß μ^* ein Martingal (zur genauen Argumentation vgl. *Wilhelm* (1999: 15)).

Schließlich hat der Prozess h_t eine wichtige ökonomische Bedeutung: Durch seine Einführung wird die Ermittlung eines Marktpreises in zwei Komponenten zerlegt, in die Diskontierung mit dem bekannten risikofreien Zinssatz (reine <u>Zeit</u>diskontierung) und in die Ermittlung eines Sicherheitsäquivalents in Gestalt von $E(h_t \cdot p_t)$; h_t dient also der spezifischen <u>Risiko</u>bewertung durch den Markt. Das kann wie folgt verdeutlicht werden; zerlegt man den Rückstrom p_t (im Zeitpunkt t) einer Investition von p_0 (im Zeitpunkt 0) in einen risikofrei zu erzielenden Rückstrom $p_0 \cdot e^{t\cdot r_{0,t}}$ und eine durch Risikoübernahme zu erzielende "Überrendite" z, so gilt

$$p_t = p_0 \cdot e^{t\cdot r_{0,t} + z}$$

Arbitrage-freie Bewertung erzwingt $p_0 = E(Q_t \cdot p_t) = p_0\, E(h_t \cdot e^z)$ bzw. $E(h_t \cdot e^z) = 1$. Die Risikobewertung durch h_t sorgt dafür, dass im Arbitrage-Gleichgewicht der Marktwert aller Überrenditen gleich ist und ihr Wert vollständig im Marktpreis des betreffenden Finanztitels zum Ausdruck kommt. Für die risikofrei erzielbare Rendite sorgt die Diskontierung mit dem risikofreien Zinssatz für denselben Effekt. Bezüglich der Funktion des Prozesses h_t sprechen wir daher im Folgenden auch von <u>Risikodiskontierung</u>.

Wir können, wie folgt, zusammenfassen: Ein mit der anfänglich herrschenden Zinsstruktur verträglicher Diskontierungsfaktor lässt sich durch die Angabe eines positiven Prozesses h_t, des Risikobewertungsprozesses, mit den Eigenschaften (vgl. (2.6))

$$E(h_t) = 1$$

und (vgl. (2.3) und $r_{t,\tau} \geq 0$)

$$e^{-(\tau - t) \cdot {}_0 r_{t,\tau}} \cdot E_t(h_t) \leq h_t \tag{2.9}$$

erzeugen. Die Beziehung (2.9) zeigt, dass man den Risikobewertungsprozess im Prinzip nicht unabhängig von der anfänglichen Zinsstruktur wählen kann, will man alle Arbitrage-Möglichkeiten ausschließen. Die nachfolgende spezielle Konstruktion des Risikobewertungsprozesses basiert auf der Annahme logarithmischer Normalverteilungen, die negative Zinssätze (in Grenzen) zulässt, daher die Bedingung (2.9) verletzt. Da analytisch formulierbare Aussagen angestrebt werden und mit diesem Ansatz möglich sind, wird die Verletzung von (2.9) hier toleriert.

2. Der Gaußsche Fall

Wir gehen davon aus, dass alle Preis- und Zinsprozesse im betrachteten Finanzmarktsegment letztlich von einem k-dimensionalen Vektor w_t Gaußscher Prozesse angetrieben werden, wir sprechen von "latenten Faktoren". Ohne Beschränkung der Allgemeinheit normieren wir die Prozesse auf Erwartungswerte von null ($E(w_t) = 0$) und Kovarianzmatrices $\gamma(\tau, t) = \gamma(t, \tau)$ mit Hauptdiagonalelementen 1 und Einheitsmatrices für $t = \tau$ ($\gamma(t,t) = id$; die Realisation der k Prozesse sind in dem selben Zeitpunkt unkorreliert). Die Matrices $\gamma(\tau, t)$ repräsentieren also zugleich die Autokovarianz- und die Autokorrelationsfunktionen der latenten Faktoren.

Für das Weitere sind die bedingten Erwartungswerte und Kovarianzen der latenten Faktoren von Bedeutung; es gilt (vgl. *Feller* (Vol II, 1971: 86); das Superskript T bedeutet die Transpositionsoperation von Vektoren und Matrices):

$$E_t(w_t) := E(w_\tau | w_t) = \gamma(\tau,t)^T \cdot w_t \tag{2.10}$$

wobei festgehalten werden kann, dass $w_\tau - \gamma(\tau,t)^T \cdot w_t$ und w_t unabhängig sind (ebenda). Für die bedingte Kovarianzstruktur der latenten Faktoren gilt mithin nach kurzer Rechnung

$$COV_t(w_\tau, w_\tau) = id - \gamma(\tau,t) \cdot \gamma(\tau,t)^T \tag{2.11}$$

Insbesondere sind die bedingten Kovarianzen und Varianzen deterministisch, ein für die Normalverteilung charakteristischer Sachverhalt.

Der oben eingeführte Risikobewertungsprozess h_t wird nun wie folgt angenommen; wir setzen an

$$h_t = e^{-\frac{1}{2}\cdot v(t)^T \cdot v(t) - v(t)^T \cdot w_t} \tag{2.12}$$

wobei v(t) ein k-Vektor von Funktionen der Zeit ist; gelegentlich verwenden wir die Abkürzung $q_t = \frac{1}{2} \cdot v(t)^T \cdot v(t) + v(t)^T \cdot w_t$, so dass $h_t = e^{-q_t}$ gilt. Die Bedingung (2.6) ist erfüllt, da für normal verteiltes z stets gilt $E(e^z) = \exp\left\{E(z) + \frac{1}{2}\operatorname{var}(z)\right\}$; die Bedingung (2.9) ist allerdings nicht zu garantieren, da die rechte Seite in Einzelfällen beliebig nahe bei null liegen kann.

Es ist wichtig zu verstehen, welche Wirkung die Funktion v(t) entfaltet: Sie bestimmt die spezifische Risikodiskontierung, denn sie legt das Gewicht, mit dem Zahlungen im Zeitpunkt t aus <u>Risiko</u>gründen diskontiert werden, fest, die <u>Zeit</u>diskontierung unberührt (s. oben). Ist zum Beispiel ω ein bestimmter (in t eintretender) Umweltzustand und liefert ein Finanztitel bei ω in t eine Geldeinheit, dann ist diese Geldeinheit im Zeitpunkt 0 (von der zeitlichen Diskontierung abgesehen) $e^{-\frac{1}{2}\cdot v(t)^T \cdot v(t) - v(t)^T \cdot w_t(\omega)}$ Geldeinheiten wert. v(t) steuert also die aus Risikogründen erforderliche unterschiedliche Bewertung sowohl differenziert nach Risikoquellen (v ist im allgemeinen Fall mehrdimensional) als auch nach dem Zeitpunkt der Realisation. Wir wollen das, wie schon oben angedeutet, mit dem Begriff der <u>Risikodiskontierung</u> ansprechen.

Gleichung (2.7) hat gezeigt, dass das Verhalten zukünftiger Zinssätze eng mit den bedingten Erwartungswerten $E_t(h_\tau)$ zusammenhängt, die wir hier schon einmal angeben. Es gilt

$$E_t(h_\tau) = \exp\left\{-E_t(q_\tau) + \tfrac{1}{2}\cdot \mathrm{var}_t(q_\tau)\right\} \tag{2.13}$$

mit

$$E_t(q_\tau) = \tfrac{1}{2}\cdot v(\tau)^T \cdot v(\tau) + v(\tau)^T \cdot \gamma(\tau,t)\cdot w_t \tag{2.14}$$

und

$$\mathrm{var}_t(q_\tau) = v(\tau)^T \cdot \left\{ id - \gamma(\tau,t)\cdot\gamma(\tau,t)^T \right\} v(\tau) \tag{2.15}$$

so dass folgt:

$$E_t(h_\tau) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\cdot v(\tau)^T \cdot \gamma(\tau,t)\cdot\gamma(\tau,t)^T \cdot v(\tau) - v(\tau)^T \cdot \gamma(\tau,t)\cdot w_t\right\} \tag{2.16}$$

Zur Anpassung des Modells an empirische Sachverhalte stehen drei Kategorien von Gestaltungsparametern zur Verfügung: Die Anzahl der latenten Faktoren, die Autokorrelationsstruktur des Vektorprozesses der latenten Faktoren und die Gewichtung der Faktoren in ihrer relativen Bedeutung für die Risikodiskontierung. Im Folgenden steht die Beziehung dieser Gestaltungsparameter zu empirischen Größen, hier der Zins- bzw. Zinsstrukturentwicklung im Mittelpunkt. Dabei ist es vielfach sinnvoll, die Funktion

$$\phi(\tau,t)^T = v(\tau)^T \cdot \gamma(\tau,t) \qquad (\phi(t,t) = v(t)) \tag{2.17}$$

zu verwenden, mit Hilfe derer sich (2.16) und der euklidischen Vektornorm $\| \ \|$ des $\mathbb{R}^k$ wie folgt umnotieren lässt:

$$E_t(h_t) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\|\phi(\tau,t)\|^2 - \phi(\tau,t)^T \cdot w_t\right\} \tag{2.18}$$

Die Funktion ϕ amalgamiert in gewissem Sinne "objektive" Eigenschaften der Risiko<u>quellen</u> (die Autokorrelationen derselben) und die Risiko<u>diskontierung</u> durch den Markt. Sie wird sich als für die Zinsstrukturentwicklung entscheidende Größe herausstellen.

III. Die Zinsstrukturentwicklung im allgemeinen Gaußschen Fall

Aus (2.7) kann in Verbindung mit (2.12), (2.17) und (2.18) unmittelbar eine Gleichung gefolgert werden, die Aufschluss über den Zusammenhang zwischen Zinsstrukturentwicklung und den oben aufgezählten Gestaltungsparametern gibt:

$$r_{t,\tau} - {}_0r_{t,\tau} = \frac{\left[\phi(\tau,t) - \phi(t,t)\right]^T \cdot w_t + \tfrac{1}{2}\left\{\|\phi(\tau,t)\|^2 - \|\phi(t,t)\|^2\right\}}{\tau - t} \tag{3.1}$$

Gleichung (3.1) beschreibt die zufälligen Abweichungen der zukünftigen Spotzinssätze von den anfänglichen Terminzinssätzen der gleichen Kapitalüberlassungsperiode. Diese Abweichungen sind normal verteilt mit einem Erwartungswert in Höhe von

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\|\phi(\tau,t)\|^2 - \|\phi(t,t)\|^2}{\tau - t} \tag{3.2}$$

und der Standardabweichung

$$\frac{\|\phi(\tau,t) - \phi(t,t)\|}{\tau - t} \tag{3.3}$$

(3.2) stellt zugleich die Abweichung des Modells von der naiven Erwartungshypothese dar (vgl. dazu spezieller Abschnitt IV. 1.). Für den Momentanzinssatz r_t, der sich aus (3.1) durch Grenzübergang $\tau \rightarrow t$ ergibt, findet man folglich

$$r_t - {}_0r_t = \frac{\partial \phi}{\partial \tau}(t,t)^T \cdot w_t + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial \|\phi\|^2}{\partial \tau}(t,t) \tag{3.4}$$

wobei die Ableitungen auf der rechten Seite jeweils als rechtsseitige Ableitungen zu verstehen sind. Gemäß (3.4) bestimmt die Ableitung $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ die Standardabweichung des Momentanzinssatzes, seine Volatilität, und gemäß (3.1) steuert ϕ die Volatilität der längerfristigen Sätze; daher wird ϕ im Folgenden als "Volatilitätsfunktion" bezeichnet. Auf der anderen Seite erweist sich, dass bei dem Rückschluss von der Volatilität des Momentanzinssatzes auf die Volatilitätsfunktion Integrationskonstanten eine Rolle spielen werden. Das wird uns im Folgenden noch beschäftigen. Schließlich wird deutlich, dass die Volatilitätsfunktion sowohl die Volatilitäten der Zinssätze als auch deren Erwartungswerte (in ihrer Abweichung von den anfänglichen Terminzinssätzen) fixiert, dass also beide Größen unter Arbitragefreiheit nicht gänzlich unabhängig voneinander sein können. Anders ausgedrückt: Man kann nicht davon ausgehen, dass man einen Zinsprozess durch Angabe von beliebiger Volatilität und beliebigem Trend beliebig im Einklang mit Arbitragefreiheit spezifizieren kann.

IV. Die Zinsstrukturentwicklung im speziellen Gaußschen Fall

1. Der allgemeine Gaußsche Ein-Faktor-Fall

Ein insbesondere in der früheren Literatur zur stochastischen Zinsstrukturmodellierung dominierender Fall ist der, in dem nur ein Faktor (k = 1) die relevanten Preis- und Zinsprozesse antreibt. In diesem Fall wird die Gleichung (3.4) für den Momentanzins besonders einfach; es gilt

$$r_t - {}_0r_t = \frac{\partial\phi}{\partial\tau}(t,t)\cdot w_t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial\phi^2}{\partial\tau}(t,t) \tag{4.1}$$

Aus (4.1) ist sofort ersichtlich, dass die Autokorrelationsfunktion des Momentanzinssatzes mit der des einzigen latenten Faktors übereinstimmen muss, $\gamma(\tau,t)$ also durch das empirische Verhalten des Momentanzinssatzes festgelegt ist (vorausgesetzt, dass der Momentanzinssatz nicht deterministisch ist). Definiert man den rechtsseitigen Grenzwert

$$g(t) = \lim_{\substack{\tau\to t\\ \tau>t}} \frac{\partial\gamma}{\partial\tau} \tag{4.2}$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(t,t) = v'(t) + v(t)\cdot g(t) \tag{4.3}$$

Man hat also hier die Möglichkeit, durch Vorgabe der Autokorrelationsfunktion und der Volatilität $\sigma(t)$ des Momentanzinssatzes die Volatilitätsfunktion ϕ für die gesamte Zinsstruktur aus einer Differentialgleichung zu bestimmen; es muss nämlich gelten

$$\sigma(t) = v'(t) + v(t)\cdot g(t) \tag{4.4}$$

mit (4.2). Für das Gewicht v(t), mit dem der latente Faktor in die Risikodiskontierung eingeht, ergibt sich daher als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.4) der Ausdruck

$$v(t) = e^{-G(t)}\cdot\left\{c + \int^{t} \frac{\sigma(\theta)}{e^{-G(\theta)}}\cdot d\theta\right\} \tag{4.5}$$

mit der Integrationskonstanten c und einer Stammfunktion

$$G(t) = \int g(\theta)\cdot d\theta$$

die aus der Autokorrelationsfunktion des Momentanzinssatzes gemäß (4.2) abzuleiten ist. Eine weitere kurze Rechnung unter Verwendung von (4.1), (4.3) und (4.4) zeigt, dass der Momentanzins durch das Modell

$$r_t - {}_0r_t = \sigma(t) \cdot w_t + v(t) \cdot \sigma(t) \tag{4.6}$$

mit v(t) gemäß (4.5), also eindeutig bis auf die Wahl einer Integrationskonstanten vollständig beschrieben wird. Auf die materielle Bedeutung der Integrationskonstanten wird im Folgenden näher eingegangen. Jedenfalls kann schon soviel gesagt werden, dass sie offensichtlich Einfluss auf die Art der Risikodiskontierung und den Erwartungswert des Momentanzinssatzes nimmt.

In (4.6) wird deutlich, dass mit der Vorgabe einer anfänglichen Zinsstruktur und der Vorgabe einer bestimmten Volatilität der Erwartungswert bei Arbitragefreiheit nicht mehr (oder nur noch beschränkt durch die Wahl der Integrationskonstanten) gesondert modelliert werden kann, er ergibt sich zwingend durch den Term $v(t)\cdot\sigma(t)$ auf der rechten Seite, der durch die Volatilität und die Risikodiskontierung vollständig bestimmt wird. Die Risikodiskontierung wiederum wird durch die Volatilität und die Autokorrelationsstruktur des Momentanzinssatzes bis auf die Wahl einer Integrationskonstanten eindeutig bestimmt. Der Term $v(t)\cdot\sigma(t)$ stellt übrigens die Abweichung des Modells gegenüber der naiven Erwartungshypothese dar: Die naive Erwartungshypothese ("Die erwarteten zukünftigen Zinssätze entsprechen den aus heutiger Sicht geltenden Terminzinssätzen") trifft genau dann zu, wenn (mit $\sigma(t) \equiv 0$) ein deterministischer Zinsprozess vorliegt.

Betrachten wir nun das zu (4.6) gehörende Zinsstrukturmodell, so erhalten wir zunächst aus (3.1) für k = 1 (nur <u>ein</u> Faktor) die Beziehung:

$$r_{t,\tau} - {}_0r_{t,\tau} = \frac{\phi(\tau,t) - v(t)}{\tau - t} \cdot w_t + \tfrac{1}{2}\frac{\phi(\tau,t)^2 - v(t)^2}{\tau - t} \tag{4.7}$$

wodurch im Prinzip die Zinsstrukturentwicklung (unter Berücksichtigung von (4.5)) festgelegt ist. Sowohl (4.6) wie (4.7) erklären die jeweiligen Zinssätze als Funktion des latenten Faktors (absolute Modelle). Auf Grund der besonderen Struktur lässt sich aber nun das Verhalten der Zinssätze für längere Laufzeiten durch das des Momentanzinssatzes erklären, indem man (4.6) nach dem latenten Faktor w_t auflöst und in (4.7) einsetzt; man erhält das relative Modell

$$r_{t,\tau} - {}_0r_{t,\tau} = \frac{[\phi(\tau,t) - v(t)]}{\tau - t} \cdot \frac{[r_t - {}_0r_t]}{\sigma(t)} + \tfrac{1}{2}\frac{[\phi(\tau,t) - v(t)]^2}{\tau - t} \tag{4.8}$$

Mit (4.5), (4.6) und (4.7) ist das allgemeine Gaußsche Ein-Faktor-Zinsstrukturmodell entwickelt, das zu einer anfänglich gegebenen Zinsstruktur kompatibel ist und für das Volatilität und Autokorrelationsfunktion bekannt sind. Alle Zinssätze sind normal verteilt und vollständig miteinander korreliert, die Terminstruktur der Volatilitäten, d. h. die Abhängigkeit der Volatilität von der Laufzeit des jeweiligen Kreditgeschäfts wird durch

$$\frac{|\phi(\tau,t)-v(t)|}{\tau-t} \tag{4.9}$$

für die Laufzeit [t,τ] beschrieben. In den absoluten Bewertungsmodellen (4.6) und (4.7) spielt augenscheinlich die Wahl der Integrationskonstanten definitiv eine Rolle; das liegt daran, dass diese Konstante Einfluss auf die Risikodiskontierung nimmt. Von gewissem Interesse ist die Frage, ob die Integrationskonstante auch im relativen Modell (4.8) eine explizite Rolle spielt, könnte man doch vermuten, dass die Risikodiskontierung schon in (4.6) ausreichend zum Ausdruck komme und daher in (4.8) nicht mehr eigens in Erscheinung treten müsse, da sie keinen spezifischen Einfluss auf den Zusammenhang zwischen kurz- und langfristigen Zinssätzen habe. Das ist aber nicht der Fall: Notwendig dafür, dass die Integrationskonstante in (4.8) nicht explizit erscheint, ist, wie man schnell erkennt, die Bedingung:

$$e^{-G(\tau)}\cdot\gamma(\tau,t)=e^{-G(t)} \tag{4.10}$$

für alle $\tau \geq t$, was nicht generell anzunehmen ist.

Das allgemeinere Gaußsche Ein-Faktor-Modell wird nachfolgend in unterschiedlicher Weise spezifiziert.

2. Ein Sonderfall: Die Black-Scholes-Welt

In ihrer bahnbrechenden Arbeit zur Optionspreistheorie nahmen *Black/Scholes* (1973) an, der Momentanzinssatz sei deterministisch (und konstant) und der Aktienkurs entwickle sich als geometrische Brownsche Bewegung. Somit ist zunächst einmal in (4.4) $\sigma(t) = 0$ zu spezifizieren, woraus für v(t) folgt:

$$v(t)=c\cdot e^{-G(t)}$$

An dieser Stelle kann bereits ein erster Blick auf die Bedeutung der Integrationskonstanten gerichtet werden; wird sie mit c = 0 gewählt, folgt v(t) = 0, $h_t \equiv 1$ und in (2.1) bzw. (2.2) erhält man

$$p_0=e^{-\tau\cdot r_{0,\tau}}\cdot E(p_\tau)$$

bzw.

$$p_t=e^{-(\tau-t)\cdot r_{t,\tau}}\cdot E_t(p_t)$$

Es findet keine eigentliche Risikodiskontierung statt, alle Finanztitel werden risikoneutral bewertet; die Integrationskonstante steht offenbar in einem gewissen Zusammenhang mit der

Risikoaversion des Marktes. Dieser Zusammenhang ist allerdings zeitlich differenziert zu sehen, wie sich gleich herausstellen wird.

Für die geometrische Brownsche Bewegung gilt als Autokorrelationsfunktion:

$$\gamma(\tau,t)=\frac{\min\{t,\tau\}}{\sqrt{t\cdot\tau}} \quad \text{d.h.} \quad \gamma(\tau,t)=\sqrt{\frac{t}{\tau}} \quad \text{für } \tau \geq t$$

woraus $g(t)=-\frac{1}{2}\frac{1}{t}$, $G(t)=-\frac{1}{2}\log t$ und daher abschließend $v(t)=c\cdot\sqrt{t}$ mit $h_t=e^{-\frac{1}{2}c^2t-c\cdot\sqrt{t}\cdot w_t}$ folgt; für die Zinsstruktur ergibt sich sofort $r_{t,\tau} = {}_0r_{t,\tau}$ für alle Laufzeiten (Bedingung (4.10) ist trivialerweise erfüllt). Der Ausdruck für die Risikodiskontierung h_t weist auf eine weitere Eigenschaft der Integrationskonstanten hin; wenn $c > 0$ gilt, ist der Wert eines positiv mit w_t korrelierten Risikos $E(e^{+s\cdot w_t}\cdot h_t)=e^{\frac{1}{2}s^2-s\cdot c\cdot\sqrt{t}}$. Dieser Wert sinkt (fast) exponentiell, je später das Risiko realisiert wird, die Risikoaversion des Marktes nimmt mit wachsendem zeitlichen Abstand der Realisierung des Risikos zu. Um Arbitrage-frei bepreist zu sein, muss die erwartete Überschuss-Rendite m des Risikos gemäß

$$m=s\cdot c\cdot\sqrt{t}-\tfrac{1}{2}s^2 \tag{4.11}$$

mit zeitlichem Abstand wachsen; die reine <u>Zeit</u>diskontierung ist nach wie vor unberührt.

Betrachten wir nun einen Finanztitel (Aktie), dessen Preis sich wie im Black-Scholes-Modell gemäß

$$S_t=S_0\cdot e^{m+t\cdot r_{0,t}+s\sqrt{t}\,w_t} \tag{4.12}$$

entwickelt. Soll S_0 der Arbitrage-freie Preis im Zeitpunkt 0 sein, muss gelten

$$S_0=e^{-t\cdot r_{0,t}}\cdot E\left(S_0\cdot e^{m+t\cdot r_{0,t}+s\cdot\sqrt{t}\cdot w_t}\cdot e^{-\frac{1}{2}c^2t-c\sqrt{t}\,w_t}\right)$$

woraus sich nach kurzer Rechnung die Bedingung

$$m=\left[c\cdot s-\tfrac{1}{2}s^2\right]\cdot t \tag{4.13}$$

für die erwartete Überschussrendite des betrachteten Finanztitels ergibt. Auch hier zeigt sich, dass im Arbitrage-Gleichgewicht die Volatilität s des Finanztitels seine Risikoprämie determiniert, wobei die absolute Höhe der Risikoprämie durch die Risikoaversionskonstante c festgelegt wird. Dieser Sachverhalt steht im Einklang mit der entsprechenden Beobachtung oben, den Erwartungswert des Momentanzinssatzes betreffend. Dass die erwartete Überschussrendite nach (4.13) stärker als nach (4.11) steigt, ist darauf zurückzuführen, dass das

Risiko in (4.12) steigt, während als Grundlage von (4.11) zeitlich konstantes Risiko unterstellt wird.

3. *Das stationäre Gaußsche Ein-Faktor-Modell*

Verlangt man vom Prozess des Momentanzinssatzes Stationarität der Volatilität und der Autokorrelationsfunktion, so muss man $\sigma(t) = \sigma$ konstant und $\gamma(\tau,t) = \rho(|\tau\text{-}t|)$ als nur von der Zeitdifferenz zwischen τ und t abhängig annehmen. Die Funktion g(t) wird dann ebenfalls konstant zu $g(t) = \rho'(0)$ (rechtsseitige Ableitung; man überlegt sich leicht, dass $\rho'(0) \leq 0$ gelten muss, da ρ eine Autokorrelationsfunktion ist) und man findet als Lösung für v(t) aus (4.5) nun

$$v(t) = \frac{\sigma}{\rho'(0)} + c \cdot e^{-\rho'(0)\cdot t} \tag{4.14}$$

was gemäß (4.6) zum Momentanzins

$$r_t - {}_0r_t = \sigma \cdot w_t + \frac{\sigma^2}{\rho'(0)} + c \cdot \sigma \cdot e^{-\rho'(0)\cdot t} \tag{4.15}$$

führt. Ein auch im Erwartungswert stationärer Momentanzinssatz (bzw. seiner Abweichung vom Terminzinssatz) erfordert eine Integrationskonstante c = 0 (oder natürlich einen deterministischen Zinsverlauf). Sonst steigt (bei c > 0) der Erwartungswert zwangsläufig exponentiell an. Spätere Risiken unterliegen einer exponentiell stärkeren Risikodiskontierung als frühere Risiken. Das wird besonders deutlich, wenn man für den latenten Faktor einen autoregressiven Prozess erster Ordnung mit $\rho(\Delta) = e^{-\kappa\Delta}$ annimmt, dann gilt

$$r_t - {}_0r_t = \sigma \cdot w_t - \frac{\sigma^2}{\kappa} + c \cdot \sigma \cdot e^{\kappa t} \tag{4.16}$$

mit einem exponentiell steigenden Erwartungswert. Für die Risikodiskontierung gilt $h_t = e^{-\frac{1}{2}\left(c\cdot e^{\kappa t} - \frac{\sigma}{\kappa}\right)^2 - \left(c\cdot e^{\kappa t} - \frac{\sigma}{\kappa}\right)\cdot w_t}$; daraus folgen analoge Überlegungen zur Abhängigkeit der Risikoaversion vom Zeitpunkt der Risikorealisation. Der zeitlich starke Anstieg der Risikodiskontierung bei positiver Integrationskonstanten führt dazu, dass der erwartete Zinssatz steigen muss, obwohl das Risiko wegen der Stationaritätsannahme konstant bleibt. Stationarität des Zinsprozesses ist nur möglich, wenn v(t) nicht zeitabhängig ist, d. h. wenn der Markt keine zeitspezifische Risikodiskontierung vornimmt. Wenn die Integrationskonstante c größer als null ist, werden später eintretende Risiken (exponentiell) stärker diskontiert, d. h. belastender, als frühere Risiken

Für die Zinsstrukturentwicklung ist die oben eingeführte Volatilitätsfunktion $\phi(\tau,t)$ entscheidend; sie lautet im stationären Modell des autoregressiven Prozesses erster Ordnung:

$$\phi(\tau,t) = e^{\kappa t}\left(c - \frac{\sigma}{\kappa}e^{-\kappa\tau}\right) \tag{4.17}$$

Offenbar ist auch hier wieder die Bedingung (4.10) erfüllt. Aus (4.8) folgt damit

$$r_{t,\tau} - {}_0r_{t,\tau} = \frac{1}{\kappa}\,\frac{1-e^{-\kappa(\tau-t)}}{\tau-t}\,(r_t - {}_0r_t) + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{\kappa^2}\,\frac{(1-e^{-\kappa(\tau-t)})^2}{\tau-t} \tag{4.18}$$

Dieser Zusammenhang ist wegen der Gültigkeit von (4.10) unabhängig von der Höhe der Integrationskonstanten gültig, also unabhängig davon, ob der Prozess des Momentanzinssatzes im Erwartungswert stationär ist oder nicht. Die Volatilitäten der Zinssätze längerer Laufzeiten sind c. p. niedriger als die kürzerer Laufzeiten, ein empirisch qualitativ bestätigtes Phänomen; mit längeren Laufzeiten schwanken die Zinssätze immer weniger stark um die anfänglichen Terminzinssätze. Es sind in Abhängigkeit von der Realisation des Momentanzinssatzes unterschiedliche Verläufe (zukünftiger) Zinsstruktur denkbar: steigende, fallende oder "bucklige"; flache Zinsstrukturen sind (praktisch) ausgeschlossen. Abbildung 1 zeigt drei verschiedene Verlaufsformen für die Zinsstruktur, Abbildung 2 gibt die Fristigkeitsstruktur der Volatilitäten wieder.

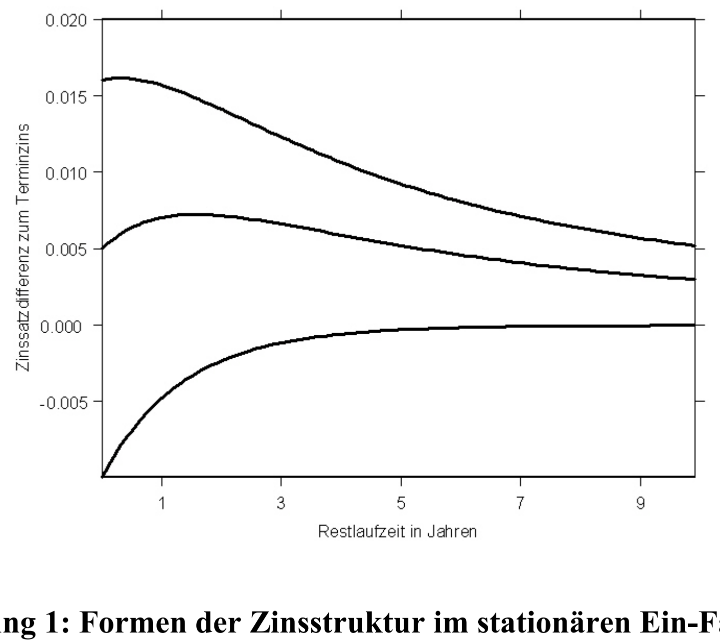

Abbildung 1: Formen der Zinsstruktur im stationären Ein-Faktor-Modell

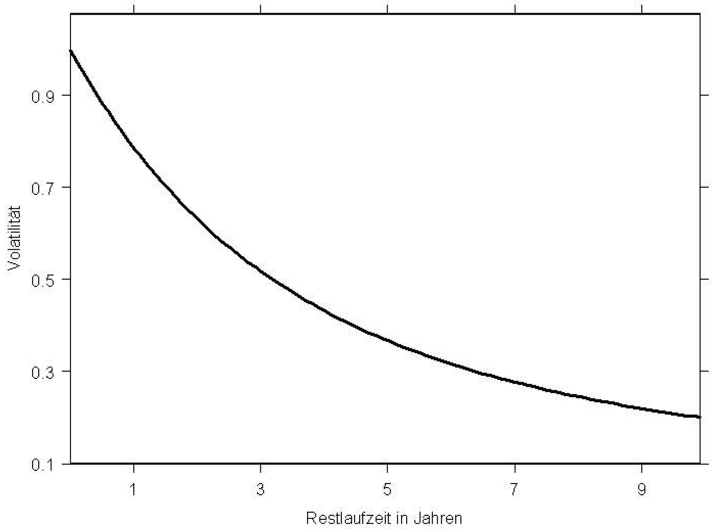

Abbildung 2: Fristigkeitsstruktur der Volatilität im stationären Ein-Faktor-Modell

4. Das Vasicek-Modell

Das erste publizierte Modell, das aus dem Prozess des Momentanzinssatzes ein Zinsstrukturmodell entwickelt, wurde von *Vasicek* (1977) veröffentlicht. Der Momentanzins wird dort als so genannter Ohrnstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert, dessen (nicht stationäre) Autokorrelationsfunktion durch

$$\gamma(\tau, t) = \sqrt{\frac{e^{2\kappa t} - 1}{e^{2\kappa\tau} - 1}} = e^{-\frac{1}{2}\kappa(\tau - t)} \cdot \sqrt{\frac{\sinh(\kappa \cdot t)}{\sinh(\kappa \cdot \tau)}} \tag{4.19}$$

gegeben ist (für $\kappa>0$ und $\tau \geq t$). Die Volatilität des Momentanzinssatzes ist

$$\sigma(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} \cdot \sqrt{1 - e^{-2\kappa t}} \tag{4.20}$$

Für große t liegt bei näherem Hinsehen allerdings (fast) Stationarität vor, so dass das stationäre Modell des vorangegangenen Abschnittes als langfristiger Grenzfall dienen kann.

Nach einigen Berechnungsschritten kommt man zu

$$v(t) = c \cdot \sqrt{e^{2\kappa t} - 1} - \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa^{3/2}}} \sqrt{1 - e^{-2\kappa \cdot t}} \tag{4.21}$$

sowie

$$\phi(\tau, t) = \sqrt{e^{2\kappa t} - 1}\left(c - \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa^{3/2}}} \cdot e^{-\kappa\tau}\right) \tag{4.22}$$

und schließlich

$$r_{t,\tau} - {}_0r_{t,\tau} = \frac{1}{\kappa}\,\frac{1-e^{-\kappa(\tau-t)}}{\tau-t}\cdot(r_t - {}_0r_t) + (1-e^{-2\kappa t})\cdot\frac{1}{4}\,\frac{\sigma^2}{\kappa^3}\,\frac{\left[1-e^{-\kappa(\tau-t)}\right]^2}{\tau-t} \tag{4.23}$$

mit dem Momentanzinssatz

$$r_t - {}_0r_t = \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}\cdot\sqrt{1-e^{-2\kappa\cdot t}}\cdot w_t + \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}(1-e^{-2\kappa\cdot t})\left(c\cdot e^{\kappa t} - \frac{\sigma}{\sqrt{2}\kappa^{3/2}}\right) \tag{4.24}$$

Eine positive Integrationskonstante c führt aus den gleichen Gründen wie im stationären Fall auch hier zu exponentiell steigender zeitlicher Risikodiskontierung und daher zu exponentiell steigenden erwarteten Momentanzinssätzen. Um einen Zinsprozess zu modellieren, der langfristig in eine stationäre Verteilung übergeht, ist also als Integrationskonstante wiederum $c = 0$ zu wählen.

Auffällig ist, dass ausweislich (4.23) das relative Zinsstrukturmodell bis auf die Driftkomponente identisch ist mit der des stationären Modells; insbesondere sind die abgebildeten Volatilitätsstrukturen beider Modelle identisch. Lediglich der Prozess des Momentanzinssatzes unterscheidet, wobei das stationäre Modell als asymptotische Version des Vasicek-Modells angesehen werden kann.

5. Das Ho-Lee-Modell in der Grenzwertversion: Die Ein-Faktor-Version

Das Zinsstrukturmodell von *Ho/Lee* (1986) war das erste (Binomial-)Modell, das direkt die stochastische Entwicklung der Zinsstruktur als Ganzes modellierte und dabei die anfängliche empirische Struktur als Anfangsbedingung einbezog. *Heath/Jarrow/Morton* (1990) haben eine Grenzwertversion angegeben, die in *Wilhelm* (1999) auf etwas anderem Wege und zugleich verallgemeinernd reproduziert wird. Die Korrelationsstruktur des Prozesses des Momentanzinssatzes wird (analog zur Black-Scholes-Welt) durch $\gamma(\tau,t) = \sqrt{\frac{t}{\tau}}$ für $\tau \geq t$ angegeben, die Volatilität ist $\sigma(t) = \sigma\cdot\sqrt{t}$. Es folgt:

$$v(t) = \sqrt{t}\,(c + \sigma\cdot t) \tag{4.25}$$

und

$$\phi(\tau,t) = \sqrt{t}\,(c + \sigma\cdot\tau) \tag{4.26}$$

woraus für die Zinsstruktur

$$r_{t,\tau} - {}_0r_{t,\tau} = r_t - {}_0r_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot t\cdot(t-\tau) \tag{4.27}$$

die bekannte "Parallelverschiebungseigenschaft" dieses Modells folgt: Alle zu ein und dem selben Zeitpunkt möglichen Zinsstrukturen sind durch Realisation des Momentanzinssatzes bestimmte Parallelverschiebungen einer Grundform. Alle Zinsstrukturkurven sind (relativ zur anfänglichen Kurve der Terminzinssätze) linear steigend, die Volatilitätsstruktur ist hingegen flach. Der Prozess des Momentanzinssatzes verläuft gemäß

$$r_t - {}_0r_t = \sigma\sqrt{t}\, w_t + c \cdot \sigma \cdot t + \sigma^2 \cdot t^2 \tag{4.28}$$

was bis auf einen Faktor des quadratischen Terms dem Grenzwert des Ho-Lee-Modells entspricht (vgl. dazu näher *Wilhelm* (1999), wo eine Zwei-Faktor-Version entwickelt wird).

6. Zwei-Faktor-Modelle

a) Das allgemeine Zwei-Faktor-Modell

Ein-Faktor-Modell sind zwar relativ einfach zu handhaben, weisen jedoch die unbefriedigende Eigenschaft auf, dass Zinssätze aller Laufzeiten vollständig korreliert sein müssen. Daher soll im Folgenden das allgemeine Zwei-Faktor-Modell als mögliche Weiterentwicklung skizziert werden. Gemäß (3.1) ist der Koeffizient des i-ten Faktors zur Bestimmung der Zinsstruktur durch

$$\frac{\phi_i(\tau,t) - \phi_i(t,t)}{\tau - t} = \frac{\left[v_1(\tau)\cdot\gamma_{1i}(\tau,t) - v_1(t)\cdot\gamma_{1i}(t,t)\right] + \left[v_2(\tau)\cdot\gamma_{2i}(\tau,t) - v_2(t)\cdot\gamma_{2i}(t,t)\right]}{\tau - t}$$

gegeben. Im Grenzübergang ergibt sich mit

$$g_{ij}(t) = \lim_{\substack{\tau\to t\\ \tau\succ t}} \frac{\gamma_{ij}(\tau,t) - \gamma_{ij}(t,t)}{\tau - t}$$

der Ausdruck

$$v_1'(t)\cdot\gamma_{1i}(t,t) + v_1(t)g_{1i}(t) + v_2'(t)\cdot\gamma_{2i}(t,t) + v_2(t)\cdot g_{2i}(t)$$

für den isolierten Volatilitätsbeitrag des i-ten Faktors zum Momentanzinssatz.

Wenn man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Momentanzinssatz vollständig durch den ersten Faktor erklären will, so ergibt sich mit der Volatilität $\sigma(t)$ des Momentanzinssatzes folgendes System von Differentialgleichungen:

$$v_1'(t) + v_1(t)\cdot g_{11}(t) + v_2(t)\cdot g_{21}(t) = \sigma(t) \tag{4.29}$$

$$v_1(t)\cdot g_{12}(t) + v_2'(t) + v_2(t)\cdot g_{22}(t) = 0 \tag{4.30}$$

Das System (4.29), (4.30) lässt sich sukzessive lösen. Man löst zunächst (4.30) für v_2 (als "Funktion" von v_1) und setzt in (4.29) ein, um v_1 zu ermitteln; dabei treten natürlich zwei Integrationskonstanten in Erscheinung; die dabei auftretenden Differentialgleichungen entsprechen jeweils der Grundform (4.4) mit der allgemeinen Lösung (4.5). Im folgenden Unterabschnitt soll das Modell mit zwei unabhängigen latenten Faktoren, bei denen γ stets Diagonalmatrix ist, näher studiert werden.

b) Modelle mit zwei unabhängigen latenten Faktoren

Sind die beiden Faktoren durchgängig (also nicht nur für zeitgleiche Realisationen) unabhängig, vereinfacht sich das System (4.29), (4.30) zu:

$$v_1'(t) + v_1(t) \cdot g_{11}(t) = \sigma(t) \tag{4.31}$$

$$v_2'(t) + v_2(t) \cdot g_{22}(t) = 0 \tag{4.32}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} v_1(t) &= e^{-G_1(t)} \left(c_1 + \int \frac{\sigma(\theta)}{-G_1(\theta)} d\theta \right) \\ v_2(t) &= e^{-G_2(t)} \cdot c_2 \end{aligned}$$

wobei $G_i(t) = \int g_{ii}(\theta) d\theta$ für i = 1,2 entsprechende Stammfunktionen und c_1 und c_2.Integrationskonstanten sind.

Dass mehrere latente Faktoren tatsächlich variierende Korrelationen zwischen Zinssätzen unterschiedlicher Laufzeiten erklären können, wollen wir abschließend am Fall stationärer Faktoren demonstrieren; hinreichend dafür ist, dass die beiden Faktoren in unterschiedlicher Weise auf Zinssätze unterschiedlicher Laufzeiten einwirken.

Die Lösung des Systems (4.31), (4.32) ergibt sich in diesem Fall zu

$$v(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-\rho_1'(0) \cdot t} + \dfrac{\sigma}{\rho_1'(0)} \\ c_2 \cdot e^{-\rho_2'(0) \cdot t} \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

wodurch die Volatilitätsfunktion $\phi(\tau,t)$ zu

$$\phi(\tau, t) = \begin{pmatrix} \rho_1(\tau - t) \cdot \left(c_1 \cdot e^{-\rho_1'(0) \cdot \tau} + \dfrac{\sigma}{\rho_1'(0)} \right) \\ \rho_2(\tau - t) \cdot c_2 \cdot e^{-\rho_2'(0) \cdot \tau} \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

wird.

Einen spezifischen Einfluss auf die Zinssätze unterschiedlicher Laufzeiten übt der zweite latente Faktor nur unter zwei gleichzeitig zu erfüllenden Bedingungen aus: Die Integrationskonstante c_2 muss ungleich null sein und der Ausdruck $\rho_2(\tau - t)\cdot e^{-\rho_2'(0)\cdot\tau}$ muss tatsächlich von τ abhängen. Ein recht einfaches Beispiel liefert die Konstellation

$$\rho_1(\Delta) = e^{-\kappa_1\Delta} \quad \text{und} \quad \rho_2(\Delta) = e^{-\kappa_2\Delta^2}$$

woraus mit c_1=0 (stationärer Momentanzins) folgt

$$v(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma_1}{\kappa_1} \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

also zeitlich konstante Risikodiskontierung. Zeitlich konstante Risikodiskontierung mit Bezug auf den ersten Faktor - den Momentanzins - erreicht man auch hier nur durch Wahl der Integrationskonstante $c_1 = 0$ und erzwingt damit in der Folge auch Stationarität im Erwartungswert. In Bezug auf den zweiten Faktor ergibt sich diese Eigenschaft hingegen modellendogen bei beliebiger Integrationskonstanten c_2. Für die Volatilitätsfunktion ergibt sich aus (4.34) jetzt speziell zu:

$$\phi(\tau, t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma_1}{\kappa_1}\cdot e^{-\kappa_1(\tau-t)} \\ c_2\cdot e^{-\kappa_2(\tau-t)^2} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Der zweite latente Faktor geht bei diesem Modell mit dem Gewicht

$$-c_2\,\frac{1-e^{-\kappa_2(\tau-t)^2}}{\tau-t}$$

der zweite mit dem Gewicht

$$\frac{\sigma_1}{\kappa_1}\frac{\left[1-e^{-\kappa_1(\tau-t)}\right]}{\tau-t}$$

in die Bestimmung des Zinssatzes $r_{t,\tau}$ ein; der zweite spielt also, wie postuliert, für den <u>Momentan</u>zinssatz keine Rolle. Der Vergleich der Gewichte, mit denen die beiden Faktoren in die Bestimmung der <u>Fristen</u>-bezogenen Zinssätze eingehen, ergibt folgendes Bild: Das relative Gewicht (von Faktor 2 zu Faktor 1) ist von der Größenordnung

$$\varepsilon(\tau - t) = \frac{1-e^{-\kappa_2(\tau-t)^2}}{1-e^{-\kappa_1(\tau-t)}} \tag{4.37}$$

Dieses Gewicht ist - natürlich auch in Abhängigkeit von den einzelnen Parametern - für sehr kurze Laufzeiten nahe bei null, hier dominiert also der Einfluss des Momentanzinssatzes; ε steigt dann stark an, so dass in mittleren Laufzeiten der Einfluss des zweiten Faktors deutlich überwiegt, für sehr lange Laufzeiten gilt $\varepsilon(\infty)=1$, da beide Faktoren über den gleichen, nämlich nahezu gar keinen Einfluss verfügen (Abbildung 3 zeigt den Verlauf von ε). Es wird dem Modell also keine Gewalt angetan, wenn der zweite Faktor als primär das längere Ende der Zinsstruktur bestimmend angenommen wird.

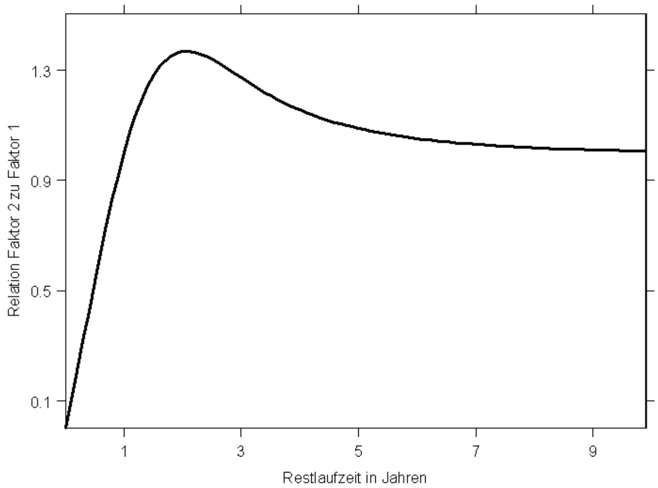

Abbildung 3: Verhältnis der Gewichte im stationären Ein-Faktor-Modell

Zusammenfassend kann man das Modell in zwei Gleichungen präsentieren:

$$r_t - {}_0r_t = \sigma_1 w_{1,t} - \frac{\sigma_1{}^2}{\kappa_1} \tag{4.38}$$

wie in (4.16) für den Momentanzins und

$$\begin{aligned} r_{t,\tau} - {}_0r_{t,\tau} &= \frac{\sigma_1}{\kappa_1} \frac{(1-e^{-\kappa_1(\tau-t)})}{\tau - t} \cdot w_{1,t} - c_2 \frac{1-e^{-\kappa_2(\tau-t)^2}}{\tau-t} \cdot w_{2,t} \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_1^2}{\kappa_1^2} \frac{(1-e^{-\kappa_1(\tau-t)})^2}{\tau-t} - c_2^2 \frac{(1-e^{-\kappa_2(\tau-t)^2})^2}{\tau-t}\right] \end{aligned} \tag{4.39}$$

für die längerfristigen Sätze; Abbildung 4 gibt einen Eindruck von möglichen Verläufen der Zinsstruktur, wobei außer im Fall der inversen Zinsstruktur alle Strukturen von demselben Momentanzins ausgehen. Ganz ersichtlich steigt die Variabilität der Verlaufsformen im Zwei-Faktor-Modell deutlich an.

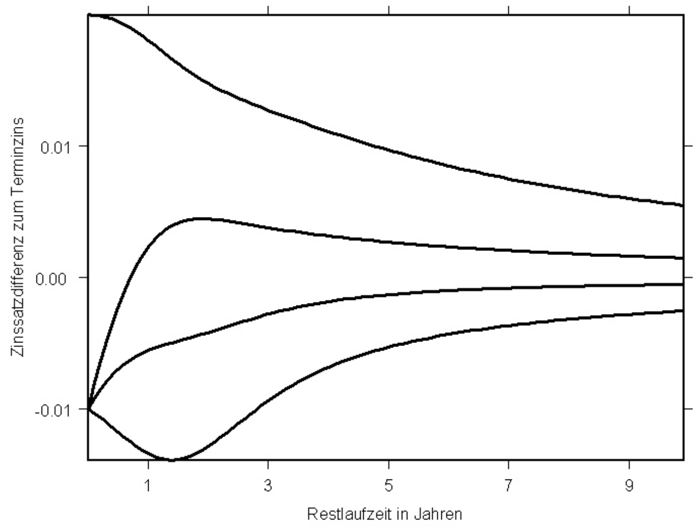

Abbildung 4: Formen der Zinsstruktur im stationären Zwei-Faktor-Modell

V. Schlussbemerkungen

Der vorliegende Beitrag hat das Konzept der Arbitrage-Freiheit in Gestalt des Ansatzes eines stochastischen Diskontierungsfaktors am Beispiel einer Arbitrage-freien Zinsstrukturentwicklung untersucht. Dabei ging es vor allem um ökonomisch interpretierbare Sachverhalte. Zu dem hier untersuchten Fall des Gaußschen Zinsstrukturmodells sind einfach abzuleitende analytisch formulierbare Zusammenhänge möglich. Es ist insbesondere deutlich geworden, dass neben die aus der zu einem bestimmten Zeitpunkt geltenden Zinsstruktur sich ergebende rein zeitliche Diskontierung eine, wie wir es genannt haben, Risikodiskontierung tritt, die, gegebenenfalls abhängig vom Zeitpunkt des Eintritts des Risikos, dieses in marktgerechter Form bewertet. Dabei zeigt sich, dass zum Einen Erwartungswert und Volatilität von Finanztiteln im Arbitrage-Gleichgewicht nicht unabhängig voneinander modelliert werden können und zum Anderen der Zusammenhang zwischen ihnen durch die Art der Risikodiskontierung des Marktes fixiert wird. Versucht man, wie es in der Literatur durchaus üblich ist, Eigenschaften der Zinsstruktur mit Hilfe von Arbitrage-Argumenten aus Eigenschaften des Prozesses des Momentanzinssatzes zu entwickeln, so entstehen zwangsläufig Freiheitsgrade, die in unserem Zusammenhang als Integrationskonstanten bei der Lösung von Differentialgleichungen in Erscheinung treten. Da diese Konstanten wesentlichen Einfluss auf die Art der Risikodiskontierung des Marktes haben, steht ihre Wahl keineswegs der Beliebigkeit offen, wenn auch in manchen Modellen der wichtige funktionale Zusammenhang zwischen längerfristigen Zinssätzen und dem Momentanzins von der Wahl der Konstanten unberührt ist. Dies ergab sich im stationären Fall, im Ho-Lee-Modell und im Vasicek-Modell, ist aber keineswegs zwingend; eine hinreichende Bedingung für diese Unabhängigkeit konnte aufgedeckt werden. Unbeachtet dieser Unabhängigkeit erwies sich hingegen die Wahl der Integrationskonstanten als bestimmend für Eigenschaften des Momentanzinssatzes selbst, so konnte Stationarität des Prozesses im Erwartungswert nur durch eine Integrationskonstante von null gewährleistet werden, was dann zu zeitlicher Konstanz der Risikodiskontierung führte, die wiederum natürlich die eigentliche Ursache für die Stationaritätseigenschaft ist. Die behandelte Methode konnte auch auf den Fall mehrerer Faktoren erweitert werden, die Grundstruktur der ökonomischen Zusammenhänge bleibt dabei erhalten. In einem Zwei-Faktor-Modell konnte verdeutlicht werden, dass Mehr-Faktor-Modelle eine größere Vielfalt von Zinsstrukturverläufen und eine differenzierte Korrelationsstruktur zwischen Zinssätzen unterschiedlicher Laufzeiten erklären können.

Wenn der Gaußsche Modellansatz, gerade im Mehr-Faktor-Fall, auch durchaus noch Entwicklungspotential besitzt, so muss doch eingeräumt werden, dass seine Möglichkeiten begrenzt sind: Insbesondere das wohl empirisch nicht zu leugnende Phänomen der stochastischen Volatilität der Zinssätze kann in ihn nicht integriert werden. In der weiteren Entwicklung wird es also darauf ankommen, Modellstrukturen für den stochastischen Diskontierungsfaktor zu entwickeln, die solche Phänomene abbilden können. Grundlegende Einsichten in die ökonomischen Zusammenhänge, wie sie das Gaußsche Modell ermöglichen, werden dabei aber erhalten bleiben.

Literatur

Ahn, Dong-Hyun und Bin Gao: A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics. In: Review of Financial Studies, Vol. 12 (1999), S. 721-762.

Black, Fischer und Myron Scholes: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy, Vol. 81 (1973), S. 637-659.

Cochrane, John H.: A Cross-Sectional Test of an Investment-Based Asset Pricing Model. In: Journal of Political Economy, Vol. 104 (1996), S. 572-621.

Feller, William: An Introduction to Probability Theory and ist Applications, Band 2. New York, John Wiley & Sons, 2. Auflage 1971.

Franke, Günter, Richard C. Stapleton und Marti G. Subrahmanyam: When are Options Overpriced? The Black-Scholes Model and Alternative Characterisations of the Pricing Kernel (Arbeitspapier Nr. 99/01). Konstanz, Zentrum für Finanzen und Ökonometrie der Universität Konstanz, 1999.

Harrison, Michael J. und David M. Kreps: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. In: Journal of Economic Theory, Vol. 20 (1979), S. 381-408.

Harrison, Michael J. und Stanley R. Pliska: Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. In: Stochastic Processes and their Applications, Vol. 11 (1981), S. 215-260.

Heath, David, Robert Jarrow und Andrew Morton: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation. In: Journal of Financial and Qantitative Analysis, Vol. 25 (1990), S. 419-440.

Ho, Thomas S. Y. und Sang-Bin Lee: Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. In: Journal of Finance, Vol. 41 (1986), S. 1011-1029.

Ingersoll, Jonathan E., Jr.: Theory of Financial Decision Making. Totowa/New Jersey, Rowman & Littlefield, 1987.

Kan, Raymond und Guofu Zhou: A Critique of the Stochastic Discount Factor Methodology. In: Journal of Finance, Vol. 54 (1999), S. 1221-1248.

Ross, Stephen A.: A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams. In: Journal of Business, Vol. 51 (1978), S. 453-475.

Stützel, Wolfgang: Volkswirtschaftliche Saldenmechanik. Tübingen, J. C. B. Mohr, 2. Auflage 1978.

Vasicek, Oldrich: An Equilibrium Characterization of the Term Structure. In: Journal of Financial Economics, Vol. 5 (1977), S. 177-188.

Wilhelm, Jochen: A Fresh View on the Ho-Lee Model of the Term Structure from a Stochastic Discounting Perspektive. In: Kürsten, Wolfgang und Jochen Wilhelm (Hrsg.), Finance and Banking. OR Spektrum (Sonderheft), 1999.