GREThA
Groupe de Recherche en Économie Théorique et Appliquée

Règles de politique monétaire, apprentissage et stabilité: une revue de la littérature récente

Martin ZUMPE

Université de Bordeaux

GREThA UMR CNRS 5113

Cahiers du GREThA
n° 2010-01

GRETHA UMR CNRS 5113
Université Montesquieu Bordeaux IV
Avenue Léon Duguit - 33608 PESSAC - FRANCE
Tel : +33 (0)5.56.84.25.75 - Fax : +33 (0)5.56.84.86.47 - www.gretha.fr

Règles de politique monétaire, apprentissage et stabilité: une revue de la littérature récente

Résumé

Cet article présente la littérature consacrée à l'apprentissage économétrique et à ses répercussions sur les performances des règles de politique monétaire dans le nouveau modèle canonique de la macroéconomie. Les anticipations rationnelles qui caractérisent la version originale du modèle peuvent en effet être remplacées par des anticipations basées sur des algorithmes d'estimation. La mise à jour permanente de ces estimations permet une interprétation comme processus d'apprentissage des agents. Cet apprentissage induit des dynamiques supplémentaires dans le modèle. La littérature en question utilise deux critères pour étudier la capacité des règles de politique monétaire à stabiliser l'économie : (i) l'unicité de l'équilibre en anticipations rationnelles dans la version originale du modèle et (ii) la stabilité de cet équilibre face au processus d'apprentissage des agents dans la version modifiée. L'apport de la prise en compte de l'apprentissage réside dans le fait que le critère (ii) peut détecter la défaillance d'une règle qui aurait échappé à une modélisation avec anticipations rationnelles. Le message principal de la littérature passée en revue est néanmoins la robustesse de la plupart des résultats obtenus sous anticipations rationnelles. L'article s'achève par une discussion sur les difficultés particulières posées par l'introduction du processus d'apprentissage dans le nouveau modèle canonique.

Mots-clés : règles de politique monétaire – apprentissage – détermination - stabilité

Monetary Policy Rules, Learning and Stability: a Survey of the Recent Literature

Abstract

This paper presents the literature about econometric learning and its impact on the performances of monetary policy rules in the framework of the new canonical macroeconomic model. Rational expectations which are a building block of the original model can thus be replaced by expectations based on estimation algorithms. The permanent updating of these estimations can be interpreted as a learning proces of the model's agents. This learning proces induces additional dynamics into the model. The literature in question uses two criteria in order to analyse the ability of monetary policy rules to stabilise the economy: (i) uniqueness of the rational expectations equilibrium in the original model and (ii) stability in regards to learning in the modified model. Taking learning into account enables to detect shortcomings of a rule according to (ii) that would not been seen in a rational expectations model. However, the main message of the surveyed literature is that most of the results found in a rational expectations framework are robust. The paper ends with a discussion on the specific problems met in the introduction of a learning proces in the new canonical model.

Keywords: monetary policy rules – learning – determination - stability

JEL : E52 ; E31 ; D84

Reference to this paper: Martin ZUMPE, *Règles de politique monétaire, apprentissage et stabilité: une revue de la littérature récente*", *Working Papers of GREThA*, n°2010-01, http://ideas.repec.org/p/grt/wpegrt/2010-01.html.

GRETHA UMR CNRS 5113
Université Montesquieu Bordeaux IV
Avenue Léon Duguit - 33608 PESSAC - FRANCE
Tel : +33 (0)5.56.84.25.75 - Fax : +33 (0)5.56.84.86.47 - www.gretha.fr

1 Introduction

L'étude des règles de politique monétaire a connu un regain d'intérêt depuis la proposition d'une règle de détermination du taux d'intérêt par Taylor (1993), alors que le nouveau modèle canonique de la macroéconomie (ci-après *nouveau modèle canonique*) ((Bernanke et al. 1998), McCallum & Nelson (1999), Clarida et al. (1999), Woodford (2003*b*), Walsh (2003)) s'est établi comme un cadre d'analyse incontournable des propriétés de ces règles. Le succès de ce modèle s'explique en partie par sa faculté à reproduire des caractéristiques essentielles de modèles plus larges utilisés en pratique par les banques centrales (Clarida et al. 1999) avec une remarquable économie de moyens : l'expression la plus simple du modèle ne comporte que quatre équations linéaires. L'analyse des propriétés des règles de politique monétaire vise, dans ce contexte, notamment leur capacité à éviter la multiplicité des équilibres stationnaires. En effet, le nouveau modèle canonique est un modèle à anticipations rationnelles et il est à ce titre confronté à la possibilité d'équilibres multiples. La multiplicité des équilibres est considérée comme indésirable, car elle est susceptible d'amplifier les fluctuations de l'inflation et de la production. L'analyse parvient au résultat principal que seules les règles qui réagissent à l'inflation d'une manière suffisamment forte parviennent à stabiliser l'économie (Bullard & Mitra 2002). Ce résultat, connu comme principe de Taylor (Woodford 2003*b*), est toutefois à prendre avec précaution. Il est effectivement basé sur les hypothèses informationnelles très fortes qui caractérisent les modèles à anticipations rationnelles (Sargent 1993, p. 21-22). L'introduction de mécanismes d'apprentissage dans ce modèle permet précisément d'examiner la robustesse de ce principe lorsque ces hypothèses sont relâchées. La confrontation du modèle à des processus d'apprentissage modélisés sous la forme des algorithmes d'estimation (Evans & Honkapohja 2001, 2009) a donné naissance à une littérature foisonnante (Bullard & Mitra 2002, Evans & Honkapohja 2003*a*,*b*,*c*, 2006, Mitra 2003, Preston 2005, 2006). C'est cette littérature que nous envisageons de revisiter dans cette revue.[1]

La section 2 présente le point de repère incontournable qu'est la version originale du modèle avec anticipations rationnelles. Elle décrit et illustre les questions liées à la multiplicité des équilibres. La section 3 expose d'abord le nouveau modèle canonique avec apprentissage et présente la méthode d'analyse adaptée à ce contexte particulier. Les résultats obtenus dans ce modèle seront ensuite comparés avec ceux de la section 2 (qui concernent le cadre avec anticipations rationnelles). La section 4 est consacrée aux questions particulières qui s'imposent lorsqu'on confronte le nouveau modèle cano-

[1] Des revues de la littérature en anglais ont été réalisées par Evans & Honkapohja (2003*a*, 2007) et Bullard (2006). Evans & Honkapohja (2003*a*) se concentrent sur l'apprentissage dans le nouveau modèle canonique. Les revues de Bullard (2006) et d'Evans & Honkapohja (2007) couvrent aussi d'autres modèles macroéconomiques.

nique aux processus d'apprentissage à la Evans & Honkapohja (2001). La focalisation délibérée de la revue sur le cas du nouveau modèle canonique se révèle ici avantageuse, car elle permet d'exposer ces points d'une manière plus détaillée que dans les revues moins spécialisées (cf. par exemple la sous-section 4.1.1 qui présente le débat entre Evans et al. (2002) et Preston (2005, 2006)). La suite de la section 4 suggère des extensions du modèle qui sont susceptibles de le rendre plus réaliste. Ces extensions pourraient ainsi renforcer le progrès substantiel en termes de réalisme qui a pu être réalisé grâce à la mobilisation des algorithmes d'apprentissage. La section 5 conclut.

2 Les performances des règles de politique monétaire dans le nouveau modèle canonique

Cette section présente le modèle ainsi que des règles de politique monétaire qui le complètent. Elle discute ensuite les performances des règles en termes de stabilisation de l'économie.

2.1 Le nouveau modèle canonique de la macroéconomie

La littérature sur la politique monétaire en présence d'apprentissage retient le plus souvent des versions du nouveau modèle canonique qui sont proches de celui exposé par Clarida et al. (1999). Ce modèle synthétise le fonctionnement du secteur privé de l'économie par le biais du système d'équations suivant[2]

$$x_t = E_t x_{t+1} - \phi(i_t - E_t \pi_{t+1}) + g_t \tag{IS}$$

$$\pi_t = \lambda x_t + \beta E_t \pi_{t+1} + u_t \tag{CP}$$

$$g_t = \mu g_{t-1} + \tilde{g}_t \tag{1}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \tilde{u}_t \tag{2}$$

x_t est l'écart entre les logarithmes de la production courante et de son niveau naturel. La production est à son niveau naturel dans une économie caractérisée par la parfaite flexibilité des prix et des salaires. L'inflation π_t est définie comme la variation en pourcentage du niveau général des prix entre $t-1$ et t. Le taux d'intérêt nominal i_t (ci-après *taux nominal*) et l'inflation sont exprimés en déviation par rapport aux niveaux associés à l'état stationnaire (cf. annexe A). g_t et u_t sont des chocs de demande et d'offre ($\tilde{g}_t$ et $\tilde{u}_t$ sont *iid* avec des moments $(0, \sigma_g^2)$ et $(0, \sigma_u^2)$). Les paramètres λ et ϕ sont

[2]Les fondements microéconomiques de ce modèle combinent rigidité des prix et maximisation intertemporelle de l'utilité des ménages et des profits des firmes. Des présentations exhaustives de ces fondements se trouvent dans Woodford (2003*b*), Walsh (2003) ou Galí (2008).

strictement positifs. β, $|\mu|$ et $|\rho|$ appartiennent à l'intervalle $[0,1]$. ϕ et β représentent l'élasticité de substitution intertemporelle et le taux d'escompte des ménages. λ indique la pente de la courbe de Phillips. L'opérateur d'espérance conditionnelle à l'information I_t disponible en t, avec $E_t = E(\cdot|I_t)$, traduit l'hypothèse que les anticipations des agents sont rationnelles.[3]

Le modèle exposé par Clarida et al. (1999) est une approximation linéaire autour de l'état stationnaire d'un modèle dynamique stochastique d'équilibre général avec rigidité des prix à la Calvo (1983).[4] L'équation (IS) provient de la log-linéarisation de la relation d'Euler associée à l'optimisation intertemporelle de la consommation des ménages à l'équilibre du marché des biens et services. Elle correspond à une courbe de type "IS" dans la mesure où elle décrit une relation négative entre le taux d'intérêt réel ex ante et l'activité. En effet, une baisse du taux réel ex ante implique une diminution de la rémunération de l'épargne. Par conséquent, les ménages épargnent moins et consomment davantage, ce qui fait augmenter la production et, toutes choses égales par ailleurs, aussi l'écart de production. L'écart de production dépend également de l'anticipation $E_t x_{t+1}$. Ceci s'explique par le fait que les ménages souhaitent lisser leur niveau de consommation au cours du temps. L'anticipation d'une baisse de l'écart de production futur signifie alors que les ménages prévoient une dégradation de leur capacité future à consommer. L'objectif d'une consommation lissée exige alors une hausse de l'épargne et une baisse de la consommation courante, ceteris paribus.

L'équation (CP) est une approximation log-linéaire autour de l'état stationnaire du comportement de fixation des prix des firmes dans un contexte de rigidité des prix à la Calvo (1983). A chaque période, chaque firme doit maintenir son prix inchangé avec la probabilité fixe ϑ. L'approximation (CP) traduit les intuitions de la nouvelle courbe de Phillips : l'inflation dépend positivement de l'écart de production et de l'inflation anticipée. Un écart de production positif signifie que le niveau de production est supérieur à son niveau naturel. L'accroissement de la demande associé à un écart de production positif pousse les firmes à augmenter leurs prix de vente, ce qui provoque une hausse de l'inflation. L'anticipation d'une inflation future po-

[3]Le contenu de l'ensemble d'information I_t est rarement explicité d'une manière exhaustive dans les travaux qui font appel aux anticipations rationnelles. Salge (1997) fait remarquer qu'il est insuffisant d'indiquer que l'ensemble contient les réalisations passées et courantes des variables endogènes et exogènes : "L'ensemble d'information I_t devrait effectivement être élargi par l'incorporation du modèle économique entier qui est sensé gouverner le monde (au moins le monde économique)" (toutes les traductions sont faites par l'auteur du présent article). Dans le cas du nouveau modèle canonique, cela revient à inclure les équations (IS), (CP), (1) et (2) dans l'ensemble d'information. L'hypothèse des anticipations rationnelles implique donc par exemple que les paramètres $\phi, \lambda, \beta, \mu$ et ρ appartiennent à l'ensemble I_t.

[4]Le fait que la représentation de l'économie soit établie par linéarisation autour de l'état stationnaire rend le modèle inopérant pour l'analyse des situations de déséquilibre où l'économie se trouve loin de l'état stationnaire.

sitive à la période $t+1$ incite les firmes qui le peuvent à augmenter leur prix en t. En effet, elles doivent se prémunir contre l'éventualité de ne pas pouvoir ajuster leur prix de vente en $t+1$. Ceci se répercute sur l'évolution du niveau général des prix.

Les équations (1) et (2) mettent en évidence que le choc de demande g_t et le choc d'offre u_t suivent des processus autorégressifs stationnaires.

Le nouveau modèle canonique comporte malgré sa simplicité des éléments essentiels de modèles plus larges utilisés par les banques centrales : le rôle crucial des rigidités nominales et des anticipations ainsi que la capacité des autorités monétaires à influencer l'économie réelle en manipulant le taux nominal (Clarida et al. 1999), et par là même, le taux d'intérêt réel (ci-après *taux réel*).

Le modèle défini par (IS), (CP), (1) et (2) décrit le fonctionnement de l'économie pour un taux nominal i_t donné. Pour compléter ce modèle, il convient de spécifier le mode de détermination du taux nominal.

2.2 Règles de politique monétaire

Le taux nominal est supposé ici être contrôlé par les autorités monétaires qui l'utilisent comme instrument de politique monétaire. La composante systématique de la politique monétaire peut être alors modélisée par des règles de fixation du taux d'intérêt. John B. Taylor (1993) a ainsi proposé une règle qui est désormais connue sous le nom de "règle de Taylor". Selon cette règle, les autorités monétaires fixent le taux nominal en fonction des déviations de l'inflation et de l'écart de production par rapport aux cibles visées en la matière. Lorsque celles-ci sont égales à zéro, cette règle s'écrit

$$i_t = \varphi_\pi \pi_t + \varphi_x x_t. \tag{RT}$$

avec $\varphi_\pi, \varphi_x \geq 0$ désignant les coefficients de réaction à l'inflation et à l'activité (Bullard & Mitra 2002). L'intuition de la règle de Taylor est que les autorités monétaires tiennent compte de l'inflation et de l'écart de production lorsqu'elles prennent des décisions de politique monétaire. Ce type de comportement apparaît par exemple dans les minutes de la Reserve Fédérale (Romer & Romer 2002). Taylor (1993) donne également une justification empirique pour cette règle. En utilisant une variante de la formule (RT) avec les coefficients $\varphi_\pi = 1.5$, $\varphi_x = 0.5$, il génère une série du taux nominal qui est très proche de la série historique des Federal Funds Rates entre 1987 et 1992.[5] En pratique, la prescription de la règle (RT) ne va pas de soi. Les autorités monétaires ne disposent pas des observations des variables π_t et x_t au moment où elles choisissent i_t (McCallum 1999*a*). En remplaçant dans la

[5]Taylor (1993) retient une cible d'inflation de 2% et un taux réel de long terme de 2%. L'absence de constante dans (RT) s'explique par le fait que Clarida et al. (1999) expriment le taux nominal en déviation par rapport à son niveau stationnaire, ainsi que par le choix d'une cible d'inflation égale à zéro.

règle les observations par des anticipations, ce problème peut être esquivé (Bullard & Mitra 2002) :

$$i_t = \varphi_\pi E_t^* \pi_{t+1} + \varphi_x E_t^* x_{t+1}, \tag{RTA}$$

L'opérateur E_t^* englobe des anticipations rationnelles et autres que rationnelles. Bullard et Mitra donnent deux interprétations à l'équation (RTA) : les autorités monétaires réagissent soit à leurs propres anticipations des variables endogènes, soit aux anticipations des agents qu'elles observent. Les règles (RT) et (RTA) sont spécifiées de manière "ad hoc" en fonction de variables endogènes du modèle. Svensson (1999) suggère au contraire que les autorités monétaires utilisent des *règles optimales*, qui sont fondées sur une démarche d'optimisation. Elles résultent de la minimisation d'une fonction de perte intertemporelle qui modélise la désutilité ressentie par les autorités monétaires lorsque les variables π_t et x_t s'éloignent de leurs cibles - ici toujours supposées égales à zéro :

$$E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s [{\pi_{t+s}}^2 + \alpha {x_{t+s}}^2]. \tag{3}$$

α est le poids accordé à l'objectif de stabilisation de l'activité. En effet, stabiliser l'activité revient à rendre l'écart de production le plus petit possible, c'est-à-dire égal à zéro. La minimisation sous contrainte de la fonction de perte (3) donne la condition de premier ordre

$$\lambda \pi_t + \alpha x_t = 0. \tag{4}$$

Les autorités monétaires peuvent utiliser des règles dites *optimales* qui respectent cette condition. Evans & Honkapohja (2003*b*) retiennent par exemple :

$$i_t = \delta_\pi E_t^* \pi_{t+1} + \delta_x E_t^* x_{t+1} + \delta_g g_t + \delta_u u_t. \tag{ROA}$$

$$i_t = \psi_g g_t + \psi_u u_t. \tag{ROF}$$

avec $\delta_\pi, \delta_x, \delta_g, \delta_u, \psi_g$ et ψ_u déterminés en fonctions des paramètres $\phi, \lambda, \beta, \rho$ et α.[6] La règle (ROA) est fondée sur les chocs et sur les anticipations. Selon la terminologie d'Evans & Honkapohja (2003*b*), il s'agit d'une règle basée sur les anticipations. Les anticipations contenues dans la règle (ROA) sont celles formulées par les agents et observées par les autorités monétaires (Evans & Honkapohja 2003*b*). (ROF) est un exemple d'une règle basée uniquement sur les fondamentaux, c'est-à-dire sur les chocs g_t et u_t.[7] A l'équilibre optimal et sous l'hypothèse des anticipations rationnelles, (ROA) et (ROF)

[6] Grâce à l'utilisation de l'opérateur E_t^*, la règle (ROA) peut être dérivée dans une version plus générale du modèle de Clarida et al. (1999) (cf. sous-section 3.1).

[7] Dans la littérature anglophone, la distinction est celle entre *fundamentals based rules* et *expectations based rules* (Evans & Honkapohja 2003*b*).

sont équivalentes. Cette équivalence n'est cependant pas systématiquement vérifiée lorsqu'on admet des anticipations qui peuvent différer des anticipations rationnelles (étant donné que la dérivation dans le cas des anticipations rationnelles repose sur l'hypothèse de l'équilibre).

Autres règles de politique monétaire

Bullard & Mitra (2002) proposent deux autres règles de type "ad hoc". Il s'agit de deux autres versions de la règle de Taylor. Les autorités monétaires fixent le taux nominal soit en fonction des réalisations passées des variables endogènes ($i_t = \varphi_\pi \pi_{t-1} + \varphi_x x_{t-1}$), soit en fonction des anticipations des valeurs contemporaines de ces variables ($i_t = \varphi_\pi E_t^* \pi_t + \varphi_x E_t^* x_t$).

La règle "k-pourcent" de Friedman (1948, 1959) peut être également exprimée sous forme d'une règle ad hoc de fixation du taux nominal lorsqu'elle est adossée à une fonction de demande de monnaie (Evans & Honkapohja 2003*c*). Une autre règle ad hoc est la règle de ciblage du PIB nominal (McCallum & Nelson 1999, Hall & Mankiw 1994).

Clarida et al. (1999) proposent la règle optimale $i_t = \left(1 + \frac{(1-\rho)\lambda}{\rho\alpha\phi}\right) E_t \pi_{t+1} + \phi^{-1} g_t$. Cette règle est équivalente à (ROA) et (ROF) à l'équilibre optimal et sous l'hypothèse des anticipations rationnelles. Comme (ROA) et (ROF), la règle optimale de Clarida et al. (1999) est adaptée à un contexte de politique monétaire discrétionnaire. Un tel contexte est caractérisé par l'incapacité des autorités monétaires à s'engager de manière crédible sur la politique monétaire future à mener.

Lorsque cet engagement est crédible, les autorités monétaires peuvent réaliser des gains d'utilité par rapport à la politique discrétionnaire (Clarida et al. 1999). En supposant que la politique monétaire sous engagement ait été initialisée dans le passé, la minimisation de (3) sous la contrainte (CP) donne la nouvelle condition de premier ordre : $\lambda \pi_t + \alpha(x_t - x_{t-1}) = 0$. Par correspondance avec le cas sous discrétion, on peut considérer trois règles optimales qui respectent cette condition : la règle sous engagement basée sur les anticipations $i_t = \delta_L x_{t-1} + \delta_\pi E_t^* \pi_{t+1} + \delta_x E_t^* x_{t+1} + \psi_g g_t + \psi_u u_t$ (Evans & Honkapohja 2006), la règle fondamentale sous engagement $i_t = \psi_x x_{t-1} + \psi_g g_t + \psi_u u_t$, (Evans & Honkapohja 2006) et la règle optimale sous engagement de Clarida et al. (1999) $i_t = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha\phi}\right) E_t \pi_{t+1} + \phi^{-1} g_t$.

Enfin, McCallum & Nelson (2004) proposent une règle qui permet d'approcher la politique monétaire optimale sous engagement $i_t = E_{CB,t}^* \pi_{t+1} + \zeta[E_{CB,t}^* \pi_{t+1} + \frac{\alpha}{\lambda}(E_{CB,t}^* x_{t+1} - E_{CB,t}^* x_t)]$. Cette règle est fondée sur les anticipations formulées par les autorités monétaires.

2.3 Politique monétaire et détermination

Le nouveau modèle canonique est un modèle à anticipations rationnelles. Une des caractéristiques des modèles à anticipations rationnelles est leur exposition au problème de l'indétermination. L'indétermination désigne une situation où un modèle possède plusieurs équilibres stationnaires en anticipations rationnelles (ci-après *équilibres rationnels*). Un modèle déterminé est caractérisé par l'unicité de l'équilibre rationnel.

La multiplicité des équilibres rationnels rend la conduite de la politique monétaire potentiellement délicate. En effet, le caractère stationnaire de tous les équilibres multiples n'empêche pas qu'ils puissent être associés à des fluctuations des variables endogènes inégales. Parmi ces équilibres peuvent figurer ainsi des équilibres marqués par des variations de l'inflation et de l'écart de production qui sont disproportionnellement grandes par rapport aux fluctuations des variables exogènes (Woodford 2003*b*). Ceci est notamment le cas des équilibres "en taches solaires" (Shell 2008). Il s'agit d'équilibres caractérisés par le fait que les variables endogènes dépendent, par le canal des anticipations, de variables a priori non-pertinentes.

Les autorités monétaires cherchent à faire en sorte que l'économie se positionne sur un équilibre marqué par le caractère **limité** des fluctuations de l'écart de production et de l'inflation. Elles devraient par conséquent préférer une règle compatible avec un tel équilibre, considéré comme "désirable" (Woodford 2003*a*). Dans un contexte d'indétermination, cette règle est malheureusement également compatible avec d'autres équilibres rationnels. Rien ne garantit alors que l'économie se positionne effectivement sur l'équilibre désirable et non sur un autre. Il est même envisageable que l'économie passe spontanément d'un équilibre à un autre. Pour toutes ces raisons, l'indétermination du modèle favorise la volatilité de l'inflation et de l'écart de production. Elle pose également le problème de savoir comment les autorités monétaires peuvent coordonner les anticipations des agents sur un équilibre rationnel particulier si celui-ci n'est pas unique.

Dans le nouveau modèle canonique, l'indétermination n'est toutefois pas une fatalité. En adoptant des règles de politique monétaire appropriées, les autorités monétaires peuvent assurer la détermination du modèle. Le lien entre les propriétés des règles et le caractère déterminé ou indéterminé du modèle peut être formalisé de la manière suivante :

Lorsque les autorités monétaires utilisent une règle de fixation du taux nominal, il est possible de substituer i_t dans l'équation (IS). Avec les règles présentées dans la sous-section 2.2 et dans l'encadré "Autres règles de politique monétaire", le nouveau modèle canonique peut être exprimé sous la forme matricielle

$$y_t = ME_t y_{t+1} + Ny_{t-1} + Pv_t. \tag{NMC}$$

$$\nu_t = F\nu_{t-1} + \tilde{\nu}_t, \tag{5}$$

avec $y_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix}$, $E_t y_{t+1} = \begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$ et $\nu_t = \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \end{bmatrix}$. M, N et P sont des matrices 2×2 dont les éléments diffèrent en fonction de la règle utilisée pour compléter le modèle. Pour savoir si le nouveau modèle canonique est déterminé ou indéterminé, la méthode de Blanchard & Kahn (1980) est en général mobilisée. On utilise une écriture alternative pour (NMC), qui correspond à la forme standard utilisée par Blanchard et Kahn :

$$\begin{bmatrix} y_{t+1}^L \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_t^L \\ y_t \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \end{bmatrix}, \tag{BK}$$

avec $y_t^L = y_{t-1}$. Les éléments des matrices A et K sont communiqués dans l'annexe B.

Proposition 1 : *Le nouveau modèle canonique* (NMC) - (5) *possède une seule solution stationnaire si et seulement si deux valeurs propres de A se situent à l'extérieur et les deux autres à l'intérieur du cercle unitaire (Blanchard & Kahn 1980)* (cf. aussi annexe B).

Le cas particulier où l'équation (NMC) permet l'écriture simplifiée

$$y_t = M E_t y_{t+1} + P v_t. \tag{NMC'}$$

est un cadré propice à l'exposition des problèmes liés à l'indétermination. En présence des règles (RT), (RTA), (ROF) ou (ROA), on a $N = 0$ et le nouveau modèle canonique peut donc être exprimé sous la forme simplifiée (NMC') - (5). On débouche sur la proposition suivante :

Proposition 2 : *Lorsque le nouveau modèle canonique peut être exprimé sous la forme* (NMC') - (5)*, il possède un seul équilibre rationnel stationnaire si et seulement si les deux valeurs propres de la matrice M se trouvent à l'intérieur du cercle unitaire (Woodford 2003*b*, p. 670).*

Lorsque les deux valeurs propres de M se trouvent à l'intérieur du cercle unitaire, le modèle (NMC') - (5) admet une seule solution **stationnaire** (annexe C) :

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} M^j P E_t \nu_{t+j} = \breve{a} + \breve{c} \nu_t \tag{6}$$

avec $\breve{a} = 0$ et $\breve{c} = \sum_{j=0}^{\infty} M^j P F^j$. Il apparaît, de plus, que cette solution correspond à ce qui est connu dans la littérature comme la solution "fondamentale" du nouveau modèle canonique (cf. encadré "La question de l'indétermination et la solution avec nombre minimal de variables d'état").

La question de l'indétermination et la solution avec nombre minimal de variables d'état

Pour Bennett McCallum, l'indétermination des modèles à anticipations rationnelles n'est qu'une curiosité théorique (McCallum 2003). Il considère en effet que chaque modèle à anticipations rationnelles possède une seule solution pertinente : la "solution fondamentale" qui est décrite par la solution avec nombre minimal de variables d'état.[a] Cette solution (pour chaque variable endogène) s'écrit comme une fonction **linéaire** de l'ensemble **minimal** des variables exogènes ou prédéterminées du modèle. Cet ensemble est minimal lorsque "il est impossible d'en retirer une variable isolée ou un groupe de variables, tout en continuant d'obtenir une solution valable pour toute valeur admise des paramètres" (McCallum 1983). Tout modèle possède une solution avec nombre minimal de variables d'état, et celle-ci est unique par construction (McCallum 2003).

Dans le cadre du nouveau modèle canonique (NMC') - (5), l'équation (7) n'est pas une solution avec nombre minimal de variables d'état. En retirant de cette solution les variables $g_{t-1}, u_{t-1}, x_{t-1}$ et π_{t-1}, on obtient effectivement une solution qui reste valable pour tous les paramètres admis et qui comporte comme seules variables d'état g_t et u_t : la solution (6). Cette dernière solution est la solution au nombre minimal de variables d'état du nouveau modèle canonique. En effet, des solutions qui ne comportent pas simultanément les variables g_t et u_t ne sont valables que pour des combinaisons particulières des paramètres du modèle. La solution (7) est une solution de type "bulle" d'après la terminologie de McCallum (1983) : l'impact des variables $g_{t-1}, u_{t-1}, x_{t-1}$ et π_{t-1} s'explique exclusivement par le fait que les agents anticipent l'existence d'un tel impact.[b] Il s'agit donc d'une anticipation auto-réalisatrice.

Le raisonnement de McCallum remet en question la pertinence de la question de l'indétermination. En effet, parmi toutes les solutions possibles d'un modèle, McCallum considère qu'une seule est économiquement plausible : la solution fondamentale. Dans ces conditions, l'existence de solutions théoriques alternatives n'a plus d'importance. Selon (McCallum 2003), ces solutions décrivent des équilibres qui ne sont pas susceptibles de se produire dans des économies réelles. Ceci ne veut pas dire que la solution fondamentale est toujours souhaitable d'un point de vu normatif. Les agents économiques ont par exemple intérêt à éviter des situations décrites par une solution fondamentale explosive, car celles-ci sont marquées par la forte variabilité des variables endogènes.

[a] Dans la littérature anglophone, on parle de la *minimum state variable solution* ou de la *MSV-solution*.

[b] Une solution de bulle au sens de McCallum (1999*b*) n'est pas forcément explosive. D'ailleurs, une solution avec nombre minimal de variables d'état n'est pas forcément stationnaire.

Toutes les autres solutions sont non-stationnaires. Parmi celles-ci figure par exemple la solution :

$$y_t = M^{-1}[-M\Phi - P]F^{-1}\nu_t + \Phi\nu_{t-1} + M^{-1}y_{t-1}, \tag{7}$$

avec Φ une matrice quelconque. Dans la configuration en question, les deux valeurs propres de M^{-1} se situent à l'extérieur du cercle unitaire. La solution (7) ne peut donc pas être retenue, car elle décrit dans ces conditions un processus explosif. Toute valeur de y différente de zéro déclenche en effet un processus auto-entretenu qui éloigne de plus en plus y de zéro.

La solution (7) est en revanche stationnaire dans le cas symétrique où, pour Φ donnée, M^{-1} possède deux valeurs propres à l'intérieur du cercle unitaire. Le modèle possède maintenant une infinité de solutions, car il existe autant de solutions de la forme (7) que de matrices Φ. Le modèle est donc indéterminé.[8] Ceci est également le cas quand une valeur propre de M se trouve à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle unitaire (cf. appendix A.1. dans Honkapohja & Mitra (2004)).

Pour garantir la détermination du modèle, les autorités monétaires doivent par conséquent adopter une règle à laquelle est associée une matrice M dont les deux valeurs propres se trouvent à l'intérieur du cercle unitaire. Les autorités monétaires ont dans ce cas la certitude que la règle retenue assure la réalisation de (6), c'est-à-dire de l'équilibre en anticipations rationnelles décrit par la solution fondamentale (ci-après *équilibre fondamental*). Ceci est souhaitable si (6) correspond effectivement à l'équilibre "désirable".[9] Les valeurs propres de la matrice M devraient donc guider les décisions de politique monétaire.

Ainsi, les autorités monétaires ont intérêt à éviter la règle (ROF), car une valeur propre de la matrice M associée à (ROF) se trouve à l'extérieur du cercle unitaire et l'autre à l'intérieur. En revanche, les deux valeurs propres de la matrice M associée à la règle (ROA) se situent à l'intérieur du cercle unitaire. On dérive alors deux propositions :

Proposition 3 : *Le nouveau modèle canonique est indéterminé, c'est-à-dire il possède plusieurs équilibres rationnels stationnaires, en présence de la règle fondamentale* (ROF) *(Woodford 1999).*

---

[8]La solution (6) est dans ce cas stationnaire à condition que la somme $\sum_{j=0}^{\infty} M^j P F^j$ converge, ce qui dépend des éléments qui composent les matrices M et F. Quand cette somme ne converge pas, la solution (6) n'est pas définie. Ceci ne veut pas dire que le modèle ne possède plus de solution fondamentale. Il existe toujours une telle solution, c'est-à-dire une solution qui a la forme fonctionnelle de (6) : $y_t = \breve{\alpha} + \breve{\beta}\nu_t$. Elle aura dans ce cas un coefficient associé au vecteur ν_t différent de $\check{c} = \sum_{j=0}^{\infty} M^j P F^j$.

[9]Dans le cas des règles optimales, l'équivalence entre l'équilibre fondamental (6) et l'équilibre désirable est vérifiée par la dérivation même de ces règles. Lorsque les autorités monétaires utilisent des règles ad hoc, il est raisonnable de supposer qu'elles sélectionnent la combinaison des coefficients de réaction qui induit l'équilibre fondamental (6) doté des propriétés les plus intéressantes.

Proposition 4 : *Le nouveau modèle canonique est déterminé en présence de la règle basée sur les anticipations* (ROA) *pour toute combinaison possible des paramètres (Evans & Honkapohja 2003*b*).*

Concernant les règles "ad hoc" (RT) et (RTA), les résultats dépendent du choix des coefficients de réaction φ_π et φ_x.

Proposition 5 : *Le nouveau modèle canonique est déterminé en présence de la règle de Taylor* (RT) *si et seulement si l'inégalité*

$$\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1 \tag{PT}$$

est vérifiée (Bullard & Mitra 2002).

Proposition 6 : *Le nouveau modèle canonique est déterminé en présence de la règle de Taylor avec anticipations* (RTA) *si et seulement si les deux inégalités*

$$\varphi_\pi + \frac{1+\beta}{\lambda}\varphi_x < 2\phi^{-1}\frac{1+\beta}{\lambda} - 1 \tag{8}$$

$$\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1 \tag{PT}$$

sont simultanément vérifiées (Bullard & Mitra 2002, Galí 2008).

(PT) peut être interprétée comme extension du "principe de Taylor", adaptée à une perspective de long terme (Woodford 2003*b*). Selon le principe de Taylor, toute règle qui réagit à une hausse d'un pour cent de l'inflation par une hausse du taux nominal **inférieure** à un pour cent est incapable de maîtriser l'inflation (Taylor 2005). En présence des anticipations naïves ($E_t\pi_{t+1} = \pi_t$) qui caractérisent l'analyse originale de Taylor (1993), l'augmentation de l'inflation induit en effet dans ces conditions une baisse du taux réel ex ante. Cette baisse favorise alors la production et provoque en dernière conséquence une hausse supplémentaire de l'inflation. Le respect du principe de Taylor permet d'interrompre ce processus auto-entretenu et cumulatif de l'inflation grâce au fait qu'une augmentation de l'inflation induit une hausse du taux réel ex ante (Taylor 2005). L'inégalité (PT) adapte l'intuition du principe de Taylor au cadre dynamique du nouveau modèle canonique. Lorsque les autorités monétaires utilisent la règle (RT) avec des coefficients de réaction qui respectent l'inégalité (PT), toute hausse **permanente** de l'inflation d'un pour cent provoque une hausse du taux nominal de plus d'un pour cent. En effet, selon la nouvelle courbe de Phillips (CP), une augmentation permanente de l'inflation d'un pour cent implique une hausse de l'écart de production de $\frac{1-\beta}{\lambda}$ point de pourcentage. La partie gauche de l'équation (PT) indique par conséquent l'augmentation du taux nominal provoquée par une hausse permanente de l'inflation d'un pour cent. Dans ces conditions, le taux réel ex ante ne peut qu'augmenter (Woodford 2003*b*).

Le respect du principe de Taylor (PT) est une propriété partagée par des règles qui évitent l'indétermination. En effet, la règle (ROA) obéit également à cette inégalité.

3 Apprentissage et Stabilité

Le modèle de Clarida et al. (1999) repose sur des hypothèses fortes dans la mesure où il suppose que les anticipations des agents sont rationnelles. Pour pouvoir formuler ce type d'anticipations, les agents doivent connaître le vrai modèle de l'économie et les vraies valeurs de tous ses paramètres. Cette hypothèse informationnelle peut paraître excessive (Sargent 1993, p. 21-22). De plus, les anticipations rationnelles excluent la possibilité que les anticipations des agents se trouvent - même temporairement - "en dehors de l'équilibre" rationnel (Evans & Honkapohja 2006). Le fait d'exclure cette éventualité paraît assez irréaliste notamment après l'apparition d'un changement structurel de l'économie ou suite à la mise en place d'une nouvelle politique monétaire (Honkapohja & Mitra 2004). Finalement, les anticipations rationnelles font abstraction du processus de coordination des agents (Bullard & Mitra 2002). Ces différentes limites des anticipations rationnelles ont contribué à l'émergence de la littérature sur l'apprentissage "économétrique". Cette approche fixe un niveau d'information légèrement inférieur à celui des anticipations rationnelles. En effet, les agents sont supposés ignorer le vrai modèle de l'économie et les vraies valeurs de ses paramètres et cherchent à les identifier. Pour ce faire, ils formulent un modèle subjectif et estiment ses paramètres en exploitant toutes les informations disponibles et établissent leurs anticipations sur cette base (Evans & Honkapohja 2009).

L'actualisation supposée perpétuelle de ces informations et estimations reflète l'apprentissage des agents : ils cherchent ainsi en permanence à améliorer leurs connaissances concernant le fonctionnement de l'économie. La littérature retient comme représentation de cet apprentissage par rapport aux estimations des paramètres du modèle subjectif une version récursive des moindres carrés ordinaires, ce qui explique pourquoi on utilise parfois le terme d'apprentissage "économétrique" (Evans & Honkapohja 2009). Les bases de cette modélisation ont été développées entre autres par Bray (1982), Evans (1985), Lucas (1987) et Marcet & Sargent (1989*a*,*b*). Evans & Honkapohja (2001) donnent une présentation unifiée et complète de ce corpus théorique.

Il se pose alors la question si les résultats obtenus sous l'hypothèse des anticipations rationnelles sont robustes par rapport à l'introduction des anticipations basées sur un tel processus d'apprentissage. Il s'agit de savoir si l'économie converge en présence d'apprentissage vers l'équilibre fondamental ou non. La question principale à laquelle la littérature sur l'apprentissage dans le nouveau modèle canonique s'attache concerne la robustesse des résultats obtenus sous anticipations rationnelles. La convergence vers l'équilibre fondamental dépend-elle des caractéristiques des règles de politique monétaire précédemment identifiées ? Pour pouvoir répondre à cette question, la section 3 présente d'abord la modélisation de l'apprentissage adoptée dans le cadre du nouveau modèle canonique, discute les méthodes analytiques, les principaux apports de cette modélisation et les enseignements.

3.1 Apprentissage et anticipations

La présentation de la modélisation de l'apprentissage par l'algorithme des moindres carrés nécessite une modification du nouveau modèle canonique. Pour tenir compte du relâchement de l'hypothèse des anticipations rationnelles, il convient en effet de réécrire le modèle (NMC) - (5) à l'aide de l'opérateur E_t^*.[10] Cet opérateur englobe des anticipations qui sont rationnelles et autres que rationnelles. On obtient à la place de (IS) et (CP) les équations

$$x_t = E_t^* x_{t+1} - \phi(i_t - E_t^* \pi_{t+1}) + g_t \tag{IS*}$$

$$\pi_t = \lambda x_t + \beta E_t^* \pi_{t+1} + u_t \tag{CP*}$$

et le modèle (NMC) - (5) peut être alors exprimé comme

$$y_t = M E_t^* y_{t+1} + N y_{t-1} + P v_t. \tag{NMC*}$$

$$\nu_t = F \nu_{t-1} + \tilde{\nu}_t \tag{5}$$

Selon l'approche par l'apprentissage, les agents ignorent les éléments des matrices de paramètres M, N et P. Pour former leurs anticipations, les agents utilisent des techniques économétriques adaptées aux séries temporelles (Evans & Honkapohja 2009). Ils établissent des prévisions fondées sur des estimations économétriques de leur modèle subjectif de l'économie.

La première étape de cette procédure consiste donc en la formulation de ce modèle subjectif, dont on donne ici la forme réduite :

$$y_t = a + b y_{t-1} + c \nu_t \tag{9}$$

avec $a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_\pi \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{x\pi} \\ b_{\pi x} & b_{\pi\pi} \end{bmatrix}$ et $c = \begin{bmatrix} c_{xg} & c_{xu} \\ c_{\pi g} & c_{\pi u} \end{bmatrix}$. La forme fonctionnelle du modèle subjectif n'est pas arbitraire. Cette forme est effectivement celle que revêt la solution avec nombre minimal de variables d'état (ci-après *solution avec minimum de variables*) (McCallum 1983), qui sera la solution stationnaire unique si le nouveau modèle canonique est déterminé. La présence de la constante a dans (9) s'explique par le fait que les agents doivent tenir

[10] Le passage de l'opérateur des anticipations rationnelles E_t à l'opérateur E_t^* n'est pas neutre. Il doit être cohérent avec les fondements microéconomiques du modèle dynamique stochastique d'équilibre général. La controverse entre Preston (2005, 2006) et Evans et al. (2002) met en évidence les difficultés liées à ce changement d'opérateur (cf. section 4.1.1).

compte de la possibilité que les cibles d'inflation et de l'écart de production sont différentes de zéro (Bullard & Mitra 2002). Le choix de la solution au minimum de variables comme modèle subjectif des agents est une hypothèse centrale de la littérature sur l'apprentissage dans le nouveau modèle canonique. La sous-section 4.2 montrera que les principaux résultats de cette littérature dépendent de manière cruciale de cette hypothèse et mettra en évidence l'importance d'une autre hypothèse du modèle : la parfaite observabilité de toutes les variables endogènes et exogènes du modèle, c'est-à-dire de y et ν.

Compte tenu de ces deux hypothèses, les agents sont capables d'estimer les matrices de paramètres a, b et c en régressant y sur ν, 1 et les réalisations passées de y à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires. L'actualisation des ces estimations est par la suite modélisée par les moindres carrés récursifs. L'algorithme des moindres carrés récursifs se présente comme suit :

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \gamma_t R_t^{-1} z_{t-1} \varepsilon_t^T \tag{10}$$

$$R_t = R_{t-1} + \gamma_t (z_{t-1} z_{t-1}^T - R_{t-1}). \tag{11}$$

$\xi_t^T = (a_t, b_t, c_t)$ est la matrice des estimations réalisées à la période t. Le terme dit "de gain" γ_t détermine le poids de l'observation la plus récente. Dans le cas des moindres carrés récursifs, on a $\gamma_t = t^{-1}$. R_t est la matrice des moments empiriques de deuxième ordre nécessaire au calcul des estimations par la méthode des moindres carrés récursifs, $z_t^T = (1, y_{t-1}^T, \nu_t^T)$ est le vecteur des régresseurs et $\varepsilon_t = y_{t-1} - \xi_{t-1}^T z_{t-1}$ l'erreur de prévision la plus récente.[11]

A partir du modèle subjectif (9) et des estimations ξ_t obtenues par les moindres carrés récursifs, c'est-à-dire avec (10) - (11) doté du terme de gain $\gamma_t = t^{-1}$, on trouve à chaque période l'expression de la **loi de mouvement perçue** (ci-après *loi perçue*) par les agents :

$$y_t = a_t + b_t y_{t-1} + c_t \nu_t + \eta_t. \tag{LMP}$$

avec η_t un terme d'erreur. La loi perçue, qui combine les estimations des paramètres de la période t avec la forme fonctionnelle du modèle subjectif, permet aux agents de formuler des prévisions économétriques sur y. Elle traduit la croyance implicite des agents que l'économie se situe en t à l'équilibre fondamental (9).

De ce fait, les agents sont supposés formuler des anticipations qui sont basées sur leur propre processus d'apprentissage (ci-après *anticipations par apprentissage*). Autrement dit, ils établissent des prévisions pour y_{t+1} à partir de la loi perçue :

$$E_t^* y_{t+1} = a_t + b_t \left(a_t + b_t y_{t-1} + c_t \nu_t \right) + c_t F \nu_t. \tag{12}$$

[11] Cet algorithme donne un poids identique aux observations de y et de ν de chaque période. Ceci est reflété par le fait que le gain t^{-1} diminue au fur et à mesure que le nombre d'observations augmente.

La prévision (12) est basée sur l'hypothèse informationnelle que les agents disposent des observations de ν_t et de y_{t-1} au moment où ils forment leurs anticipations, mais non de celles de y_t. On a donc $E_t^* y_{t+1} = E(y_{t+1}|I_t = F; a_0, a_1, ..., a_{t-1}, a_t; b_0, ..., b_t; c_0, ..., c_t; \nu_0, ..., \nu_t; y_0, ..., y_{t-1})$.[12]

Comme tous les agents privés, c'est-à-dire les ménages et les firmes, sont supposés utiliser le même modèle subjectif et le même algorithme d'apprentissage, ils aboutissent à des prévisions identiques. Le modèle (NMC*) est donc caractérisé par l'homogénéité des anticipations des agents du secteur privé et donc par leur coordination implicite.

On dispose maintenant de deux versions du nouveau modèle canonique : une basée sur des anticipations rationnelles, l'autre sur les anticipations par apprentissage. L'existence de deux modélisations alternatives des anticipations pose la question de la robustesse des recommandations en termes de politique monétaire présentées dans la sous-section 2.3. Les autorités monétaires ont-elles intérêt d'adopter les mêmes règles, quelle que soit la modélisation des anticipations retenue ? Pour répondre à cette question, la sous-section suivante analysera l'impact de l'apprentissage sur le comportement dynamique du modèle.

3.2 La stabilité sous apprentissage

Le fait de remplacer les anticipations rationnelles par des anticipations par apprentissage a des conséquences sur les propriétés du nouveau modèle canonique. Ce changement d'hypothèse introduit en effet une deuxième source de dynamique dans le modèle : les dynamiques d'apprentissage.[13]

Ces dynamiques sont complexes, car elles s'inscrivent dans le cadre d'une relation d'interdépendance entre les variables endogènes y et les estimations a_t, b_t et c_t. D'une part, les estimations a_t, b_t et c_t dépendent des observations des variables endogènes $(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...)$ d'après l'algorithme des moindres carrés récursifs (cf. équation (10)). D'autre part, ces estimations exercent un effet de retour sur les réalisations des variables endogènes. Pour montrer cet effet, il convient de remplacer $E_t^* y_{t+1}$ dans l'équation (NMC*) par son expression tirée de (12). On obtient ainsi l'expression :

$$y_t = M[I + b_t]a_t + [Mb_t^2 + N]y_{t-1} + (M[b_t c_t + c_t F] + P)\,\nu_t, \qquad \text{(LMR)}$$

qui montre que tout changement des estimations a_t, b_t ou c_t a un impact sur les variables endogènes y_t. L'équation (LMR) décrit l'état de l'équilibre en t conditionnel à la prévision formulée en t (12), c'est-à-dire l'équilibre conditionnel aux croyances contemporaines des agents. Elle permet effectivement de trouver à chaque période t - pour des estimations a_t, b_t et c_t données - les

[12]Suivant l'argumentation de Salge (1997), on devrait inclure dans I_t les équations (5) et (LMP), dont la connaissance est indispensable pour établir la forme fonctionnelle du membre droit de (12).

[13]En anglais : *Learning dynamics.*

réalisations des variables endogènes. Ces réalisations s'interprètent comme l'**équilibre transitoire** de l'économie dans la mesure où (LMR) évolue au cours du temps en fonction des évolutions de a_t, b_t et c_t. Par opposition à la loi perçue - qui sert de base à l'élaboration des prévisions des agents - l'équation (LMR) est dénommée la **loi de mouvement réelle** (ci-après *loi réelle*).[14] Lorsque les anticipations des agents sont basées sur l'apprentissage (équation (12)), la loi réelle décrit le vrai fonctionnement de l'économie. La loi réelle est en effet le pendant de l'équation (NMC) dans un contexte d'apprentissage et le système (LMR) - (5) caractérise de manière complète le nouveau modèle canonique avec anticipations par apprentissage. L'analyse de la dynamique d'apprentissage part dans le cas général de l'hypothèse implicite que les agents formulent une loi perçue initiale

$$y_1 = a_1 + b_1 y_0 + c_1 \nu_1 + \eta_1 \tag{13}$$

qui se situe au voisinage de l'équilibre fondamental

$$y_t = \breve{a} + \breve{b} y_{t-1} + \breve{c} \nu_t \tag{14}$$

Ceci revient à dire que le vecteur des paramètres (a_1, b_1, c_1) se trouve au voisinage des paramètres de l'équilibre fondamental $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$.[15] On se concentre ensuite sur l'analyse de la stabilité de l'équilibre fondamental (14) sous apprentissage. Cet équilibre est dit **stable sous apprentissage** lorsque, en partant des estimations initiales (a_1, b_1, c_1), les estimations (a_t, b_t, c_t) convergent vers les paramètres associés à l'équilibre fondamental : $(a_t, b_t, c_t) \to (\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$. Il est pour cela essentiel d'analyser le comportement dynamique des estimations (a_t, b_t, c_t).

A cet effet, Evans & Honkapohja (2001) mobilisent la relation entre la loi réelle et la loi perçue. Ces deux lois sont caractérisées par la même forme fonctionnelle, à savoir celle d'un modèle linéaire avec un vecteur de constantes, le vecteur y_{t-1} et le vecteur exogène ν_t. On peut alors résumer la différence entre la loi perçue et la loi réelle par la différence entre les matrices des paramètres de ces lois. Ceci se fait concrètement à l'aide d'une application T, qui associe aux paramètres estimés de la loi perçue ceux de la loi réelle :

$$\begin{aligned}(a_t, b_t, c_t) \to\ & T(a_t, b_t, c_t) = \\ & \left(M[I + b_t]a_t, M b_t^2 + N, M[b_t c_t + c_t F] + P\right).\end{aligned} \tag{15}$$

[14] En anglais : *Actual Law of Motion.*

[15] Cette hypothèse implicite se déduit du fait que la méthode d'Evans & Honkapohja (2001) fait appel aux outils qui sont destinés à l'analyse locale, comme par exemple la stabilité asymptotique (Evans & Honkapohja 2001, chapitre 6). Le recours à cette hypothèse n'est pas toujours nécessaire. Il existe effectivement des cas particuliers où la convergence vers l'équilibre fondamental est globale, c'est-à-dire elle se produit pour tout modèle subjectif initial.

Cette application vaut à tout instant du temps. Elle traduit l'impact des croyances, c'est-à-dire de la loi perçue, sur les réalisations des variables endogènes, qui sont elles, décrites par la loi réelle. L'intérêt de (15) réside dans le fait que les paramètres de l'équilibre fondamental définissent un point fixe $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c}) = T(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ de cette application. Dans ces conditions, on dispose d'une méthode simple pour prouver que les estimations (a_t, b_t, c_t) convergent vers $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ à partir d'un point situé au voisinage de $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$.[16] Il suffit de montrer que la distance entre les estimations (a_t, b_t, c_t) et les "vrais" paramètres $\big(M[I + b_t]a_t, Mb_t^2 + N, M[b_t c_t + c_t F] + P\big)$ se réduit inexorablement au cours du temps. Ceci revient à dire que les estimations et les "vrais" paramètres convergent vers le point fixe.

Toutefois, le comportement dynamique des estimations (a_t, b_t, c_t) et des "vrais" paramètres $\big(M[I + b_t]a_t, Mb_t^2 + N, M[b_t c_t + c_t F] + P\big)$ est difficile à analyser dans le cadre d'une modélisation en temps discret (cf. annexe D). L'utilisation des techniques d'approximation stochastique (cf. Robbins & Monro (1951) et (Benveniste et al. 1990, partie II, chapitre 3)) permet d'approcher ce comportement dynamique au voisinage de l'équilibre fondamental par le biais d'une équation différentielle associée.[17] Elle prend la forme :

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau) = T(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau) - (\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau), \tag{EDA}$$

avec $(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau)$ des estimations des paramètres (a, b, c) valables à l'instant τ d'un temps artificiel (cf. annexe D). Ces estimations sont - dans un premier temps - considérées comme étant **fixes** en τ , i.e. comme si les agents ne modifiaient pas leurs estimations en τ. Ceci n'est pourtant pas le cas. En effet, l'équation (EDA) montre comment les estimations $(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau)$, sur lesquelles sont basées les anticipations par apprentissage, sont ajustées à chaque instant du temps artificiel τ. Le terme de correction $T(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau) - (\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau)$ correspond à l'écart entre les paramètres de la loi réelle et ceux de la loi perçue. La disparition progressive de cet écart implique la convergence de l'équilibre transitoire vers l'équilibre fondamental $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$. Dans ce cas, la littérature sur l'apprentissage parle d'un équilibre fondamental qui est **stable sous anticipations** (ci-après *A-stable*).[18] L'A-stabilité de $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ sous l'équation différentielle associée (EDA) détermine à son tour sa stabilité sous apprentissage. Cette correspondance entre l'A-stabilité et la stabilité sous apprentissage est connue dans la littérature sous le nom de "principe de l'A-stabilité" :

[16] On suppose ici que le voisinage de $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ est suffisamment restreint pour que l'application (15) n'y possède pas d'autres points fixes.

[17] L'annexe D présente brièvement ces techniques, une présentation détaillée se trouve dans (Evans & Honkapohja 2001).

[18] En anglais : *expectational stable* et *E-stability*. La définition rigoureuse de l'A-stabilité est la suivante : *Un point fixe* $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c}) = T(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ *est dit A-stable s'il est localement asymptotiquement stable sous l'équation différentielle* (EDA) (Evans & Honkapohja 2009). Ceci signifie que, pour des estimations initiales proches de $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$, les estimations restent au voisinage de $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ et convergent vers $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ (Evans & Honkapohja 2001).

Proposition 7 : *Les estimations* (a_t, b_t, c_t) *obtenues par les moindres carrés récursifs convergent vers l'équilibre fondamental* $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ *si et seulement si* $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ *est A-stable sous l'équation différentielle associée* (EDA) *(Evans & Honkapohja 2003*b*).*

L'équilibre fondamental $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ est A-stable lorsque toutes les valeurs propres des matrices Jacobiennes $DT_a = M(I + \breve{b})$, $DT_b = \breve{b}^T \otimes M + I \otimes M\breve{b}$ et $DT_c = F^T \otimes M + I \otimes M\breve{b}$ ont des parties réelles inférieures à 1 (cf. annexe E). Grâce au principe de l'A-stabilité, on obtient alors les conditions pour la stabilité sous apprentissage de $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ à l'aide des valeurs propres de DT_a, DT_b et DT_c.

L'intuition de l'A-stabilité est la suivante : tout écart des anticipations (12) par rapport aux anticipations associées au point fixe $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ induit une réalisation des variables endogènes qui exerce un effet de retour amortissant sur les estimations des agents. Les estimations de la période suivante sont, dans ce cas, telles que l'écart est plus petit que l'écart initial. L'équilibre transitoire converge par suite vers l'équilibre fondamental $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$. Dans le cas contraire, lorsque l'équilibre fondamental est un point fixe qui est A-instable, on est en présence d'un processus qui creuse l'écart. L'équilibre transitoire s'éloigne alors progressivement du point fixe (Evans & Honkapohja 2003*b*).

On dispose maintenant de tous les éléments nécessaires à l'analyse de l'impact des règles de politiques monétaires sur la stabilité de l'équilibre fondamental en présence d'apprentissage des agents : un modèle macroéconomique, la formulation précise des anticipations par apprentissage et les techniques qui permettent d'analyser les dynamiques d'apprentissage. La section suivante présente les conséquences de ces dynamiques sur les performances des règles de politique monétaire.

3.3 Règles de politique monétaire et stabilité sous apprentissage

Selon le raisonnement développé dans la sous-section 2.3, les autorités monétaires devraient choisir la règle de politique monétaire sur la base de l'analyse de la détermination du modèle. La prise en compte des dynamiques d'apprentissage intervient désormais dans cette décision. En effet, les dynamiques d'apprentissage introduisent un deuxième mécanisme qui peut empêcher l'économie de se positionner sur l'équilibre "désirable" que les autorités monétaires souhaitent atteindre.

On en vient alors à utiliser la détermination du modèle et la stabilité sous apprentissage comme des critères complémentaires. La littérature recommande ainsi des règles qui garantissent que l'équilibre rationnel stationnaire soit unique et que les dynamiques d'apprentissage convergent vers ce même équilibre. Ces règles sont alors stabilisantes dans un sens précis. Premièrement, en assurant que l'économie se positionne sur l'équilibre désirable, elles évitent l'amplification des fluctuations des variables ciblées qui caractérisent les équilibres en tâches solaires. Deuxièmement, elles garantissent que l'économie converge vers l'équilibre désirable après la survenance d'un choc structurel qui l'a éloignée de cet équilibre - sans toutefois la faire sortir de son voisinage.

En présence des règles (RT), (RTA), (ROF) et (ROA), le nouveau modèle canonique est décrit par l'expression matricielle (NMC') - (5). Le fait que la matrice associée aux variables endogènes passées N soit nulle implique que le modèle subjectif des agents s'écrit maintenant :

$$y_t = a + c\nu_t. \tag{16}$$

Les prévisions pour $t+1$ deviennent par conséquent :

$$E_t^* y_{t+1} = a_t + c_t F \nu_t, \tag{17}$$

et l'on trouve l'équation différentielle associée simplifiée :

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{a}_\tau, \bar{c}_\tau) = T(\bar{a}_\tau, \bar{c}_\tau) - (\bar{a}_\tau, \bar{c}_\tau). \tag{EDA'}$$

Pour savoir si l'équilibre fondamental $(\breve{a}, \breve{c})$ est A-stable, il suffit maintenant de connaître les valeurs propres de la matrice M (cf. annexe E).

Le critère de la stabilité sous apprentissage confirme parfaitement les résultats de l'analyse de la détermination pour la règle de Taylor (RT) :

Proposition 8 : *Le principe de Taylor* (PT) *constitue la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre fondamental* $(\breve{a}, \breve{c})$ *soit A-stable en présence de la règle de Taylor* (RT) *(Bullard & Mitra 2002).*

La prise en compte des dynamiques d'apprentissage par les autorités monétaires n'est donc pas susceptible de modifier les décisions basées sur le critère de la détermination. Ceci est également le cas des règles optimales (ROF) et (ROA).

Proposition 9 : *L'équilibre fondamental* $(\breve{a}, \breve{c})$ *est instable sous apprentissage par les moindres carrés récursifs en présence de la règle basée sur les fondamentaux* (ROF) *pour toute combinaison des paramètres du modèle. La probabilité d'une convergence de l'économie vers* $(\breve{a}, \breve{c})$ *est nulle (Evans & Honkapohja 2003*b*).*

Proposition 10 : *L'équilibre fondamental* $(\breve{a}, \breve{c})$ *est stable sous apprentissage par les moindres carrés récursifs en présence de la règle basée sur les anticipations* (ROA) *pour toute combinaison des paramètres du modèle. L'économie converge presque sûrement vers* $(\breve{a}, \breve{c})$ *(Evans & Honkapohja 2003*b*).*[19]

[19] Dans le cas de la règle (ROA), la convergence est globale : l'économie converge vers l'équilibre fondamental en partant de toute combinaison des estimations initiales (a_1, b_1, c_1) (Evans & Honkapohja 2003*b*).

Parmi les règles présentées dans la sous-section 2.2., une seule est susceptible de faire apparaître des recommandations contradictoires par les deux critères : la règle de Taylor avec anticipations (RTA).

Proposition 11 : *Le principe de Taylor* (PT) *constitue la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre fondamental* $(\breve{a}, \breve{c})$ *soit A-stable en présence de la règle de Taylor avec anticipations* (RTA) *(Bullard & Mitra 2002).*

Cette condition est moins contraignante que celles qui garantissent la détermination du modèle (cf. proposition 6). Les propositions 6 et 11 montrent que, lorsque l'équilibre fondamental $(\breve{a}, \breve{c})$ est unique, alors il doit être A-stable, mais que la réciproque n'est pas vraie. Il est donc possible que l'équilibre fondamental $(\breve{a}, \breve{c})$ ne soit pas l'unique équilibre rationnel stationnaire, mais qu'il soit A-stable (Bullard & Mitra 2002). D'un point de vue pratique, les autorités monétaires ont intérêt à choisir des coefficients de réaction qui obéissent aux conditions plus exigeantes de la proposition 6. Ce choix met l'économie à l'abri des inconvénients liés à l'existence d'équilibres rationnels multiples.

Les propositions 3 à 6 et 8 à 11 sont résumées dans le tableau 1. Celui-ci énonce également des résultats analytiques concernant la détermination et la stabilité sous apprentissage en présence des autres règles présentées dans l'encadré "Autres règles de politique monétaire". Ces résultats ont été obtenus par la méthode de Blanchard & Kahn (1980) pour ce qui concerne l'analyse de la détermination et à l'aide des équations différentielles associées (EDA) et (EDA') pour l'analyse de la stabilité sous apprentissage.[20]

Le tableau 1 montre que la modélisation de l'apprentissage permet de détecter le caractère déstabilisant d'une règle qui aurait échappé à une analyse relevant d'une modélisation sous anticipations rationnelles. En effet, la règle fondamentale sous engagement ($i_t = \psi_x x_{t-1} + \psi_g g_t + \psi_u u_t$,) rend le système déterminé pour deux combinaisons particulières des paramètres (Evans & Honkapohja 2006). Si les autorités monétaires supposaient la présence des anticipations rationnelles et d'une de ces combinaisons favorables, rien ne s'opposerait à l'adoption de cette règle. Or, lorsque les anticipations sont en réalité basées sur l'apprentissage, la règle fondamentale sous engagement provoque des dynamiques d'apprentissage qui éloignent l'économie de l'équilibre rationnel. En effet, Evans & Honkapohja (2006) montrent que l'équilibre rationnel associé à cette règle n'est pas A-stable **pour toute combinaison des paramètres structurels**. Les autorités monétaires ont donc intérêt à tenir compte du caractère éventuellement non-rationnel des anticipations des agents.

[20]Certains résultats ont été trouvés par des méthodes numériques, car des résultats analytiques ne sont pas disponibles pour toutes les règles étudiées dans le présent article.

Tableau 1 : Pouvoir de stabilisation des règles de politique monétaire

Règle	Détermination	Stabilité sous apprentissage
Règle optimale fondamentale (ROF) $i_t = \psi_g g_t + \psi_u u_t$	**Indéterminé pour toute combinaison des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2003*b*)]	**Instable pour toute combinaison des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2003*b*)]
Règle optimale basée sur les anticipations (ROA) $i_t = \delta_\pi E_t^* \pi_{t+1} + \delta_x E_t^* x_{t+1} + \delta_g g_t + \delta_u u_t$	**Déterminé pour toute combinaison des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2003*b*)]	**Stable pour toute combinaison des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2003*b*)]
Règle de Taylor classique (RT) $i_t = \varphi_\pi \pi_t + \varphi_x x_t$	**Déterminé si et seulement si :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ [Résultat analytique (Bullard & Mitra 2002)]	**Stable si et seulement si :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ [Résultat analytique (Bullard & Mitra 2002)]
Règle de Taylor avec anticipations (RTA) $i_t = \varphi_\pi E_t^* \pi_{t+1} + \varphi_x E_t^* x_{t+1}$	**Déterminé si et seulement si :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ **et** $\varphi_\pi + \frac{1+\beta}{\lambda}\varphi_x < 2\phi^{-1}\frac{1+\beta}{\lambda} - 1$ [Résultat analytique (Bullard & Mitra 2002)]	**Stable si et seulement si :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ [Résultat analytique (Bullard & Mitra 2002)]
Règle de Taylor avec valeurs passées des variables endogènes $i_t = \varphi_\pi \pi_{t-1} + \varphi_x x_{t-1}$	**Condition suffisante pour la détermination :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ **et** $\varphi_\pi + \frac{1+\beta}{\lambda}\varphi_x < 2\phi^{-1}\frac{1+\beta}{\lambda} - 1$ [Résultat analytique (Bullard & Mitra 2002)]	**Stable si et seulement si :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ [Résultat numérique (Bullard & Mitra 2002)]
Règle de Taylor avec anticipations contemporaines $i_t = \varphi_\pi E_t^* \pi_t + \varphi_x E_t^* x_t$	**Déterminé si et seulement si :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ [Résultat numérique (Bullard & Mitra 2002)]	**Stable si et seulement si :** $\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\lambda}\varphi_x > 1$ [Résultat numérique (Bullard & Mitra 2002)]
Règle k-pourcent de Friedman	**Déterminé** [Résultat numérique (Evans & Honkapohja 2003*c*)]	**Stable** [Résultat numérique (Evans & Honkapohja 2003*c*)]

Règle	Détermination	Stabilité sous apprentissage
Règle de ciblage du PIB nominal	**Déterminé** [Résultat analytique (Mitra 2003)]	**Stable** [Résultat analytique (Mitra 2003)]
Règle optimale de (Clarida et al. 1999) $i_t = \left(1 + \frac{(1-\rho)\lambda}{\rho\alpha\phi}\right) E_t\pi_{t+1} + \phi^{-1} g_t$	**Déterminé ou indéterminé selon les paramètres : Indéterminé pour ρ proche de 0.** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2003*b*)]	**Stable pour toute combinaison admise des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2003*b*)]
Règle optimale sous engagement de (Clarida et al. 1999) $i_t = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha\phi}\right) E_t\pi_{t+1} + \phi^{-1} g_t$	**Peut conduire vers l'indétermination** [Communication imprécise du résultat, (Evans & Honkapohja 2006)]	**Stable ou instable selon les paramètres** [Communication imprécise du résultat, (Evans & Honkapohja 2006)]
Règle optimale fondamentale sous engagement $i_t = \psi_x x_{t-1} + \psi_g g_t + \psi_u u_t$	**Déterminé ou indéterminé selon les paramètres : déterminé pour le calibrage de Woodford (1999) avec $\alpha > 0.16$ et le calibrage de Clarida et al. (2000) avec $\alpha > 0.47$.** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2006)]	**Instable pour toute combinaison admise des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2006)]
Règle optimale sous engagement basée sur les anticipations $i_t = \delta_L x_{t-1} + \delta_\pi E_t^* \pi_{t+1} + \delta_x E_t^* x_{t+1} + \psi_g g_t + \psi_u u_t$	**Déterminé pour toute combinaison admise des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2006)]	**Stable pour toute combinaison admise des paramètres** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2006)]
Règle d'approximation de la politique monétaire optimale $i_t = E^*_{CB,t}\pi_{t+1} + \zeta[E^*_{CB,t}\pi_{t+1} + \frac{\alpha}{\lambda}(E^*_{CB,t}x_{t+1} - E^*_{CB,t}x_t)]$	**Déterminé pour ζ suffisamment faible** [Résultat numérique (Evans & Honkapohja 2003*c*)]	**Stable pour ζ suffisamment faible** [Résultat analytique (Evans & Honkapohja 2003*c*)]

Tableau 1 : Des règles qui garantissent simultanément la détermination et la stabilité sous apprentissage sont considérées comme stabilisantes (Evans & Honkapohja 2003*a*).

La stabilité sous apprentissage comme critère de sélection de la solution pertinente

Au-delà des considérations normatives exposées dans la sous-section 3.3, la modélisation de l'apprentissage peut être utilisée dans une perspective positive. Dans un contexte d'indétermination, l'A-stabilité a été proposée comme critère permettant de sélectionner parmi les solutions multiples celles qui sont économiquement plausibles (Evans 1985, Evans & Honkapohja 2001, p. 20). Selon cette approche, les solutions A-instables sont considérées comme peu plausibles, car elles ne sont pas susceptibles de se réaliser dans un contexte où les agents sont engagés dans un processus d'apprentissage. Le moindre choc structurel déclenche en effet des dynamiques d'apprentissage divergentes, c'est-à-dire des dynamiques qui éloignent inexorablement l'économie de ces solutions. Seules les solutions A-stables paraissent pertinentes dans un modèle avec apprentissage, car elles sont caractérisées par des dynamiques d'apprentissage convergentes.

La stabilité sous apprentissage joue également un rôle central dans les travaux de McCallum (2002, 2003) sur l'indétermination. Contrairement à Evans et Honkapohja, McCallum ne recommande pas l'A-stabilité elle-même comme critère de sélection : il mobilise l'A-stabilité pour appuyer sa proposition de considérer la solution avec nombre minimal de variables d'état comme l'unique solution pertinente. En effet, cette solution est en général A-stable. De plus, dans le nouveau modèle canonique, des solutions autres que la solution avec minimum de variables ne sont pas A-stables (McCallum 2003). L'analyse de l'apprentissage fournit alors une justification supplémentaire pour la proposition de McCallum de ne pas tenir compte des solutions alternatives à la solution avec minimum de variables.

Cette correspondance entre A-stabilité et solution avec minimum de variables n'est pourtant pas parfaite. Evans & Honkapohja (1992) présentent un modèle dont la solution avec minimum de variables est A-instable. McCallum (2002) remet en question le raisonnement d'Evans & Honkapohja (1992) en soulignant le caractère invraisemblable des paramètres retenus. Lorsque le modèle en question est interprété comme un modèle macroéconomique, ces paramètres impliquent effectivement un comportement aberrant des autorités monétaires : lorsqu'elles observent une hausse du niveau des prix, elles augmentent la masse monétaire ! McCallum (2002) tire la conclusion que la solution avec nombre minimal de variables d'état est A-stable dans "tous et presque tous les modèles sensés".

L'analyse de la stabilité sous apprentissage confirme globalement les choix en termes de règles de politique monétaire fondés sur l'étude de la détermination sous anticipations rationnelles. La plupart des règles qui permettent d'éviter les difficultés liées à la multiplicité des équilibres garantissent également des bonnes performances dans un contexte d'apprentissage. Toutefois, le cas de la règle fondamentale sous engagement montre que les deux critères ne sont pas redondants, mais complémentaires.

4 Limites et extensions de la modélisation de l'apprentissage

Les résultats concernant la stabilité sous apprentissage exposés dans la section précédente sont valables dans le cadre bien délimité des hypothèses du nouveau modèle canonique avec apprentissage. Plusieurs des hypothèses du modèle sous cette configuration semblent toutefois difficilement justifiables par des considérations théoriques ou de réalisme. Dans ces conditions, il est opportun de savoir si ces résultats sont robustes par rapport à l'introduction d'hypothèses alternatives plus plausibles.

4.1 La robustesse des résultats

La littérature sur l'apprentissage dans le nouveau modèle canonique étudie la dépendance des résultats par rapport aux hypothèses suivantes du modèle : le caractère restreint de l'horizon temporel des anticipations, les informations à la disposition des agents, l'homogénéité des agents privés et l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés récursifs.

4.1.1 Apprentissage et anticipations à horizons infinis

En partant des mêmes fondements microéconomiques que Clarida et al. (1999), Preston (2005, 2006) trouve une expression alternative du nouveau modèle canonique avec apprentissage :

$$x_t = E_t^* \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t}[(1-\beta)x_{T+1} - \phi(i_T - \pi_{T+1}) + g_T] \tag{18}$$

$$\pi_t = \lambda x_t + E_t^* \sum_{T=t}^{\infty} (\chi\beta)^{T-t}[\lambda\chi\beta x_{T+1} + (1-\chi)\beta\pi_{T+1} + u_T]. \tag{19}$$

Le modèle de Preston (18) - (19) se distingue de manière substantielle du cadre (IS^*) - (CP^*) retenu dans la section 3 dans la mesure où l'horizon des anticipations de l'inflation et de l'écart de production est différent. Dans le modèle de Preston, les agents tiennent compte des anticipations pour toutes les périodes futures. Dans le modèle (IS^*) - (CP^*), ils n'utilisent que les anticipations qui concernent la période suivante.

La différence entre (IS*) - (CP*) et (18) - (19) s'explique par deux éléments : le moment du relâchement de l'hypothèse des anticipations rationnelles et la distinction entre l'opérateur individuel $E^*_{i,t}(\cdot)$ et l'opérateur agrégé $E^*_t(\cdot) = \int_i E^*_{i,t}(\cdot)di$. $E^*_{i,t}(\cdot)$ englobe anticipations rationnelles et autres que rationnelles de l'agent **individuel** i, $E^*_t(\cdot)$ agrège les anticipations individuelles $E^*_{i,t}(\cdot)$ de **tous les agents**. Preston remplace l'opérateur $E_t(\cdot)$ par l'opérateur individuel $E^*_{i,t}(\cdot)$ **avant** de linéariser le modèle. Bullard, Evans, Mitra et Honkapohja remplacent $E_t(\cdot)$ par l'opérateur agrégé $E^*_t(\cdot)$, dans la version **déjà** linéarisée du nouveau modèle canonique. Pour Preston, ceci constitue une erreur méthodologique. La dérivation des équations linéaires (IS) - (CP) du modèle original de Clarida et al. (1999) à partir des fondements microéconomiques est en effet basée sur la loi des espérances itérées $E_t E_{t+1}(\cdot) = E_t(\cdot)$. Or, Preston considère que cette loi est certes vérifiée au niveau individuel ($E^*_{i,t}E^*_{i,t+1}(\cdot) = E^*_{i,t}(\cdot)$), mais pas forcément au niveau agrégé, c'est-à-dire pour l'opérateur $E^*_t(\cdot)$ (Preston 2002). Evans et al. (2002) récusent les critiques de Preston. Ils font remarquer que les anticipations des agents sont supposées être homogènes dans le nouveau modèle canonique avec apprentissage. Ceci impliquerait que la loi des espérances itérées reste valable pour l'opérateur $E^*_t(\cdot)$.

Le débat entre Preston d'une part et Evans, Honkapohja et Mitra d'autre part n'est pas tranché à ce jour : aucune des deux approches n'a pu être écartée comme modélisation valable des anticipations. Les publications les plus récentes présentent par conséquent les deux formulations des anticipations par apprentissage sans privilégier l'une où l'autre (cf. Evans & Honkapohja (2009)).

L'emploi des anticipations à horizon infini confirme parfaitement les résultats de Bullard & Mitra (2002) obtenus dans le cadre du modèle (IS*) - (CP*). En revanche, le résultat concernant la règle basée sur les anticipations sous engagement $i_t = \delta_L x_{t-1} + \delta_\pi E^*_t \pi_{t+1} + \delta_x E^*_t x_{t+1} + \psi_g g_t + \psi_u u_t$ n'est pas robuste par rapport aux modifications dans la modélisation des anticipations. Cette règle est confrontée à des problèmes de stabilité sous apprentissage dans le modèle de Preston, mais non dans le modèle (IS*) - (CP*) (Evans & Honkapohja 2006, Preston 2008).

4.1.2 Des hypothèses informationnelles alternatives

La robustesse des résultats par rapport aux hypothèses informationnelles du modèle mérite également d'être analysée dans la mesure où ces hypothèses paraissent en partie irréalistes et arbitraires.

Le nouveau modèle canonique avec apprentissage tel qu'il est présenté dans la section 3.1 est basé sur l'hypothèse implicite que les autorités monétaires connaissent les vrais paramètres de l'économie. En effet, sans cette supposition elles seraient incapables d'utiliser les règles optimales dont les coefficients sont fonction des paramètres ϕ, λ, β, ρ et α. Cette hypothèse peut paraître excessive. Les décisions des banques centrales - c'est-à-dire des autorités monétaires du monde réel - s'appuient entre autres sur des modèles macroéconomiques. Les paramètres de ces modèles sont a priori inconnus et leurs estimations sont en permanence réactualisées. Pour tenir compte de ces contraintes informationnelles, Evans & Honkapohja (2003*b*) utilisent une hypothèse alternative. Ils supposent que les autorités monétaires ne connaissent pas ϕ et λ et qu'elles doivent se contenter des estimations de ces paramètres. Le modèle est maintenant caractérisé par la simultanéité de l'apprentissage des agents privés et des autorités monétaires. Cette hypothèse informationnelle est plus conforme à la réalité des autorités monétaires du monde réel, qui font appel à des modèles estimés pour prendre des décisions de politique monétaire. Les auteurs trouvent que ce changement d'hypothèse n'a aucun impact sur les résultats concernant la stabilité sous apprentissage en présence des règles optimales basées sur les anticipations. Ceci est vrai à la fois dans le contexte d'une politique monétaire discrétionnaire et dans celui d'une politique monétaire avec engagement (Evans & Honkapohja 2003*a*,*b*). L'hypothèse que les autorités monétaires connaissent les vraies valeurs de ϕ et λ est donc acceptable, malgré son caractère peu réaliste, lorsqu'il s'agit d'analyser la stabilité sous apprentissage en présence de ce type de règles. Cet examen de robustesse n'a cependant pas encore été effectué pour d'autres règles de politique monétaire.

La règle basée sur les anticipations (ROA) repose par ailleurs sur l'hypothèse implicite que les autorités monétaires observent parfaitement les anticipations des agents du secteur privé. Cette hypothèse est difficilement conciliable avec les pratiques des banques centrales qui se préoccupent des anticipations des agents privés (cf. Bank of England (2001)). Evans et Honkapohja assouplissent cette supposition en admettant que ces observations peuvent être entachées par des erreurs de mesure (Evans & Honkapohja 2003*b*). Lorsque ces erreurs prennent la forme d'un bruit blanc, les résultats de la section 3 restent valables : en présence de la règle (ROA), le modèle est toujours stable sous apprentissage (Evans & Honkapohja 2003*b*).

4.1.3 La modélisation de l'hétérogénéité

Les résultats présentés dans les sections 2 et 3 proviennent d'un modèle caractérisé par l'homogénéité des agents du secteur privé. Deux manières de relâcher l'hypothèse arbitraire d'agents homogènes ont été explorées dans la littérature : en généralisant la méthode d'Evans & Honkapohja (2001) et à l'aide d'algorithmes génétiques.

Honkapohja & Mitra (2005) analysent la stabilité sous apprentissage dans un contexte où les autorités monétaires ne peuvent pas observer les anticipations des agents. Les anticipations des agents privés peuvent alors différer de celles des autorités monétaires. Les auteurs analysent ce cas à l'aide de la généralisation de la méthode d'Evans & Honkapohja (2001) qui englobe des configurations où les agents sont hétérogènes (Honkapohja & Mitra 2006). Pour tenir compte de l'hétérogénéité entre agents privés et autorités monétaires, ils substituent à (NMC*) l'équation :

$$y_t = M_P E^*_{P,t}\, y_{t+1} + M_{CB} E^*_{CB,t}\, y_{t+1} + P\nu_t \tag{20}$$

M_P représente la réaction (via (IS*) et (CP*)) des agents du secteur privé (P) à leurs anticipations $E^*_{P,t}$ et M_{CB} la réaction (via la règle de politique monétaire) des autorités monétaires (CB) à leurs anticipations $E^*_{CB,t}$ (Honkapohja & Mitra 2005). (20) montre que Honkapohja et Mitra ne supposent pas d'hétérogénéité entre différents agents du secteur privé.

Suivant la méthode de Honkapohja & Mitra (2006), ils distinguent entre l'hétérogénéité transitoire et l'hétérogénéité persistante. L'hétérogénéité **transitoire** est basée sur des lois initiales perçues différentes entre agents privés et autorités monétaires. De plus, les séries des termes de gain γ_t de l'algorithme d'apprentissage sont différentes tout en convergeant vers une même constante positive. L'hétérogénéité **persistante** est définie par des séries de termes de gain qui peuvent converger vers des constantes différentes. En outre, chaque type d'agent (P et CB) est doté d'un algorithme d'apprentissage spécifique, l'un utilisant les moindres carrés récursifs (10) - (11) et l'autre celui du gradient stochastique :

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \gamma_t\, z_{t-1}\, \varepsilon_t^T \tag{21}$$

Ce dernier algorithme ne tient pas compte des moments empiriques du deuxième ordre.

L'introduction de l'hétérogénéité persistante modifie les résultats d'Evans & Honkapohja (2003*b*, 2006) par rapport à la stabilité sous apprentissage obtenus dans un contexte d'anticipations homogènes. Concernant la règle de Clarida et al. (1999) $i_t = \left(1 + \frac{(1-\rho)\lambda}{\rho\alpha\phi}\right) E^*_{CB,t}\pi_{t+1} + \phi^{-1} g_t$ et la règle (ROA) $i_t = \delta_\pi E^*_{CB,t}\pi_{t+1} + \delta_x E^*_{CB,t} x_{t+1} + \delta_g g_t + \delta_u u_t$, les conditions de la stabilité sous apprentissage deviennent plus restrictives. Il existe effectivement des combinaisons des paramètres telles que le modèle devient instable lorsque les autorités monétaires utilisent ces règles (Honkapohja & Mitra 2005). La condition de la stabilité en présence de la règle de McCallum & Nelson (2004) $i_t = E^*_{CB,t}\pi_{t+1} + \zeta[E^*_{CB,t}\pi_{t+1} + \frac{\alpha}{\lambda}(E^*_{CB,t}x_{t+1} - E^*_{CB,t}x_t)]$ est également affectée par la prise en compte de l'hétérogénéité persistante. Plus la série des termes de gain des autorités monétaires converge vers des valeurs faibles, plus il devient nécessaire d'augmenter le paramètre ζ de la règle pour éviter l'instabilité sous apprentissage (Honkapohja & Mitra 2006). En revanche, les résultats d'Evans & Honkapohja (2003*b*, 2006) concernant la stabilité sous apprentissage en présence de ces trois règles sont robustes par rapport à l'hétérogénéité transitoire.

Giannitsarou (2003) analyse l'impact de l'hétérogénéité de l'apprentissage, c'est-à-dire de l'hétérogénéité entre les processus d'apprentissage des différents agents. Cette hétérogénéité se répercute sur les anticipations, faisant en sorte que pour deux agents hétérogènes i et j, on a $E^*_{i,t}(\cdot) \neq E^*_{j,t}(\cdot)$. L'auteure exclut explicitement tout autre élément d'hétérogénéité, comme par exemple celle traduite par la différence entre les matrices de réaction M_P et M_{CB} dans Honkapohja & Mitra (2005). Giannitsarou modélise l'hétérogénéité de l'apprentissage d'une manière très proche de celle mobilisée par Honkapohja & Mitra (2005, 2006). La différence dans l'apprentissage peut porter sur les lois perçues initiales, sur les séries des termes de gain et sur l'algorithme d'apprentissage (moindre carrés récursifs ou gradient stochastique). Le cadre d'analyse est un modèle général qui permet d'étudier "tout modèle stochastique linéaire qui peut être écrit en forme réduite et qui contient (...) des anticipations courantes des variables futures" (Giannitsarou 2003). Il couvre donc à la fois (NMC*) - (5) et le modèle de Preston (18) - (19). Giannitsarou trouve que l'hétérogénéité des lois perçues initiales, associée à l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés, ne modifie pas les conditions pour la stabilité sous apprentissage obtenus dans un modèle avec agents homogènes. En revanche, les autres formes de l'hétérogénéité de l'apprentissage sont susceptibles de transformer ces conditions.

Adoptant une optique distincte, Arifovic et al. (2007) modélisent l'hétérogénéité des agents dans le cadre du modèle (NMC*) - (5) par le fait que chaque agent i ($i = 1, ..., N$) du secteur privé est doté d'une loi perçue spécifique[21]

$$y_t = \begin{bmatrix} a_{x,i,t} \\ a_{\pi,i,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xg,i,t} \\ c_{\pi g,i,t} \end{bmatrix} g_t = a_{i,t} + c_{i,t} g_t. \tag{22}$$

Les auteurs admettent que les coefficients individuels peuvent initialement différer entre agents. Ces coefficients sont ensuite actualisés à l'aide d'opérateurs génétiques de *croisement*, *mutation*, et *sélection*.[22] Ces opérateurs traduisent l'impact de l'apprentissage "social", c'est-à-dire de la communication entre les agents privés du modèle concernant leur manière de formuler des anticipations :

$$E^*_{i,t} y_{t+1} = a_{i,t} + c_{i,t} \mu g_t. \tag{23}$$

Il s'agit notamment de modéliser le fait que les agents adoptent les formulations des anticipations qui s'avèrent être les plus performantes et qu'ils observent dans leur entourage.

L'opérateur **croisement** fait en sorte que deux agents i et j, tirés aléatoirement parmi les N agents, échangent leurs coefficients de chaque type : i adopte ainsi $a_{x,j,t}$ et $a_{\pi,j,t}$, alors que j est doté de $a_{x,i,t}$ et $a_{\pi,i,t}$. L'opérateur **mutation** modifie les coefficients individuels de chaque agent par addition

[21] Le fait que la matrice $c_{i,t}$ est une matrice colonne s'explique par le fait que les auteurs retiennent le modèle de Woodford (2003*b*) qui ne comporte pas de choc u_t.

[22] En anglais : mutation, crossover, tournament selection.

d'un nombre tiré d'une distribution normale. Les modifications sur les coefficients exercées par ces deux opérateurs se produisent avec une probabilité fixe. L'opérateur **sélection** regroupe aléatoirement N fois par période tous les agents en binômes. Les agents de chaque binôme choisissent parmi les deux formulations des anticipations celle qui minimise les erreurs d'anticipations par rapport aux observations passées de y et de g. La loi réelle de cette économie s'obtient ensuite à l'aide du modèle (NMC*) - (5) et des anticipations agrégées. L'agrégation repose sur la moyenne des anticipations individuelles (23).

L'apport de l'article d'Arifovic et al. (2007) réside notamment dans le fait qu'il modélise de manière explicite la coordination entre les agents du modèle. La prise en compte de cette coordination modifie les conditions de stabilité sous apprentissage. L'apprentissage "social" représenté par les opérateurs génétiques est associé à des conditions moins restrictives que l"apprentissage économétrique des moindres carrés récursifs. En effet, dans le modèle d'Arifovic et al. (2007), la stabilité sous apprentissage est observable en présence de règles de Taylor (RT) qui ne respectent pas le principe de Taylor (PT). Ce résultat est toutefois à prendre avec précaution. En effet, l'analyse d'Arifovic et al. (2007) ne tient pas compte du fait que, la dérivation de la version linéaire du nouveau modèle canonique avec apprentissage (NMC*) - (5), sur laquelle ils travaillent, repose sur l'hypothèse de l'homogénéité des agents privés (Evans et al. 2002).

Les trois approches de l'hétérogénéité s'accordent sur le fait que les résultats obtenus sous l'hypothèse de l'homogénéité des agents ne sont pas robustes par rapport à l'introduction d'agents hétérogènes. L'hétérogénéité est donc un élément important dont les répercussions sur les résultats ne peuvent pas être captées dans une modélisation avec agents homogènes. Il serait toutefois souhaitable de savoir si l'apport de l'étude d'Arifovic et al. (2007) persiste lorsqu'on modélise l'hétérogénéité des agents privés d'une manière qui tienne compte du débat entre Preston (2005, 2006) et Evans et al. (2002). Une autre question que l'on est en droit de se poser concerne la manière dont l'hétérogénéité de l'apprentissage au sens de Giannitsarou pourrait affecter les conditions de stabilité sous apprentissage dans le nouveau modèle canonique. Sont-elles plus ou moins restrictives que sous l'hypothèse d'agents homogènes ? Pour répondre à cette question, on pourrait simplifier le modèle général de Giannitsarou (2003) pour retrouver le cas particulier qui correspond au nouveau modèle canonique.

4.1.4 Autres modélisations de l'apprentissage

La littérature consacrée à l'apprentissage dans le nouveau modèle canonique est marquée par la prédominance de l'apprentissage par les moindres carrés récursifs. Des algorithmes alternatifs sont mobilisés de manière plus ou moins sporadique pour tester la robustesse des résultats obtenus à l'aide des moindres carrés récursifs. Evans & Honkapohja (2003*b*) attestent de cette robustesse dans un contexte de politique monétaire discrétionnaire avec un algorithme fondé sur le gradient stochastique. Dans un contexte de politique monétaire avec engagement (cf. l'encadré "Autres règles de politique monétaire" pour une présentation de ces deux contextes), Evans & Honkapohja (2006) analysent l'impact de l'introduction de l'algorithme alternatif des moindres carrés à gains constants. Celui-ci est défini par (10) - (11) avec un terme de gain constant, $\gamma_t = \gamma > 0$. Les résultats trouvés avec les moindres carrés récursifs sont robustes dans la mesure où la stabilité sous apprentissage n'est pas affectée par l'emploi des moindres carrés à gains constants. Une vérification plus systématique de la robustesse des résultats par rapport au recours aux moindres carrés à gains constants semble prometteuse pour deux raisons. Premièrement, cet algorithme d'apprentissage traduit une intuition intéressante : il est adapté à un contexte où les agents soupçonnent l'économie d'être caractérisée par des instabilités structurelles. En effet, il donne un poids plus élevé aux observations les plus récentes. Deuxièmement, l'emploi de cet algorithme a été associé à l'émergence de dynamiques d'apprentissage très particulières qui ont été analysées de manière exhaustive dans d'autres modèles macroéconomiques. Il s'agit des dynamiques d'évasion qui éloignent temporairement l'économie du voisinage de l'équilibre de référence (Sargent 1999, Cho et al. 2002, Sargent & Williams 2005).[23]

D'autres formalisations du processus d'apprentissage n'ont pas encore été mobilisées dans le cadre du nouveau modèle canonique. Ceci est notamment le cas de l'apprentissage non-paramètrique (Chen & White 1998) et éductif (Binmore 1987) ainsi que de l'apprentissage par des systèmes classeurs (Wilson 1995) et des réseaux neuronaux (Beltratti et al. 1996).

4.2 Les défis pour la modélisation de l'apprentissage

La robustesse des résultats de la section 3 n'a pas été analysée par rapport à deux hypothèses fortes du nouveau modèle canonique avec apprentissage. En effet, il n'existe pas à ce jour d'alternatives plausibles envisagées à l'hypothèse de l'observabilité parfaite des variables et au choix arbitraire du modèle subjectif (9). Des extensions du modèle qui relâchent ces hypothèses pourraient permettre de compléter l'analyse de la robustesse des résultats exposée dans la sous-section précédente.

4.2.1 L'apprentissage des variables inobservables

Dans le nouveau modèle canonique, l'apprentissage des agents est basé sur l'hypothèse que les agents observent parfaitement les séries de l'inflation, de l'écart de production et des chocs. Toute modification de cette hypothèse est susceptible d'avoir un impact prononcé sur les résultats en termes de

[23] En anglais : *escape dynamics*.

stabilité sous apprentissage. En effet, l'existence d'un écart entre les réalisations de ces variables et leur perception par les agents privés influencera les estimations des paramètres du modèle subjectif. Elle exercera donc aussi un impact sur la loi réelle. Un tel décalage des perceptions paraît d'autant plus plausible que l'écart de production et les chocs ne sont pas directement observables : ils sont définis par rapport à une variable théorique, à savoir la production naturelle. L'écart de production est en effet donné par :

$$x_t = z_t - z_t^n \tag{24}$$

avec z_t le logarithme de la production courante et z_t^n le logarithme du niveau de production naturel. Dans l'environnement du nouveau modèle canonique où les prix ne s'ajustent pas immédiatement, le niveau de production naturel n'est pas directement observable et peut au mieux être estimée. L'absence d'observabilité de la production naturelle pourrait donner matière à rendre le nouveau modèle canonique avec apprentissage encore plus réaliste et pourrait être intégrée dans le modèle grâce à une généralisation de l'apprentissage des agents. Il suffirait d'introduire l'hypothèse que les agents estiment la production naturelle avant de pouvoir utiliser les observations de l'écart de production. L'apprentissage concernant la production naturelle pourrait être modélisé à l'aide des algorithmes utilisés en pratique comme par exemple le filtre Hodrick-Prescott (cf. Schalck (2006)).

Le fait de disposer des estimations de la production naturelle paraît d'ailleurs doublement utile dans le nouveau modèle canonique dans la mesure où les chocs g_t et u_t sont établis par rapport à la production naturelle. Le choc de demande est donné par :

$$g_t = E_t z_{t+1}^n - z_t^n + e_t - E_t e_{t+1} \tag{25}$$

avec e_t un indicateur de la part du PIB affectée aux dépenses du secteur privé (Clarida et al. 1999). Le choc d'offre u_t est défini par rapport à l'écart de production et donc indirectement par rapport à la production naturelle. L'article de Clarida et al. (1999) suggère l'expression suivante pour le choc d'offre[24]

$$u_t = \delta \left(mc_t - \kappa x_t \right). \tag{26}$$

mc_t est l'écart entre les coûts marginaux réels et leur état stationnaire, κ représente l'élasticité de la production par rapport aux coûts marginaux réels (Clarida et al. 1999). Dans ces conditions, l'hypothèse d'une parfaite observabilité des chocs semble difficilement acceptable.

[24] L'article en question ne donne pas une définition explicite du choc d'offre u_t. Les auteurs indiquent simplement que "u_t peut être interprété comme reflet des déviations par rapport à la condition $mc_t = \kappa x_t$." D'autre part, ils indiquent que le modèle de Calvo (1983) induit la relation $\pi_t = \delta mc_t + \beta E_t \pi_{t+1}$. Soit f_t la déviation par rapport à la condition $mc_t = \kappa x_t$. On a donc $mc_t = \kappa x_t + f_t$ et l'on peut obtenir l'expression suivante pour la nouvelle courbe de Phillips : $\pi_t = \delta \kappa x_t + \beta E_t \pi_{t+1} + \delta f_t$. Par identification, on trouve alors $\lambda = \delta \kappa$ et $u_t = \delta f_t = \delta \left(mc_t - \kappa x_t \right)$.

4.2.2 L'apprentissage du modèle subjectif

La justification du modèle subjectif (9) constitue un deuxième terrain fertile pour la généralisation de l'apprentissage. Dans le nouveau modèle canonique, l'hypothèse selon laquelle les agents adoptent ce modèle subjectif n'est pas motivée. Un processus d'apprentissage qui génère le modèle subjectif signifierait un progrès en termes de réalisme du nouveau modèle canonique. Une telle justification paraît d'autant plus opportune que l'identité entre la forme fonctionnelle du modèle subjectif et celle de la solution au minimum de variables est une hypothèse centrale de la méthode d'Evans & Honkapohja (2001). Les résultats les plus importants de la littérature sur l'apprentissage dépendent crucialement de cette hypothèse. C'est en effet grâce à celle-ci que l'utilisation de certaines règles de politiques monétaires permet de faire converger l'économie vers l'équilibre fondamental. En revanche, cette convergence devient impossible lorsque le modèle subjectif ne comporte pas toutes les variables de la solution au minimum de variables du modèle en question (Evans & Honkapohja 2006).[25] Par ailleurs, le fait d'ajouter au modèle subjectif des variables qui ne font pas partie de la solution au minimum de variables, peut rendre les conditions de convergence plus restrictives (Evans & Honkapohja 2001).

Le fait de disposer d'une modélisation de l'apprentissage du modèle subjectif renforcerait d'ailleurs le "principe de cohérence cognitive" qui établit un parallèle entre les agents du modèle et l'"économètre dans le monde réel (Evans & Honkapohja 2009). Cette modélisation permettrait en effet de tenir compte de l'étape la plus importante du travail de l'économètre qui manque dans le nouveau modèle canonique avec apprentissage : la recherche de la bonne spécification de la relation à estimer.

5 Conclusion

La présente revue de la littérature a fait le point sur les apports de la modélisation de l'apprentissage dans le nouveau modèle de la macroéconomie contemporaine (nouveau modèle canonique). L'enseignement principal de la littérature sur les propriétés des règles de politique monétaire revisitée réside dans le fait que les résultats normatifs obtenus dans la version originale du modèle avec anticipations rationnelles ne sont que partiellement confirmés. En effet, le nouveau modèle canonique avec anticipations par apprentissage réaffirme les résultats concernant l'importance du principe de Taylor. En revanche, les deux approches ne donnent pas toujours des recommandations identiques en termes de politique monétaire. L'analyse des propriétés de la

[25] En présence de la règle basée sur les anticipations (ROA), un modèle subjectif tronqué qui ne comporte pas les chocs ν_t aboutit à la convergence de l'économie vers un "équilibre à perceptions restreintes". Il s'agit du meilleur équilibre qui puisse être atteint avec ce modèle subjectif tronqué (Evans & Honkapohja 2003*b*).

règle fondamentale avec engagement montre que la modélisation de l'apprentissage permet parfois de détecter le caractère déstabilisant d'une règle, ce qui aurait échappé à une modélisation avec anticipations rationnelles.

La modélisation de l'apprentissage permet ainsi d'affiner l'analyse normative des règles de politique monétaire. Cet affinement est possible, car les anticipations par apprentissage concernent un espace plus large que les anticipations rationnelles. En effet, les anticipations par apprentissage peuvent être interprétées comme une généralisation du concept des anticipations rationnelles. Au lieu de se limiter à l'analyse ponctuelle de l'équilibre en anticipations rationnelles, la méthode d'Evans & Honkapohja (2001) rend accessible l'étude du comportement de l'économie au voisinage de cet équilibre en s'appuyant sur des dynamiques d'apprentissage. Un nouveau critère, la stabilité par rapport à l'apprentissage, complète celui de la détermination utilisé dans les modèles à anticipations rationnelles.

La généralisation des représentations de l'apprentissage pourrait constituer une prolongation intéressante de la littérature existante : la modélisation de l'apprentissage de la production naturelle et du modèle subjectif présenterait l'avantage de permettre le relâchement de deux hypothèses fortes du modèle.

Annexes

Annexe A

Dans le modèle de Clarida et al. (1999), le taux d'intérêt nominal i_t est exprimé en déviation par rapport au taux valable à l'état stationnaire i^{stat} : $i_t \equiv i_t^c - i^{stat}$, avec i_t^c le taux nominal courant. L'écart de production est défini par $x_t \equiv z_t - z_t^n$, avec z_t le logarithme de la production courante et z_t^n le logarithme du niveau de production naturel. L'inflation π_t est exprimée en déviation par rapport à son niveau associé à l'état stationnaire π^{stat} : $\pi_t \equiv \pi_t^c - \pi^{stat}$ avec π_t^c l'inflation courante.

Annexe B

L'écriture matricielle du nouveau modèle canonique

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ \pi_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \end{bmatrix} \quad (27)$$

permet l'expression alternative :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -n_{11} & -n_{12} & 1 & 0 \\ -n_{21} & -n_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^L \\ \pi_t^L \\ x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1}^L \\ \pi_{t+1}^L \\ E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \end{bmatrix} \tag{28}$$

avec $x_t^L = x_{t-1}$ et $\pi_t^L = \pi_{t-1}$, ou encore

$$\begin{bmatrix} y_{t+1}^L \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_t^L \\ y_t \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \end{bmatrix}, \tag{BK}$$

avec les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -n_{11} & -n_{12} & 1 & 0 \\ -n_{21} & -n_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$.

Le modèle est maintenant exprimé sous la forme standard de Blanchard & Kahn (1980) avec deux variables prédéterminées (x_t^L et π_t^L) et deux variables non prédéterminées (x_t et π_t). On peut donc mobiliser la méthode de Blanchard & Kahn (1980) pour prouver la proposition 1.

On prend les espérances conditionnelles à I_t des membres gauche et droite de l'équation (BK), celle-ci étant exprimée pour la période $t + i$:

$$\begin{bmatrix} E_t y_{t+i+1}^L \\ E_t y_{t+i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_t y_{t+i}^L \\ E_t y_{t+i} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} E_t g_{t+i} \\ E_t u_{t+i} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{bmatrix} w_t \\ q_t \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} y_t^L \\ y_t \end{bmatrix}, \tag{30}$$

avec C la matrice définie par $A = C^{-1}JC$. On a : $J = \begin{bmatrix} \underset{(\bar{n} \times \bar{n})}{J_1} & 0 \\ 0 & \underset{(\bar{m} \times \bar{m})}{J_2} \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} \underset{(\bar{n} \times 2)}{C_{11}} & \underset{(\bar{n} \times 2)}{C_{12}} \\ \underset{(\bar{m} \times 2)}{C_{21}} & \underset{(\bar{m} \times 2)}{C_{22}} \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{(2 \times \bar{n})}{B_{11}} & \underset{(2 \times \bar{m})}{B_{12}} \\ \underset{(2 \times \bar{n})}{B_{21}} & \underset{(2 \times \bar{m})}{B_{22}} \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} \underset{(n \times 2)}{K_1} \\ \underset{(m \times 2)}{K_2} \end{bmatrix}$.

La matrice J est construite de la manière suivante : les $\bar{n}$ valeurs propres de J_1 se situent toutes à l'intérieur du cercle unitaire, les $\bar{m}$ valeurs propres de J_2 se situent toutes à l'extérieur du cercle unitaire. C_{22} est supposé de rang complet.

En utilisant $A = C^{-1}JC$ et en multipliant les membres gauche et droite de (29) par C, on trouve :

$$\begin{bmatrix} E_t w_{t+i+1} \\ E_t q_{t+i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t w_{t+i} \\ E_t q_{t+i} \end{bmatrix} + C \times K \begin{bmatrix} E_t g_{t+i} \\ E_t u_{t+i} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

Les $\bar{n}$ premières lignes de (31) donnent le système

$$E_t w_{t+i+1} = J_1 E_t w_{t+i} + (C_{11}K_1 + C_{12}K_2) E_t \nu_{t+i}, \tag{32}$$

qui est stable, car ν est un processus autorégressif stationnaire et les valeurs propres de J_1 se situent à l'intérieur du cercle unitaire. En revanche, le système

$$E_t q_{t+i+1} = J_2 E_t q_{t+i} + (C_{21}K_1 + C_{22}K_2) E_t \nu_{t+i} \tag{33}$$

formé par les $\bar{m}$ dernières lignes de (31) est explosif, sauf si :

$$q_t = -\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1} (C_{21}K_1 + C_{22}K_2) E_t \nu_{t+i}. \tag{34}$$

Comme seules les solutions stationnaires sont retenues, (34) détermine de manière unique q_t. Le caractère unique de la solution du modèle dépend maintenant de l'unicité de w_t.

w_t doit vérifier (32), ainsi que deux conditions qui découlent du fait que (31) a été dérivée à partir de (29). En effet, prenons l'inverse de (30) :

$$\begin{bmatrix} y_t^L \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t \\ q_t \end{bmatrix}. \tag{35}$$

A la période $t = 0$, les 2 premières lignes de (35) donnent :

$$y_0^L = B_{11} w_0 + B_{12} q_0. \tag{36}$$

L'intuition de (36) est que w_0 est contrainte par les conditions initiales sur y_0^L. Les deux premières lignes de (35) impliquent également la relation suivante :

$$y_{t+1}^L - E_t y_{t+1}^L = B_{11}(w_{t+1} - E_t w_{t+1}) + B_{12}(q_{t+1} - E_t q_{t+1}). \tag{37}$$

Or, $y_{t+1}^L = y_t \in I_t$ et donc $y_{t+1}^L = E_t y_{t+1}^L$. On trouve par conséquent la relation :

$$0 = B_{11}(w_{t+1} - E_t w_{t+1}) + B_{12}(q_{t+1} - E_t q_{t+1}). \tag{38}$$

Si $\bar{m} = 2$, i.e. **si le nombre des valeurs propres de A à l'extérieur du cercle unitaire est égal au nombre des variables non prédéterminées** on voit que : q_0 est déterminé de manière unique par (34), on a $q_0 = -\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}K_1 + C_{22}K_2)E_0\nu_i$. Le vecteur de dimension 2×1 w_0 est également déterminé de manière unique, car (36) est un système à deux équations et à deux inconnues. En effet, B_{11} et B_{12} sont des matrices de dimension 2×2, q_0 est unique et y_0^L est prédéterminé, i.e. donné en $t = 0$ comme condition initiale. On a maintenant la solution unique pour $t = 0$: (w_0, q_0). A l'aide de la matrice C^{-1}, on trouve la solution unique des variables originales (y_0^L, y_0).

A la période $t = 1$ on obtient $q_1 = -\sum_{i=1}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}K_1+C_{22}K_2)E_1\nu_{1+i}$. Or, en $t = 0$, on a déjà trouvé E_0q_1 par (33) et E_0w_1 par (32). Par conséquent, (38) détermine en $t = 1$ de manière unique w_1. On a alors la solution unique : (w_1, q_1) et (y_1^L, y_1). On obtient de cette manière les solutions pour toutes les périodes $t = 0, 1, ..., n$.

Si $\bar{m} > 2$, i.e. **si le nombre des valeurs propres de A à l'extérieur du cercle unitaire est supérieur au nombre des variables non prédéterminées**, (36) est un système surdéterminé, qui n'a presque jamais de solution. Prenons par exemple le cas où $\bar{m} = 3$. Les éléments de (36) ont les dimensions suivantes : y_0^L : (2×1), w_0 : (1×1), q_0 : (3×1), B_{11} : (2×1) et B_{12} : (2×3). (36) est surdéterminé, car il s'agit d'un système à deux équations et à une inconnue.

Si $\bar{m} < 2$, i.e. **si le nombre des valeurs propres de A à l'extérieur du cercle unitaire est inférieur au nombre des variables non prédéterminées**, (36) est un système sousdéterminé qui permet une infinité de solutions. Prenons le cas où $\bar{m} = 1$. Les éléments de (36) ont les dimensions suivantes : y_0^L : (2×1), w_0 : (3×1), q_0 : (1×1), B_{11} : (2×3) et B_{12} : (2×1). (36) est sousdéterminé, car il s'agit d'un système à deux équations et à trois inconnues.

Annexe C

En multipliant par M^j et en faisant la somme de $j = 0$ à $j = k - 1$, l'équation (NMC') devient :

$$y_t = M^k E_t y_{t+k} + \sum_{j=0}^{k-1} M^j P E_t \nu_{t+j}. \tag{39}$$

Lorsque $\{y_t\}$ est un processus borné et lorsque les deux valeurs propres de M se trouvent à l'intérieur du cercle unitaire, il s'ensuit que :

$$\lim_{k\to\infty} M^k E_t y_{t+k} = 0. \tag{40}$$

Cela donne la solution unique

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} M^j P E_t \nu_{t+j} = \sum_{j=0}^{\infty} M^j P F^j \nu_t \tag{41}$$

Annexe D

A l'aide de la méthode d'Evans & Honkapohja (2001, chapitres 6 et 10), on peut montrer que le comportement dynamique d'un modèle défini par (NMC*), (LMP) et l'algorithme des moindres carrés récursifs (10) - (11) est correctement approché par l'équation différentielle (EDA). A cet effet, on montre d'abord qu'il est possible d'écrire le modèle sous la forme d'algorithmes stochastiques récursifs (ci-après *algorithmes récursifs*). Le modèle en question donne la loi réelle :

$$y_t = M[I + b_t]a_t + [M b_t^2 + N]y_{t-1} + (M[b_t c_t + c_t F] + P)\,\nu_t, \tag{LMR}$$

L'application (15) permet de trouver une expression alternative de la loi réelle :

$$y_t = T(\xi_t)^T z_t \tag{LMR'}$$

L'algorithme des moindre carrés récursifs s'appliquant aux paramètres estimés peut être mobilisé comme suit : on utilise l'équation (LMR') valable à la période $t-1$, on effectue le changement de variable $S_t = R_{t+1}$ et on substitue ε_t^T dans l'équation (10) par $y_{t-1}^T - z_{t-1}^T \xi_{t-1}$. Ces modifications permettent de trouver, à partir de (10) - (11), le nouveau système récursif :

$$\xi_t = \xi_{t-1} + t^{-1} S_t^{-1} z_{t-1} z_{t-1}^T \left[T(\xi_{t-1}) - \xi_{t-1}\right] \tag{42}$$

$$S_t = S_{t-1} + t^{-1}\left(z_t z_t^T - S_{t-1}\right) + t^{-2}\left(-\frac{t}{t+1}\right) \times \left(z_t z_t^T - S_{t-1}\right). \tag{43}$$

Les équations (42) et (43) peuvent être synthétisées par une seule équation en différences premières :

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \gamma_t \mathcal{H}(\theta_{t-1}, Z_t) + \gamma_t^2 \varpi_t(\theta_{t-1}, Z_t) \tag{44}$$

avec $\gamma_t = t^{-1}$, $\theta_t = vec(\xi_t, S_t)$, vec l'opérateur qui transforme la matrice (ξ_t, S_t) en un vecteur colonnes et $Z_t^T = (1, y_t^T, \nu_t^T, y_{t-1}^T, \nu_{t-1}^T)$ le vecteur des variables d'état observables. $\mathcal{H}(\theta_{t-1}, Z_t) = \begin{bmatrix} S_t^{-1} z_{t-1} z_{t-1}^T \left[T(\xi_{t-1}) - \xi_{t-1}\right] \\ z_t z_t^T - S_{t-1} \end{bmatrix}$ et $\varpi_t(\theta_{t-1}, Z_t) = -\frac{t}{t+1} \times \left(z_t z_t^T - S_{t-1}\right)$ sont deux fonctions qui interviennent dans l'actualisation du vecteur θ. On rappelle que z_t est le vecteur des régresseurs défini par $z_t^T = (1, y_{t-1}^T, \nu_t^T)$.

L'équation (44) précise comment les estimations évoluent sous l'impact de l'apprentissage, elle peut par conséquent être interprétée comme **règle d'apprentissage**.

La dynamique des variables d'état Z_t peut être résumée par l'équation

$$Z_t = A(\xi_t)Z_{t-1} + C(\xi_t)W_t \tag{45}$$

où $A(\xi_t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_a(a_t, b_t) & T_b(b_t) & T_c(b_t, c_t)F & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$, $C(\xi_t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_c(b_t, c_t) \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

et $W_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\nu}_t \end{bmatrix}$ avec $\tilde{\nu}_t = \begin{bmatrix} \tilde{g}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}$, $T_a(a_t, b_t) = M[I + b_t]a_t$, $T_b(b_t) = Mb_t^2 + N$ et $T_c(b_t, c_t) = M[b_t c_t + c_t F] + P$.

Le système formé par la règle d'apprentissage (44) et par la dynamique des variables d'état (45) correspond à la forme générale des algorithmes récursifs appliquée au modèle canonique. Les propriétés de l'algorithme récursif (44) - (45) sont a priori difficiles à étudier dans la mesure où il s'agit d'un système non-linéaire, stochastique et changeant au cours du temps (Evans & Honkapohja 2001, p. 126). L'analyse des propriétés de convergence locale de ce type d'algorithmes récursifs peut être facilitée par l'utilisation d'une équation différentielle ordinaire associée. Sous certaines conditions peu restrictives, on peut procéder alors de la manière suivante. On réécrit (44) :

$$\frac{\triangle\theta_t}{\triangle t} = t^{-1}\mathcal{H}(\theta_{t-1}, Z_t) + t^{-2}\varpi_t(\theta_{t-1}, Z_t) \tag{46}$$

équivalent à

$$\triangle\theta_t = t^{-1}\mathcal{H}(\theta_{t-1}, Z_t) \times \triangle t + t^{-2}\varpi_t(\theta_{t-1}, Z_t) \times \triangle t. \tag{47}$$

On définit ensuite le temps "artificiel" $\tau(t) = ln(t)$ (Sargent 1993, p. 41).[26] On peut alors écrire

$$\frac{\triangle\theta_t}{\triangle\tau} = t^{-1}\mathcal{H}(\theta_{t-1}, Z_t) \times \frac{\triangle t}{\triangle\tau} + t^{-2}\varpi_t(\theta_{t-1}, Z_t) \times \frac{\triangle t}{\triangle\tau}. \tag{48}$$

On fixe maintenant le vecteur des estimations ($\theta_t = \bar{\theta}$). Le comportement asymptotique de la moyenne de la fonction $\mathcal{H}(\bar{\theta}, \bar{Z}_t)$ est donné par

$$h(\bar{\theta}) = \lim_{t\to\infty} E\mathcal{H}(\bar{\theta}, \bar{Z}_t(\bar{\theta})). \tag{49}$$

[26] La littérature sur l'apprentissage est étrangement opaque pour ce qui concerne la présentation du temps artificiel τ. Les seules définitions explicites se trouvent chez Sargent (1993) et chez Woodford (2003*b*, p. 265) qui propose la définition alternative $\tau_t = \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{k}$.

Comme $\lim_{t\to\infty} \triangle\tau = 0$, on a pour t "grand" $\frac{\triangle\theta_t}{\triangle\tau} \approx \frac{d\theta_\tau}{d\tau}$ et $\frac{\triangle t}{\triangle\tau} \approx \frac{dt}{d\tau} = \frac{de^\tau}{d\tau}$.[27] Dans ce cas, on peut également approcher le terme $\mathcal{H}(\theta_{t-1}, Z_t)$ par $h(\bar{\theta})$, car $\theta_t \approx \theta_{t-1}$ et les variations de Z_t sont plus importantes que celles des θ_{t-1} (Sargent 1993, p. 41). Finalement, on peut négliger le terme $\varpi_t(\cdot)$, car il est doté du facteur t^{-2} qui devient très "petit" lorsque t est "grand". On peut maintenant écrire

$$\frac{d\bar{\theta}_\tau}{d\tau} \approx t^{-1}h(\bar{\theta}) \times \frac{de^\tau}{d\tau}. \tag{50}$$

Comme $\tau = ln(t) \Leftrightarrow e^\tau = t$, on trouve

$$\frac{d\bar{\theta}_\tau}{d\tau} \approx e^{-\tau}h(\bar{\theta}) \times \frac{de^\tau}{d\tau}. \tag{51}$$

L'équation différentielle associée à (44) - (45) s'écrit donc :

$$\frac{d\bar{\theta}_\tau}{d\tau} = h(\bar{\theta}_\tau). \tag{52}$$

Pour la suite du raisonnement, il est préférable de décomposer $h(\bar{\theta}_\tau)$ en une fonction $h_\xi(\bar{\xi}_\tau, \bar{S}_\tau)$ affectant le vecteur ξ et une fonction $h_S(\bar{\xi}_\tau, \bar{S}_\tau)$ affectant la matrice S. Appliqué au cas analysé ici, on obtient alors :

$$h_\xi(\bar{\xi}_\tau, \bar{S}_\tau) = \lim_{t\to\infty} E\bar{S}_\tau^{-1} z_{t-1} z_{t-1}^T [T(\bar{\xi}_\tau) - \bar{\xi}_\tau] \tag{53}$$

$$h_S(\bar{\xi}_\tau, \bar{S}_\tau) = \lim_{t\to\infty} E(z_t z_t^T - \bar{S}_\tau) \tag{54}$$

avec $h(\bar{\theta}_\tau) \equiv vec[h_\xi(\bar{\xi}_\tau, \bar{S}_\tau), h_S(\bar{\xi}_\tau, \bar{S}_\tau)]$.

On définit la matrice $M_z(\bar{\xi}_\tau)$ de la manière suivante : Soit $z_t(\bar{\xi}_\tau)^T = (1, y_t(\bar{\xi}_\tau)^T, \nu_t^T)$ tel que $y_t(\bar{\xi}_\tau) = T(\bar{\xi}_\tau)^T z_t(\bar{\xi}_\tau) = T_a(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau) + T_b(\bar{b}) y_{t-1}(\bar{\xi}_\tau) + T_c(\bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau)\nu_t$, avec $y_t(\bar{\xi}_\tau)$ le processus stochastique des variables endogènes que l'on pourrait observer si les agents avaient des estimations fixes des paramètrès : $\bar{\xi}^T = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. On définit

$$M_z(\bar{\xi}_\tau) = \lim_{t\to\infty} E z_t(\bar{\xi}_\tau) z_t(\bar{\xi}_\tau)^T. \tag{55}$$

On trouve alors :

$$\frac{d\bar{\xi}_\tau}{d\tau} = \bar{S}_\tau^{-1} M_z(\bar{\xi}_\tau)[T(\bar{\xi}_\tau) - \bar{\xi}_\tau] \tag{56}$$

$$\frac{d\bar{S}_\tau}{d\tau} = M_z(\bar{\xi}_\tau) - \bar{S}_\tau. \tag{57}$$

Les équations différentielles associées (56) - (57) décrivent la stabilité sous apprentissage de l'équilibre rationnel fondamental $\check{\xi}$. Selon Evans &

[27] Pour assurer la cohérence interne des notations, les indices passent ici d'un système basé sur le temps t à un système basé sur le temps artificiel τ. En effet, on a $t = e^\tau$ et donc $\theta_t = \theta_{e^\tau}$. On peut sans ambiguïté utiliser la notation allégée θ_τ dans la mesure où la relation $\tau = ln(t)$ est bijective sur l'intervalle $[1, +\infty]$.

Honkapohja (2001), l'équilibre $\check{\xi}$ est stable, si, pour un équilibre initial ξ_1 élément du voisinage de $\check{\xi}$, ξ_t est élément de ce voisinage pour tout t.

Pour des observations initiales des régresseurs $z_1 = (1, y_0, g_1, u_1)^T$, on trouve d'après l'équation (43) $S_t = \frac{1}{t+1}\sum_{i=0}^{t} z_{t-i}z_{t-i}^T$. L'application de la loi forte des grands nombre au processus $z_t z_t^T$ montre que $\bar{S}_\tau$ converge vers $M_z(\bar{\xi}_\tau)$, ce qui donne $\lim_{\tau\to\infty}(M_z(\bar{\xi}_\tau) - \bar{S}_\tau) = 0$ et, lorsque la matrice $\bar{S}_\tau$ est inversible, $\lim_{\tau\to\infty} \bar{S}_\tau^{-1} M_z(\bar{\xi}_\tau) = I$. Le comportement du système (56) - (57) est par conséquent entièrement déterminé par l'équation différentielle :

$$\frac{d\bar{\xi}_\tau}{d\tau} = T(\bar{\xi}_\tau) - \bar{\xi}_\tau. \tag{58}$$

(58) est équivalente à (EDA), car $\bar{\xi}_\tau^T = (\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau)$.

Annexe E

On cherche les conditions de stabilité par rapport à l'apprentissage économétrique de l'équilibre fondamental $(\check{a}, \check{b}, \check{c})$. Dans le cas général $(N \neq 0)$, on étudie la stabilité de cet équilibre sous l'équation différentielle (EDA). On mobilise ici une expression alternative de (EDA) qui est basée sur la décomposition de T :

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau) = (T_a(\bar{a}_\tau, \bar{b}_\tau) - \bar{a}_\tau, T_b(\bar{b}_\tau) - \bar{b}_\tau, T_c(\bar{b}_\tau, \bar{c}_\tau) - \bar{c}_\tau). \tag{59}$$

Une condition nécessaire pour l'**A-stabilité** de l'équilibre fondamental $(\check{a}, \check{b}, \check{c})$ est que toutes les valeurs propres des trois matrices Jacobiennes

$$DT_a = M(I + \check{b}) \tag{60}$$

$$DT_b = \check{b}^T \otimes M + I \otimes M\check{b} \tag{61}$$

$$DT_c = F^T \otimes M + I \otimes M\check{b} \tag{62}$$

ont des parties réelles inférieures à 1. Une condition suffisante pour l'**A-instabilité** de $(\check{a}, \check{b}, \check{c})$ est que au moins une valeur propre de ces trois matrices Jacobiennes a une partie réelle supérieure à 1. (cf. Evans & Honkapohja (2001, p. 245), Evans & Honkapohja (2004) et Hirsch & Smale (1974, sections 9.1 - 92, p. 181 et p. 187)).

Dans le cas particulier où $N = 0$, l'équation différentielle associée s'écrit :

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{a}_\tau, \bar{c}_\tau) = (T_a(\bar{a}_\tau) - \bar{a}_\tau, T_c(\bar{c}_\tau) - \bar{c}_\tau). \tag{63}$$

L'équilibre fondamental $(\check{a}, \check{c})$ est A-stable lorsque les valeurs propres des deux matrices Jacobiennes

$$DT_a = M \tag{64}$$

$$DT_c = F^T \otimes M \tag{65}$$

ont des parties réelles inférieures à 1 (Evans & Honkapohja 2004). Ceci est le cas lorsque les parties réelles des valeurs propres de M sont inférieures à 1, car on sait que $\mu \leq 1$ et $\rho \leq 1$.

Références

Arifovic, J., Bullard, J. & Kostyshyna, O. (2007), 'Social Learning and Monetary Policy Rules', *Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper* **007a**.

Bank of England, U. K. (2001), 'Inflation Report'.
URL: *www.bankofengland.co.uk/publications/inflationreport/2001.htm*

Beltratti, A., Margarita, S. & Terna, P. (1996), *Neural Networks for Economic and Financial Modelling*, International Thompson Computer Press, London.

Benveniste, A., Metivier, M. & Priouret, P. (1990), *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*, Springer-Verlag, Berlin.

Bernanke, B. S., Gertler, M. & Gilchrist, S. (1998), The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework, *in* J. B. Taylor & M. Woodford, eds, 'Handbook of Macroeconomics', North-Holland, Amsterdam.

Binmore, K. (1987), 'Modeling Rational Players', *Economics and Philosophy* **3**, 179–214.

Blanchard, O. J. & Kahn, C. M. (1980), 'The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations', *Econometrica* **48**(5), 1305–1311.

Bray, M. (1982), 'Learning, Estimation, and the Stability of Rational Expectations', *Journal of Economic Theory* **26**(2), 318–339.

Bullard, J. (2006), 'The Learnability Criterion and Monetary Policy', *Federal Reserve Bank of St. Louis Review* **88**, 203–217.

Bullard, J. & Mitra, K. (2002), 'Learning about Monetary Policy Rules', *Journal of Monetary Economics* **49**(6), 1105–1129.

Calvo, G. A. (1983), 'Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework', *Journal of Monetary Economics* **12**(3), 383–398.

Chen, X. & White, H. (1998), ‘Nonparametric Adaptive Learning with Feedback’, *Journal of Economic Theory* **67**, 266–284.

Cho, I.-K., Sargent, T. & Williams, N. (2002), ‘Escaping Nash Inflation’, *Review of Economic Studies* **69**(1), 1–40.

Clarida, R., Gali, J. & Gertler, M. (1999), ‘The Science of Monetary Policy : A New Keynesian Perspective’, *Journal of Economic Literature* **37**(4), 1661–1707.

Clarida, R., Gali, J. & Gertler, M. (2000), ‘Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability : Evidence and Some Theory’, *Quarterly Journal of Economics* **115**(1), 147–180.

Evans, G. W. (1985), ‘Expectational Stability and the Multiple Equilibria Problem in Linear Rational Expectations Models’, *Quarterly Journal of Economics* **100**(4), 1217–33.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (1992), ‘On the Robustness of Bubbles in Linear RE Models’, *International Economic Review* **33**(1), 1–14.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2001), *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press, Princeton.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2003*a*), ‘Adaptive Learning and Monetary Policy Design’, *Journal of Money, Credit and Banking* **35**(6), 1045–1072.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2003*b*), ‘Expectations and the Stability Problem for Optimal Monetary Policies’, *Review of Economic Studies* **70**(4), 807–824.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2003*c*), ‘Friedman’s Money Supply Rule versus Optimal Interest Rate Policy’, *Scottish Journal of Political Economy* **50**(5), 550–566.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2004), ‘Monetary Policy, Expectations and Commitment’, *University of Oregon Working Paper* **2002-11**.
URL: *http ://darkwing.uoregon.edu/ gevans/*

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2006), ‘Monetary Policy, Expectations and Commitment’, *Scandinavian Journal of Economics* **108**(1), 15–38.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2007), ‘Expectations, Learning and Monetary Policy : An Overview of Recent Research’, *Bank of Finland Research Discussion Papers* **32**.

Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2009), ‘Learning and Macroeconomics’, *Annual Review of Economics* **1**, 421–451.

Evans, G. W., Honkapohja, S. & Mitra, K. (2002), 'Notes on Agents' Behavioral Rules under Adaptive Learning and Recent Studies of Monetary Policy'.
URL: *www.valt.helsinki.fr/raka/seppo.htm*

Friedman, M. (1948), 'A Monetary and Fiscal Framework for Economic Stability', *American Economic Review* **38**(3), 245–264.

Friedman, M. (1959), *A Program for Monetary Stability*, Fordham University Press, New York.

Galí, J. (2008), *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle : An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton University Press, Princeton.

Giannitsarou, C. (2003), 'Heterogeneous Learning', *Review of Economic Dynamics* **6**(4), 885–906.

Hall, R. E. & Mankiw, N. G. (1994), 'Nominal Income Targeting', *NBER Working Paper* **4439**.

Hirsch, M. W. & Smale, S. (1974), *Differentiel Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra*, Academic Press, Orlando.

Honkapohja, S. & Mitra, K. (2004), 'Are Non-Fundamental Equilibria Learnable in Models of Monetary Policy ?', *Journal of Monetary Economics* **51**(8), 1743–1770.

Honkapohja, S. & Mitra, K. (2005), 'Performance of Monetary Policy with Internal Central Bank Forecasting', *Journal of Economic Dynamics & Control* **29**(4), 627–658.

Honkapohja, S. & Mitra, K. (2006), 'Learning Stability in Economies with Heterogeneous Agents', *Review of Economic Dynamics* **9**(2), 284–309.

Lucas, R. E. (1987), Adaptive Behavior and Economic Theory, *in* R. M. Hogarth & M. W. Reder, eds, 'Rational Choice : The Contrast Between Economics and Psychology', University of Chicago Press, Chicago, pp. 217–242.

Marcet, A. & Sargent, T. J. (1989*a*), 'Convergence of Least-Squares Learning in Environnements with Hidden State Variables and Private Information', *Journal of Political Economy* **97**(6), 1306–1322.

Marcet, A. & Sargent, T. J. (1989*b*), 'Convergence of Least-Squares Learning Mechanisms in Self-referential Linear Stochastic Models', *Journal of Economic Theory* **48**(2), 337–368.

McCallum, B. T. (1983), 'On Non-Uniqueness in Rational Expectation Models - An Attempt at Perspective', *Journal of Monetary Economics* **11**(2), 139–168.

McCallum, B. T. (1999*a*), Issues in the Design of Monetary Policy Rules, *in* J. Taylor & M. Woodford, eds, 'Handbook of Macroeconomics', North-Holland, Amsterdam, pp. 1483–1530.

McCallum, B. T. (1999*b*), 'Role of the Minimal State Variable Criterion in Rational Expectations Models', *NBER Working Paper* **7087**.

McCallum, B. T. (2002), 'Consistent Expectations, Rational Expectations, Multiple-Solution Indeterminacies, and Least-Squares Learnability', *NBER Working Paper* **9218**.

McCallum, B. T. (2003), 'Multiple-Solution Indeterminacies in Monetary Policy Analysis', *Journal of Monetary Economics* **50**(5), 1153–1175.

McCallum, B. T. & Nelson, E. (1999), Performance of Operational Policy Rules in an Estimated Semi-Classical Model, *in* J. Taylor, ed., 'Monetary Policy Rules', University of Chicago Press, Chicago, pp. 15–45.

McCallum, B. T. & Nelson, E. (2004), 'Timeless Perspective versus Discretionary Monetary Policy in Forward-Looking Models', *Federal Reserve Bank of St. Louis Review* **86**, 43–56.

Mitra, K. (2003), 'Desirability of Nominal GDP Targeting under Adaptive Learning', *Journal of Money, Credit, and Banking* **35**(2), 197–220.

Preston, B. (2002), 'Adaptive Learning, Forecast-Based Instrument Rules and Monetary Policy'. Mimeo.

Preston, B. (2005), 'Learning about Monetary Policy Rules when Long-Horizon Expectations Matter', *International Journal of Central Banking* **1**(2), 81–126.

Preston, B. (2006), 'Adaptive Learning, Forecast-Based Instrument Rules and Monetary Policy', *Journal of Monetary Economics* **53**(3), 507–535.

Preston, B. (2008), 'Adaptive Learning and the Use of Forecasts in Monetary Policy', *Journal of Economic Dynamics & Control* **32**(11), 3661–3681.

Robbins, H. & Monro, S. (1951), 'A Stochastic Approximation Method', *Annals of Mathematical Statistics* **22**(3), 400–407.

Romer, C. D. & Romer, D. H. (2002), 'A Rehabilitation of Monetary Policy in the 1950s', *American Economc Review* **92**(2), 121–127.

Salge, M. (1997), *Rational Bubbles : Theoretical Basis, Economic Relevance, and Empirical Evidence with a Special Emphasis on the German Stock Market*, Springer-Verlag, Berlin.

Sargent, T. J. (1993), *Bounded Rationality in Macroeconomics*, Oxford University Press, Oxford.

Sargent, T. J. (1999), *The Conquest of American Inflation*, Princeton University Press, Princeton.

Sargent, T. J. & Williams, N. (2005), 'Impacts of Priors on Convergence and Escapes from Nash Inflation', *Review of Economic Dynamics* **8**(2), 360–391.

Schalck, C. (2006), 'Stabilisation budgétaire dans l'UEM : proposition d'un mécanisme automatique', *Revue d'économie politique* **116**(6), 847–869.

Shell, K. (2008), Suspot Equilibrium, *in* L. Blume & S. Durlauf, eds, 'The New Palgrave : A Dictionary of Economics', Palgrave Macmillan, New York, pp. 847–869.

Svensson, L. E. O. (1999), 'Inflation Targeting as a Monetary Policy Rule', *Journal of Monetary Economics* **43**(3), 607–654.

Taylor, J. B. (1993), 'Discretion versus Policy Rules in Practice', *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* **39**(0), 195–214.

Taylor, J. B. (2005), 'The International Implications of October 1979 : Towards a Long Boom on a Global Scale', *Federal Reserve Bank of St. Louis Review* **87**, 269–275.

Walsh, C. E. (2003), *Monetary Theory and Policy*, MIT Press, Cambridge.

Wilson, S. W. (1995), 'Classifier Fitness Based on Accuracy', *Evolutionary Computation* **3**, 149–175.

Woodford, M. (1999), 'Optimal Monetary Policy Inertia', *NBER Working Paper* **7261**.

Woodford, M. (2003*a*), 'Comment on : Multiple-Solution Indeterminacies in Monetary Policy Analysis', *Journal of Monetary Economics* **50**(5), 1177–1188.

Woodford, M. (2003*b*), *Interest and Prices : Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press, Princeton.

Cahiers du GREThA
Working papers of GREThA

GREThA UMR CNRS 5113

Université Montesquieu Bordeaux IV
Avenue Léon Duguit
33608 PESSAC - FRANCE
Tel : +33 (0)5.56.84.25.75
Fax : +33 (0)5.56.84.86.47

www.gretha.fr

Cahiers du GREThA (derniers numéros)

2009-08 : FRIGANT Vincent, *La chaîne de valeur de l'industrie automobile est-elle soluble dans des pratiques socialement responsables ?*

2009-09 : ROUILLON Sébastien, *Un nouveau mécanisme décentralisant les équilibres de Lindahl*

2009-10 : PETIT Emmanuel, *Does indignation lead to generosity? An experimental investigation*

2009-11 : KECHIDI Med, TALBOT Damien, *Réseau de proximité et gestion des interactions techniques et organisationnelles : les firmes pivots de l'aéronautique*

2009-12 : DOUAI Ali, MONTALBAN Matthieu, *Institutions and the environment: the case for a historical political economy*

2009-13 : NICET-CHENAF Dalila, ROUGIER Eric, *FDI and growth: A new look at a still puzzling issue*

2009-14 : NICET-CHENAF Dalila, ROUGIER Eric, *Human capital and structural change: how do they interact with each other in growth?*

2009-15 : DOYEN Luc, PERREAU Jean-Christophe, *Sustainable coalitions in the commons*

2009-16 : YILDIZOGLU Murat, *Approche évolutionniste de la dynamique économique*

2009-17 : JULLIEN Bernard, *Approche institutionnaliste de la dynamique industrielle*

2009-18 : BELIS-BERGOUIGNAN Marie-Claude, *Analyse évolutionniste de la dynamique sectorielle*

2009-19 : JULLIEN Bernard, *L'analyse sectorielle institutionnaliste : projet et méthodes*

2009-20 : CORIS Marie, FRIGANT Vincent, LAYAN Jean-Bernard, TALBOT Damien, *Les dynamiques spatiales des activités productives*

2009-21 : CARRINCAZEAUX Christophe, *Les dynamiques spatiales de l'innovation*

2009-22 : OLTRA Vanessa, SAINT JEAN Maïder, *Innovations environnementales et dynamique industrielle*

2009-23 : CORIS Marie, FRIGANT Vincent, LUNG Yannick, Changements *organisationnels et diversité des formes institutionnelles*

2009-24 : DUPUY Claude, MONTALBAN Matthieu, MOURA Sylvain, *Finance et dynamiques des industries*

2009-25 : CLEMENT Matthieu, *Amartya Sen et l'analyse socioéconomique des famines : portée, limites et prolongements de l'approche par les entitlements*

2010-01 : ZUMPE Martin, *Règles de politique monétaire, apprentissage et stabilité: une revue de la littérature récente*

La coordination scientifique des Cahiers du GREThA est assurée par Sylvie FERRARI et Vincent FRIGANT. La mise en page est assurée par Dominique REBOLLO.