Wilhelm, Jochen

**Working Paper**

# Unternehmensbewertung: Eine finanzmarkttheoretische Untersuchung

Passauer Diskussionspapiere, Betriebswirtschaftliche Reihe, No. 10

**Provided in cooperation with:**
Universität Passau

Suggested citation: Wilhelm, Jochen (2003) : Unternehmensbewertung: Eine finanzmarkttheoretische Untersuchung, Passauer Diskussionspapiere, Betriebswirtschaftliche Reihe, No. 10, http://hdl.handle.net/10419/41041

**Herausgeber:**
**Die Gruppe der betriebswirtschaftlichen Professoren**
**der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät**
**der Universität Passau**
**94030 Passau**

# Unternehmensbewertung

## – Eine finanzmarkttheoretische Untersuchung –

**Jochen Wilhelm**

Diskussionsbeitrag B–10–03

**Betriebswirtschaftliche Reihe**
**ISSN 1435-3539**

Adresse des Autors:

Professor Dr. Jochen Wilhelm
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre
mit Schwerpunkt Finanzierung
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der
Universität Passau
94030 Passau

Telefon: 0851/509–2510
Telefax: 0851/509–2512
Email: Jochen.Wilhelm@uni–passau.de

# Inhaltsverzeichnis

# A. Einführung

Eine, wenn nicht die, zentrale Fragestellung der Unternehmensbewertung besteht in der Suche nach der Preisobergrenze für einen rationalen Erwerber bzw. nach der Preisuntergrenze für einen rationalen Veräußerer eines ganzen Unternehmens. In seiner ganzen Schärfe stellt sich das Problem vor dem Hintergrund des empirischen Normalfalls, in dem die ökonomisch relevanten Eigenschaften des Unternehmens (im Folgenden meist als „Bewertungsobjekt" bezeichnet) mit Hilfe deterministischer Kategorien nicht adäquat beschrieben werden können, wenn also gemäß dem gegenwärtigen Stand der Finanztheorie Begriffswerkzeuge aus der Stochastik herangezogen werden sollten. Unumstritten scheint zu sein, dass die ökonomisch relevanten Eigenschaften sich letztlich auf der Zahlungsmittelebene niederschlagen, dass Kategorien aus dem Rechnungswesen, dem Gesellschafts–, dem Vertragsrecht, dem Insolvenzrecht usw. nur insoweit bewertungsrelevant sind, wie sie sich in Zahlungswirkungen niederschlagen (so ist z. B. der steuerliche Gewinnbegriff nicht als solcher, sondern nur als Auslöser von Steuer*zahlungen* von Belang); genau so ist mit Verhaltenswirkungen zu verfahren, die aus der Antizipation von Zahlungen folgen und die selbst wieder Zahlungen auslösen (strategisches Verhalten im Rahmen von Agency–Beziehungen).

Neben der Frage, an welchen Tatbeständen Unternehmensbewertung anknüpfen sollte, ist weiter abzugrenzen, welche Dispositionsmöglichkeiten des Erwerbers bzw. des bisherigen Eigners in Hinsicht auf den Zukunftserfolg des Unternehmens Berücksichtigung finden sollen. Wir gehen hier von dem Konzept des „going concern" aus, d. h. davon, dass alle Dispositionen im Unternehmen (Investitionspolitik, Finanzierungspolitik etc.) getroffen sind und im Rahmen der anstehenden Bewertung als gegeben angesehen werden.

Der vorliegende Beitrag stellt in dem derart gezogenen Betrachtungsrahmen das Unternehmensbewertungsproblem konsequent als individuelles Entscheidungsproblem über Kauf oder Nichtkauf bzw. Verkauf oder Nichtverkauf in ein Finanzmarkt–Umfeld. Insofern werden daher Induvidualkalkül und Marktbewertung in einer Sichtweise integriert. Der Finanzmarkt, in den das Problem eingebettet betrachtet wird, wird als Arbitrage–frei unterstellt, der Entscheider als Erwartungs–Nutzen–Maximierer. Dabei ergeben sich verschiedene Bewertungskonzepte durch unterschiedliche Annahmen hinsichtlich des vorhandenen bzw. genutzten Risikoallokationspotenzials des Finanzmarktes. Von dieser Sichtweise abgesehen, geht der Beitrag in mehrerlei Hinsicht über den Stand der Literatur hinaus:

– Er bietet eine Modellierung des Arbitrage–freien Finanzmarktes und eine Klasse von Cashflow–Prozessen als Rahmenwert zur systematischen Untersuchung gängiger Thesen an.

– Innerhalb des Rahmenwerks werden geschlossene Formeln für Unternehmenswerte bei Risiko abgeleitet, die die Gordon–Shapiro–Gleichung auf diesen Fall verallgemeinern bzw. Alternativen zu dieser Gleichung liefern.

- Es wird gezeigt, dass zur Bildung von Sicherheitsäquivalenten nicht zwingend Risiko*abschläge* vom Erwartungswert vorzunehmen sind; je nach Stellung des Bewertungsobjektes in den Risikoallokationsmöglichkeiten des Finanzmarktes oder auch je nach Zusammenhang mit anderem nicht marktfähigem Einkommen sind auch Risiko*zuschläge* möglich.
- Eine neue Betrachtungsweise für das Problem der Risikoprämie im Zinssatz wird entwickelt, die auf dem Terminzinsgedanken basiert. Es zeigt sich, dass spätere Cashflows nur dann mit einer geänderten Risikoprämie im Zinssatz zu bewerten sind, wenn sie vom Markt als riskanter (bzw. weniger riskant) eingeschätzt werden als frühere Cashflows. Die entwickelte Betrachtungsweise wird durch Einführung eines neuen Konzepts, der so genannten inkrementalen Risikoprämienstruktur operationalisiert.
- Das in jüngerer Zeit umstrittene Konstrukt eines sich im Zeitablauf gleichmäßig oder schlagartig auflösenden Risikos wird auf eine neue, begrifflich exakte Grundlage gestellt. Die Hypothesen über den Zusammenhang zwischen Risikoauflösung und Grad der Abhängigkeit der Cashflows werden (allerdings im neuen Licht) bestätigt; jedoch ist nicht ersichtlich, zur Erklärung welcher Phänomene dieses Konzept beitragen könnte.
- Kombiniert man individuelle und Marktsichtweise miteinander, kommen Phänomene ins Blickfeld, die die Stellung des Bewertungsobjektes im optimalen Portfolio des Erwerbers/Verkäufers betreffen. Hierzu wird ein praktikabel erscheinender Kompromiss zwischen Marktbewertung und Individualbewertung vorgestellt: Danach setzt sich der Wert aus einer Marktwertkomponente (Teil des Cashflows, der durch Finanzmarktinstrumente derart dupliziert wird, dass die Varianz des Residuums minimal wird) und einer individuell wertmäßig einzuschätzenden Komponente (das erwähnte Residuum) zusammen. Die individuelle Komponente spiegelt die Risikoaversion des Entscheiders und sein sonstiges nicht marktfähiges Einkommen wider.

Die Arbeit versteht sich als Beitrag zur aktuellen Diskussion[1], die vor allem durch Kürsten (2002) in Reaktion auf Schwetzler (2000) und andere Vertreter der tradierten Unternehmensbewertungsliteratur angeregt worden ist. Die gängige Literatur zur Unternehmensbewertung geht, gestützt auf Argumente der Risikoaversion, grundsätzlich von Risiko*abschlägen* bei der Ermittlung von Sicherheitsäquivalenten aus (u. a. Drukarczyk (2001), S. 77; Kruschwitz (2001); Seicht (2001), S. 21). Die Äquivalenz von Sicherheitsäquivalentmethode und Zuschlag einer Risikoprämie im Zinssatz wurde zuletzt vor allem von Schwetzler (2000) behandelt, der Hypothesen über den Charakter und die Erklärung mit der Zeit sinkender Risikoprämien formuliert, die sich nach unserer Einschätzung nicht halten lassen. Unsere Operationalisierung „sich auflösenden Risikos“ ist vor allem im Vergleich mit Wiese (2003) zu sehen, wo Risiko durch erwartete (bedingte) Risikoprämien spezifiziert wird.

Unser Vorschlag[2] einer gemischt Marktwert– und Individualwert–orientierten Unternehmensbewertung hat methodische Ähnlichkeiten mit dem „semi–subjektiven" Ansatz von Kruschwitz und Löffler (2003); von den Verteilungsannahmen abgesehen, enthält unser Ansatz den semi–subjektiven als Spezialfall, zeigt aber, dass der semi–subjektive Ansatz zu Fehlschlüssen bezüglich der Problemkomplexität einlädt.

Die Arbeit ist wie folgt organisiert: Zunächst wird das Grundmodell mit Finanzmarkt, Investor und Bewertungsobjekt entwickelt. Es folgen dann Bewertungsansätze als Spezifikationen des Grundmodells. Breitesten Raum nimmt der Separationsansatz ein, der die Bewertung auf die Grundlage der Fisher–Separation stellt. Aussagen zu Sicherheitsäquivalenten, Unternehmenswerten, Risikoprämien und zur Auflösung des Risikos in der Zeit werden hier abgeleitet. Es ist vielleicht der Erwähnung wert, dass diese Aussagen ohne wesentliche Modifikationen auf Ansätze übertragen werden können, die eine andere theoretische Begründung für Sicherheitsäquivalente liefern, als die hier bevorzugte Finanzmarkttheorie. Es schließt sich dann die Darstellung der als Risikoverbundansatz bezeichnete Bewertungsmethode an, die auf die Stellung des Objekts im Gesamtportfolio des Investors abhebt. Kurze Bewertungen zum semi–subjektiven und zum individualistischen Ansatz beschließen den eigentlichen Textteil. Der ausführliche Anhang stellt Hilfsmaterial zur Modellierung von Cashflow Prozessen und die im Text nicht vorgeführten Beweise bereit.

# B. Das Grundmodell

## I. Bewertungsobjekt und Finanzmarkt

Das Bewertungsobjekt wird durch die aus seiner Nutzung fließenden Netto–Zahlungsströme („Cashflows") charakterisiert. Diese Ströme bezeichnen wir mit $\{X_t | t = 0, \dots, T\}$, wobei wir ein in Bezug auf die Zeit diskretes Modell zu Grunde legen; $T$ bezeichnet den Planungshorizont. Um eine zeitliche Entwicklung des Informationsstandes beschreiben zu können, arbeiten wir mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ und einer Familie von $\sigma$–Algebren $\{\mathcal{A}_t | t \in [0, T]\}$ mit $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{A}$ für alle $t \leq \tau$. Die Netto–Zahlungsströme $X_t$ sind dabei $\mathcal{A}_t$–messbar, d. h. die Information über die tatsächliche Höhe der Zahlung in $t$ ist im Zeitpunkt $t$ bekannt. Das Finanzmarktumfeld, in das wir das Bewertungsproblem eingebettet sehen, wird durch die Preisentwicklung von Wertpapieren charakterisiert. Wir unterscheiden $n$ Risiko–behaftete Wertpapiere (z. B. Aktien), die im Betrachtungszeitraum (aus Vereinfachungsgründen) keine Ausschüttungen haben werden, und eine – ebenfalls aus Vereinfachungsgründen – vollständige Menge von Zero–Bonds mit Nominalwert 1. Die $n$ Wertpapierpreise entwickeln sich gemäß $P_t = (P_{t,1}, \dots, P_{t,n})^T$ ($^T$ bezeichnet die Transposition von Vektoren und Matrizes; die $P_{t,i}$ sind $\mathcal{A}_t$–messbar), die Zero–Bond–Preise gemäß $B(t, \tau)$ $(t \leq \tau)$; dabei ist $B(t, \tau)$ der in $t$ geltende Preis für einen in $\tau$ fälligen Zero–Bond; natürlich gilt $B(t, t) = 1$ für alle $t$, und $\{B(0, t) \,|\, t = 1, \dots, T\}$ spiegelt die im Zeitpunkt 0 geltende Fristigkeitsstruktur der Zinssätze wider. Für $B(t, t+1)$ schreiben wir $\frac{1}{1+r_t}$; $r_t$ ist dann der Spot–Zinssatz für eine kurzfristig risikofreie Anlage über die Periode

$[t, t+1]$; mit ${}_0r_t$ bezeichnen wir den im Zeitpunkt 0 (implizit) vereinbarten Terminzinssatz für dieselbe Periode. Mit diesen Festsetzungen ist es nun möglich, Portfoliostrategien $(x, y)$ zu beschreiben: $x_t$ ist das in der Periode $[t, t+1]$ gehaltene Wertpapierportfolio, $y_t$ das in derselben Periode $[t, t+1]$ gehaltene Zero–Bond–Portfolio[3]. Der Wert des Portfolios $x_t$ im Zeitpunkt $t$ bzw. im Zeitpunkt $t+1$ ist durch

$$x_t^T \cdot P_t + \sum_{\tau \geq t+1}^{T} y_{t,\tau} \cdot B(t, \tau) \quad \text{bzw.} \quad x_t^T \cdot P_{t+1} + \sum_{\tau \geq t+1}^{T} y_{t,\tau} \cdot B(t+1, \tau)$$

gegeben. Schließlich soll der Finanzmarkt Arbitrage–frei sein, derart dass ein (fast sicher) strikt positiver Prozess $\{Q_t | t = 0, \ldots T\}$ mit $Q_0 = 1$ existiert, so dass

$$P_t = E\left\{\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \cdot P_{t+1} \middle| \mathcal{A}_t\right\} \tag{1}$$

und

$$B(t, \tau) = E\left\{\frac{Q_\tau}{Q_t} \,\middle|\, \mathcal{A}_t\right\} \quad \text{für} \quad \tau \geq t \tag{2}$$

gilt[4].

## II. Investoren

Investoren betrachten wir als den erwarteten Nutzen aus Konsumauszahlungen maximierende Individuen. Konsumauszahlungen können durch Finanzmarkttransaktionen, aus eventuell vorhandenem nicht marktfähigen Einkommen und gegebenenfalls aus den Cashflows des Bewertungsobjekts erzeugt werden. Beginnen wir mit den Zahlungen, die von Finanzmarkttransaktionen ausgelöst werden. Für eine gegebene Portfolio–Strategie $(x, y)$ ergeben sich die folgenden Zahlungen $(c_0(x, y),\, c(x, y))$ mit

$$\begin{aligned}
c_0(x, y) &= -x_0^T \cdot P_0 - \sum_{\tau=1}^{T} y_{0,\tau} \cdot B(0, \tau) && (3) \\
c_{t+1}(x, y) &= (x_t - x_{t+1})^T \cdot P_{t+1} + y_{t,t+1} + \sum_{\tau \geq t+2} (y_{t,\tau} - y_{t+1,\tau}) \cdot B(t+1, \tau) && (4) \\
& \qquad\qquad (t = 0, \ldots, T-2) \\
c_T(x, y) &= x_{T-1}^T \cdot P_T + y_{T-1,T} && (5)
\end{aligned}$$

dabei haben wir in Vektorschreibweise $c(x, y) = \big(c_1(x, y), \ldots, c_T(x, y)\big)$ zusammengefasst. In (3) sind die Netto–Anfangsinvestitionen der Kapitalmarktstrategie erfasst, (4) zeigt, wie die Konsumzahlung in $t+1$ aus der Umschichtung des Wertpapierportfolios, der risiko–freien Anlage der Vorperiode und der Umschichtung des Bond–Portfolios alimentiert wird, (5) schließlich, liquidiert die verbliebenen Positionen am Planungshorizont.

Zusammen mit der Annahme, der Finanzmarkt sei Arbitrage–frei, ergibt sich durch einfache Rekursion

$$c_t(x,y) = x_{t-1}^T \cdot P_t + \sum_{\tau \geq t} y_{t-1,\tau} \cdot B(t,\tau) - \sum_{\tau=t+1}^{T} E\left(\frac{Q_\tau}{Q_t} \cdot c_\tau \middle| \mathcal{A}_t\right) \tag{6}$$

Ein Beweis für diese Feststellung findet sich im Anhang.

Da nicht jeder Investor alle möglichen Finanztransaktionen durchführen kann oder will, geben wir einen nicht näher, aber grundsätzlich individuell bestimmten Definitionsbereich $D$ vor, innerhalb dessen Portfolio–Strategien in Frage kommen. Als Teil–Opportunitätsmenge aller Konsumpläne, die sich allein aus Kapitalmarkttransaktionen speisen lassen, ist daher

$$C = \left\{ \big(c_0(x,y), c(x,y)\big) \big| (x,y) \in D \right\} \tag{7}$$

gegeben. Offensichtlich hat $C$ insofern eine gewisse Linearitätseigenschaft, als $c_0(ax + b\bar{x}, ay + b\bar{y}) = a \cdot c_0(x,y) + b\, c_0(\bar{x},\bar{y})$ und $c(ax + b\bar{x}, ay + b\bar{y}) = a\, c(x,y) + b\, c(\bar{x},\bar{y})$ gilt[5].

Nicht marktfähiges Einkommen $\{h_t | t = 0, \ldots, T\}$, aber auch die Cashflows des Bewertungsobjekts, schlagen sich additiv zu $C$ nieder. Die resultierende Gesamtopportunitätsmenge ist folglich einfach durch die folgende Operation

$$C + (h_0, h) = \Big\{ \big(c_0(x,y) + h_0, c(x,y) + h\big) \big| (x,y) \in D \Big\} \tag{8}$$

bzw.

$$C + (h_0, h) + (X_0, X) = \Big\{ \big(c_0(x,y) + h_0 + X_0, c(x,y) + h + X\big) \big| (x,y) \in D \Big\} \tag{9}$$

gegeben.

Wir definieren nun allgemein den optimalen erwarteten Nutzen, den ein Investor aus Kapitalmarkttransaktionen und einem zusätzlich gegebenen Zahlungsstrom $(Y_0, Y)$ ziehen kann, durch[6]

$$U(Y_0, Y) = \max \Big\{ E\big(u(z_0, z)\big) \big| (z_0, z) \in C + (Y_0, Y) \Big\} \tag{10}$$

Auf die zulässigen Portfolio–Strategien zurückgreifend, heißt das:

$$U(Y_0, Y) = \max \Big\{ E\Big(u\big(c_0(x,y) + Y_0, c(x,y) + Y\big)\Big) \Big| (x,y) \in D \Big\} \tag{11}$$

In der Formulierung (10) kommt zum Ausdruck, dass für das Optimum nicht so sehr die konkreten Portfolio-Strategien, wie sie in (11) betrachtet werden, von Bedeutung sind, sondern die Opportunitätsmenge $C + (Y_0, Y)$ auf der Ebene der Konsumzahlungen. Diese Tatsache ist besonders für die unten als „Separationsansatz“ bezeichnete Bewertungsmethode von Bedeutung.

## III. Definition von Unternehmenswerten

Wir sind nun gerüstet, ökonomisch nahe liegende Definitionen für den Wert des Bewertungsobjekts jeweils aus Käufer- und Verkäufersicht vorzuschlagen. Aus Käufersicht setzen wir an:

$$V_K = \sup\Big\{V_0 \in \mathbb{R} | U(h_0 + X_0 - V_0, h + X) \geq U(h_0, h)\Big\} \tag{12}$$

Der Wert aus Käufersicht ist nach dieser Definition der höchste Betrag $V_0$, der in $t = 0$ ausgezahlt wird, um aus der Situation ohne das Bewertungsobjekt ($U(h_0, h)$) in die Situation mit Bewertungsobjekt ($U(h_0 + X_0 - V_0, h + X)$) zu gelangen, ohne dass sich der Erwerber dabei schlechter stellt. Entsprechend ist die Definition für den Verkäufer zu sehen:

$$V_V = \inf\Big\{V_0 \in \mathbb{R} | U(h_0 + V_0, h) \geq U(h_0 + X_0, h + X)\Big\} \tag{13}$$

Der Wert $V_V$ aus Verkäufersicht ist der niedrigste Betrag $V_0$, der in $t = 0$ im Tausch gegen das Bewertungsobjekt verlangt wird, ohne durch diesen Tausch Nutzen einzubüßen (ohne Bewertungsobjekt mit der entsprechenden Zahlung $U(h_0 + V_0, h)$, mit Bewertungsobjekt $U(h_0 + X_0, h + X)$).

Unterschiedliche Spezifikationen von exogenem Einkommen, von Nutzenfunktionen und von relevanten Finanzmarkttransaktionen führen zu unterschiedlichen Bewertungsansätzen, wie im Folgenden zu zeigen sein wird. Dabei werden wir den Separationsansatz, bei dem (12) und (13) zusammenfallen und der Wert marktbestimmt ist, auf der einen Seite des Spektrums und den rein individualistischen Ansatz subjektiver Wertung auf der anderen Seite desselben Spektrums finden.

# C. Bewertungsansätze

## I. Der Separationsansatz

### 1. Die grundlegende Bewertungsformel

Das bekannte Phänomen der Fisher–Separation führt auf eine Bewertung durch den Markt, wobei das fundamentale Prinzip einer Bewertung durch Duplikation die entscheidende Rolle spielt. Um dieses Prinzip anwenden zu können, muss das Bewertungsobjekt duplizierbar sein (wir sprechen auch von „Spanning“), d. h. es muss eine Portfolio–Strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ existieren, so dass (fast sicher)

$$X = c(\bar{x}, \bar{y}) \tag{14}$$

gilt. Dann ist offensichtlich $\big(c_0(\bar{x}, \bar{y}), X\big) \in C$, d. h. die Zahlungsströme des Bewertungsobjektes sind, auch ohne dass man dasselbe besitzt, realisierbare Konsumzahlungen. Des Weiteren muss gelten, dass keinerlei Leerverkaufsbeschränkungen vorliegen; dann ist $C$ ein linearer Raum und folglich gilt $C = \big(c_0(\bar{x}, \bar{y}), X\big) + C$, d. h. die Menge der realisierbaren Konsumzahlungspläne erfährt durch das Bewertungsobjekt keine Erweiterung oder Einschränkung. Daraus ergibt sich das folgende Separationstheorem:

*Separationstheorem:* Unter den genannten Bedingungen gilt

$$V_K = V_V = X_0 - c_0(\bar{x}, \bar{y}) \tag{15}$$

Der Beweis stützt sich auf den Umstand, dass in Folge der Möglichkeit der Duplikation und der Leerverkäufe sich die Opportunitätsmengen mit bzw. ohne das Bewertungsobjekt nur durch sichere Zahlungen in $t = 0$ unterscheiden, die aber gerade durch (15) zum Ausgleich gebracht werden. Ausformuliert findet der Leser den Beweis im Anhang.

Unter den Bedingungen des Separationstheorems gilt daher unter Verwendung von (6) für $t = 0$:

$$V := V_K = V_V = X_0 + \sum_{\tau=1}^{T} E\big(Q_\tau \cdot X_\tau\big) \tag{16}$$

Käufer- und Verkäufer–Preis sind identisch und lassen sich prinzipiell durch (stochastisches) Diskontieren der Cashflows des Bewertungsobjekts ermitteln. Der Fall deterministischer Cashflows ist übrigens selbstverständlich mit eingeschlossen, da sie durch ein Portfolio von Zero–Bonds duplizierbar sind. Sei $\bar{X}_0, \bar{X}$ ein solcher Zahlungsstrom; dann gilt

$$V = \bar{X}_0 + \sum_{\tau=1}^{T} B(0, \tau) \cdot \bar{X}_\tau \tag{17}$$

Unter Verwendung der gebräuchlichen Zinsschreibweise wird aus (17):

$$V = \bar{X}_0 + \sum_{\tau=1}^{T} \frac{\bar{X}_\tau}{(1 + r_{0,\tau})^\tau} \tag{18}$$

## 2. Sicherheitsäquivalent

Untersuchen wir die Bewertungsgleichung (16) näher. Zunächst kann man den stochastischen Diskontierungsfaktor $Q_\tau$ zerlegen in eine rein Zeit–bezogene Komponente $B(0, \tau)$, den Diskontierungsfaktor für Risiko–freie Zahlungen des betreffenden Zeitpunktes, und den „Risikobewertungsfaktor“ $R_\tau = \frac{Q_\tau}{B(0,\tau)} = (1 + r_{0,\tau})^\tau \cdot Q_\tau$. Offensichtlich gilt $E(R_\tau) = 1$ (für alle $\tau = 1, \ldots, T$)[7]. Die Gleichung (16) geht dann in die folgende Form über:

$$V = X_0 + \sum_{\tau=1}^{T} \frac{1}{(1 + r_{0,\tau})^\tau} \cdot E(R_\tau \cdot X_\tau) \tag{19}$$

Der so genannte „Verschiebungssatz“ der Kovarianz lässt eine andere Schreibweise für den Erwartungswertterm in (19) zu:

$$\begin{aligned} E(R_\tau \cdot X_\tau) &= E(R_\tau) \cdot E(X_\tau) + \operatorname{cov}(R_\tau, X_\tau) \\ &= E(X_\tau) + \operatorname{cov}(R_\tau, X_\tau) \end{aligned}$$

woraus schließlich für (19) folgt:

$$V = X_0 + \sum_{\tau=1}^{T} \frac{E(X_\tau) + \operatorname{cov}(R_\tau, X_\tau)}{(1 + r_{0,\tau})^\tau} \tag{20}$$

Im Separationsansatz kann man daher $E(R_\tau \cdot X_\tau) = E(X_\tau) + \operatorname{cov}(R_\tau, X_\tau)$ als *Sicherheitsäquivalent* der unsicheren Zahlung $X_\tau$ bezeichnen, kann man doch mit ihr gemäß (18) und (20) so rechnen, als beurteile man statt des unsicheren Stroms $X_0, X_1, \ldots, X_T$ den sicheren Strom $\bar{X}_0 = X_0, \bar{X}_1 = E(X_1) + \operatorname{cov}(R_1, X_1), \ldots, \bar{X}_T = E(X_T) + \operatorname{cov}(R_T, X_T)$. In der üblichen Terminologie wird man dann von $-\operatorname{cov}(R_t, X_t)$ als von dem *Risikoabschlag* sprechen, den man vornehmen müsse, um aus dem Erwartungswert das Sicherheitsäquivalent zu gewinnen[8]. Nun liegt es in der Natur der Kovarianz, dass ihr kein a priori bestimmbares Vorzeichen eigen ist, so dass der Risiko*abschlag* ohne Weiteres im realen Fall de facto ein Risiko*zuschlag* sein kann. Hier zeigt sich, dass eine nicht zu Ende gedachte Übertragung von Aussagen der Entscheidungstheorie[9] auf Phänomene, die in einem Risiko–Markt–Zusammenhang eingebettet sind, in die Irre führen kann. Eine andere Frage ist es, ob, *empirisch* gesehen, der Risikoabschlag der Normalfall ist oder nicht.

Eine relativ einfache, aber interessante Konsequenz des Separationstheorems ist die Möglichkeit, Zins–Zeit–Effekte von Risiko–Bewertungseffekten zu trennen. Dazu stelle man sich gedanklich vor, der Cashflow $X_t$ der Periode $t$ werde erst eine Periode später, also in $t+1$ gezahlt. Bei einer Trennung von Zins–Zeit–Effekten von Risiko–Bewertungseffekten sollte das Sicherheitsäquivalent dieser in $t+1$ erfolgenden Zahlung sich (fast) nicht von dem im Zeitpunkt $t$ unterscheiden. Genauer konstatieren wir das folgende

*Korollar über die Trennung von Zeit–Zins–Effekten von Risiko–Bewertungseffekten:*

Unter den Bedingungen des Separationstheorems gilt

$$E\left(R_{t+1} \cdot X_t\right) = E\left(\frac{1+r_t}{1+\,_0r_t} \cdot R_t \cdot X_t\right) \tag{21}$$

Bei deterministischer Zinsentwicklung gilt dann (wegen $_0r_t = r_t$) sogar

$$E(R_{t+1} \cdot X_t) = E(R_t \cdot X_t) \tag{22}$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus Anmerkung 5.

Unter reinen Risiko-Bewertungsaspekten ändert sich bei Verschiebung der Zahlung also das Sicherheitsäquivalent nur insofern, als Zinsrisiko neu hinzutritt: Der Wert der zu $t$ gehörenden Zahlung, wenn sie erst in $t+1$ gezahlt wird, ergibt sich nämlich durch Bewertung der in $t$ fälligen, dann aber zum herrschenden Spotzinssatz für eine Periode Risiko–frei angelegten Summe. Die Abweichung des Spotzinssatzes in $t$ von dem betreffenden Terminzinssatz bringt in der Tat neues Risiko, das mit dem generischen Risiko des Cashflow nichts zu tun hat. Das führt zu einer (wahrscheinlich geringfügigen) Abweichung. Gibt es keine Zinsunsicherheit, so ändert sich auch das Sicherheitsäquivalent durch eine zeitliche Verschiebung der Zahlung nicht: Zeit–Zins–Effekte und Risiko–Bewertungseffekte sind getrennt. Eine mögliche „verursachungsgerechte“ Verteilung des Risikoabschlages auf die Zeit, allerdings ohne Bezug zum Zins, wird weiter unten erörtert.

Zur Konkretisierung dieser und nachfolgender Überlegungen haben wir im Anhang A ein „Rahmenwerk für Beispiele zur finanzmarktorientierten Unternehmensbewertung“ bereit gestellt. Dieses Rahmenwerk enthält Cashflow–Prozesse mit Wachstum und stationäre (bzw. asymptotisch stationäre) Prozesse, wie sie in der Unternehmensbewertungsliteratur verbreitet diskutiert werden. Die von uns verwendeten Prozesstypen sind durchweg normal– bzw. logarithmisch normalverteilt; der Grund dafür ist technischer Natur: Für diese Prozesse lassen sich fast durchgehend analytische Lösungen ermitteln. Unter Bedingungen gleichmäßigen additiven bzw. gleichmäßigen multiplikativen Wachstums der Cashflows sowie unter weiteren vereinfachenden Annahmen (normalverteilt bzw. logarithmisch normalverteilt, Näheres siehe Anhang) ergeben sich Sicherheitsäquivalente in Höhe von

$$t \cdot \left(\bar{\mu} - \frac{1}{t}\, F(t)^T \cdot \bar{\sigma}\right) \qquad \text{(additiv)} \tag{23}$$

bzw.

$$X_0\left[(1+g)\cdot e^{-\frac{1}{t}F(t)^T\cdot\bar{\sigma}}\right]^t \qquad \text{(multiplikativ)} \tag{24}$$

In (23) ist $\bar{\mu}$ der konstante Erwartungswert und $\|\bar{\sigma}\|$ die konstante Standardabweichung des Cashflow–Zuwachses pro Periode. Der Ausdruck $\frac{1}{t}\,F(t)^T\cdot\bar{\sigma}$ repräsentiert das durch den Markt bewertete Risiko dieses Cashflow–Zuwachses. Die Bewertung ist über die Markt–bestimmte Funktion $\frac{1}{t}\,F(t)$ prinzipiell Zeit–abhängig. Von dieser Zeitabhängigkeit der Bewertung abgesehen, ist das Sicherheitsäquivalent in der Zeit linear. $\frac{1}{t}\,F(t)$ kann als das durchschnittliche Gewicht betrachtet werden, mit dem vergangene Schocks auf die Bewertung des aktuellen Risikos einwirken.

Der multiplikative Fall (24) zeigt exponentielles Wachstum des Erwartungswertes ($g$ ist die erwartete Wachstumsrate) und exponentielles Wachstum des Risikobewertungsterms (wenn man auch hier von der grundsätzlich gegebenen Zeitabhängigkeit von $\frac{1}{t}\,F(t)$ absieht). Aus (23) und (24) wird beispielhaft deutlich, dass Zeitabhängigkeit des Sicherheitsäquivalents zwar tendenziell dem zeitlich exponentiellen Wachstumsprofil der Cashflows folgt, aber durchaus von dem zeitlichen Verhalten des Risikobewertungsfaktors beeinflusst wird. In ihm wiederum spiegeln sich Risikoeinstellungen und alternative Risikoallokationsmöglichkeiten des Marktes.

Um zu griffigen Formeln für den gesamten Unternehmenswert zu kommen, setzen wir nun[10] die Gewichte $f(t)=\bar{f}$ als ebenso zeitlich konstant wie den Zinssatz $r_{0,\tau}=r_f$ an und nehmen für die Cashflows, wie in der Unternehmensbewertung gerne vereinfachend gemacht, unendliches gleichförmiges Wachstum an; dann finden wir

$$V = X_0 + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{(1+r_f)^t}\cdot(\bar{\mu}-\bar{f}^T\cdot\bar{\sigma})$$

d. h.

$$V = X_0 + (E(X_1)-\bar{f}^T\cdot\bar{\sigma})\cdot\frac{1+r_f}{r_f^2} \qquad \text{(additiver Fall)} \tag{25}$$

und

$$V = X_0 + X_0\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\left[(1+g)\cdot e^{-\bar{f}^T\cdot\bar{\sigma}}\right]^t}{(1+r_f)^t}$$

d. h.

$$V = X_0 + E(X_1)\cdot e^{-\bar{f}^T\cdot\bar{\sigma}}\cdot\frac{1}{(1+r_f)-e^{-\bar{f}^T\cdot\bar{\sigma}}\cdot(1+g)} \qquad \text{(multiplikativer Fall)} \tag{26}$$

In (26) finden wir eine Verallgemeinerung der klassischen Gordon–Shapiro–Gleichung auf den Fall von Risiko; (26) unterscheidet sich von jener durch den Term $e^{\bar{f}^T\cdot\bar{\sigma}}$, der das durch den Markt bewertete Risiko der wachsenden Cashflows widerspiegelt (im Risiko–neutralen Markt gilt $\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma} = 0$, so dass dieser Term keine Rolle mehr spielt und die Gordon–Shapiro–Gleichung für die erwartete Wachstumsrate $g$ resultiert). (25) ist das entsprechende Gegenstück bei additivem Wachstum der Cashflows, das meines Wissens in der Literatur bisher nicht untersucht wurde.

Für *stationäre* Cashflows[11] ergeben sich in analoger Weise Ergebnisse, die zusammen mit den Ergebnissen (23) und (24) in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind (für die stationären Fälle benutzen wir $E(X)$ für den (zeitlich konstanten) Erwartungswert des jeweiligen Cashflows.

Tabelle 1: Sicherheitsäquivalente verschiedener Cashflow–Prozesse

| | Additiv | Multiplikativ |
|---|---|---|
| wachsend | $t \cdot \left(E(X_1) - \frac{1}{t}\, F(t)^T \cdot \bar{\sigma}\right)$ | $X_0 \left[\frac{E(X_1)}{X_0} \cdot e^{-\frac{1}{t}\, F(t)^T \cdot \bar{\sigma}}\right]^t$ |
| unabhängig/ stationär | $E(X) - \left(F(t) - F(t-1)\right)^T \cdot \bar{\sigma}$ | $E(X) \cdot e^{-\left(F(t)-F(t-1)\right)^T \cdot \bar{\sigma}}$ |
| abhängig/ stationär | $E(X) - \bar{\sigma}^T \cdot \int\limits_0^t f(\theta)\, e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot d\,\theta$ | $E(X) \cdot e^{-\bar{\sigma}^T \cdot \int\limits_0^t f(\theta)\, e^{-\alpha(t-\theta)}} \cdot d\,\theta$ |

Tabelle 2: Unternehmenswerte verschiedener Cashflow–Prozesse

| | Additiv | Multiplikativ |
|---|---|---|
| wachsend | $X_0 + (E(X_1) - \bar{f}^T \cdot \bar{\sigma})\, \frac{1+r_f}{r_f^2}$ | $X_0 + E(X_1) \cdot e^{-\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}}\, \frac{1}{(1+r_f) - e^{-\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}}(1+g)}$ |
| unabhängig/ stationär | $X_0 + \frac{E(X) - \bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}}{r_f}$ | $X_0 + \frac{E(X) \cdot e^{-\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}}}{r_f}$ |
| abhängig/ stationär | $X_0 + \frac{E(X)}{r_f} - \frac{\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}}{\alpha} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{e^{-\alpha}}{1+r_f-e^{-\alpha}}\right)$ | keine analytische Lösung |

## 3. Risiko–angepasste Diskontierung

Als Alternative zur Erfassung des Risikos in der Form von Sicherheitsäquivalenten, wird in der praktischen Unternehmensbewertung gerne die Verrechnung einer Risikoprämie $z_t$ im Zinssatz gewählt. Ausgehend von Gleichung (20) würde sich formal der Ansatz

$$\frac{E(X_t) + \text{cov}(R_t, X_t)}{(1 + r_{0,t})^t} = \frac{E(X_t)}{(1 + r_{0,t} + z_t)^t} \tag{27}$$

anbieten. Das würde auf die Bedingung

$$1 + r_{0,t} + z_t = (1 + r_{0,t}) \left[1 + \text{cov}\left(R_t, \frac{X_t}{E(X_t)}\right)\right]^{-\frac{1}{t}} \tag{28}$$

bzw.

$$z_t = (1 + r_{0,t}) \left\{\left[1 + \text{cov}\left(R_t, \frac{X_t}{E(X_t)}\right)\right]^{-\frac{1}{t}} - 1\right\} \tag{29}$$

führen. Formal gesehen, wäre das „Problem“ damit erledigt: Das Sicherheitsäquivalent je Einheit Erwartungswert wird im Wege einer geometrischen Mittelung auf die Periodenanzahl verteilt, analog zur Verteilung der Zinsen auf den Kapitalüberlassungszeitraum. Fraglich ist indessen, ob die Beziehung (29) einer ökonomisch fruchtbaren Interpretation zugänglich ist, ob insbesondere der zeitliche Verlauf (die funktionale Abhängigkeit von der Zeit) irgendetwas „erkläre“ oder „indiziere“. Hier sind entschiedene Zweifel angebracht:

Zunächst einmal ist darauf hinzuweisen, dass vermöge (29) die Risikoprämie vom Zinssatz selbst abhängig ist und insofern die oben (siehe das Korollar) errungene Trennung von Zeit–Zins–Effekten von Effekten der Risikobewertung teilweise wieder rückgängig gemacht wird. Sodann ist zu fragen, ob der Ansatz (27) überhaupt sachgerecht sein kann, wenn man auf eine empirisch gehaltvolle Zuordnung von (einzelnen Teilen der) Risikobewertung zu Zeitabschnitten hinaus will.

Bei näherem Hinsehen ist schon die Wahl von $r_{0,t}$ als Ausgangsgröße für den Aufschlag einer zeitlich differenzierenden Risikoprämie in Frage zu stellen: Der Zinssatz $r_{0,t}$ wird erst durch die Beziehung $B(0,t) = \frac{1}{(1+r_{0,r})^t}$ aus der *Preis*angabe $B(0,t)$ *definiert*; die Verrechnung pro rata temporis erfolgt auf der Basis einer Zinseszinssystematik ohne empirische Entsprechung: Auf diese Weise wird lediglich Kommensurabilität zu anderen Zinsgrößen hergestellt. Genauso berechtigt wäre eine lineare Verrechnung $\bar{r}_{0,t} = \frac{1-B(0,t)}{t}$ (wie sie im Übrigen für unterjährige Zinsperioden sogar Usance–gemäß ist). Eine empirisch gehaltvolle Zurechnung im Rahmen der Zinseszinssystematik wäre hingegen auf der Basis des Terminzinssatzkonzeptes vorzunehmen:

$$B(0,t) = \left(\frac{1}{1 + r_0}\right) \left(\frac{1}{1 + {}_0r_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{1 + {}_0r_{t-1}}\right) \tag{30}$$

bzw.

$$(1+r_{0,t})^t = \prod_{\theta=0}^{t-1}(1+\,_0r_\theta) \tag{31}$$

Hierdurch setzt sich die (Spot–)Verzinsung über die lange Periode $[0,t]$ aus sukzessiv abgeschlossenen Termingeschäften über jeweils kurze Perioden zusammen; beide Geschäfte sind unter Arbitrage–Freiheit wirtschaftlich gleichwertig.

Eine Verrechnung von Risikoprämien auf Zinssätze, die eine empirisch gerechtfertigte Verteilung der Risiko–Bewertung auf Perioden widerspiegeln sollte, könnte dann in der Form

$$\frac{1}{\prod_{\theta=0}^{t-1}(1+\,_0r_\theta+\bar{z}_\theta)} = B(0,t)\left[1+\operatorname{cov}\left(R_t,\frac{X_t}{E(X_t)}\right)\right] \tag{32}$$

mit den Perioden–bezogenen Risikoprämien $\bar{z}_\theta\,(\theta=0,\ldots,t-1)$ vorliegen. Als isolierte Bedingung für den Zeitpunkt $t$ ist (32) natürlich ohne Schwierigkeiten mit $t-1$ Freiheitsgraden zu erfüllen, wobei allerdings offen ist, ob das Ergebnis irgendeine empirische Relevanz hätte. Einer näheren Inspektion wert ist die simultane (sukzessiv durchführbare) Lösung des folgenden Systems:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\,_0r_0+\bar{z}_0} &= B(0,1)\left[1+\operatorname{cov}\left(R_1,\frac{X_1}{E(X_1)}\right)\right]\\
\left(\frac{1}{1+\,_0r_0+\bar{z}_0}\right)\left(\frac{1}{1+\,_0r_1+\bar{z}_1}\right) &= B(0,2)\left[1+\operatorname{cov}\left(R_2,\frac{X_2}{E(X_2)}\right)\right]\\
&\vdots\\
\frac{1}{\prod_{\theta=0}^{t-1}(1+\,_0r_\theta+\bar{z}_\theta)} &= B(0,t)\left[1+\operatorname{cov}\left(R_t,\frac{X_t}{E(X_t)}\right)\right]
\end{aligned} \tag{33}$$

Für die Lösung gilt allgemein $(t\geq 1)$

$$B(0,t)\left[1+\operatorname{cov}\left(R_t,\frac{X_t}{E(X_t)}\right)\right]\cdot\frac{1}{1+\,_0r_t+\bar{z}_t} = B(0,t+1)\left[1+\operatorname{cov}\left(R_{t+1},\frac{X_{t+1}}{E(X_{t+1})}\right)\right]$$

d. h.

$$\bar{z}_t = (1+\,_0r_t)\left[\frac{1+\operatorname{cov}\left(R_t,\frac{X_t}{E(X_t)}\right)}{1+\operatorname{cov}\left(R_{t+1},\frac{X_{t+1}}{E(X_{t+1})}\right)}-1\right] \tag{34}$$

für $t \geq 1$ und

$$\bar{z}_0 = (1 + {}_0r_0) \left[ \frac{1}{1 + \operatorname{cov}\left(R_1, \frac{X_1}{E(X_1)}\right)} - 1 \right] \tag{35}$$

Der Risikozuschlag ergibt sich aus dem Aufzinsungsfaktor der Periode auf der Basis des Terminzinssatzes durch Multiplikation mit einem Term, der den *Zuwachs an wertmäßigem Risiko* (in Einheiten des Erwartungswertes) widerspiegelt, den der nächste Cashflow gegenüber dem laufenden Cashflow aufweist. Die Risikoprämie berücksichtigt daher das *Mehr* an Risiko. Es erscheint uns naheliegend, die folgende Funktion unter der Bezeichnung *inkrementale Risikoprämienstruktur des Cashflow–Prozesses* einzuführen:

$$IR_t = \begin{cases} \frac{1}{1+\operatorname{cov}\left(R_1, \frac{X_1}{E(X_1)}\right)} - 1 & \text{für} \quad t = 0 \\ \\ \frac{1+\operatorname{cov}\left(R_t, \frac{X_t}{E(X_t)}\right)}{1+\operatorname{cov}\left(R_{t+1}, \frac{X_{t+1}}{E(X_{t+1})}\right)} - 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{36}$$

Die Risikoprämien ergeben sich dann zu

$$\bar{z}_t = (1 + {}_0r_t) \cdot IR_t \qquad t = 0, 1, \ldots$$

Die Unternehmensbewertung mit Hilfe Risiko–angepasster Diskontierung verläuft dann nach dem folgenden Muster: Aus dem Cashflow–Prozess werden zunächst die Erwartungswerte $E(X_1), \ldots, E(X_T)$ abgeleitet; anschließend ermittelt man die inkrementale Risikoprämienstruktur $IR_0, \ldots, IR_{T-1}$ und mit Hilfe der Terminzinssätze ${}_0r_0$, ${}_0r_1, \ldots$ , ${}_0r_{T-1}$ die Risikoprämie, wie oben dargestellt. Der Unternehmenswert errechnet sich dann zu

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{E(X_t)}{(1 + {}_0r_0 + \bar{z}_0) \ldots (1 + {}_0r_{t-1} + \bar{z}_{t-1})} \tag{37}$$

In der nachfolgenden Tabelle 3, S. 17, sind die inkrementalen Risikoprämienstrukturen der Beispiel–Cashflow-Prozesse zusammengestellt, wobei bezüglich der Marktbewertungsgröße $f(t)$ von der Zeit–unabhängigen Variante $f(t) = \bar{f}$ ausgegangen wird.

Bemerkenswert ist vor allem, dass in drei Fällen (additiv wachsend, unabhängig stationär (additiv und multiplikativ)) die Risikoprämie nur im Zinssatz der ersten Periode zu verrechnen ist, Risikoprämien späterer Perioden sind gleich null; in den beiden abhängig stationären Fällen sinkt die Risikoprämie exponentiell auf null. Hier wird ganz deutlich, dass die Risikoprämie inkrementellen Charakter hat, nicht aber als Indikator für eine Verteilung von Risiken über die Zeit interpretiert werden darf.[12]

Tabelle 3: Inkrementale Risikoprämienstruktur verschiedener Cashflow–Prozesse

| | Additiv | Multiplikativ |
|---|---|---|
| wachsend | $IR_t = \begin{cases} \frac{\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}}{E(X_1) - \bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}} & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ | $IR_t = e^{\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}} - 1$ |
| unabhängig/ stationär | $IR_t = \begin{cases} \frac{\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}}{E(X_1) - \bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}} & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ | $IR_t = \begin{cases} e^{\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}} - 1 & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| abhängig/ stationär | $IR_t = \frac{\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot e^{-\alpha t} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}}{E(X) - \bar{f}^T \cdot \bar{\sigma} \frac{1 - e^{-\alpha(t+1)}}{\alpha}}$ | $IR_t = e^{\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot e^{-\alpha t} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}} - 1$ |

## 4. Auflösung des Risikos im Zeitablauf

Die Darlegungen in Abschnitt 3 haben deutlich gemacht, dass eine Verrechnung von Risiko auf Zeitperioden über Risikoprämien im Zinssatz nicht adäquat ist. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist es aber möglich, im Rahmen der Sicherheitsäquivalente sinnvoll über die Auflösung von Risiko im Zeitablauf zu reden und eine sinnvolle Zuordnung von bewerteten Risiken zu Perioden vorzunehmen.

Der im zukünftigen Zeitpunkt $\tau$ anfallende Cashflow $X_\tau$ lässt sich nämlich auf die folgende Weise zerlegen:

$$X_\tau = E(X_\tau) + \{E(X_\tau|\mathcal{A}_1) - E(X_\tau)\} + \{E(X_\tau|\mathcal{A}_2) - E(X_\tau|\mathcal{A}_1)\} + \ldots$$
$$\ldots + \{X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\tau-1})\} \tag{38}$$

Dabei ist $E(X_\tau)$ sofort, d. h. im Zeitpunkt $t = 0$, die Komponente $E(X_\tau|\mathcal{A}_t) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})$ im Zeitpunkt $t \geq 1$ bekannt (technisch gesprochen: $\mathcal{A}_t$–messbar); d. h. die einzelnen Komponenten der Darstellung (38) werden der Reihe nach in den Zeitpunkten $t = 1, \ldots, \tau$ bekannt. Wenn man das Risiko des Zahlungsstroms $X_\tau$ an der Varianz misst, so ergibt sich folgende additive Zerlegung des Risikos [13] [14] in die Varianten der Komponenten von (38):

$$\text{var}(X_\tau) = \sum_{\tau=1}^{\tau} \text{var}\big(E(X_\tau|\mathcal{A}_t) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})\big) \tag{39}$$

Das Gesamtrisiko der Zahlung $X_\tau$ im Zeitpunkt $\tau$ kann also in eine Summe von Risiken zerlegt werden, die der Reihe nach in den Zeitpunkten vor $\tau$ bekannt, d. h. „aufgelöst“ werden. Führen wir als Abkürzung für diese Teilrisiken das Symbol

$$TR_{t,\tau} = E(X_\tau|\mathcal{A}_t) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1}) \tag{40}$$

ein, so gilt

$$X_\tau = E(X_\tau) + \sum_{t=1}^{\tau} TR_{t,\tau} \tag{41}$$

und

$$\text{var}(X_\tau) = \sum_{t=1}^{\tau} \text{var}(TR_{t,\tau}) \tag{42}$$

Man kann sich nun die Frage stellen, wie die Teilrisiken in die Gesamtbewertung des Bewertungsobjekts eingehen. Wenn wir aus Gleichung (19) nur den Summanden des Zeitpunktes $\tau$ herausgreifen, so gilt

$$\frac{1}{(1+r_{0,\tau})^\tau} \cdot \left\{ E(X_\tau) + \sum_{t=1}^{\tau} E(R_\tau \cdot TR_{t,\tau}) \right\} \tag{43}$$

für den Betrag, den der Cashflow $X_\tau$ im Zeitpunkt $\tau$ zum Gesamtwert des Bewertungsobjekts beiträgt. (43) liefert damit eine „Erklärung“ für den Risikoabschlag in (20), der zur Ermittlung des Sicherheitsäquivalents vom Erwartungswert vorgenommen werden muss: Er ergibt sich als Summe von Risikoabschlägen, die für die einzelnen, Zeit–bezogenen Teilrisiken $TR_{t,\tau}$ vorzunehmen sind; denn es gilt

$$\text{cov}(R_\tau, X_\tau) = \sum_{t=1}^{\tau} E(R_\tau \cdot TR_{t,\tau}) = \sum_{t=1}^{\tau} \text{cov}(R_\tau, TR_{t,\tau}) \tag{44}$$

Die Wertbeiträge der Teilrisiken lassen sich nun ebenfalls ermitteln (vgl. auch (21)):

$$E(R_\tau \cdot TR_{t,\tau}) = E\left\{TR_{t,\tau} \cdot E(R_\tau|\mathcal{A}_t)\right\} = E\left\{ TR_{t,\tau} \cdot R_t \cdot \left(\frac{1+r_{t,\tau}}{1+_0 r_{t,\tau}}\right)^{\tau-t} \right\}$$

$$= E\left\{ R_t \left\{ TR_{t,\tau} \left[\frac{1+r_{t,\tau}}{1+_0 r_{t,\tau}}\right]^{\tau-t} \right\}\right\}$$

Der Wertbeitrag des in $t < \tau$ bekannt werdenden Teilrisikos $TR_{t,\tau}$ des in $\tau$ fälligen Cashflows $X_\tau$ wird wie der eines in $t$ fälligen und gezahlten Risikos ermittelt, allerdings mit einer Korrektur, die die Möglichkeit einer Veränderung des Spotzinssatzes (für die Periode $[t, \tau]$) gegenüber dem Terminzinssatz (für dieselbe Periode) berücksichtigt. Sieht man wie bisher schon von Zinsunsicherheiten ab, gilt für das Sicherheitsäquivalent der in $\tau$ fälligen Zahlung $X_\tau$ (man beachte die gegenüber (44) veränderte Zuordnung der Indizes):

$$E(X_\tau) + \sum_{t=1}^{\tau} \operatorname{cov}(R_t, TR_{t,\tau}) \tag{45}$$

In (45) kommt die Möglichkeit zum Ausdruck, Teilrisiken, die in $t < \tau$ bekannt werden, aber erst in $\tau$ zur Auszahlung kommen, gleichwohl mit der für den Zeitpunkt $t$ des Bekanntwerdens „zuständigen" Risiko–Bewertungsfaktors zu bewerten (gewissermaßen eine „Ursachen–bezogene" Risikoadustierung). Wir wollen diese Überlegungen an den oben entwickelten Beispielen verdeutlichen, indem wir die betreffenden Teilrisiken in einer tabellarischen Übersicht zusammenstellen:[15]

Tabelle 4: Auflösung des Risikos im Zeitablauf

| | Additiv | Multiplikativ |
|---|---|---|
| wachsend | $TR_{t,\tau} = X_t - X_{t-1} - E(X_1)$ | $TR_{t,\tau} = (1+g)^{\tau-t}\big(X_t - (1+g)\cdot X_{t-1}\big)$ |
| unabhängig/ stationär | $TR_{t,\tau} = \begin{cases} X_\tau - E(X) & \text{für } t=\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ | $TR_{t,\tau} = \begin{cases} X_\tau - E(X) & \text{für } t=\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| abhängig/ stationär | $TR_{t,\tau} = e^{-\alpha(\tau-t)}\big(X_t - e^{-\alpha}X_{t-1} - E(X)(1-e^{-\alpha})\big)$ | nicht ausgeführt |

Je nach Natur des Cashflow–Prozesses löst sich ausweislich der Tabelle 4 das Risiko in unterschiedlicher Weise auf; sind die Realisationen zum Beispiel unabhängig, so löst sich das Risiko erst bei Eintritt der Zahlung „schlagartig" auf, während in den anderen Fällen aus der Höhe der laufenden Zahlung ein verbesserter Rückschluss auf die mutmaßliche Höhe der in Rede stehenden zukünftigen Zahlung gezogen werden kann. Im Falle additiven Wachstums kann man von gleichmäßiger Auflösung sprechen, während bei multiplikativem Wachstum eine exponentielle Komponente bei der Risikoauflösung eine Rolle spielt (der multiplikative stationär abhängige Fall wurde aus Gründen der Komplexität nicht ausgeführt). Ein Zusammenhang mit den Risikoprämien des vorigen Abschnitts lässt sich allerdings nicht herstellen.

## II. Der Risikoverbund-Ansatz

Nach der ausführlichen Analyse des Separationsansatzes, der auf der Annahme von Spanning in einem ausdifferenzierten Finanzmarktkonzept ausging, soll hier dargestellt und erläutert werden, warum eine Marktbewertung ohne diese Annahme im Allgemeinen nicht mehr möglich ist und in welche Richtung man bei sonst gleichen Verhältnissen geführt wird. Konkrete Ergebnisse können dazu bisher lediglich für den Fall nur zweier Zeitpunkte oder weiterer Einschränkungen in den zulässigen Finanzmarkttransaktionen und bei Annahme von Präferenzen, die nur an Erwartungswert und Varianz der unsicheren Zielgröße anknüpfen, abgeleitet werden. Wenn wir zur Entwicklung unserer Überlegungen auf die allgemeinen Konzepte und die Notation von Abschnitt B II zurückgreifen, so müssen wir wie folgt spezifizieren:

$$c_0(x,y) = -x_0^T \cdot P_0 - y_0 \tag{46}$$

$$c_1(x,y) = x_0^T \cdot P_1 + (1+r_f) \cdot y_0 \tag{47}$$

da die Transaktionsmöglichkeiten am Kapitalmarkt sich auf eine statische Portfoliobildung $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine risikofreie Anlage $y_0 \in \mathbb{R}$ beschränken. Ohne weitere Einschränkungen ergibt sich dann

$$D \;=\; \mathbb{R}^{n+1}$$

Der erwartete Konsumnutzen aus dem Konsumplan $(z_0, z_1)$ wird durch

$$\varphi\big(z_0, E(z_1)\,,\; \frac{1}{2}\,\mathrm{var}(z_1)\big)$$

angegeben, wobei die partiellen Ableitungen folgende Vorzeichen haben:

$$\partial_0\varphi > 0\,,\; \partial_1\varphi > 0\,,\; \partial_2\varphi < 0$$

Zunächst wollen wir allgemein die zu (11) gehörenden Portfolio–Positionen bestimmen, d. h.

$$U(Y_0,Y_1) = \max\big\{\varphi(c_0(x,y)+Y_0\,,\; E(c_1(x,y)+Y_1\,,\; \frac{1}{2}\,\mathrm{var}\big(c_1(x,y)+Y_1\big)\big|x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}\big\} \tag{48}$$

näher untersuchen. Bekannte Resultate der Portfolio–Selection–Theorie lassen folgende Aussage zu[16]

$$x = \alpha \cdot x_{\mathrm{Tobin}} - x_Y \tag{49}$$

mit dem Tobin–Fonds[17]

$$x_{\text{Tobin}} = C^{-1} \cdot \left\{ E(P_1) - (1 + r_f)\, P_0 \right\},$$

und dem durch $Y_1$ induzierten Hedge–Portfolio

$$x_Y = C^{-1} \cdot \mathrm{COV}(P_1, Y_1)$$

und einem individuell zu bestimmenden Skalenfaktor $\alpha$, der die optimale Investition in den Tobin–Fonds regelt. Das Hedge–Portfolio $x_Y$ minimiert die Varianz $\mathrm{var}(x^T \cdot P_1 - Y_1)$ durch Variation von $x$; d. h.

$$x_Y = \arg\min \left\{ \mathrm{var}(x^T \cdot P_1 - Y_1) \middle| x \in \mathbb{R}^n \right\} \tag{50}$$

Wenn wir die zugehörigen Endvermögenspositionen der verschiedenen Portfolios mit

$$w_{\text{Tobin}} = x^T_{\text{Tobin}} \cdot P_1 \tag{51}$$

$$w_Y = x^T_Y \cdot P_1 \tag{52}$$

bezeichnen, dann gilt für den optimalen Konsumplan

$$c_0 = Y_0 - \alpha \cdot \pi(w_{\text{Tobin}}) + \pi(w_Y) - y_0 \tag{53}$$

$$c_1 = Y_1 - w_Y + \alpha \cdot w_{\text{Tobin}} + (1 + r_f) \cdot y_0 \tag{54}$$

wobei wir allgemein die Notation des Preisfunktionals $\pi(w) = E(Q_1 \cdot w) = x^T \cdot P_0$ für $w = x^T \cdot P_1$ verwenden.

Aus (53) und (54) lassen sich zunächst qualitative Einsichten hinsichtlich der Bewertungssituation gewinnen. Dazu betrachten wir die Situation des Käufers vor und nach der geplanten Transaktion (die Situation des Verkäufers ergibt sich analog; zur Entlastung der Notation setzen wir hier und im Folgenden $X_0 = 0$).

Tabelle 5: Konsumpläne des Käufers

| | $c_0$ | $c_1$ |
|---|---|---|
| Vorher | $-\alpha_V \cdot \pi(w_{\text{Tobin}}) + \pi(w_h) - y_{0,V}$ | $\alpha_V \cdot w_{\text{Tobin}} + (h - w_h) + (1 + r_f) \cdot y_{0,V}$ |
| Nachher | $-V_0 - \alpha_N\, \pi(w_{\text{Tobin}}) + \pi(w_h)$ $+\pi(w_X) - y_{0,N}$ | $\alpha_N \cdot w_{\text{Tobin}} + (h - w_h) + (X - w_X)$ $+(1 + r_f) \cdot y_{0,N}$ |

Zur Erläuterung sei zunächst nachgereicht, dass $w_h$ das Endvermögen des zum nicht–marktfähigen Einkommen $h$ in Analogie zu (50) gebildeten Hedge–Portfolios $x_h$ und $w_X$ das Endvermögen des entsprechenden zum Bewertungsobjekt $X$ gehörenden Hedge–Portfolios $x_X$ ist. Die erste Zeile („Vorher") zeigt, dass die optimale Disposition in einem Anteil am Tobin–Fonds und einer Risiko–freien Anlage besteht, aber ergänzt um einen Hedge–Term, der das Risiko des nicht–marktfähigen Einkommens $h$ soweit wie möglich hedgt. In der zweiten Zeile („Nachher") wird deutlich, dass nach bzw. durch Erwerb des Bewertungsobjektes zusätzlich Hedging–Bedarf entsteht. Der Hedging–Ertrag in Höhe von $\pi(w_X)$ hilft zwar bei der Finanzierung des Kaufpreises $V_0$, aber in der Differenz $X - w_X$ verbleibt Risiko, dessen individueller Nutzenbeitrag sich ebenfalls in der Bewertung $V_0$ niederschlagen muss. Besonders deutlich wird das bei der Untersuchung des Spezialfalls, in dem doch Spanning gegeben ist, dann gilt $X = w_X$ und ein Kaufpreis $V_0 \leq \pi(w_X)$ stellt den Käufer nicht schlechter als vorher. Falls aber ein nicht hedgbares Restrisiko $X - w_X$ verbleibt, ist die notwendige Relation von $V_0$ zu $\pi(w_X)$ Präferenz–abhängig. Äquivalent dazu kann man die Frage stellen, welcher sichere Betrag in der zweiten Zeile an Stelle von $X - w_X$ anzusetzen wäre, um Nutzengleichheit mit der Situation der ersten Zeile zu erzielen; das wäre die Frage nach dem Sicherheitsäquivalent.

Damit ist grundsätzlich geklärt, dass fehlende Spanning–Möglichkeiten zu Präferenz–Abhängigkeit des Unternehmenswertes führt. Wir wollen nun noch ein wenig weiter spezialisieren, um einmal konkret den angemessenen Unternehmenswert in dem gewählten Kontext zu bestimmen. Dazu wählen wir das so genannte hybride Modell, d. h. eine Kombination von exponentiellen Nutzenfunktionen und normalverteilten Wertgrößen; wir definieren die Funktion („Schadensfunktion")

$$v(w) = \exp\{-a \cdot w\} \quad \text{mit} \quad v'(w) = -\frac{1}{a}\, v(w) \tag{55}$$

wobei $a$ die absolute Risikoaversion des betrachteten Investors ist. Als Nutzenfunktion setzen wir an

$$u(c_0, c_1) = -v(c_0) - \delta \cdot v(c_1) \tag{56}$$

mit $\delta > 0$ (zu interpretieren als Zeitpräferenzparameter).

Der erwartete Nutzen ist dann durch

$$\varphi = -v(c_0) - \delta \cdot v\left(E(c_1) - \frac{1}{2}\, a \cdot \mathrm{var}(c_1)\right) \tag{57}$$

gegeben. Es ergibt sich nach leichter Rechnung für die respektiven Anteile am Tobin–Fonds

$$\alpha_V = \frac{a^{-1} \cdot \left\{\frac{1}{1+r_f} \cdot E(w_{\text{Tobin}}) - \pi(w_{\text{Tobin}})\right\} - \mathrm{cov}(w_{\text{Tobin}}, h - w_h)}{\mathrm{var}(w_{\text{Tobin}})} \quad \text{(vorher)} \tag{58}$$

$$\alpha_N = \alpha_V - \frac{\mathrm{cov}(w_{\text{Tobin}}, X - w_X)}{\mathrm{var}(w_{\text{Tobin}})} \quad \text{(nachher)} \tag{59}$$

Die Situation wird nun dadurch vereinfacht, dass die beiden in (58) bzw. (59) auftretenden Kovarianzterme verschwinden: Die Minimierung gemäß (50) entspricht nämlich einer multivariaten Kleinst–Quadrate–Regression, bei der der Cashflow $Y$ (bzw. $X$ und $h$) bestmöglich durch Marktinstrumente „erklärt" wird; das „Residuum" $Y - w_Y$ ist daher mit den Marktpreisen $P_1$ der Wertpapiere nicht korreliert (ein Beweis befindet sich im Anhang), also auch nicht mit dem Tobin–Fonds. Daher gilt allgemein

$$\alpha_V = \alpha_N = a^{-1} \cdot \frac{\frac{1}{1+r_f} E(w_{\text{Tobin}}) - \pi(w_{\text{Tobin}})}{\text{var}(w_{\text{Tobin}})} \tag{60}$$

Der Unternehmenskauf erzwingt daher eine Portfolio–Anpassung insofern, als ein zusätzliches Hedge–Portfolio zu bilden ist, der Anteil am Tobin–Fonds bleibt jedoch konstant. Im Anhang wird der Beweis geführt, dass der Unternehmenswert aus Sicht des Käufers (Verkäufers) durch die nachfolgende Beziehung bestimmt wird:

$$V = \pi(w_X) + \frac{1}{1+r_f} \left\{ E(X - w_X) - \frac{1}{2} a \cdot \left[ \text{var}\big((X - w_X) + (h - w_h)\big) - \text{var}(h - w_h) \right] \right\} \tag{61}$$

Diese Formel (61) für den Unternehmenswert ist gut nachvollziehbar: Er setzt sich zusammen aus dem Marktwert des Portfolios, das das Bewertungsobjekt unter Varianzgesichtspunkten möglichst gut approximiert, und aus einem diskontierten Sicherheitsäquivalent der Restgröße, d. h. des Teils des Bewertungsobjektes der nicht durch Marktobjekte duplizierbar ist (gewissermaßen „unsystematisches Risiko"). Das Sicherheitsäquivalent knüpft dabei an der unterstellten exponentiellen Nutzenfunktion an, ohne wirklich ein klassisches Sicherheitsäquivalent im Sinne der Erwartungsnutzentheorie zu sein: Nicht die Varianz der Restgröße, sondern eine Varianz*differenz* stellt die Risikokorrektur dar, die Differenz der Varianz der Restgröße und der Varianz des nicht hedgbaren sonstigen exogenen Einkommens. Nur in jenem Fall, in dem diese Varianz verschwindet, liegt ein Sicherheitsäquivalent im Sinne der Erwartungsnutzentheorie vor. Der Spezialfall des Spanning ergibt sich unmittelbar aus der Feststellung, dass kein Restrisiko verbleibt, wenn das Bewertungsobjekt vollständig dupliziert werden kann, der Risikoterm in (61) also wegfällt.

Die (unter den zu Grunde liegenden Bedingungen korrekte) Formel für den Unternehmenswert zeigt:

– Wenn kein Spanning gegeben ist, muss im Allgemeinen bei der Unternehmensbewertung auf Präferenzen zurückgegriffen werden.

– Wenn alle Risiko–Allokationsmöglichkeiten des Marktes berücksichtigt werden, kommen in der korrekten Bewertung sowohl Markt–induzierte als auch Präferenz–induzierte Komponenten zum Ausdruck (insbesondere ist eine rein individualistische Bewertung nicht angebracht).

– Wenn der Investor über anderes nicht marktfähiges Einkommen verfügt (z. B. Einkommen aus einem anderen Unternehmen), spielt auch dieses Einkommen über die Kovarianz mit dem Bewertungsobjekt eine Rolle, soweit es den Wert des Bewertungsobjektes aus Investorensicht betrifft.

Die Verallgemeinerung von (61) auf mehrere Perioden ist möglich und recht einfach, wenn man ausschließlich bestimmte Portfolio–Strategien zulässt (bzw. alle anderen ausschließt): Transaktionen im Zero-Bonds nur im Zeitpunkt $t = 0$ und Transaktionen in den übrigen Wertpapieren nur in $t = 0$ („Kauf") und in jeweils einem festen Zeitpunkt $t > 0$ („Verkauf"); insbesondere dürfen keine bedingten Strategien zugelassen werden. Der Beweis ist völlig analog zum im Anhang geführten zu gestalten. Durch diese Annahmen ist gewährleistet, dass die Cashflows der einzelnen Perioden jeweils unabhängig voneinander Gegenstand von Hedging–Überlegungen sind. Wir kommen auf diesen Wertansatz im nachfolgenden Abschnitt, der dem so genannten „semi–subjektiven" Ansatz gewidmet ist, zurück.

## III. Der „semi–subjektive " Ansatz

Kürzlich ist unter der Bezeichnung „semi–subjektiv" von Kruschwitz und Löffler[18] ein Bewertungsansatz vorgestellt worden. Dieser Ansatz kann im Ergebnis – wenn man von der Verteilungsprämisse, die wir gemacht haben, absieht – aus der Mehr–Periodenversion von (61) gewonnen werden; sie lautet

$$\begin{aligned} V \;=\; & \sum_{t=1}^{T} \pi_\tau(w_{X_\tau}) + \sum_{t=1}^{T} B(0,t)\Big\{E(X_t - w_{X_t}) \\ & -\frac{1}{2}\,a\Big[\mathrm{var}\big((X_t - w_{X_t}) + (h_t - w_{h_t})\big) - \mathrm{var}(h_t - w_{h_t})\Big]\Big\} \end{aligned} \qquad (62)$$

Hierbei sind die einzelnen, nun Zeit–indizierten, Größen in Analogie zu denen in (61) zu verstehen. Das Ergebnis des semi–subjektiven Ansatzes ergibt sich nun unter zwei Prämissen:

– Transaktion in riskanten Wertpapieren sind unzulässig.

– Das sonstige nicht marktfähige Einkommen $h_t$ ist mit dem Bewertungsobjekt unkorreliert.

Die erste Prämisse impliziert, dass der Markt–bestimmte erste Summand in (62) verschwindet, die zweite reduziert den Varianzterm auf die Varianz des Bewertungsobjektes.

Daher folgt

$$V = \sum_{t=1}^{T} B(0,t) \Big\{ E(X_t) - \frac{1}{2}\, a \cdot \mathrm{var}(X_t) \Big\} \tag{63}$$

was unter der von uns gemachten Verteilungsprämisse mit dem Ergebnis von Kruschwitz und Löffler übereinstimmt[19]. Die hier vorgenommene Herleitung ist insofern aber auch allgemeiner als die bei Kruschwitz und Löffler, als wir weiteres nicht marktfähiges Einkommen zulassen, das allerdings stochastisch unabhängig vom Bewertungsobjekt sein muss[20].

### IV. Der individualistische Ansatz

Im Rahmen des hier gewählten Zugangs lässt sich ein individualistischer Bewertungsansatz nur dann aus den Bedingungen (12) bzw. (13) unter Rückgriff auf (11) gewinnen, wenn man die Menge der zulässigen Finanzmarkttransaktionen $D$ als leer unterstellt. Dass in diesem Zusammenhang Finanzmarktkonditionen wie die Risiko–freien Zinssätze nicht Bestandteil einer Bewertungsformel sein können, liegt auf der Hand. Allerdings wollen wir die Debatte[21] darüber, ob sich (12) bzw. (13) auf der Basis Perioden–bezogener Sicherheitsäquivalente reformulieren lässt, nicht aufgreifen, der Stand der in diesem Beitrag entwickelten Überlegungen bietet dazu keinerlei Anlass.

## D. Schlussfolgerungen

Der Wert eines Unternehmens als Kauf–Verkaufs–Preisgrenze und die Methoden seiner Ermittlung hängen neben dem unterstellten Entscheidungsverhalten bei Risiko vor allem von den einbezogenen (und vom Akteur in Betracht gezogenen) Allokationsmöglichkeiten an den Finanzmärkten ab, wobei die *Risiko*allokationsmöglichkeiten im Vordergrund stehen. Stehen Märkte zur Verfügung, die eine komplette Duplikation des Cashflow–Prozesses durch Portfolio–Strategien erlauben (man spricht in der Literatur von „spanning“) ist der Unternehmenswert vollständig aus Marktpreisen ableitbar und hängt ansonsten nur von den Eigenschaften des Cashflow–Prozesses ab. In diesem Fall gibt es wohldefinierte Perioden–bezogene Sicherheitsäquivalente oder wohldefinierte Risikoprämien für den Diskontierungszinssatz; es ist dabei allerdings deutlich geworden, dass die Risikoprämien Perioden–spezifisch auf die Terminzinssätze, nicht aber auf die jeweiligen Spotzinssätze zu beziehen sind. In der Literatur verbreitete Mutmaßungen über den Zusammenhang von Risikoprämien und Zeit verlieren dabei ihre Grundlage. Das ebenfalls umstrittene Konzept der Auflösung von Risiko im Zeitablauf wurde in diesem Beitrag auf eine präzise begriffliche Grundlage gestellt, auf der sich einerseits affirmativ ergab, dass die Art der Auflösung mit der Abhängigkeitsstruktur der Cashflows zusammenhängt – wenn auch vielleicht anders, als in der Literatur gemutmaßt –, andererseits aber zurückweisend, da keine Beziehung zwischen dieser Auflösung und den erwähnten Risikoprämien erkennbar ist.

Wenn die Duplikation durch Marktinstrumente nicht (vollständig) gelingt, kann keine einfache und zugleich theoretisch korrekte Bewertungsmethode mehr angegeben werden. Unter Einschränkungen bezüglich der Präferenzen des Akteurs, der Wahrscheinlichkeitsverteilungen und der in Betracht gezogenen Portfolio–Strategien gelingt allerdings eine Zerlegung des Bewertungsproblems in zwei Komponenten (so genannter „Risikoverbundansatz"): Die erste Komponente nimmt eine Marktbewertung derjenigen Teile der Cashflows vor, die (maximal) duplizierbar sind, während die zweite Komponente Präferenz–gesteuert das Restrisiko bewertet. Allerdings zeigt sich, dass Sicherheitsäquivalente des Bewertungsobjektes im Sinne klassischer Entscheidungstheorie nicht die geeigneten Anknüpfungspunkte für die Wertzumessung sind, sobald der Akteur noch über weiteres nicht marktfähiges Einkommen verfügen sollte. Insbesondere sind in diesem Kontext die Unternehmenswerte für Käufer und Verkäufer im Allgemeinen unterschiedlich, nicht nur, weil sie unterschiedliche Risikoaversionen haben könnten, sondern auch, weil das soeben angesprochene sonstige Einkommen in einem für beide Kontraktpartner unterschiedlichem Korrelationsverhältnis zum Bewertungsobjekt stehen mag. Akzeptiert man die Prämissen des Risikoverbundansatzes als erfüllt, könnte das vorgestellte Verfahren sich als praktikable Möglichkeit erweisen, Unternehmenswerte abzuschätzen, wenn die reine Marktbewertung nicht gelingt; hier sieht der Verfasser Vorteile gegenüber dem semi–subjektiven Ansatz.

Fragen, wie die nach dem Verhältnis von (wie auch immer theoretisch begründbar) Sicherheitsäquivalentmethode und Risikoprämienverfahren sowie nach der Präzisierung und ökonomischen Bedeutung des „sich im Zeitablauf auflösenden Risikos", glaubt der Verfasser soweit geklärt zu haben, dass eine weitere Debatte nicht mehr als marginale Beiträge zu liefern im Stande sein wird.

# Anhang

# A. Ein Rahmenwerk für Beispiele zur finanzmarktorientierten Unternehmensbewertung

## I. Allgemeines

Mit $\{w_t | t \in \mathbb{R}_+\}$ bezeichnen wir einen $m$–dimensionalen Vektor von unabhängigen Wiener–Prozessen ($m \geq 1$). Diese Prozesse treiben als Risikoquellen die gesamte Unsicherheit im betrachteten Ausschnitt der Ökonomie. Durch das Symbol $\| \; \|$ wird die Euklidische Norm im $m$–dimensionalen reellen Vektorraum dargestellt. Die im laufenden Text eingeführten weiteren Bezeichnungen werden auch in diesem Anhang verwendet.

## II. Der Risikobewertungsfaktor und der stochastische Diskontierungsfaktor

Den *Risikobewertungsfaktor* setzen wir wie folgt an:[22]

$$R_t = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \|s(t,\theta)\|^2 \cdot d\theta - \int\limits_0^t s(t,\theta)^T \cdot dw_\theta} \tag{64}$$

wobei $s(t,\theta)$ eine Funktion $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ und $\int\limits_0^t s(t,\theta)^T \cdot dw_\theta$ das entsprechende Itô–Integral bezüglich des (vektoriellen) Wiener–Prozesses $w_t$ sind.

Offensichtlich gilt $E(R_t) = 1$ und

$$E(R_\tau | \mathcal{A}_t) = R_t \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_t^\tau \left[ \|s(\tau,\theta)\|^2 - \|s(t,\theta)\|^2 \right] d\theta - \int\limits_t^\tau \big(s(\tau,\theta) - s(t,\theta)\big)^T \cdot dw_\theta \right\}$$

für $\tau \geq t$. Hinreichend dafür, dass $R_t$ ein Martingal ist, ist der Fall $s(t,\theta) = f(\theta)$, indem die „Gewichte“, mit denen die vergangenen Schocks $dw_\theta$ belegt werden, nicht vom Bewertungszeitpunkt $t$ abhängen. Diese Annahme macht $R_t$ zu einem Markov–Prozess. In jedem Fall ist $R_t$ logarithmisch–normalverteilt.

Durch Multiplikation der Zero–Bond–Preise $B(0,t)$ mit dem Risikobewertungsfaktor ergibt sich der *stochastische Diskontierungsfaktor*:

$$Q_t = B(0,t) \cdot R_t \tag{65}$$

und unter seiner Verwendung die Zinsstrukturdynamik

$$B(t,\tau) = E\left(\frac{Q_\tau}{Q_t}\,\middle|\,\mathcal{A}_t\right) = \frac{B(0,\tau)}{B(0,t)} \cdot E\left(\frac{R_\tau}{R_t}\,\middle|\,\mathcal{A}_t\right)$$

$$= \frac{B(0,\tau)}{B(0,t)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^\tau \left[\|s(\tau,\theta)\|^2 - \|s(t,\theta)\|^2\right] d\theta - \int_t^\tau \big(s(\tau,\theta) - s(t,\theta)\big)^T \cdot dw_\theta\right\}$$

Der Quotient $\frac{B(0,\tau)}{B(0,t)}$ ist der Diskontierungsfaktor $\left(\frac{1}{1+{}_0r_{t,\tau}}\right)^{\tau-t}$ auf der Basis des Terminzinssatzes ${}_0r_{t,\tau}$ für die Periode $[t,\tau]$. Falls $R_t$ ein Martingal ist, also insbesondere im Fall $s(t,\theta) = f(\theta)$, liegt daher ein deterministischer Zinsverlauf

$$B(t,\tau) = \frac{B(0,\tau)}{B(0,t)} = \left(\frac{1}{1+\ {}_0r_{t,\tau}}\right)^{\tau-t} \tag{66}$$

vor, wie er im Zusammenhang mit Unternehmensbewertungsfragen gewöhnlich unterstellt wird. Wir konzentrieren uns daher meist auf diesen Fall, in dem der Risikobewertungsfaktor die Gestalt

$$R_t = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \|f(\theta)\|^2 \cdot d\theta - \int_0^t f(\theta)^T \cdot dw_\tau} \tag{67}$$

aufweist.

Die Preise der Risiko–behafteten Wertpapiere ergeben sich dann konsistent durch Angabe von „Randbedingungen“, z. B. der folgenden Art:

$$P_{T,i} = P_{0,i} \cdot \exp\left\{\int_0^T a_i(\theta) \cdot d\theta + \int_0^T b_i(\theta)^T \cdot dw_\theta\right\} \tag{68}$$

wobei $a_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ und $b_i : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ geeignete Funktionen sind, die das Verhalten des Preises des $i$–ten Wertpapiers (insbesondere also seine Verteilung) am Horizont $T$ festlegen; der Preisprozess des $i$–ten Wertpapiers wird dann durch

$$P_{t,i} = E\left(\frac{Q_T}{Q_t} \cdot P_{T,i}\,\middle|\,\mathcal{A}_t\right) \tag{69}$$

fixiert. Im Wesentlichen ist dies die Konstellation, in der sich die Überlegungen vom Black–Scholes–Typ ergeben. Analog zu (69) können auch beliebige Derivate vom Europäischen Typ auf Wertpapiere mit Endwert (68) einbezogen werden.

## III. Einige Cashflow–Prozesse

Additive Variante (normalverteilt)

$$X_t = \mu(t) + \int_0^t \sigma(t,\theta)^T \cdot dw_\theta \tag{70}$$

Multiplikative Variante (logarithmisch normalverteilt)

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left\{ \mu(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma(t,\theta)\|^2 \cdot d\theta + \int_0^t \sigma(t,\theta)^T \cdot dw_\theta \right\} \tag{71}$$

| | Erwartungswert | Varianz |
|---|---|---|
| Additiv | $\mu(t)$ | $\int_0^t \|\sigma(t,\theta)\|^2 \cdot d\theta$ |
| Multiplikativ | $X_0 \cdot e^{\mu(t)}$ | $\left(X_0 \cdot e^{\mu(t)}\right)^2 \cdot \left[ e^{\int_0^t \|\sigma(t,\theta)\|^2 \cdot d\theta} - 1 \right]$ |

| | Kovarianz | Sicherheitsäquivalent |
|---|---|---|
| Additiv | $\int_0^t \left[\sigma(\tau,\theta)^T \cdot \sigma(t,\theta)\right] \cdot d\theta$ | $\mu(t) - \int_0^t s(t,\theta)^T \cdot \sigma(t,\theta) \cdot d\theta$ |
| Multiplikativ | $\left(X_0 \cdot e^{\frac{\mu(\tau)+\mu(t)}{2}}\right)^2 \cdot \left[ e^{\int_0^t \left[\sigma(\tau,\theta)^T \cdot \sigma(t,\theta)\right] \cdot d\theta} - 1 \right]$ | $X_0 \cdot e^{\mu(t) - \int_0^t s(t,\theta)^T \cdot \sigma(t,\theta) \cdot d\theta}$ |

Im additiven Fall wird also zur Ermittlung des Sicherheitsäquivalents ein Risikoabschlag in Höhe von $\int_0^t s(t,\theta)^T \cdot \sigma(t,\theta) \cdot d\theta$ *subtrahiert*, während im multiplikativen Fall vom Erwartungswert nach Risikoabschlag nur noch $e^{-\int_0^t s(t,\theta)^T \cdot \sigma(t,\theta) \cdot d\theta} \cdot 100$ *Prozent* übrig bleiben. Die Größe $\int_0^t s(t,\theta)^T \cdot \sigma(t,\theta) \cdot d\theta$ misst in beiden Fällen den Risiko*gleichlauf* von Cashflow und Risikobewertungsfaktor, d. h. das durch den Markt bewertete Risiko.

### 1. Wachsende Cashflows

Einfaches *additives Wachstum* der Cashflows kann durch

$$\mu(t) = \bar{\mu} \cdot t \quad \text{und} \quad \sigma(t,\theta) = \bar{\sigma} \tag{72}$$

d. h.

$$X_t = \bar{\mu} \cdot t + \bar{\sigma}^T \cdot w_t$$

bzw. die Differenzengleichung

$$X_t - X_{t-1} = \bar{\mu} + \bar{\sigma}^T \cdot (w_t - w_{t-1}) \tag{73}$$

modelliert werden. Einfaches *multiplikatives Wachstum* ergibt sich entsprechend zu

$$X_t = X_0 \cdot e^{\bar{\mu} \cdot t - \frac{1}{2} \|\bar{\sigma}\|^2 \cdot t + \bar{\sigma}^T \cdot w_t}$$

mit dem Entwicklungsgesetz

$$\frac{X_t}{X_{t-1}} = e^{\bar{\mu} - \frac{1}{2} \|\bar{\sigma}\|^2 + \bar{\sigma}^T \cdot (w_t - w_{t-1})} \tag{74}$$

wobei $g = e^{\bar{\mu}} - 1$ die Rolle einer erwarteten (zeitdiskreten) Wachstumsrate spielt:

$$X_t = X_{t-1} \cdot (1+g) \cdot e^{\bar{\sigma}^T \cdot (w_t - w_{t-1}) - \frac{1}{2} \|\bar{\sigma}\|^2} \tag{75}$$

Kombiniert mit dem einfachen Modell für den Risikobewertungsfaktor, das einen deterministischen Zinsverlauf erzwingt, nämlich

$$s(t, \theta) = f(\theta)$$

ergeben sich als Risikoabschlag

$$\text{additiv} \quad : \quad F(t)^T \cdot \bar{\sigma} \qquad \text{(subtraktiv)} \tag{76}$$

$$\text{multiplikativ} \quad : \quad e^{-F(t)^T \cdot \bar{\sigma}} \qquad \text{(prozentual)} \tag{77}$$

wobei $F(t) = \int\limits_0^t f(\theta) \cdot d\,\theta$ gesetzt wurde.

## 2. Stationäre Cashflows

*Unabhängig identisch* verteilte Cashflows erhält man durch die folgende Spezfikation:

$$\mu(t) = \bar{\mu} \qquad \sigma(t, \theta) = \begin{cases} \bar{\sigma} & \text{für } t-1 < \theta \leq t \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(t = 1, 2, \dots)$. In der additiven Variante hat man

$$X_t = \mu + \bar{\sigma}^T \cdot (w_t - w_{t-1}) \tag{78}$$

während

$$X_t = X_0 \cdot e^{\bar{\mu} - \frac{1}{2}\,\|\bar{\sigma}\|^2 + \bar{\sigma}^T \cdot (w_t - w_{t-1})} = X_0(1+g) \cdot e^{-\frac{1}{2}\,\|\bar{\sigma}\|^2 + \bar{\sigma}^T \cdot (w_t - w_{t-1})} \tag{79}$$

die multiplikative Version darstellt. Mit dem schon oben verwandten Ansatz für den Risikobewertungsfaktor ergeben sich als Risikoabschlag

$$\text{additiv}: \quad \big(F(t) - F(t-1)\big)^T \cdot \bar{\sigma} \qquad \text{(subtraktiv)} \tag{80}$$

$$\text{multiplikativ}: \quad e^{-\big(F(t) - F(t-1)\big)^T \cdot \bar{\sigma}} \qquad \text{(prozentual)} \tag{81}$$

bzw. als Sicherheitsäquivalent

$$\text{additiv}: \quad \bar{\mu} - \big(F(t) - F(t-1)\big)^T \cdot \bar{\sigma} \tag{82}$$

$$\text{multiplikativ}: \quad X_0(1+g) \cdot e^{-\big(F(t) - F(t-1)\big)^T \cdot \bar{\sigma}} \tag{83}$$

*korrelierte (asymptotisch) stationäre* Cashflows ergeben sich beispielhaft aus der folgenden Spezifikation:

$$\mu(t) = \bar{\mu} \qquad \sigma(t, \theta) = e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot \bar{\sigma} \qquad \alpha \; > \; 0$$

Die additive Variante liest sich (man beachte die Verwandschaft zum Ohrnstein–Uhlenbeck–Prozess)

$$X_t = \bar{\mu} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot \bar{\sigma}^T \cdot dw_\theta \tag{84}$$

die multiplikative

$$X_t = X_0(1+g) \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\,\|\bar{\sigma}\|^2 \, \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot \bar{\sigma}^T \cdot dw_\theta \right\} \tag{85}$$

Auch lassen sich Risikoabschlag und Sicherheitsäquivalent leicht angeben:

$$\text{Risikoabschlag additiv :} \quad \bar{\sigma}^T \cdot \int_0^t f(\theta) \cdot e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot d\,\theta \qquad \text{(subtraktiv)} \tag{86}$$

$$\text{Risikoabschlag multiplikativ :} \quad \exp\left\{-\bar{\sigma}^T \cdot \int_0^t f(\theta) \cdot e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot d\,\theta\right\} \quad \text{(prozentual)} \tag{87}$$

$$\text{Sicherheitsäquivalent additiv :} \quad \bar{\mu} - \bar{\sigma}^T \cdot \int_0^t f(\theta) \cdot e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot d\,\theta \tag{88}$$

$$\text{Sicherheitsäquivalent multiplikativ :} \quad X_0(1+g) \cdot \exp\left\{-\bar{\sigma}^T \cdot \int_0^t f(\theta) \cdot e^{-\alpha(t-\theta)} \cdot d\,\theta\right\} \tag{89}$$

Nimmt man $f(\theta) = \bar{f}$ als Zeit–unabhängig an, reduziert sich (86) auf

$$\bar{f}^T \cdot \bar{\sigma}\, \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \tag{90}$$

Die Ausdrücke (87) ... (89) vereinfachen sich entsprechend.

# B. Beweise

*Beweis der Beziehung (6):* Wir führen den Beweis zur Entlastung der Notation unter Vernachlässigung der Zero–Bond–Portfolios durch. Es gilt $c_T(x, y) = x_{T-1}^T \cdot P_T$, was der Behauptung für $t = T$ entspricht. Sei also für einen Beweis durch Induktion

$$c_{t+1}\,(x, y) = x_t^T \cdot P_{t+1} - \sum_{\tau=t+2}^{T} E\left(\frac{Q_\tau}{Q_{t+1}} \cdot c_\tau \Big| \mathcal{A}_{t+1}\right)$$

richtig. Wir bilden

$$E\left(\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \cdot c_{t+1}\,(x, y) \Big| \mathcal{A}_t\right) = x_t^T \cdot P_t - \sum_{\tau=t+2}^{T} E\left(\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \cdot \frac{Q_\tau}{Q_{t+1}} \cdot c_\tau \Big| \mathcal{A}_t\right)$$

$$= x_t^T \cdot P_t - \sum_{\tau=t+2}^{T} E\left(\frac{Q_\tau}{Q_t} \cdot c_\tau \Big| \mathcal{A}_t\right)$$

Nun gilt aber (gemäß (4))

$$c_t(x,y) = x_{t-1}^T \cdot P_t - x_t^T \cdot P_t$$

woraus durch Einsetzen der Induktionsvoraussetzung folgt

$$c_t(x,y) = x_{t-1}^T \cdot P_t - E\left(\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \cdot c_{t+1}(x,y) \Big| \mathcal{A}_t\right) - \sum_{\tau=t+2}^{T} E\left(\frac{Q_\tau}{Q_t} \cdot c_\tau \Big| \mathcal{A}_t\right)$$

w. z. b. w.

*Beweis des Separationstheorems:* Wir untersuchen die Opportunitätsmengen gemäß (10), (12) und (13).

(12) linke Seite der Ungleichung: $C + (h_0, h) + (X_0, X) + (-V_0, 0) =$

$$C + (h_0, h) + \big(c_0(\bar{x},\bar{y}), X\big) + \big(X_0 - c_0(\bar{x},\bar{y}), 0\big) + (-V_0, 0) =$$

$$C + (h_0, h) + \big(X_0 - c_0(\bar{x},\bar{y}) - V_0, 0\big)$$

(12) rechte Seite der Ungleichung: $C + (h_0, h)$.

Wegen der strengen Monotonie von $u$ folgt daher $V_K = X_0 - c_0(\bar{x},\bar{y})$.

(13) linke Seite der Ungleichung: $C + (h_0, h) + (V_0, 0)$.

(13) rechte Seite der Ungleichung: $C + (h_0, h) + (X_0, X) = C + (h_0, h) + \big(c_0(\bar{x},\bar{y}), X\big)$

$$+ \big(X_0 - c_0(\bar{x},\bar{y}), 0\big) = C + (h_0, h) + \big(X_0 - c_0(\bar{x},\bar{y}), 0\big)$$

Wegen der strengen Monotonie von $u$ folgt auch hier $V_V = X_0 - c_0(\bar{x},\bar{y})$.

*Lemma:* Sei $\theta \leq \tau - 1$; dann gilt $\operatorname{cov}\big(E(X_\tau|\mathcal{A}_t) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})\,,\; E(X_\tau|\mathcal{A}_\theta) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})\big) \;=\; 0$

*Beweis:* Es gilt $c := \operatorname{cov}\big(E(X_\tau|\mathcal{A}_t) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})\,,\; E(X_\tau|\mathcal{A}_\theta) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})\big) = E\big\{\big(E(X_\tau|\mathcal{A}_t) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})\big)\cdot\big(E(X_\tau|\mathcal{A}_\theta) - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})\big)\big\}$ da die Zufallsvariablen in der Kovarianz einen Erwartungswert von null aufweisen. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
c &= E\big\{E\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})|\mathcal{A}_t\big)\cdot E\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})|\mathcal{A}_\theta\big)\big\} \\
&= E\big\{E\big\{\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})\big)\cdot E\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})|\mathcal{A}_\theta\big)|\mathcal{A}_t\big\}\big\} \\
&= E\big\{\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})\big)\cdot E\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})|\mathcal{A}_\theta\big)\big\} \\
&= E\big\{E\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{t-1})|\mathcal{A}_\theta\big)\cdot E\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})|\mathcal{A}_\theta\big)\big\} \\
&= E\big\{\big(E(X_\tau|\mathcal{A}_\theta) - E(X_\tau|\mathcal{A}_\theta)\big)\cdot E\big(X_\tau - E(X_\tau|\mathcal{A}_{\theta-1})|\mathcal{A}_\theta\big)\big\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

*Beweis der zu (50) gehörenden Kovarianzeigenschaft:* Die Lösung von (50) lautet bekanntlich (Wilhelm 1983, S. ...)

$$x_Y = C^{-1}\,\mathrm{COV}(P_1, Y)$$

Wir untersuchen nun $\mathrm{COV}(P_1, Y - w_Y) = \mathrm{COV}(P_1, Y - x_Y^T \cdot P_1) = \mathrm{COV}(P_1, Y) - \mathrm{COV}(P_1, x_Y^T \cdot P_1) = \mathrm{COV}(P_1, Y) - \mathrm{COV}(P_1, P_1) \cdot x_Y = \mathrm{COV}(P_1, Y) - C \cdot C^{-1}\,\mathrm{COV}(P1, Y) \; = \; 0$

*Beweis der Beziehung (61):* Der Beweis wird so geführt, dass die Identität der Opportunitätsmengen auf der Ebene der erwarteten Nutzen nachgewiesen wird.

Der Konsum im Zeitpunkt 0 ist wie folgt gegeben:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nachher: | $-V_0$ | $-\,\alpha \cdot \pi(w_{\text{Tobin}})$ | $+\;\pi(w_h)$ | $+\;\pi(w_X)$ | $-\,y_N$ |
| Vorher: | | $-\,\alpha \cdot \pi(w_{\text{Tobin}})$ | $+\;\pi(w_h)$ | | $-\,y_V$ |

Erwartungswert $-\frac{1}{2} \cdot a \cdot$ Varianz des Konsums im Zeitpunkt 1 ist wie folgt zu schreiben:

Nachher: $\alpha\, E(w_{\text{Tobin}}) + E(h - w_h) + E(X - w_X)$

$$-\;\frac{1}{2}\,a\left[\mathrm{var}\big(\alpha \cdot w_{\text{Tobin}} + (h - w_h)\big) + 2\,\mathrm{cov}(h - w_h, X - w_X) + \mathrm{var}(X - w_X)\right]$$

$$+\;(1 + r_f) \cdot y_N$$

Vorher: $\alpha\, E(w_{\text{Tobin}}) + E(h - w_h)$

$$-\;\frac{1}{2}\,a\left[\mathrm{var}\big(\alpha \cdot w_{\text{Tobin}} + (h - w_h)\big)\right]$$

$$+\;(1 + r_f) \cdot y_V$$

Eine Übereinstimmung der beiden Positionen in Bezug auf den Zeitpunkt $t = 1$ erreicht man durch die folgende Identifikation:

$$(1 + r_f) \cdot y_V = (1 + r_f) \cdot y_N + E(X - w_X) - \frac{1}{2}\,a\left[\mathrm{var}(X - w_X) + 2\,\mathrm{cov}(h - w_h, X - w_X)\right]$$

Setzt man in den Konsum im Zeitpunkt $t = 0$ ein, so zeigt sich, dass dort Konsum vor und nach der Transaktion ebenfalls übereinstimmen, wenn $V_0$ wie in Beziehung (61) gesetzt wird.

*Beweis des semi–subjektiven Ansatzes:* Seien $y_1, \ldots, y_T$ die Stückzahlen, die vom Zero–Bond der jeweiligen Restlaufzeit gekauft werden sollen. Wir betrachten wieder die Situation des Käufers vor und nach der Transaktion

t = 0

Vorher: $c_0 = -\sum_{\theta=1}^{T} y_{\theta,V} \cdot B(0,\theta) + h_0$

Nachher: $c_0 = -\sum_{\theta=1}^{T} y_{\theta,N} \cdot B(0,\theta) + h_0 - V_0$

t > 0

Vorher: $c_t = y_{t,V} + h_t$

Nachher: $c_t = y_{t,N} + h_t + X_t$

Die erwarteten Nutzenbeiträge ergeben sich zu

t = 0

Vorher:
$$\begin{aligned} -v(c_0) &= -v(h_0) \cdot \prod_{\theta=1}^{T} v\big(-y_{\theta,V} \cdot B(0,\theta)\big) \\ &= -v(h_0) \cdot \prod_{\theta=1}^{T} v(y_{\theta,V})^{-B(0,\theta)} \end{aligned}$$

Nachher:
$$\begin{aligned} -v(c_0) &= -v(h_0) \cdot v(-V_0) \cdot \prod_{\theta=1}^{T} v\big(-y_{\theta,N} \cdot B(0,\theta)\big) \\ &= -v(h_0) \cdot v(-V_0) \cdot \prod_{\theta=1}^{T} v(y_{\theta,N})^{-B(0,\theta)} \end{aligned}$$

t > 0

Vorher: $-E\big(v(c_t)\big) = E\big(v(h_t)\big) \cdot v(y_{t,V})$

Nachher: $-E\big(v(c_t)\big) = -E\big(v(h_t)\big) \cdot E\big(v(X_t)\big) \cdot v(y_{t,N})$

Wenn wir nun wieder $y_{t,V}$ und $y_{t,N}$ so miteinander verknüpfen, dass

$$v(y_{t,V}) = v(y_{t,N}) \cdot E\big(v(X_t)\big)$$

gilt, so stimmen die erwarteten Nutzen vorher und nachher in allen Zeitpunkten $t > 0$ überein. Der Nutzen in $t = 0$ stimmt dann ebenfalls überein, wenn

$$-v(h_0) \cdot \prod_{\theta=1}^{T} \left[v(y_{t,N}) \cdot E\big(v(X_t)\big)\right]^{-B(0,\theta)} = -v(h_0) \cdot v(-V_0) \cdot \prod_{\theta=1}^{T} v(y_{\theta,N})^{-B(0,\theta)}$$

gilt, d. h.

$$\prod_{\theta=1}^{T} E\big(v(X_t)\big)^{-B(0,\theta)} = v(-V_0)$$

Anwenden der inversen Funktion $v^{-1}(z) = -\frac{1}{a} \cdot \log z$ auf beiden Seiten führt auf das Resultat

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} B(0,t) \cdot u^{-1}\Big\{E\big(u(X_t)\big)\Big\} \;;$$

die Opportunitätsmengen auf Basis der erzielbaren erwarteten Periodennutzen sind identisch. Das gilt im Übrigen unabhängig davon, wie die erwarteten Periodennutzen aggregiert werden.

# Anmerkungen

1 Vgl. Schwetzler (2000), Schwetzler (2002); Kürsten (2002), Kürsten (2003); Kruschwitz (2001); Wiese (2003).

2 Vgl. zu einem früheren Entwurf Wilhelm (2002).

3 Zur Vereinfachung lassen wir nur Zero–Bonds zu, deren Fälligkeit nicht jenseits des Planungshorizonts liegt; das Modell lässt sich ohne Schwierigkeiten entsprechend erweitern.

4 Dass hierbei Arbitrage–Freiheit vorliegt, erkennt man an folgender Implikation: Sei $(x_t, y_t)$ ein (so genanntes Arbitrage–)Portfolio mit $x_t^T \cdot P_{t+1} + \sum_{\tau \geq t+1}^{T} y_{t,\tau} \cdot B(t+1,\tau) = 0$ (fast sicher), dann ist offenbar $0 = E\left\{\frac{Q_{t+1}}{Q_t}\left(x_t^T \cdot P_{t+1} + \sum_{\tau \geq t+1}^{T} y_{t,\tau} \cdot B(t+1,\tau)\right)\Big|\mathcal{A}_t\right\} = x_t^T \cdot E\left\{\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \cdot P_{t+1}\Big|\mathcal{A}_t\right\} + \sum_{\tau \geq t+1} y_{t,\tau} \quad E\left\{\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \cdot B(t+1,\tau)\Big|\mathcal{A}_t\right\} = x_t^T \cdot P_t + \sum_{\tau \geq t+1} y_{t,\tau} \cdot B(t,\tau)$ : Ein Portfolio, das in $t+1$ fast sicher einen Wert von null hat, hat auch in $t$ einen Wert von null. Zu weiteren Einzelheiten vgl. Anhang A.II.

5 Ist also $D$ ein linearer Raum, so ist es auch $C$.

6 Dabei ist $u$ eine streng monoton steigende konkave Nutzenfunktion auf einer konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^{T+1}$.

7 Allgemein gilt $E(R_\tau|\mathcal{A}_t) = R_t \cdot \left(\frac{1+r_{t,\tau}}{1+{}_0r_{t,\tau}}\right)^{\tau-t}$, wobei ${}_0r_{t,\tau}$ der im Zeitpunkt 0 geltende Terminzinssatz für die Kapitalüberlassungsperiode $[t,\tau]$ ist $(\tau \geq t)$ (man setze übrigens $R_0 = 1$). In Zusammenhang mit Unternehmensbewertungen wird meist eine deterministische Zinsstruktur unterstellt, dann gilt wegen $r_{t,\tau} = {}_0r_{t,\tau}$ sogar $E(R_\tau|\mathcal{A}_t) = R_t$ (d. h. $R_t$ ist ein Martingal), ansonsten spielt das Verhältnis von in $t$ geltendem Zero–Bond–Preis für die Periode $[t,\tau]$ zu dem im Zeitpunkt 0 geltenden Terminpreis für einen solchen Zero–Bond eine Rolle. Genaueres entnimmt man dem Anhang A.II.

8 Die Linearität der Beziehung (20) lässt eine Übertragung auf die Bewertung von Netto–*Aus*zahlungen statt von Netto–*Ein*zahlungen unmittelbar zu: Es geschieht ein simpler Vorzeichenwechsel.

9 Bamberg und Coenenberg (2002), S. 94.

10 Diese Annahmen führen uns im Prinzip in die Black/Scholes–Welt der Optionspreistheorie (vgl. Wilhelm (2001)).

11 Genauer formuliert, sind diese Cashflows nur asymptotisch stationär; daraus erklärt sich auch das exponentiell einem Sättigungsniveau sich nähernde Verhalten der betreffenden Terme.

12 Auch mit der Frage, ob aufeinander folgende Cashflows korreliert sind oder nicht, hat mit Risikoprämienstruktur nichts zu tun. Im abhängig stationären additiven Fall beträgt die Korrelation $\operatorname{corr}(X_\tau, X_t) = e^{-\alpha(\tau-t)}\sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha t}}{1-e^{-2\alpha\tau}}}$; im multiplikativen Fall gilt für die Logarithmen $\operatorname{corr}(\log X_\tau, \log X_t)$ derselbe Ausdruck (bei $f(t) = \bar{f}$).

13 Es sei $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ gesetzt, so dass $E(X_\tau) = E(X_\tau|\mathcal{A}_0)$ gilt.

14 Im Anhang wird im Rahmen eines Lemmas gezeigt, dass die Komponenten in (38) nicht korreliert sind.

15 Der Leser vermag unschwer, durch Kombination von Tabelle 4 mit Tabelle 1 die zu den Teilrisiken gehörenden Risikoabschläge zu ermitteln.

16 Mayers (1972), Brito (1977), ausführlich bei Wilhelm (1985), S. 25-31.

17 $C$ ist die (nicht–singulär unterstellte) Kovarianzmatrix der Wertpapiere $C = \mathrm{COV}(P_1, P_1)$.

18 Kruschwitz und Löffler (2003).

19 Vgl. ebenda, S. 6 in Verbindung mit S. 4.

20 Der allgemeine Fall wird im Anhang noch einmal bewiesen.

21 Vgl. Anmerkung 1.

22 Vgl. eine allgemeinere Version bei Duffie (1996), S. 288. Die hier gewählte Variante ist logarithmisch normalverteilt und kompatibel mit der Black–Scholes/Ho–Lee–Welt; vgl. dazu auch Wilhelm (2001).

# Literatur

**Bamberg, G. und Coenenberg, A.** (**2002**). *Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie, 11., überarb. und erw. Auflage*. Verlag Franz Vahlen, München.

**Brito, N. O.** (**1977**). Marketability Restrictions and the Valuation of Capital Assets Under Uncertainty. *Journal of Finance* 32: S. 1109–1123.

**Drukarczyk, J.** (**2001**). *Unternehmensbewertung, 3., überarb. u. erw. Auflage*. Verlag Franz Vahlen, München.

**Duffie, D.** (**1996**). *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton/New Jersey, 2. Auflage.

**Kürsten, W.** (**2002**). Unternehmensbewertung unter Unsicherheit, oder: Theoriedefizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalenz– und Risikozuschlagsmethode – Anmerkungen (nicht nur) zu dem Beitrag von Bernhard Schwetzler in der zfbf (August 2000, S. 469-486). *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 54: S. 128–144.

**Kürsten, W.** (**2003**). Grenzen und Reformbedarfe der Sicherheitsäquivalentmethode in der (traditionellen) Unternehmensbewertung. *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 55(3): S. 306–314.

**Kruschwitz, L.** (**2001**). Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien in der Unternehmensbewertung. *Der Betrieb* 54: S. 2409–2413.

**Kruschwitz, L. und Löffler, A.** (**2003**). Semi–subjektive Bewertung. Arbeitspapier, Institut für Bank– und Finanzwirtschaft der Freien Universität Berlin, Berlin. Internet http://www.wiwiss.fu-berlin.de/kruschwitz/Forschung/Dokumente/Sicherheit(Revision5).pdf, Zugriff 23.10.2003.

**Mayers, D.** (**1972**). Non–Marketable Assets and Capital Market Equilibrium Under Uncertainty. In: M. C. Jensen (Hrsg.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, S. 223–248. Praeger, New York.

**Schwetzler, B.** (**2000**). Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalent– oder Risikozuschlagsmethode? *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 52: S. 469–486.

**Schwetzler, B.** (**2002**). Das Ende des Ertragswertverfahrens? Replik zu den Anmerkungen von Wolfgang Kürsten zu meinem Beitrag in der zfbf (August 2000, S. 469-486. *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 55: S. 145–158.

**Seicht, G.** (**2001**). Missverständnisse und Methodenfehler in der österreichischen Praxis der Unternehmensbewertung. In: G. Seicht (Hrsg.), *Jahrbuch für Controlling und Rechnungswesen*, S. 1–49. Verlag Orac, Wien.

**Wiese, J.** (**2003**). Zur theoretischen Fundierung der Sicherheitsäquivalentmethode und des Begriffs der Risikoauflösung bei der Unternehmensbewertung – Anmerkungen zu dem Beitrag von Wolfgang Kürsten in der zfbf (März 2002, S. 128-144). *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 55: S. 287–305.

**Wilhelm, J.** (**1985**). *Arbitrage Theory*. Nummer 245 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer Verlag, Berlin et al.

**Wilhelm, J.** (**2001**). Option Prices with Stochastic Interest Rates – Black/Scholes and Ho/Lee unified, Second Draft. Passauer Diskussionspapiere B-8-01, Herausgeber: Die Gruppe der betriebswirtschaftlichen Professoren der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Passau, Passau.

**Wilhelm, J.** (**2002**). Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien — Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundproblem der Unternehmensbewertung. Passauer Diskussionspapiere B-9-02, Herausgeber: Die Gruppe der betriebswirtschaftlichen Professoren der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Passau, Passau.