

Borradores de ECONOMÍA

Expectativas y prima por riesgo
inflacionario bajo una medida de
compensación a la inflación

Por:
Luis Fernando Melo Velandia
Joan Camilo Granados Castro

Núm. 589

2010



tá - Colombia - Bogotá - Col

EXPECTATIVAS Y PRIMA POR RIESGO INFLACIONARIO BAJO UNA MEDIDA DE COMPENSACIÓN A LA INFLACIÓN *

LUIS FERNANDO MELO VELANDIA
(lmelevel@banrep.gov.co)
JOAN CAMILO GRANADOS CASTRO[†]
(jgranaca@banrep.gov.co)

BANCO DE LA REPÚBLICA

RESUMEN. En este documento se estima una medida de compensación inflacionaria (*Break Even Inflation*) usando los rendimientos de los TES en pesos y de los TES indexados a la UVR para el periodo comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Esta medida se descompone en expectativas de inflación y prima por riesgo inflacionario. Las expectativas de inflación se calculan con base en la representación de estado espacio de un modelo afín de estructura a término extendido. Este relaciona la rentabilidad de los bonos nominales y reales, a distintas maduraciones, con la inflación observada y dos factores no observables. Con el objeto de mejorar los pronósticos, este modelo incorpora las expectativas de inflación a 12 meses de la encuesta mensual del Banco de la República.

Los resultados muestran una tendencia a la baja de las expectativas de inflación. Esto se puede deber al aumento de la confianza en la política monetaria por parte de los agentes. Otro resultado que soporta esta hipótesis es que la prima por riesgo inflacionario presenta una tendencia decreciente a lo largo de la muestra para horizontes de tiempo de mediano y largo plazo (2 y 5 años). Adicionalmente, los resultados indican que a corto plazo, el *break even* es un buen indicador de expectativas de inflación. Sin embargo, para el mediano y largo plazo esto no se cumple dado que la prima por riesgo inflacionario toma relevancia para mayores periodos de maduración.

Palabras claves. Break even inflation, prima por riesgo inflacionario, expectativas de inflación, modelos de estado espacio, modelos afines de estructura a término.

Códigos de clasificación JEL. C13, C50, E31, E43.

Fecha: Febrero 2010.

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva. Los autores agradecen al departamento de operaciones y desarrollo de mercados de la SG-MR del Banco de la República por proporcionar la base de datos. También agradecen los comentarios y sugerencias de Luis Eduardo Arango, Mauricio Arias, Ricardo Bernal, A. Cobo, Pamela Cardozo, Daniel Parra, Juan S. Rojas, José V. Romero, Dagoberto Saboyá y en especial a Munir Jalil por su gran ayuda en una versión preliminar de este documento.

[†] Asistente de investigación.

1. INTRODUCCIÓN

La curva de rendimientos de las tasas de interés contiene información relevante sobre la economía, toda vez que sintetiza las percepciones de los agentes acerca de su estado futuro. Por ejemplo, en Arango y Arosemena [2003] se argumenta que el tramo corto de la curva cero cupón de los TES posee información de expectativas de inflación a mediano plazo, y con base en esta información se usa la ecuación de Fisher para examinar escenarios futuros de inflación bajo diferentes tipos de expectativas.

En este contexto, una medida ampliamente utilizada es el diferencial entre los rendimientos de los bonos nominales y reales, conocido en la literatura como *Break Even Inflation* (en lo sucesivo, BEI). Este refleja la compensación requerida para que los rendimientos de los dos tipos de bonos sean equivalentes para un vencimiento dado.

Por lo tanto, el BEI es una medida basada en la información del mercado que refleja la inflación esperada durante el periodo de maduración de los títulos y por ende constituye una alternativa a las encuestas de expectativas de inflación. Estas últimas, por lo general, abarcan una porción pequeña de la población, generan información menos oportuna y tienen disponibilidad para pocos horizontes de tiempo. Adicionalmente, las respuestas dadas por los encuestados no necesariamente son representativas del mercado, toda vez que son subjetivas y pueden depender de noticias recientes.

A pesar de lo anterior, el BEI está conformado por componentes adicionales a la expectativa de inflación, por lo que se debe ser cuidadoso al usarlo como una medida de inflación esperada. Sin embargo, la amplia disponibilidad de información concerniente al BEI y la posibilidad de calcularlo para cualquier periodo de maduración, hacen que esta medida sea de especial interés para los *policy makers* y agentes financieros.

Para el caso colombiano, Arias et al. [2006] calculan el BEI y otro indicador alternativo, el cual busca eliminar algunos sesgos del BEI. Ellos encuentran que la mediana de las diferencias entre estas dos medidas es tan solo de 8 puntos básicos. Sin embargo, estos autores no realizan estimaciones directas de los componentes de esta medida; expectativas promedio de inflación y prima por riesgo inflacionario.

En este documento se calcula el BEI a partir de los rendimientos de TES en pesos y TES indexados a la UVR para el periodo comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Posteriormente se descompone el BEI en expectativas promedio de inflación y prima por riesgo inflacionario. Las expectativas de inflación se calculan con base en un modelo de estado espacio siguiendo metodologías desarrolladas por García y Werner [2008] y Adrian y Wu [2009].

El modelo estimado en este trabajo es una versión extendida de un modelo afín de estructura a término en el que se incluyen las expectativas de inflación de la encuesta mensual realizada por el Banco de la República. La información de estas encuestas es incluida con el objetivo de reducir la incertidumbre en la estimación de los componentes del BEI y de mejorar los pronósticos de la

inflación obtenidos con el modelo de estado espacio.

El documento está presentado como sigue: en la segunda sección se abarca conceptualmente el BEI y se definen conceptos asociados a los modelos de estructura a término que relacionan la inflación con los rendimientos de los bonos de deuda. En la tercera sección se expone el modelo de estado espacio a partir del cual se generan las expectativas de inflación. En la sección cuatro se muestran los resultados de las estimaciones del modelo y del BEI con respecto a cada uno de sus componentes. Por último, la sección cinco contiene algunos comentarios finales.

2. BREAK EVEN INFLATION

La definición del BEI se basa en la ecuación de Fisher [1930], según la cual la tasa de interés nominal debe ser igual a la real más la inflación esperada. En su versión más básica esta ecuación está dada por:

$$i_t^{nom} = i_t^{real} + E_t[\pi_{t+1}] \quad (1)$$

De forma análoga el BEI se define como la diferencia entre los rendimientos de un bono nominal y uno real con el mismo plazo de maduración. Por ejemplo, para un vencimiento de un periodo:

$$BEI_t^1 = y_t^{nom,1} - y_t^{real,1} \approx E_t[\pi_{t+1}] \quad (2)$$

Sin embargo, Sarte [1998] muestra que la ecuación (1), y por lo tanto la (2), no son adecuadas en ciertos contextos. Por ejemplo, cuando se asume que los agentes del mercado no son neutrales al riesgo, o cuando existe incertidumbre con respecto al nivel de precios futuro.

En particular, se espera que el BEI definido en (2) se aleje de las expectativas de inflación a medida que aumente el horizonte de maduración de los bonos. En este caso, la naturaleza estocástica de la inflación no permite que se mantengan las relaciones descritas en las ecuaciones anteriores.

Debido a estos problemas, la diferencia entre el rendimiento de un bono nominal y uno real debe incluir un componente adicional al especificado en la ecuación (2): la prima por riesgo inflacionario. Esta es una contraprestación a los cambios no esperados de la inflación, los cuales afectan el rendimiento del bono nominal a lo largo de su periodo de maduración.

La ecuación del BEI en forma extendida se define como sigue:

$$BEI_t^n = y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} = E_t(\pi_{t+1,t+n}) + \phi_t^n + \text{Ajuste por convexidad} \quad (3)$$

En la ecuación (3)¹, $y_t^{nom,n}$ y $y_t^{real,n}$ corresponden a los rendimientos de un bono en términos nominales y reales en t con n meses de maduración, respectivamente. $E_t(\pi_{t+1,t+n})$ es la expectativa de la inflación promedio para un horizonte temporal entre 1 y n meses a partir de t , y ϕ_t^n es la prima por riesgo inflacionario asociada a n periodos.² Al igual que la mayoría de la literatura relacionada con el BEI, este trabajo supone que el ajuste por convexidad es 0.³ La deducción de esta ecuación es desarrollada en el Apéndice C.

Debido a la facilidad para calcularlo e interpretarlo, el BEI se ha convertido en una *proxy* estándar de las expectativas de la inflación [Ejsing et al., 2007]. Como se ha mencionado, esta medida provee información valiosa del estado de la economía desde el punto de vista del mercado.

A pesar del amplio uso y ventajas del BEI, esta medida presenta ciertos inconvenientes. En primer lugar, se asume que tanto los bonos nominales como los reales tienen el mismo grado de liquidez. Sin embargo, en la gran mayoría de mercados financieros se observa que los bonos nominales son tranzados en cantidades mayores que los reales con características similares (Sack [2000]). Por otra parte, a partir de los resultados de la ecuación (3), se tiene que el BEI se puede interpretar como una *proxy* de las expectativas de inflación solo si la prima por riesgo inflacionario es baja.⁴

2.1. Expectativas de inflación. Uno de los componentes del BEI definido en (3) es la expectativa promedio de la inflación. Bajo el supuesto de que el ajuste por convexidad es cero y que la prima por riesgo inflacionario es pequeña, el BEI debe corresponder a una compensación al inversionista por la pérdida de valor del activo, sujeto a una tasa de interés, generada por los aumentos en el nivel de precios.

No obstante, es importante mencionar que la expectativa de inflación derivada del BEI no es un indicador de inflación puntual, sino de la inflación esperada promedio. Por ejemplo, si se calcula el diferencial de tasas de interés con bonos de maduración a dos años, asumiendo una prima por riesgo inflacionario muy pequeña, y $E_t(\pi_{t+1,t+2}) = 4,0\%$, se tiene que la inflación esperada durante los próximos dos años a partir de t será en promedio 4,0% mas no que la inflación puntual en dicho periodo será 4,0%.

De esta forma, la expectativa de inflación a partir del BEI esta dada por:

$$E_t(\pi_{t+1,t+n}) = \frac{1}{n} E_t(\pi_{t+1} + \dots + \pi_{t+n}) \quad (4)$$

Donde n corresponde al periodo de maduración de los bonos asociados al cálculo del BEI en el

¹Esta ecuación es obtenida en Christensen et al. [2008], Adrian y Wu [2009], y en García y Werner [2008], entre otros.

²Las expectativas de inflación y la prima por riesgo inflacionario se abarcarán en mayor detalle en las secciones 2.1 y 2.2 de este documento.

³Para una definición del concepto de ajuste por convexidad, ver Adrian y Wu [2009] y Fabozzi [1997].

⁴Arias et al. [2006] describen algunos sesgos asociados al BEI relacionados con las diferencias de liquidez entre los bonos, entre los impactos de las tasas de interés, y entre los riesgos de tasa de interés real de los bonos, dadas sus distintas duraciones.

periodo t .

2.2. La prima por riesgo inflacionario. Para definir la prima por riesgo inflacionario es necesario describir en primer lugar el factor de descuento estocástico, el cual determina el precio de los bonos al igual que su rentabilidad.

2.2.1. Factor de Descuento Estocástico. El factor de descuento estocástico es usado en la literatura para definir los precios y las rentabilidades de los bonos de deuda. Piazzesi [2009], Adrian y Wu [2009] y Christensen et al. [2008], entre otros, utilizan este concepto para ligar las rentabilidades de los bonos a la inflación y para definir la prima por riesgo inflacionario. Como será explicado en secciones posteriores, este concepto también resulta de gran utilidad para relacionar los parámetros del modelo de estado espacio con los de un modelo afín de estructura a término.⁵

Para definir el factor de descuento estocástico se parte de un modelo de maximización de utilidad intertemporal para un inversionista representativo.⁶ En este modelo se puede tranzar un activo en diferentes periodos de tiempo y se maximiza la expectativa de una función de utilidad separable de la siguiente forma:

$$\text{máx } E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j U(C_{t+j}) \right] \quad (5)$$

Donde δ es el factor de descuento temporal, C_{t+j} es el consumo del inversionista en el periodo $t + j$ y $U(C_{t+j})$ es la utilidad del consumo en $t + j$.⁷

Una de las condiciones de primer orden de la ecuación (5) está dada por:

$$U'(C_t) = \delta E_t [(1 + R_{i,t+1})U'(C_{t+1})] \quad (6)$$

Donde $R_{i,t}$ es el rendimiento del activo i en el periodo t .

La ecuación (6) iguala el costo marginal de utilidad de consumir un peso menos en t , al beneficio de utilidad marginal esperada de invertir un peso en un activo i en t , venderlo en $t + 1$ a $(1 + R_{i,t+1})$ pesos y consumir las ganancias.

⁵Una explicación detallada de los modelos afines de estructura a término se encuentra en Duffie y Kan [1996].

⁶Para mayores detalles de este modelo véase Campbell et al. [1997].

⁷Las restricciones a las cuales está sujeto este problema de optimización son las convencionales. Es decir, el flujo de ingresos debe ser igual al flujo de gastos destinado para consumo, durante los $n - 1$ periodos que trabaje el inversionista. Adicionalmente, en el periodo n no hay trabajo, pero el consumo debe ser igual al ahorro del periodo anterior más el rendimiento correspondiente.

Dividiendo (6) por $U'(C_t)$:

$$1 = E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) M_{t+1}^{real} \right] \quad (7)$$

Donde:

$$M_{t+1}^{real} = \frac{\delta U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \quad (8)$$

En la ecuación (8) se define el factor de descuento estocástico real o *pricing kernel*, M_{t+1}^{real} . En este caso, dicha expresión también equivale a la tasa marginal de sustitución intertemporal a la que se enfrenta el inversionista que compra el bono.

Adicionalmente, M_t^{real} está relacionado positivamente con la utilidad marginal del consumo (Adrian y Wu [2009]). Por lo cual, bajo el supuesto de utilidad marginal decreciente, se espera que cuando el consumo agregado y la inflación sean altos ⁸, M_t^{real} tienda a ser muy pequeño.

El BEI también está relacionado con el factor de descuento, puesto que la rentabilidad puede verse como la derivada del precio del bono en un momento t . Los precios de un bono nominal ($P_t^{nom,n}$) y real ($P_t^{real,n}$) vienen dados por:

$$P_t^{nom,n} = E_t [M_{t+n}^{nom}], \quad P_t^{real,n} = E_t [M_{t+n}^{real}]$$

Donde $M_t^{nom} = \frac{M_t^{real}}{\Pi_t}$ corresponde al factor de descuento nominal.

2.2.2. *Prima por riesgo inflacionario.* Siguiendo los resultados de Piazzesi [2009], Adrian y Wu [2009] y García y Werner [2008] y en general, la literatura de modelos afines de estructura a término, se puede definir el factor de descuento estocástico para los bonos reales como:

$$m_{t+1}^{real} = -r_t^{real} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \quad (9)$$

y para los bonos nominales:

$$m_{t+1}^{nom} = -r_t^{real} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - e'_n \mathbf{X}_{t+1} \quad (10)$$

Donde $m_{t+1}^{real} = \log(M_{t+1}^{real})$, $m_{t+1}^{nom} = \log(M_{t+1}^{nom}) = m_{t+1}^{real} - \pi_{t+1}$, $e'_n = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\lambda}_t$ es el precio de mercado del riesgo, r_t^{real} es la tasa de interés del bono real y $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ sigue un proceso ruido blanco Gaussiano multivariado. El vector \mathbf{X}_t está conformado por dos factores latentes no observables y la inflación.

En este tipo de modelos $\boldsymbol{\lambda}_t$ y r_t^{real} son funciones afines del vector \mathbf{X}_t como sigue:

⁸Esto se debe a que, en general, el consumo y el nivel de precios se mueven en la misma dirección.

$$\boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_1 \mathbf{X}_t \quad (11)$$

$$r_t^{real} = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}'_1 \mathbf{X}_t \quad (12)$$

Con,

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} l_t^1 \\ l_t^2 \\ \pi_t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_{0,1} \\ \lambda_{0,2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1,11} & \lambda_{1,12} & 0 \\ \lambda_{1,21} & \lambda_{1,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\delta}_1 = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

La definición de la prima por riesgo inflacionario en términos del factor de descuento estocástico está relacionada con una ecuación de Fisher extendida. En este contexto, Arango y Flórez [2008] amplían la ecuación de Fisher incluyendo la prima por riesgo inflacionario para un periodo adelante. A partir de (1), y basándose en Sargent [1987], estos autores llegan a una expresión similar que incluye un término adicional correspondiente a la covarianza entre el factor de descuento estocástico y la inflación.

De acuerdo a lo anterior y siguiendo los trabajos de Adrian y Wu [2009], y Christensen et al. [2008], la prima por riesgo inflacionario se puede expresar como la covarianza entre la inflación futura y el factor de descuento estocástico futuro de la siguiente forma:⁹

$$\phi_{t,n} = \frac{1}{n} \text{Cov}_t \left(\sum_{j=1}^n \pi_{t+j}, \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) \quad (14)$$

Donde n es el horizonte de maduración de los bonos y π_t es la inflación en el periodo t .

3. METODOLOGÍA

Una vez obtenido el BEI como la diferencia entre los rendimientos de bonos nominales y reales para cada periodo de maduración, se calcula la descomposición de esta medida. En primer lugar, se estiman las expectativas de inflación promedio con base en un modelo afín de estructura a término. Posteriormente, la prima de riesgo es calculada como la diferencia entre el BEI y las expectativas de inflación promedio.

La representación de estado espacio del modelo afín de estructura a término es la siguiente:

⁹Esta expresión es deducida en el Apéndice C.

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{d} + Z\mathbf{X}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (15)$$

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \Phi\mathbf{X}_{t-1} + \Sigma\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (16)$$

Donde $\boldsymbol{\eta}_t \sim NID(\mathbf{0}, H)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim NID(\mathbf{0}, I)$ son dos errores no correlacionados. $\mathbf{X}_t = (l_t^1, l_t^2, \pi_t)'$ es el vector de estado conformado por dos factores latentes y la inflación. Adicionalmente:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_3 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon 3} \end{bmatrix}.$$

y

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} y_t^{nom,3} \\ y_t^{nom,12} \\ y_t^{nom,24} \\ y_t^{nom,36} \\ y_t^{nom,60} \\ \pi_t \\ y_t^{real,24} \\ y_t^{real,36} \\ y_t^{real,60} \\ E_t^{enc}[\pi_{t+12}] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{-A_3^{nom}}{3} \\ \frac{-A_{12}^{nom}}{12} \\ \frac{-A_{24}^{nom}}{24} \\ \frac{-A_{36}^{nom}}{36} \\ \frac{-A_{60}^{nom}}{60} \\ 0 \\ \frac{-A_{24}^{real}}{24} \\ \frac{-A_{36}^{real}}{36} \\ \frac{-A_{60}^{real}}{60} \\ \mathbf{e}'_n (I - \Phi^{12})(I - \Phi)^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{B}_3^{nom}}{3} \\ \frac{-\mathbf{B}_{12}^{nom}}{12} \\ \frac{-\mathbf{B}_{24}^{nom}}{24} \\ \frac{-\mathbf{B}_{36}^{nom}}{36} \\ \frac{-\mathbf{B}_{60}^{nom}}{60} \\ \mathbf{e}'_n \\ \frac{-\mathbf{B}_{24}^{real}}{24} \\ \frac{-\mathbf{B}_{36}^{real}}{36} \\ \frac{-\mathbf{B}_{60}^{real}}{60} \\ \mathbf{e}'_n \Phi^{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Donde $E_t^{enc}[\pi_{t+12}]$ son las expectativas de inflación 12 meses adelante obtenidas mediante una encuesta, $\mathbf{e}'_n = (0, 0, 1)$. Los valores de los parámetros A_n^{nom} , A_n^{real} , \mathbf{B}_n^{nom} , y \mathbf{B}_n^{real} , con $n = 3, 12, 24, 60$ meses, son generados a partir de una relación afín entre la inflación y las tasas de interés bajo un modelo de estructura a término de acuerdo con García y Werner [2008]¹⁰.

La estructura de la matriz de varianzas y covarianzas de $\boldsymbol{\eta}$ es:

$$\text{Var}(\boldsymbol{\eta}) = \text{diag} \{ \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), 0, \tilde{\sigma}_\eta^2(2), \tilde{\sigma}_\eta^2(2), \tilde{\sigma}_\eta^2(2), \tilde{\sigma}_\eta^2(3) \} \quad (18)$$

¹⁰En Apéndice A se presenta una breve explicación de la generación de estos parámetros.

En la ecuación anterior $diag\{\mathbf{A}\}$ es una matriz diagonal donde sus elementos corresponden al vector \mathbf{A} .

En la expresión (18) los primeros cinco términos están definidos como $\tilde{\sigma}_\eta^2(1)$, esto implica que la varianza del error de la ecuación (15), asociada a los rendimientos de los bonos nominales, es la misma sin importar el periodo de maduración. De forma análoga, la varianza del error asociada a los rendimientos de los bonos reales toma el valor de $\tilde{\sigma}_\eta^2(2)$ para los tres periodos de maduración. Es importante notar que la inflación aparece tanto en el vector de observaciones \mathbf{w}_t como en el vector de estado \mathbf{X}_t ; por lo tanto, la varianza del error asociado a la inflación en la ecuación de medida deber ser 0.

La ecuación de medida descrita en (15) indica una relación lineal entre los rendimientos de los bonos nominales y reales con la inflación y dos factores latentes. Estos componentes no observables están asociados con la relación que existe entre el factor de descuento estocástico y el precio de los bonos.

El componente final de la ecuación de medida está relacionado con la inclusión de las expectativas de inflación, obtenidas a partir de una encuesta y tiene como objetivo mejorar los pronósticos de este modelo. Esta ecuación indica que las expectativas de la encuesta corresponden a los pronósticos de la inflación obtenidos de la ecuación de medida más un error. La utilidad de las encuestas para generar pronósticos de las expectativas ha sido discutida en la literatura en trabajos como los de Ang et al. [2007] y Ciccarelli y García [2009].

La ecuación de transición definida en (16) describe la dinámica del vector de estado del modelo y sirve para generar los pronósticos de la inflación con los cuales se calculan las expectativas promedio de la inflación según la ecuación (4).

Dada la anterior representación de estado espacio, la estimación del modelo se realiza por medio de la metodología de máxima verosimilitud utilizando el filtro de Kalman. Como se mencionó anteriormente, los coeficientes A_n^j y B_n^j de (17) para $j = nom, real$ y $n = 3, 12, 24, 36, 60$ ¹¹ se obtienen de acuerdo con la metodología sugerida por García y Werner [2008] tal como se explica en el Apéndice A.

Las expectativas promedio de la inflación hasta 12, 24 y 60 meses se pueden obtener a partir de los pronósticos del vector de estado del modelo. Dado el cálculo del BEI y de las expectativas promedio de la inflación se puede obtener una estimación de la prima por riesgo inflacionario a partir de la ecuación (3).

Uno de los intereses de la estimación del BEI es conocer bajo qué condiciones el diferencial de tasas de interés permite generar una aproximación apropiada a la inflación esperada promedio.

¹¹En el caso de los bonos reales sólo se utiliza $n = 24, 36, 60$.

Una herramienta útil en este caso es la descomposición de varianza de este indicador para cada periodo de maduración:

$$1 = \frac{\text{cov}(BEI_t^n, E_t(\pi_{t,t+n}))}{\text{Var}(BEI_t^n)} + \frac{\text{cov}(BEI_t^n, \phi_t^n)}{\text{Var}(BEI_t^n)} \quad (19)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (19) indica la proporción de la varianza del BEI explicada por la expectativa promedio de inflación, mientras que el segundo término corresponde a la proporción explicada por la prima por riesgo inflacionario.

4. RESULTADOS

El cálculo del BEI se determina con base en las tasas asociadas a la curva cero cupón de los bonos TES en pesos y TES indexados a la UVR, utilizando la metodología de Nelson y Siegel [1987]¹². La muestra utilizada abarca el periodo comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009 y es calculada a partir de los promedios mensuales de los datos diarios. La inflación se calcula como la variación anual del índice de precios al consumidor. Los datos observados de las expectativas de inflación se toman de la encuesta de expectativas de inflación, tasa de cambio y tasa de intervención realizada por el Banco de la República con frecuencia mensual.

Los resultados de la estimación del modelo descrito en (15) y (16) se encuentran en el Cuadro 1. Estos valores indican que los parámetros del modelo son estadísticamente diferentes de cero para los niveles usuales de significancia. En el Apéndice B se muestran diferentes pruebas de especificación sobre los residuales de predicción del modelo de estado espacio. Estos resultados indican que no existen indicios de mala especificación en el modelo.

4.1. Estimación y descomposición del BEI. En la Figura 1 se muestra la estimación y descomposición del BEI para 12, 24 y 60 meses de maduración. En estos gráficos la línea negra representa el valor del BEI, mientras que las áreas grises y negras corresponden a los valores de las expectativas promedio de la inflación y la prima por riesgo inflacionario, respectivamente. Estas estimaciones son presentadas para diferentes muestras en el Cuadro 2.

Estos resultados muestran que existe, en general, una tendencia decreciente de las expectativas promedio de la inflación. Sin embargo, se observa un crecimiento moderado en los años 2007 y 2008. También se observa una disminución considerable de las expectativas de la inflación al final de la muestra analizada. Esto podría obedecer a dos motivos; en primer lugar, las expectativas formadas por los agentes tienden a ser adaptativas, por lo que los niveles recientes observados de inflación tienen una mayor ponderación cuando se genera dicha expectativa. Por otro lado, es posible que los agentes hayan tenido en cuenta la baja actividad económica y consumo de 2009 para determinar la inflación esperada promedio.

Los resultados de la prima por riesgo inflacionario son consistentes con los esperados teóricamente; a medida que aumenta el plazo de maduración, la prima por riesgo inflacionario toma

¹²Estos datos fueron proporcionados por el departamento de operaciones y desarrollo de mercado de la SG-MR del Banco de la República.

Parámetro	Coefficientes	Desviaciones estándar
Φ	$\begin{bmatrix} 0,92 & 0 & 0 \\ 0,37 & -0,89 & 0 \\ -1,45 & -1,79 & -0,77 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,01 & - & - \\ 0,18 & 0,03 & - \\ 0,09 & 0,07 & 0,03 \end{bmatrix}$
δ_0	1,81	0,14
δ_1	$\begin{bmatrix} -0,88 \\ -0,42 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,06 \\ 0,04 \\ - \end{bmatrix}$
Σ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & 0,24 \end{bmatrix}$
λ_0	$\begin{bmatrix} 1,64 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,09 \\ - \end{bmatrix}$
λ_1	$\begin{bmatrix} 1,03 & 0,18 & 0 \\ 0,65 & -0,68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,12 & 0,04 & - \\ 0,19 & 0,10 & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$
μ	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \\ - \\ 0,40 \end{bmatrix}$
$diag(Var(\eta))$	[2,10, 2,10, 2,10, 2,10, 2,10, 0, 2,31, 2,31, 2,31, 1,31]	[0,08, 0,08, 0,08, 0,08, 0,08, -, 0,30, 0,30, 0,30, 1,14]

CUADRO 1. Resultados de la estimación

valores más altos. Este aumento implica que el BEI no sea una buena medida de las expectativas de inflación para mediano y largo plazo. Otro punto importante, es que la prima por riesgo inflacionario tiene una tendencia decreciente a lo largo de la muestra para periodos de maduración medianos y largos ($n = 24$ y 60 meses). Esto puede obedecer al aumento de credibilidad de las políticas de estabilización de la inflación a lo largo de la muestra analizada.

En el Cuadro 3 se lleva a cabo la descomposición de varianza del BEI para la muestra analizada. Se encuentra que a corto plazo (12 meses) la variabilidad del BEI es explicada en un 76% por la varianza de las expectativas de inflación promedio, el 24% restante es explicado por la prima por riesgo inflacionario. Estos resultados se revierten a medida que aumenta el periodo de maduración de los bonos. Para un horizonte de 5 años, la variabilidad explicada por las expectativas de

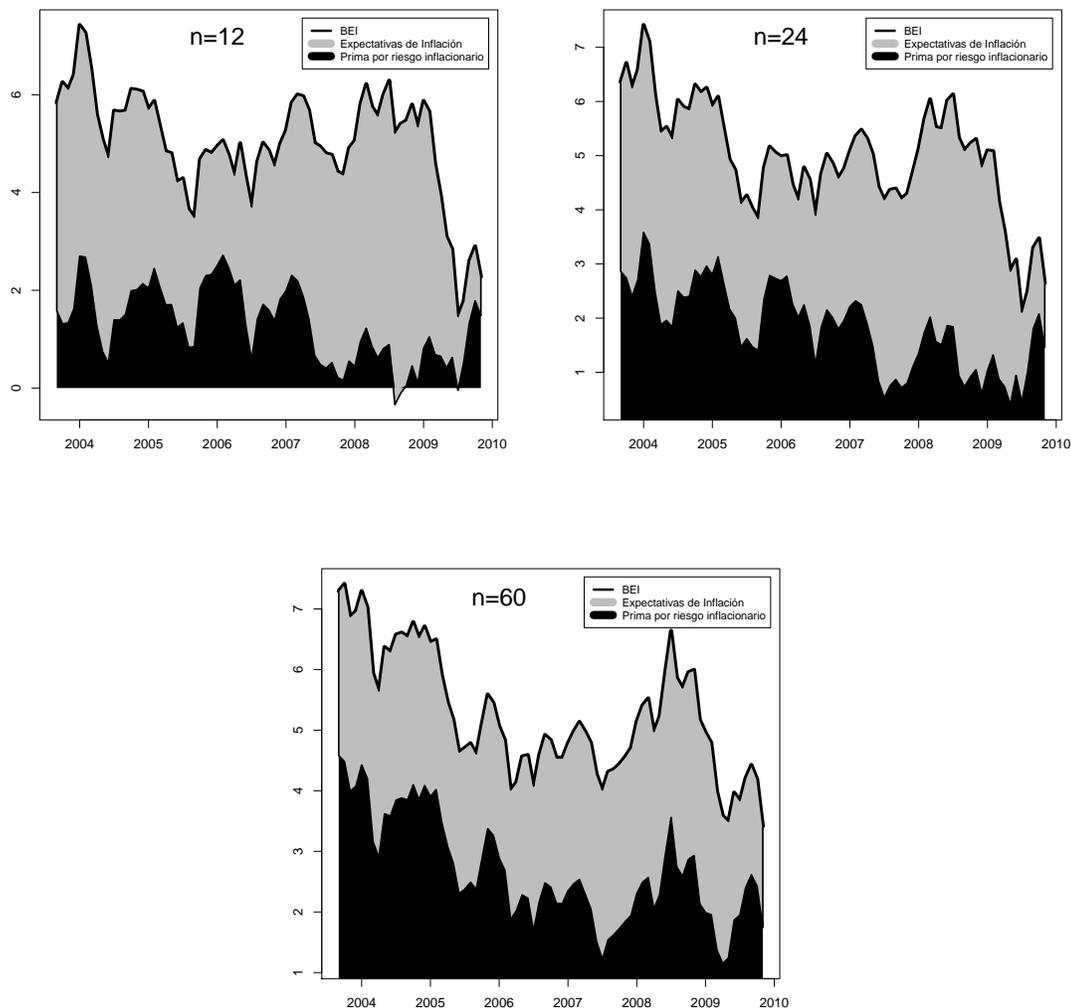


FIGURA 1. Descomposición del BEI para estimaciones 12, 24 y 60 meses adelante.

inflación es tan solo del 19% y por consiguiente del 81% por parte de la prima por riesgo inflacionario.

5. COMENTARIOS FINALES

En este documento se estima el BEI a partir de los rendimientos de los TES en pesos y los TES indexados a la UVR para una muestra entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Por otra parte, el BEI se descompone en dos factores, expectativas promedio de la inflación y prima por riesgo

Muestra	BEI ¹²	BEI ²⁴	BEI ⁶⁰	$E_t(\pi_{t+1,t+12})$	$E_t(\pi_{t+1,t+24})$	$E_t(\pi_{t+1,t+60})$	ϕ^{12}	ϕ^{24}	ϕ^{60}
2003	6,16	6,48	7,14	4,69	3,80	2,85	1,46	2,68	4,28
2004	5,99	6,12	6,53	4,29	3,54	2,74	1,70	2,58	3,79
2005	4,72	4,87	5,37	2,98	2,66	2,34	1,74	2,21	3,03
2006	4,69	4,65	4,56	2,87	2,59	2,31	1,81	2,06	2,25
2007	5,17	4,74	4,61	4,10	3,43	2,69	1,06	1,31	1,93
2008	5,66	5,48	5,63	5,17	4,14	3,01	0,49	1,34	2,62
2009	3,37	3,45	4,08	2,52	2,35	2,20	0,85	1,10	1,88
03 – 09	5,02	4,99	5,25	3,73	3,16	2,57	1,29	1,83	2,68

CUADRO 2. Descomposición del BEI para diferentes horizontes de pronóstico. BEI^n y ϕ^n indican el *break even inflation* y la prima por riesgo inflacionario para n meses adelante, respectivamente. $E_t(\pi_{t+1,t+n})$ es la esperanza promedio de la inflación para los periodos $t + 1$ hasta $t + n$ condicionada a la información disponible en t .

Horizonte (meses)	Inflación Esperada	Prima por riesgo inflacionario
12	0,76	0,24
24	0,49	0,51
60	0,19	0,81

CUADRO 3. Descomposición de varianza del BEI para diferentes horizontes de pronóstico.

inflacionario. Estos cálculos son realizados para tres periodos de maduración, 1, 2 y 5 años.

Las expectativas promedio de la inflación son estimadas por medio de un modelo afín de estructura a término que relaciona los rendimientos de los TES con dos factores latentes y la inflación. Con el objetivo de mejorar los pronósticos de la inflación, este modelo incluye las expectativas de inflación a 12 meses obtenidas de la encuesta del Banco de la República.

Las estimaciones de las expectativas de inflación presentan, en general, un tendencia decreciente durante el periodo estudiado. Esto se puede deber al aumento de la confianza en la política monetaria por parte de los agentes. Otro resultado que soporta esta hipótesis es que la prima por riesgo inflacionario presenta una tendencia decreciente a lo largo de la muestra para periodos de maduración de mediano y largo plazo (2 y 5 años).

Los resultados de las estimaciones del BEI muestran que a corto plazo (1 año) ésta es una medida aproximada de las expectativas de inflación. Para periodos de maduración más largos (5 años), esta situación cambia, pues la prima por riesgo inflacionario toma valores altos y se convierte en un componente importante del BEI, esto se debe a que existe un mayor riesgo de cambios no esperados en la inflación futura a medida que el horizonte de tiempo es más largo.

La afirmación anterior es corroborada por los resultados de la descomposición de varianza del BEI. A corto plazo (1 año) se encuentra que la variabilidad de las expectativas de inflación explican en un 76% a la varianza del BEI. Mientras que a largo plazo (5 años) éstas sólo explican el 19%.

REFERENCIAS

- ADRIAN, T., Y H. WU (2009): "The term structure of inflation expectations," Staff Reports 362, Federal Reserve Bank of New York.
- ANG, A., G. BEKAERT, Y M. WEI (2007): "Do macro variables, asset markets, or surveys forecast inflation better?," *Journal of Monetary Economics*, 54(4), 1163–1212.
- ARANGO, L. E., Y M. A. AROSEMENA (2003): "El Tramo Corto de la Estructura a Plazo como predictor de Expectativas de Inflación en Colombia," Borradores de Economía 264, Banco de la República.
- ARANGO, L. E., Y L. A. FLÓREZ (2008): "Tramo corto de la curva de rendimientos, cambio de régimen inflacionario y expectativas de inflación en Colombia," *El trimestre económico*, LXXV(297), 183 – 210.
- ARIAS, M., C. HERNANDEZ, Y C. ZEA (2006): "Expectativas de inflación en el mercado de deuda pública colombiano," Borradores de economía 390, Banco de la República.
- CAMPBELL, J. Y., A. W. LO, Y A. C. MACKINLAY (1997): "The Econometrics of Financial Markets," .
- CHRISTENSEN, J. H. E., J. A. LÓPEZ, Y G. D. RUDEBUSCH (2008): "Inflation expectations and risk premiums in an arbitrage-free model of nominal and real bond yields," Working Paper Series 2008-34, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- CICCARELLI, M., Y J. A. GARCÍA (2009): "What drives euro area break-even inflation rates?," Working Paper Series 996, European Central Bank.
- DUFFIE, D., Y R. KAN (1996): "A yield factor model of interest rates," *Mathematical Finance*, 6(4), 379–406.
- EJSING, J., J. A. GARCÍA, Y T. WENER (2007): "The term structure of euro area break-even inflation rates: The impact of seasonality," Working Paper Series 830, European Central Bank.
- FABOZZI, F. J. (1997): *Bonds Markets Analysis and Strategies*. Prentice Hall, 3 edn.
- FISHER, I. (1930): *The Theory of Interest*. Macmillan.
- GARCÍA, J. A., Y T. WERNER (2008): "Inflation risks and inflation risk premia," Ecb working paper, European Central Bank.
- NELSON, C. R., Y A. F. SIEGEL (1987): "Parsimonious modelling of yield curves," *Journal of Business*, 60(4), 473–489.
- PIAZZESI, M. (2009): "Affine Term Structure Models," in *Handbook of Financial Econometrics*, ed. by L. Hansen, y Y. Ait-Sahalia, pp. 691–766. North Holland.
- SACK, B. (2000): "Deriving inflation expectations from nominal and inflation-indexed Treasury yields," Finance and Economics Discussion Series 2000-33, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
- SARGENT, T. J. (1987): *Dynamic Macroeconomic Theory*. The MIT Press.
- SARTE, P.-D. G. (1998): "Fisher's equation and the inflation risk premium in a simple endowment economy," *Economic Quarterly*, (Fall), 53–72.

APÉNDICE A. RELACIÓN ENTRE EL MODELO AFÍN DE ESTRUCTURA A TÉRMINO Y EL MODELO DE ESTADO ESPACIO

En esta sección se muestra la relación entre los parámetros del modelo de estado espacio definido en (15) y (16) y un modelo afín de estructura a término.

La metodología usada para la generación de estos parámetros corresponde a la utilizada por García y Werner [2008]. El procedimiento consiste en obtener los parámetros de interés a partir de la definición de los precios de los bonos en términos del factor de descuento estocástico y posteriormente de la tasa de interés y del vector de estado. A continuación se describe este proceso aplicado a los bonos reales y nominales.

A.1. Bonos reales. El precio de un bono real en t con un periodo de maduración, $n = 1$, es el valor esperado del factor de descuento estocástico en $t + 1$. Es decir,

$$P_t^{real,1} = E_t \left(M_{t+1}^{real} \right)$$

Substituyendo el factor de descuento estocástico en la ecuación anterior por la ecuación (9), aplicando propiedades de la distribución normal y log-normal y reemplazando (12), se obtiene:

$$P_t^{real,1} = \exp(-r_t^{real}) = \exp(-\delta_0 - \boldsymbol{\delta}'_1 \mathbf{X}_t)$$

Si se compara la anterior ecuación con una función afín exponencial de forma $P_t^{real,1} = \exp(A_1^{real} + \mathbf{B}_1^{real'} \mathbf{X}_t)$, se obtienen los valores de los parámetros para $n = 1$:

$$A_1^{real} = -\delta_0 \qquad \mathbf{B}_1^{real'} = -\boldsymbol{\delta}_1 \qquad (20)$$

En general, el precio en t de un bono con $n + 1$ periodos de maduración esta dado por:

$$\begin{aligned} P_t^{real,n+1} &= E_t \left(M_{t+1}^{real} P_{t+1}^{real,n} \right) \\ P_t^{real,n+1} &= E_t \left[\exp \left(-r_t^{real} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \right) \exp \left(A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} \mathbf{X}_{t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Substituyendo (16) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} P_t^{real,n+1} &= E_t \left[\exp \left(-r_t^{real} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\boldsymbol{\mu} + \Phi \mathbf{X}_t + \Sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}) \right) \right] \\ P_t^{real,n+1} &= \exp \left(-r_t^{real} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\boldsymbol{\mu} + \Phi \mathbf{X}_t) \right) E_t \left[\exp \left((\mathbf{B}_n^{real'} \Sigma - \boldsymbol{\lambda}'_t) \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Usando propiedades de la distribución normal se obtiene:

$$P_t^{real,n+1} = \exp\left(-r_t^{real} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}'_t\boldsymbol{\lambda}_t + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'}(\boldsymbol{\mu} + \Phi\mathbf{X}_t) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}_n^{real'}\Sigma - \boldsymbol{\lambda}'_t)(\mathbf{B}_n^{real'}\Sigma - \boldsymbol{\lambda}'_t)'\right)$$

Reemplazando $P_t^{real,n+1}$ por $\exp(A_{n+1}^{real} + \mathbf{B}_{n+1}^{real'}\mathbf{X}_t)$ y sustituyendo $\boldsymbol{\lambda}_t$ y r_t^{real} según las expresiones (11) y (12):

$$\exp\left(A_{n+1}^{real} + \mathbf{B}_{n+1}^{real'}\mathbf{X}_t\right) = \exp\left(-\delta_0 + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'}(\boldsymbol{\mu} - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_0) + \frac{1}{2}\mathbf{B}_n^{real'}\Sigma\Sigma\mathbf{B}_n^{real} + \left(\mathbf{B}_n^{real'}(\Phi - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1) - \boldsymbol{\delta}'_1\right)\mathbf{X}_t\right)$$

Finalmente, al igualar los términos constantes y los términos que premultiplican a \mathbf{X}_t se tiene:

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{real} &= -\delta_0 + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'}(\boldsymbol{\mu} - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_0) + \frac{1}{2}\mathbf{B}_n^{real'}\Sigma\Sigma\mathbf{B}_n^{real} \\ \mathbf{B}_{n+1}^{real'} &= -\boldsymbol{\delta}'_1 + \mathbf{B}_n^{real'}(\Phi - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1) \end{aligned} \quad (21)$$

Las expresiones presentadas en (21) representan unas ecuaciones recursivas para los parámetros de interés. Utilizando esta recursión y los valores iniciales dados en (20), se encuentra la siguiente solución:

$$\mathbf{B}_j^{real'} = -\sum_{i=1}^j \boldsymbol{\delta}'_1 (\Phi - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1)^{i-1} \quad (22)$$

$$A_j^{real} = -j\delta_0 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{real'}(\boldsymbol{\mu} - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{real'}\Sigma\Sigma\mathbf{B}_i^{real} \quad (23)$$

Para $j = 2, \dots, n$.

A.2. Bonos nominales. Para generar el precio de los bonos nominales se usa el factor de descuento nominal especificado en (10).

El precio de este bono está definido como:

$$\begin{aligned} P_t^{nom,1} &= \exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'}\mathbf{X}_t) \\ P_t^{nom,1} &= E_t \left[\exp\left(-r_t^{real} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}'_t\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}'_t\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - \mathbf{e}'_n\mathbf{X}_{t+1}\right) \right] \end{aligned}$$

Reemplazando a r_t^{real} y \mathbf{X}_t por las expresiones (12) y (16) y reorganizando los términos se obtiene:

$$\begin{aligned}\exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t) &= E_t \left[\exp \left(-\delta_0 - (\boldsymbol{\delta}'_1 + \mathbf{e}'_n \Phi) \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t - \mathbf{e}'_n \boldsymbol{\mu} - (\boldsymbol{\lambda}'_t + \mathbf{e}'_n \Sigma) \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \right) \right] \\ \exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t) &= \exp \left(-\delta_0 - (\boldsymbol{\delta}'_1 + \mathbf{e}'_n \Phi) \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t - \mathbf{e}'_n \boldsymbol{\mu} \right) E_t \left[\exp \left(-(\boldsymbol{\lambda}'_t + \mathbf{e}'_n \Sigma) \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \right) \right]\end{aligned}$$

Resolviendo el operador de expectativas y sustituyendo $\boldsymbol{\lambda}_t$ por (11) se tiene:

$$\exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t) = \exp \left(-\delta_0 - (\boldsymbol{\delta}'_1 + \mathbf{e}'_n \Phi) \mathbf{X}_t - \mathbf{e}'_n \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{e}'_n \Sigma \Sigma \mathbf{e}_n + \mathbf{e}'_n \Sigma \boldsymbol{\lambda}_0 + \mathbf{e}'_n \Sigma \boldsymbol{\lambda}_1 \mathbf{X}_t \right)$$

Igualando los términos constantes y los términos premultiplicados por \mathbf{X}_t :

$$\begin{aligned}A_1^{nom} &= -\delta_0 - \mathbf{e}'_n \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{e}'_n \Sigma \Sigma \mathbf{e}_n + \mathbf{e}'_n \Sigma \boldsymbol{\lambda}_0 \\ \mathbf{B}_1^{nom'} &= \mathbf{e}'_n \Sigma \boldsymbol{\lambda}_1 - (\boldsymbol{\delta}'_1 + \mathbf{e}'_n \Phi)\end{aligned}\tag{24}$$

En general, el precio de un bono con periodo de maduración $n + 1$ se puede definir como:

$$\begin{aligned}P_t^{nom, n+1} &= \exp(A_{n+1}^{nom} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t) \\ &= E_t [M_{t+1}^{nom} P_{t+1}^{nom, n}] \\ &= E_t \left[\exp \left(-\delta_0 - \boldsymbol{\delta}'_1 \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - \mathbf{e}'_n \mathbf{X}_{t+1} + A_n^{nom} + \mathbf{B}_n^{nom'} \mathbf{X}_{t+1} \right) \right]\end{aligned}$$

Substituyendo a \mathbf{X}_{t+1} según (16) en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}\exp(A_{n+1} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t) &= E_t \left[\exp \left(-\delta_0 - \boldsymbol{\delta}'_1 \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_t \boldsymbol{\lambda}_t + ((\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Sigma - \boldsymbol{\lambda}'_t) \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_n^{nom} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Phi \mathbf{X}_t \right) \right]\end{aligned}$$

Resolviendo el operador de expectativas y sustituyendo $\boldsymbol{\lambda}_t$ según (11):

$$\begin{aligned}\exp(A_{n+1} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t) &= \exp \left[-\delta_0 + A_n^{nom} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) (\boldsymbol{\mu} - \Sigma \boldsymbol{\lambda}_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Sigma \Sigma (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n) + ((\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Phi - \boldsymbol{\delta}'_1 - (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Sigma \boldsymbol{\lambda}_1) \mathbf{X}_t \right]\end{aligned}$$

Finalmente, igualando los términos constantes y los términos que premultiplican a \mathbf{X}_t en ambos lados de la ecuación, se obtiene,

$$A_{n+1}^{nom} = -\delta_0 + A_n^{nom} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) (\boldsymbol{\mu} - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Sigma \Sigma (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n)' \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{nom'} = (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) (\Phi - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1) - \boldsymbol{\delta}'_1 \quad (26)$$

Al igual que en el caso real, es posible llegar una solución general a partir de las ecuaciones (24), (25) y (26):

$$\mathbf{B}_j^{nom'} = -\sum_{i=1}^j \boldsymbol{\delta}'_1 (\Phi - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1)^{i-1} - \mathbf{1}_{(j>2)} \sum_{i=1}^{j-2} \mathbf{e}'_n (\Phi - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1)^i + \mathbf{e}'_n [-\Phi - \mathbf{I}_n + \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1] (\Phi - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_1)^{j-1} \quad (27)$$

$$A_j^{nom} = -j\delta_0 - j\mathbf{e}'_n (\boldsymbol{\mu} - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_0) + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{nom'} (\boldsymbol{\mu} - \Sigma\boldsymbol{\lambda}_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{B}_i^{nom'} \Sigma \Sigma (\mathbf{B}_i^{nom'} - \mathbf{e}_n)) \quad (28)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{j-1} \mathbf{e}'_n \Sigma \Sigma (\mathbf{B}_i^{nom} - \mathbf{e}_n) + \frac{1}{2} \mathbf{e}'_n \Sigma \Sigma \mathbf{B}_1^{nom}$$

Para $j = 2, \dots, n$. Donde $\mathbf{1}_A$ denota la función característica evaluada en el subconjunto A .

A.3. Relación entre en modelo afín de estructura a término y los parámetros del modelo de estado y espacio. Suponiendo que los rendimientos se pueden expresar como una función afín del vector de estado \mathbf{X}_t de la siguiente forma:

$$y_t^{k,n} = -\frac{1}{n} \log(P_t^{k,n})$$

$$y_t^{k,n} = -\frac{1}{n} (A_n^k + \mathbf{B}_n^{k'} \mathbf{X}_t)$$

para $k = nom, real$.

Los parámetros de \mathbf{d} y Z de la ecuación de medida del modelo de estado espacio, asociados con los rendimientos, pueden reemplazarse por los resultados obtenidos en (22), (23), (27) y (28), tal como se indica en la ecuación (17).

APÉNDICE B. PRUEBAS DE ESPECIFICACIÓN DEL MODELO

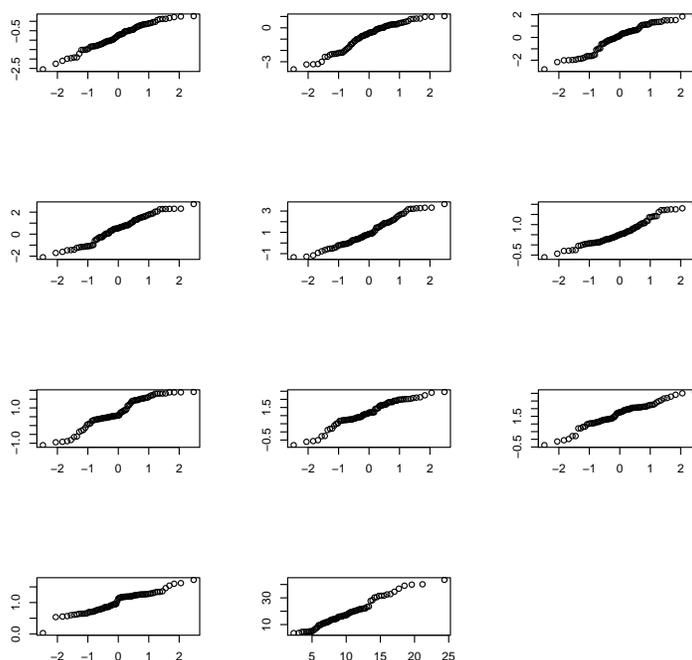


FIGURA 2. Gráficas cuantil-cuantil univariadas y multivariadas. Las primeras diez figuras corresponden a las gráficas QQ de cada uno de los residuos de la ecuación de medida, mientras que la figura final corresponde a la gráfica QQ multivariada asociada a estos residuos.

En la Figura 2 se muestran los gráficos cuantil - cuantil de los residuos asociados a η de la ecuación (15). En el eje horizontal se encuentran los cuantiles teóricos de la distribución normal, y en el vertical los cuantiles empíricos de la variable considerada. Si esta variable tiene una distribución normal se espera que el gráfico corresponda a una recta de 45° . Los gráficos univariados muestran que los componentes de $\hat{\eta}$ no presentan desviaciones fuertes con respecto a una distribución normal, lo mismo sucede con respecto a una distribución normal multivariada, como se puede observar en el último gráfico.

Las Figuras 3 y 4 muestran los valores de los estadísticos *Cusum* y *Cusum* cuadráticos con bandas de significancia al 1%. Estas gráficas presentan las sumas acumuladas y sumas cuadráticas acumuladas de los residuos del modelo para diferentes periodos de maduración. Estos resultados

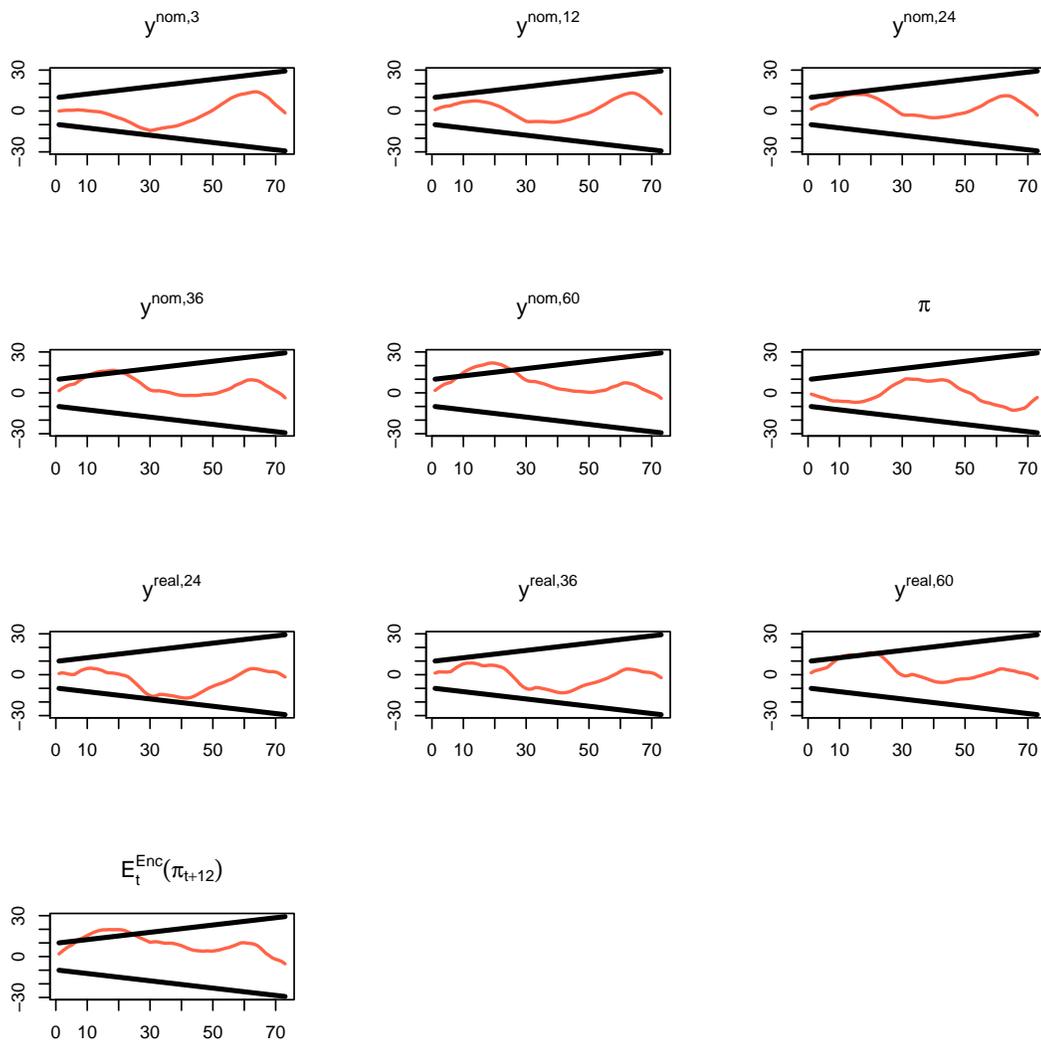


FIGURA 3. Gráficos *Cusum* de los errores de predicción.

indican que no existen mayores problemas de especificación del modelo ya que los valores de los estadísticos se encuentran, por lo general, dentro de las bandas de significancia.

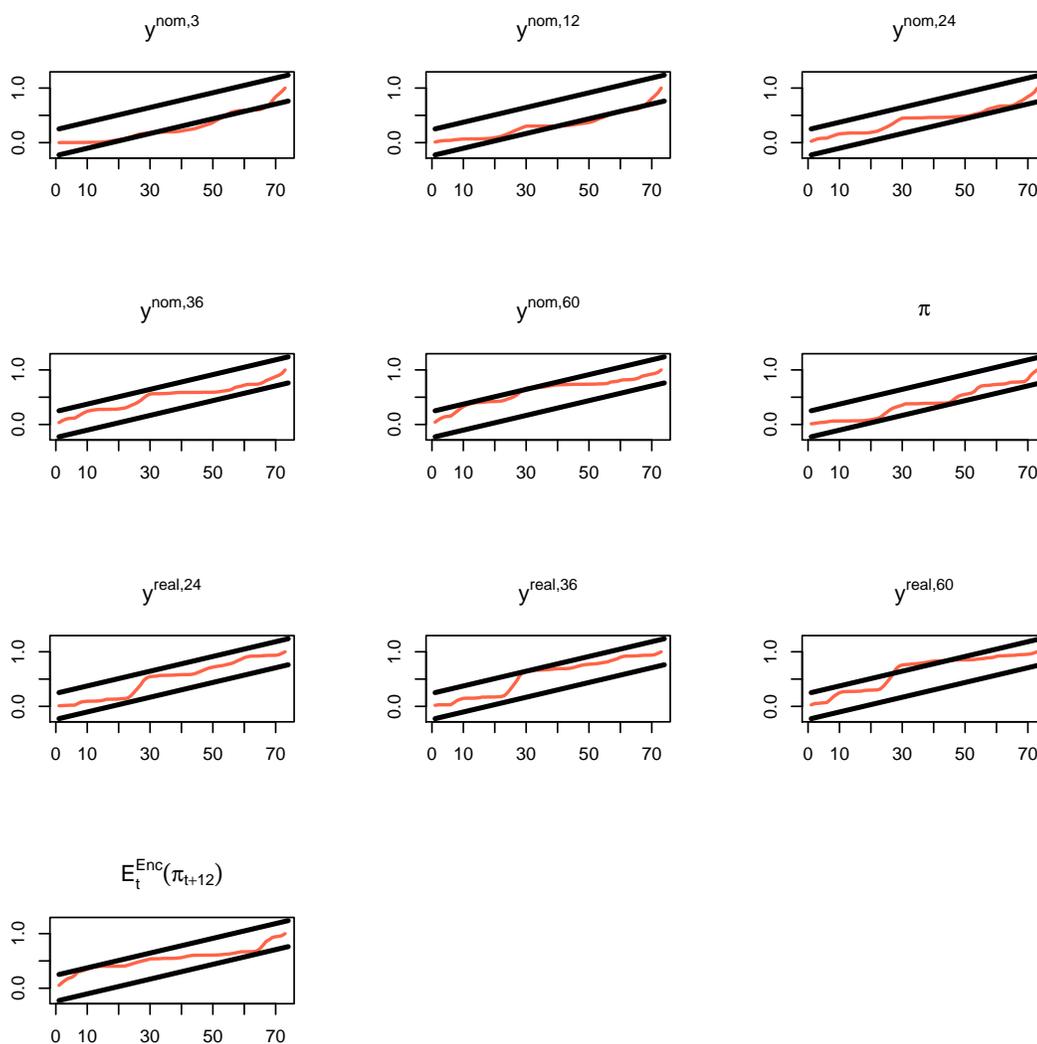


FIGURA 4. Gráficos *Cusum* cuadráticos de los errores de predicción.

APÉNDICE C. DESCOMPOSICIÓN DEL BREAK EVEN INFLATION

En este apéndice se deduce la ecuación (3), donde se descompone el BEI en tres componentes; expectativas promedio de inflación, prima por riesgo inflacionario y ajuste por convexidad.

A partir de los conceptos utilizados en secciones anteriores, se tiene que el precio de un bono real está dado por:

$$P_t^{real,n} = E_t \left[\prod_{j=1}^n M_{t+j}^{real} \right]$$

Donde M_t^{real} es el factor de descuento estocástico. Teniendo en cuenta que $y_t^{real,n} = -\frac{1}{n} \log \left(P_t^{real,n} \right)$, la ecuación anterior se puede representar de la siguiente forma:

$$y_t^{real,n} = -\frac{1}{n} \log \left[E_t \left(\prod_{j=1}^n M_{t+j}^{real} \right) \right]$$

Dado que $m_t^{real} = \log(M_t^{real})$, suponiendo que $m_t^{real} \sim NID$ y utilizando propiedades de la distribución normal y log-normal,¹³ se obtiene:

$$y_t^{real,n} = -\frac{1}{n} \left[E_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) \right]$$

Análogamente para los bonos nominales:

$$P_t^{nom,n} = E_t \left[\prod_{j=1}^n M_{t+j}^{nom} \right]$$

además,

$$y_t^{nom,n} = -\frac{1}{n} \left[E_t \left(\sum_{j=1}^n (m_{t+j}^{real} - \pi_{t+j}) \right) + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n (m_{t+j}^{real} - \pi_{t+j}) \right) \right]$$

Calculando el BEI como la diferencia entre los rendimientos y desarrollando el operador de varianza:

$$\begin{aligned} y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} &= \frac{1}{n} E_t \left[\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right] - \frac{1}{2n} \left[\text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) + \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \text{Cov}_t \left(\sum_{i=1}^n m_{t+i}^{real}, \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right) - \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) \right] \end{aligned}$$

Eliminando términos semejantes, se tiene:

¹³Si $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $e^x \sim \text{LogN}$ con $E(e^x) = e^{\mu+0.5\sigma^2}$ y $V(e^x) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

$$y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} = \underbrace{\frac{1}{n} E_t \left[\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right]}_{\text{Inflaci3n esperada promedio}} + \underbrace{\frac{1}{n} \text{Cov}_t \left(\sum_{i=1}^n m_{t+j}^{real}, \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right)}_{\text{Prima por riesgo inflacionario}} - \underbrace{\frac{1}{2n} \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right)}_{\text{Ajuste por convexidad}} \quad (29)$$

La ecuaci3n (29) indica la descomposici3n del BEI en los factores especificados en las ecuaciones (3) y (4).