An Equilibrium Analysis under Cobb-Douglas Production and Utility Functions

Li, Wu

04. June 2010

Cobb-Douglas 生产函数和效用函数下的均衡分析

李武
上海大学经济学院金融系，上海 (200444)
E-mail: liwu@staff.shu.edu.cn

摘　要：古典增长框架下的均衡分析迄今主要关注生产过程，而未涉及消费者的效用最大化。基于古典增长框架下的均衡分析思想，本文通过几个算例阐述了 Cobb-Douglas(CD)生产函数和效用函数下的均衡分析方法，该方法也适用于其他类型的生产函数和效用函数。
关键词：均衡；平衡增长；投入系数矩阵；Sraffa 体系；von Neumann 增长模型；效用函数

1. 引言

Quesnay的经济表[1]、Marx的再生产模型[2]、Leontief的投入产出模型[3,4]、von Neumann的增长模型[5]、Sraffa的均衡分析[6]等工作典型地体现了古典经济学的思想[7,8]，均为古典增长框架的重要组成部分。基于古典增长框架既可以作动态均衡分析，也可以作动态非均衡分析。

正如von Neumann[5]和Sraffa[6]等的分析表明的那样，古典增长框架下的均衡路径通常是平衡增长路径，其中各种商品的供给以相同的速率增长。均衡增长率、均衡价格和均衡的产出结构均由各部门（或厂商）的技术（或者说生产函数）决定。学者们在古典增长框架下分析了与均衡相关的诸多问题，如均衡的存在性[9]、均衡交易[10]、均衡的最优性[11-13]、均衡的扰动[14]等等，然而此类均衡分析迄今主要考察生产过程，似乎还没有考虑消费者的效用最大化。本文试图结合利润最大化的厂商和效用最大化的消费者来讨论均衡路径（亦即平衡增长路径）。

本文结构安排如下：第2节用Sraffa的一个例子简单介绍了古典增长框架下的均衡分析；第3节阐述CD型生产函数下的均衡分析；第4节阐述CD型生产函数和效用函数下的均衡分析；第5节为结束语。

2. Sraffa的一个例子

古典增长框架下的均衡路径通常是平衡增长路径。这里以Sraffa给出的一个例子对此作一简单说明，该例子是一个包含两个厂商（亦可理解为两个部门）、两种商品的经济系统[6]。其中两个厂商均具有Leontief型的生产函数，或者说两个厂商均只拥有一种技术。在初始期该系统运行如下：

$$280 \text{ 夸脱小麦} \quad +12 \text{ 吨铁} \quad \rightarrow 575 \text{ 夸脱小麦} \tag{1a}$$
$$120 \text{ 夸脱小麦} \quad +8 \text{ 吨铁} \quad \rightarrow 20 \text{ 吨铁} \tag{1b}$$

式(1a)表示厂商1（即小麦生产者）在初始期的生产过程，式(1b) 表示厂商2（即铁生产者）在初始期的生产过程。

多个厂商的生产函数可以用一个投入系数矩阵来表示。这个例子中的投入系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{56}{115} & 6 \\ \frac{12}{575} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \tag{2}$$

矩阵**A**的第一列，即$\left(\frac{56}{115}, \frac{12}{575}\right)^T$，表示厂商1的技术（或称投入系数）；第二列，即$\left(6, \frac{2}{5}\right)^T$，表示厂商2的技术。

众所周知，系统(1a)-(1b)的均衡价格向量和均衡产出向量分别是**A**的左、右P-F (即Perron-Frobenius)特征向量。此处**A**的一个左P-F特征向量为$\mathbf{p}^* = (1, 15)^T$，一个右P-F特征向量为$\mathbf{z}^* = (575, 30)^T$。也就是说，以小麦作为计价商品时铁的均衡价格为15；而当小麦的产量为575

夸脱时铁的均衡产量应为30吨，相应的厂商2的生产过程为：

$$180\text{ 夸脱小麦} \quad +12\text{ 吨铁} \quad \rightarrow 30\text{ 吨铁} \tag{1b'}$$

A的P-F特征值为 $\lambda = 0.8$，这意味着系统(1a)-(1b)的均衡增长率为 $1/\lambda - 1 = 0.25$。

3. CD生产函数下的均衡

在第2节的经济系统中每个厂商具有Leontief型的生产函数。现在来考察当生产函数为CD型时的均衡。假设有3种商品，分别由3个厂商生产。厂商1的生产函数为 $5x_1^{0.6}x_2^{0.1}x_3^{0.3}$，厂商2的生产函数为 $3x_1^{0.4}x_2^{0.4}x_3^{0.2}$，厂商3的生产函数为 $x_1^{0.2}x_2^{0.7}x_3^{0.1}$。这些函数均是一次齐次函数，就是说均具有不变的规模收益。

此时可将投入系数矩阵处理为价格向量的函数[15]。给定价格向量**p**，可计算出追求利润最大化的各个厂商生产一单位的商品所需要的投入品数量（即投入束）。3个厂商的投入束构成了如下的投入系数矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{p})$：

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\left(\frac{0.6}{p_1}\right)^{0.4}\left(\frac{p_2}{0.1}\right)^{0.1}\left(\frac{p_3}{0.3}\right)^{0.3} & \frac{1}{3}\left(\frac{0.4}{p_1}\right)^{0.6}\left(\frac{p_2}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{p_3}{0.2}\right)^{0.2} & \left(\frac{0.2}{p_1}\right)^{0.8}\left(\frac{p_2}{0.7}\right)^{0.7}\left(\frac{p_3}{0.1}\right)^{0.1} \\ \frac{1}{5}\left(\frac{p_1}{0.6}\right)^{0.6}\left(\frac{0.1}{p_2}\right)^{0.9}\left(\frac{p_3}{0.3}\right)^{0.3} & \frac{1}{3}\left(\frac{p_1}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{0.4}{p_2}\right)^{0.6}\left(\frac{p_3}{0.2}\right)^{0.2} & \left(\frac{p_1}{0.2}\right)^{0.2}\left(\frac{0.7}{p_2}\right)^{0.3}\left(\frac{p_3}{0.1}\right)^{0.1} \\ \frac{1}{5}\left(\frac{p_1}{0.6}\right)^{0.6}\left(\frac{p_2}{0.1}\right)^{0.1}\left(\frac{0.3}{p_3}\right)^{0.7} & \frac{1}{3}\left(\frac{p_1}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{p_2}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{0.2}{p_3}\right)^{0.8} & \left(\frac{p_1}{0.2}\right)^{0.2}\left(\frac{p_2}{0.7}\right)^{0.7}\left(\frac{0.1}{p_3}\right)^{0.9} \end{bmatrix} \tag{3}$$

将均衡路径中的均衡价格向量记为 $\mathbf{p}^*$，则均衡投入系数矩阵即为 $\mathbf{A}(\mathbf{p}^*)$，而 $\mathbf{p}^*$ 必然是 $\mathbf{A}(\mathbf{p}^*)$ 的左P-F特征向量，亦即有

$$\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}(\mathbf{p}^*) = \lambda \mathbf{p}^{*T} \tag{4}$$

通过求解式(4)即可得到惟一的规一化的均衡价格向量 $\mathbf{p}^* = (0.1231,\ 0.2535,\ 0.6234)^T$，相应的P-F特征值 λ 为 0.8585。而均衡增长率为16.49%，这也是该经济系统所能达到的最大的平衡增长率。

假设商品3的初始供给量为100单位，则通过计算 $\mathbf{A}(\mathbf{p}^*)$ 的右P-F特征向量可知均衡路径中初始的生产过程可以表示如下：

厂商 1	607.72 商品 1	+ 49.19 商品 2	+60 商品 3	→ 1179.8 商品 1	(5a)
厂商 2	303.86 商品 1	+147.57 商品 2	+30 商品 3	→ 429.75 商品 2	(5b)
厂商 3	101.29 商品 1	+172.17 商品 2	+10 商品 3	→ 116.49 商品 3	(5c)
总计(≈)	1012.9 商品 1	368.93 商品 2	100 商品 3		

式(4)的求解方法有多种，其中一种较为简便的方法是使用迭代函数 $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathrm{G}(\mathbf{p}^{(k)})$，其中 $\mathbf{p}^{(k+1)}$ 是 $\mathbf{A}(\mathbf{p}^{(k)})$ 的规一化的左P-F特征向量。这一迭代函数的收敛性不难在Lyapunov第二方法[16]的基础上通过考察 $\mathbf{A}(\mathbf{p}^{(k)})$ 的P-F特征值来证明。

4. CD生产函数和效用函数下的均衡

现在将第3节的经济系统中的厂商3换为由同质的追求效用最大化的劳动者构成的家庭，然后考察CD型生产函数和效用函数下的均衡。假设厂商1和厂商2的生产函数仍为 $5x_1^{0.6}x_2^{0.1}x_3^{0.3}$ 和 $3x_1^{0.4}x_2^{0.4}x_3^{0.2}$，每位劳动者的效用函数为 $x_1^{0.2}x_2^{0.7}x_3^{0.1}$，每位劳动者每期供给一单位劳动（即第3种商品）。

此时可将投入系数矩阵处理为价格向量和效用的函数。本例中在给定的价格向量**p**和效用水

平υ下的投入系数矩阵可表示如下：

$$\mathbf{A}(\mathbf{p},\upsilon)=\begin{bmatrix} \frac{1}{5}\left(\frac{0.6}{p_1}\right)^{0.4}\left(\frac{p_2}{0.1}\right)^{0.1}\left(\frac{p_3}{0.3}\right)^{0.3} & \frac{1}{3}\left(\frac{0.4}{p_1}\right)^{0.6}\left(\frac{p_2}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{p_3}{0.2}\right)^{0.2} & \upsilon\left(\frac{0.2}{p_1}\right)^{0.8}\left(\frac{p_2}{0.7}\right)^{0.7}\left(\frac{p_3}{0.1}\right)^{0.1} \\ \frac{1}{5}\left(\frac{p_1}{0.6}\right)^{0.6}\left(\frac{0.1}{p_2}\right)^{0.9}\left(\frac{p_3}{0.3}\right)^{0.3} & \frac{1}{3}\left(\frac{p_1}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{0.4}{p_2}\right)^{0.6}\left(\frac{p_3}{0.2}\right)^{0.2} & \upsilon\left(\frac{p_1}{0.2}\right)^{0.2}\left(\frac{0.7}{p_2}\right)^{0.3}\left(\frac{p_3}{0.1}\right)^{0.1} \\ \frac{1}{5}\left(\frac{p_1}{0.6}\right)^{0.6}\left(\frac{p_2}{0.1}\right)^{0.1}\left(\frac{0.3}{p_3}\right)^{0.7} & \frac{1}{3}\left(\frac{p_1}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{p_2}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{0.2}{p_3}\right)^{0.8} & \upsilon\left(\frac{p_1}{0.2}\right)^{0.2}\left(\frac{p_2}{0.7}\right)^{0.7}\left(\frac{0.1}{p_3}\right)^{0.9} \end{bmatrix} \tag{6}$$

投入系数矩阵$\mathbf{A}(\mathbf{p},\upsilon)$的各列反映了在价格向量$\mathbf{p}$下追求利润最大化的各个厂商获得一单位产出和追求效用最大化的每位劳动者获得υ单位效用所需要的投入。

假设劳动者的数量和劳动的供给量具有外生的增长率γ，那么若存在均衡则均衡增长率必然为γ。在均衡路径中，价格向量、劳动者的效用水平等保持不变，而各厂商的产出和劳动的供给以相同的速率增长。于是在均衡路径中家庭可以被看作是在某个效用水平下“产出”劳动，投入系数矩阵的最后一列即是产出一单位劳动需要的投入束。

将均衡路径中的均衡价格向量记为$\mathbf{p}^*$，均衡投入系数矩阵记为$\mathbf{A}(\mathbf{p}^*,\upsilon^*)$，则$\mathbf{A}(\mathbf{p}^*,\upsilon^*)$的P-F特征值必然为$1/(1+\gamma)$，而$\mathbf{p}^*$必然是$\mathbf{A}(\mathbf{p}^*,\upsilon^*)$的左P-F特征向量，亦即有

$$\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}(\mathbf{p}^*,\upsilon^*)=\frac{1}{1+\gamma}\mathbf{p}^{*T} \tag{7}$$

通过求解式(7)即可计算均衡价格向量$\mathbf{p}^*$和均衡效用水平υ^*。

当劳动的供给量始终保持不变（即$\gamma=0$），可以解得惟一的规一化的均衡价格向量为$\mathbf{p}^*=(0.0866,\ 0.1652,\ 0.7482)^T$，均衡效用水平为$\upsilon^*=1.9872$，相应的均衡投入系数矩阵为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}^*,\upsilon^*)=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.7631 & 1.7279 \\ 0.0524 & 0.4 & 3.1699 \\ 0.0347 & 0.0442 & 0.1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

进一步设劳动的供给量始终为100单位，则通过计算$\mathbf{A}(\mathbf{p}^*,\upsilon^*)$的右P-F特征向量可知均衡路径中的生产和消费过程可以表示如下：

厂商 1	1036.7 商品 1	+ 90.57 商品 2	+60 劳动	$\to$ 1727.9 商品 1	(9a)
厂商 2	518.36 商品 1	+271.70 商品 2	+30 劳动	$\to$ 679.26 商品 2	(9b)
家庭	172.79 商品 1	+316.99 商品 2	+10 劳动	$\to$ 100 劳动	(9c)
总计(≈)	1727.9 商品 1	679.26 商品 2	100 劳动		
每位劳动者	1.7279 商品 1	+3.1699 商品 2	+0.1 劳动	$\to$ 1.9872 效用	(9d)

当劳动供给量以每期5%的外生增长率增长（即$\gamma=0.05$）时，可以计算得到惟一的规一化的均衡价格向量为$\mathbf{p}^*=(0.0977,\ 0.1909,\ 0.7114)^T$，均衡效用水平为$\upsilon^*=1.5954$。此时若劳动的初始供给量为100单位，则均衡路径中初始的生产和消费过程可以表示如下：

厂商 1	873.97 商品 1	+ 74.51 商品 2	+60 劳动	$\to$ 1529.5 商品 1	(10a)
厂商 2	436.99 商品 1	+223.53 商品 2	+30 劳动	$\to$ 586.77 商品 2	(10b)
家庭	145.66 商品 1	+260.79 商品 2	+10 劳动	$\to$ 105 劳动	(10c)
总计(≈)	1456.6 商品 1	558.83 商品 2	100 劳动		
每位劳动者	1.3873 商品 1	+ 2.4837 商品 2	+0.0952 劳动	$\to$ 1.5954 效用	(10d)

式(7)也可以通过一个迭代函数$\mathbf{p}^{(k+1)}=\mathrm{G}_\gamma(\mathbf{p}^{(k)})$来求解。给定$\mathbf{p}^{(k)}$，$\mathbf{p}^{(k+1)}$按照如下步骤求得：首先找到一个正实数$\upsilon^{(k)}$使得$\mathbf{A}(\mathbf{p}^{(k)},\upsilon^{(k)})$的P-F特征值等于$1/(1+\gamma)$，然后令$\mathbf{p}^{(k+1)}$为$\mathbf{A}(\mathbf{p}^{(k)},\upsilon^{(k)})$

的规一化的左P-F特征向量。这一迭代函数的收敛性可以在Lyapunov第二方法[16]的基础上通过考察$\upsilon^{(k)}$来证明。

最后我们来讨论均衡中各主体使用的同一种投入品的数量比例关系。

令$\hat{\mathbf{p}}$代表以向量$\mathbf{p}$为主对角线的对角阵。令$\mathbf{v}^* \equiv \widehat{\mathbf{p}^*}\mathbf{x}^*$代表均衡投入价值向量（即以货币度量的均衡投入向量），其中$\mathbf{p}^*$和$\mathbf{x}^*$分别为均衡价格向量和（以物理单位度量的）均衡投入向量。例如系统(10a)-(10d)中规一化的均衡价格向量为$\mathbf{p}^* = (0.0977,\ 0.1909,\ 0.7114)^T$，一个均衡投入向量为$\mathbf{x}^* = (1456.6, 558.83, 100)^T$，于是一个均衡投入价值向量为$\mathbf{v}^* = (142.31, 106.68, 71.14)^T$。

将各主体的CD型生产函数和效用函数中的指数构成如下的矩阵$\mathbf{C}$：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

则根据CD型函数的性质（即不同价格向量下一个主体的各种投入品的价值比例恒定）易知$\mathbf{v}^*$一定是矩阵$\mathbf{C}$的右P-F特征向量且$\mathbf{C}\widehat{\mathbf{v}^*}$的各行指明了均衡中各主体使用的同一种投入品的数量比例关系。例如式(11)中的矩阵$\mathbf{C}$的一个右P-F特征向量为$\mathbf{v}^* = (4, 3, 2)^T$，$\mathbf{C}\widehat{\mathbf{v}^*}$即为：

$$\mathbf{C}\widehat{\mathbf{v}^*} = \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 & 1.4 \\ 1.2 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

其第3行表明均衡中各主体使用的劳动量的比例关系为1.2:0.6:0.2，即6:3:1。

5. 结束语

对于动态经济系统而言，均衡一般被定义为一类特殊的路径，如具有最大增长率的平衡增长路径或市场始终出清的路径等等。各种经济模型常常使用不同的条件来定义均衡路径，而不同条件定义的均衡路径可能对应类似的或相同的路径集合。平衡增长路径集合即是一种常见的均衡路径集合。Sraffa所考虑的均衡本质上即是平衡增长路径[6]；von Neumann在其增长模型中虽然使用与Sraffa不同的均衡条件，但均衡同样是平衡增长路径[5]。古典增长框架下围绕平衡增长路径展开的均衡分析似乎至今尚未考虑消费者的效用最大化，而本文给出的例子表明可以结合利润最大化的厂商和效用最大化的消费者（劳动者）来作此类均衡分析。

参考文献

[1] Quesnay, F. (1972) *Quesnay's Tableau Economique* [1759]. Edited by M. Kuczynski and R. L. Meek. London: Macmillan.

[2] Marx, K. (1956) *Capital*, vol. II, (Moscow, Progress Publishers). English translation of Das Kapital, vol. II, edited by F. Engels, (Hamburg, Meissner, 1885).

[3] Leontief, W. (1936) Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United States, *Review of Economics and Statistics*, 18, pp. 105-125.

[4] Leontief, W. (1941) *Structure of the American Economy, 1919-1929*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

[5] von Neumann, J. (1945) A Model of General Economic Equilibrium, *Review of Economic Studies*, 13, pp. 1–9.

[6] Sraffa, P. (1960) *Production of Commodities by Means of Commodities*. Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Kurz, H. and N. Salvadori. (2000) ‘Classical’ Roots of Input-Output Analysis: A Short Account of its Long Prehistory, *Economic Systems Research*, 12(2), pp. 153-179.

[8] Kurz, H. and N. Salvadori. (2001) Sraffa and von Neumann, *Review of Political Economy*, 13(2), pp. 161-180.

[9] Kemeny, J. G., O. Morgenstern and G. L. Thompson. (1956) A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy, *Econometrica*, 24, pp. 115-135.

[10] Gale, D. (1960) *The Theory of Linear Economic Models.* New York: McGraw-Hill.
[11] Dorfman, R., P. A. Samuelson and R. M. Solow. (1958) *Linear Programming and Economic Analysis*. New York: McGraw-Hill.
[12] McKenzie, L. W. (1963) Turnpike Theorems for a Generalized Leontief Model, *Econometrica*, 31, pp. 165-180.
[13] McKenzie, L. W. (1976) Turnpike Theory, *Econometrica*, 44, pp. 841-865.
[14] Dietzenbacher, E. (1988) Perturbations of Matrices: A Theorem on the Perron Vector and its Applications to Input-output Models, *Journal of Economics*, 48(4), pp. 389-412.
[15] Zhang, Jinshui. (2008) A Multi-sector Nonlinear Dynamic Input-Output Model with Human Capital, *Economic Systems Research*, 20(2), pp. 223-237.
[16] Luenberger, D. (1979) *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. John Wiley&Sons.

An Equilibrium Analysis under Cobb-Douglas Production and Utility Functions

LI Wu
Department of Finance, School of Economics, Shanghai University, Shanghai, PRC (200444)

Abstract: The equilibrium analyses under the classical growth framework mainly concern production processes so far and the utility-maximization of consumers is left out of consideration. On the basis of the thoughts of the equilibrium analyses under the classical growth framework, some numerical examples are presented to illustrate the method of the equilibrium analysis under Cobb-Douglas production and utility functions, and the method also applies to other production and utility functions.
Keywords: *Equilibrium; Balanced Growth; Input Coefficient Matrix; Sraffian System; von Neumann Growth Model; Utility Function*