



FACOLTÀ DI ECONOMIA
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SEDE DI FORLÌ

**Corso di Laurea in Economia
delle Imprese Cooperative
e delle Organizzazioni Nonprofit**

Logiche dell'azione collettiva:
un'analisi evolutiva

Luigino Bruni Alessandra Smerilli

**Working Paper n. 31
aprile 2006**

in collaborazione con



Luigino Bruni

Dipartimento di Economia Politica, Università Bicocca, Milano

Alessandra Smerilli

Dipartimento di Economia Pubblica, Università La Sapienza, Roma

Informazioni :

Facoltà di Economia di Forlì - Corso di Laurea in Economia delle Imprese Cooperative e delle ONP

Tel. 0543-374620 – Fax 0543-374618 e-mail: nonprofit@spfo.unibo.it website: www.ecofo.unibo.it

Le logiche dell'azione collettiva

UN'ANALISI EVOLUTIVA

Luigino Bruni¹ e Alessandra Smerilli²

1. Il problema

L'azione collettiva è essenzialmente una faccenda di cooperazione. La teoria economica propone una teoria della cooperazione molto parsimoniosa: oltre alla cooperazione che emerge sulla base del calcolo dell'interesse individuale non riesce ad arrivare. Per l'economia neoclassica standard, ad esempio, un soggetto non dovrebbe mai cooperare in un Dilemma del Prigioniero non ripetuto. Se in laboratorio poi si osserva che anche nel gioco one-shot alcuni giocatori cooperano, l'interpretazione è semplice: hanno giocato male, o non sono stati razionali. La cooperazione ha invece una sua logica, sempre per l'economia standard, quando il gioco si ripete: allora, come dice il folk theorem, possiamo cooperare sulla semplice base del calcolo razionale: non occorre ipotizzare nessuna forma di "preferenze sociali" (come fa invece la scuola di Zurigo di Fehr e il suo gruppo), basta l'interesse personale.

In questo studio noi proponiamo una teoria della cooperazione meno parsimoniosa, che cerca di dar conto di logiche di cooperazione diverse da quella standard in economia. Al tempo stesso, la nostra proposta non sposa neanche la versione delle "preferenze sociali". Cerca invece di prender sul serio entrambe queste visioni dell'azione collettiva, ma di guardare oltre, e in luoghi non ancora sufficientemente esplorati dalla teoria economica e sociale.

In quanto segue, a partire dal Dilemma del Prigioniero, costruiremo dei modelli dinamici che ci consentiranno di ragionare attorno alle logiche della cooperazione.

¹ luigino.bruni@focolare.org

² a_smerilli@yahoo.it

Vedremo che queste sono molte, non tutte basate sull'ipotesi di self-interest, ma tutte importanti per comprendere le dinamiche della vita civile.

Ripartiamo, ancora una volta, dal Dilemma del Prigioniero, rappresentato nella tabella che segue.

	C	NC
C	$\beta - \gamma$	$-\gamma$
NC	β	0

TABELLA 1

Seguendo la Tabella 1, vediamo che l'ordine dei payoff è:

$\beta > \gamma > 0^3$, quindi l'ordine di preferenze per un giocatore standard è:

1. NC,C
2. C,C
3. NC,NC
4. C,NC

Data una tale struttura di preferenze si dimostra facilmente se due giocatori standard giocano tra di loro sceglieranno entrambi di non-cooperare in un gioco one-shot.

Un tale equilibrio, risultato ben noto agli economisti, rappresenta un dilemma perché l'esito del gioco è la non-cooperazione quando invece ciascuno, *individualmente*, preferisce la mutua cooperazione.

L'esito del gioco dipende essenzialmente da due ipotesi sulla razionalità (individualismo e strumentalità) e da un'ipotesi sul tipo di interazione (interazioni anonime)⁴.

In un tale gioco non ripetuto la cooperazione non può emergere, a meno di errori o di comportamento irrazionale. In realtà, negli ultimi anni c'è tutta una letteratura, che va sotto il nome di "social preferences" che cerca invece di dar conto

⁴ Su questo confronta Bruni (2006) e Bruni e Smerilli (2004)

come anche in un gioco non cooperativo one-shot (in particolare l'“ultimatum” o il “trust game”) può essere razionale giocare “coopera”. La spiegazione, sebbene con diverse varianti, poggia sull'idea di “pay-off” psicologico: in certi tipi di interazioni, alcuni elementi non materiali (come l'avversione alla iniquità, la reciprocità, ecc.) possono cambiare la struttura di pay-off del gioco, aggiungendo nella funzione di utilità dell'agente altre componenti (di tipo psicologico), che possono spiegare comportamenti cooperativi in contesti nei quali la teoria neoclassica standard li esclude.⁵

La cooperazione diventa più semplice in analisi dinamiche. Qui anche la teoria dei giochi tradizionale riesce a spiegare l'emergere della cooperazione (è il “folk theorem”: cf. Binmore 2005). In quanto segue anche noi proponiamo una analisi dinamica, sebbene metodologicamente più complessa del semplice “folk theorem”, senza però abbracciare la scuola delle “social preferences” di Gintis o Rabin.

2. Gioco one-shot

2.1. Il modello base: due strategie

La struttura del modello è la seguente. Il tempo è continuo. Supponiamo che esista un continuum di agenti appartenenti ad una determinata popolazione, e che essi debbano scegliere una delle K strategie pure $\{1, \dots, K\}$, ogni volta che interagiscono con altri soggetti della stessa popolazione. I soggetti sono distribuiti in N sottopopolazioni $\{1, \dots, N\}$ a seconda del parametro t utilizzato nel capitolo precedente. Le N sottopopolazioni sono esogenamente assegnate, nel senso che tipi esistenti si possono estinguere, ma non possono essere creati nuovi tipi.

La dinamica del modello è descritta dalle equazioni di “replicazione”. La dinamica di replicazione è ampiamente utilizzata nei modelli evolutivi. In essa si ipotizza che le strategie più profittevoli si espandono nella popolazione a danno delle altre. Heckathorn (1996) spiega bene in che cosa consista questo tipo di dinamica:

⁵ Per una rassegna cf. Smerilli (2006).

“In base ai payoff, gli agenti con le strategie di maggior successo proliferano, alle spese degli altri. Questo processo quindi si ripete, generazione dopo generazione, fino a quando il sistema non arrivi ad un equilibrio stabile o a variazioni cicliche”(pag. 261).

Di solito questa dinamica è utilizzata in campo biologico per studiare l'evoluzione delle specie. Esiste, però, una seconda interpretazione di questo processo di selezione: esso riflette un processo di apprendimento attraverso l'osservazione dei comportamenti degli altri. Noi in quanto segue non adottiamo l'analogia biologica o quella della memetica (l'estensione dell'evoluzione biologica basata sul gene a quella sociale basata sul “meme”), ma semplicemente utilizziamo il concetto di “utilità attesa” come indicatore di successo (non necessariamente materiale) di una strategia, un successo che porta ad una imitazione nel tempo da parte di strategie di minor successo (minore utilità attesa). Al tempo stesso, utilizzeremo anche giochi ripetuti (non one-shot), che ci sembrano utili in contesti di breve e medio periodo nei quali non ci sono significativi effetti imitativi, e i soggetti ripetono la propria strategia nel tempo e non cambiano. Crediamo infatti che nella vita civile alcuni fenomeni siano più spiegabili dai giochi solo evolutivi (ad esempio la diffusione di stili di consumo o mode), ma altri più da giochi ripetuti ed evolutivi (i giochi identitari ad esempio).

Se x_{ji} è la proporzione (rispetto all'intera popolazione) di soggetti che scelgono la strategia j appartenendo alla sotto-popolazione i , allora $x_j = \sum_{i=1}^N x_{ji}$ rappresenta la proporzione della popolazione che gioca la strategia j (quindi per un giocatore che gioca una strategia i rappresenta la probabilità di incontrare un giocatore che gioca una strategia j). Il tipo di avversario è conosciuto da un giocatore solo ex-post (o dopo la prima mossa, nel caso di giochi ripetuti); ogni giocatore gioca la strategia corrispondente alla sotto-popolazione di appartenenza (come se fosse ‘programmato’ per farlo). Il payoff atteso di un'azione a_{ij} (dove $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, K$) è:

$$Y_{ji} = \sum_{k=1}^K a_{ijk} x_k, \quad [1]$$

mentre il payoff medio nella popolazione è:

$$Y = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N x_{ij} Y_{iji} \quad [2]$$

La dinamica del modello può essere rappresentata attraverso le equazioni di replicazione:

$$\dot{x}_{ji} = x_{ji} (Y_{ji} - Y) \quad [3]$$

Tale dinamica è definita sul simpleso invariante:

$$\Delta = \left\{ x \in \mathfrak{R}^{NK}, \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N x_{ji} = 1, x_{j,i} \geq 0 \right\}$$

Per mezzo di questa struttura analitica analizzeremo il processo evolutivo che ha luogo in un contesto in cui esistono due strategie pure, C e NC e dapprima 2 poi 3 ed infine 4 sotto-popolazioni.

Cominciamo la nostra analisi con un gioco one-shot (Dilemma del Prigioniero non ripetuto) e supponiamo che esistano due tipi di agenti: coloro che in una situazione del tipo dilemma del prigioniero scelgono sempre di non cooperare (tipi N, che sta per *non-cooperativo*), e coloro che invece scelgono sempre di cooperare (tipi G, che sta per *gratuito*). Siamo in un mondo semplificato e polare, dove i G scelgono sempre di cooperare, mentre gli altri non cooperano. Il tipo G ha quindi ‘coopera’ come strategia dominante, anche se il suo payoff dipenderà dalla scelta dell’altro giocatore. Ad ogni turno un giocatore sarà accoppiato in modo casuale con un altro giocatore (*random matching*) con il quale giocherà una volta e poi ci sarà di nuovo un altro incontro casuale. I giocatori apprendono giocando informazioni sulla struttura del gioco, ma non sui giocatori che hanno di fronte, perché non sanno riconoscere il loro partner in successivi incontri.

In una situazione come quella ipotizzata si dimostra facilmente che i soggetti G non avranno lunga vita, in termini evolutivi. Vale infatti la:

Proposizione 1: se valgono le ipotesi

a. *esistono due tipi, tipi N (standard) e tipi G le utilità attese o fitness sono:*

$$U_n = p_n(0) + p_g(\beta)$$

$$U_g = p_n(-\gamma) + p_g(\beta - \gamma)$$

b. *La probabilità di incontrare un tipo N è p_n , mentre quella di incontrare un tipo G è p_g , dove, per la definizione di probabilità, $p_g = 1 - p_n$*

Allora sopravvivranno solo i tipi 1, per ogni valore di p_n, p_g .

2.2. Tre strategie, con riconoscibilità

Introduciamo ora un terzo tipo, che si aggiunge ai precedenti, il tipo T (da Tit-for-Tat), o cooperatore condizionale. Il tipo T, non attribuendo un valore intrinseco (o attribuendogliene uno troppo basso) all'azione cooperativa, non ha "cooperare" come strategia dominante; ma se ha di fronte un tipo G, pur riconoscendolo, *non lo sfrutta preferendo reciprocare*. Il tipo T condiziona la sua decisione di cooperare alla rassicurazione (*assurance* nei termini di Sugden 2003) che anche l'avversario cooperi.

Cosa ci dice l'analisi dinamica in questa situazione? Bisogna distinguere tra due casi: se il tipo T può riconoscere gli altri giocatori, dispone quindi di un segnale perfetto per discriminare tra i tipi N e G, allora la soluzione cooperativa è sostenibile nel lungo periodo. Se invece T non dispone di un segnale perfetto, ma può commettere errori, rischiando quindi di cooperare con i tipi N e di non cooperare con altri tipi T e con i tipi G, allora i risultati sono diversi: a seconda del valore dei payoff e della probabilità di errore, ci si può attestare su un equilibrio di non cooperazione oppure di sopravvivenza di soli tipi T, rimanendo i tipi G sempre votati all' 'estinzione'.

Cominciamo dal caso, più semplice, in cui ipotizziamo che il tipo T disponga di un segnale perfetto.

Le ipotesi quindi sono:

- c. esistono tre tipi: tipi N (giocano sempre NC), tipi G (giocano sempre C) e tipi T (giocano C con i G e D con gli N), i payoff sono quelli della tabella 1;
- d. La probabilità di incontrare un tipo i è p_i , $i = N, G, T$, e $p_t = 1 - p_n - p_g$
- e. Le utilità attese saranno quindi:

$$U_n = p_n(0) + p_g(\beta) + p_t(0)$$

$$U_g = p_n(-\gamma) + p_g(\beta - \gamma) + p_t(\beta - \gamma)$$

$$U_t = p_n(0) + p_g(\beta - \gamma) + p_t(\beta - \gamma)$$

La seguente tabella mostra i payoff ottenibili dalle diverse interazioni:

	N	G	T
N	0	β	0
G	$-\gamma$	$B-\gamma$	$\beta-\gamma$
T	0	$B-\gamma$	$\beta-\gamma$

TABELLA 2

Riportiamo i payoff in una matrice che chiamiamo A:

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & \beta - \gamma & \beta - \gamma \\ 0 & \beta - \gamma & \beta - \gamma \end{bmatrix}$$

La dinamica del sistema può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= p_n \left[(Ap)_1 - p \cdot Ap \right] \\ \dot{p}_g &= p_g \left[(Ap)_2 - p \cdot Ap \right] \\ \dot{p}_t &= p_t \left[(Ap)_3 - p \cdot Ap \right] \end{aligned} \quad [4]$$

dove ${}^t\mathbf{p} = (p_n, p_g, p_t)$ e $(Ap)_r$ è la componente r del vettore \mathbf{Ap} e corrisponde quindi al payoff atteso (riportato nell'ipotesi e.), mentre ${}^t\mathbf{p}\mathbf{A}\mathbf{p}$ è il payoff medio.

Lo spazio della dinamica è il semplice:

$$\Delta = \{ \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^3 : p \geq 0 \text{ e } p_n + p_g + p_t = 1 \}. \quad [5]$$

Per l'analisi dinamica faremo riferimento agli strumenti forniti da Bomze (1983) sulla dinamica di replicazione: il procedimento di analisi è riportato in appendice.

L'analisi dinamica ci suggerisce che a sopravvivere nel tempo saranno solo i tipi G e T, mentre i tipi N si estingueranno. Dal semplice della Figura 1, infatti, possiamo vedere che il lato del semplice in cui $p_n=0$ (esistono cioè solo i G e i T) è interamente costituito di punti fissi. La presenza dei tipi T fa in modo, quindi, che l'equilibrio si possa assestare sulla cooperazione. Il risultato più interessante è che la proporzione finale dei tipi G sarà tanto maggiore, quanto minore sarà all'inizio del gioco. Seguendo le traiettorie all'interno del semplice, infatti, vediamo che quelle che partono da un punto in cui la proporzione di G è alta, vanno a finire in un punto in cui la proporzione finale sarà bassa. La spiegazione è molto semplice: i tipi G sono preda degli N, quindi tanto maggiore è il loro numero all'inizio, tanto più nutrito sarà il "pasto" degli N. Se invece i tipi G all'inizio sono pochi, gli N avranno poche prede e soccomberanno (dal momento che con i tipi T non riescono ad avere la meglio).

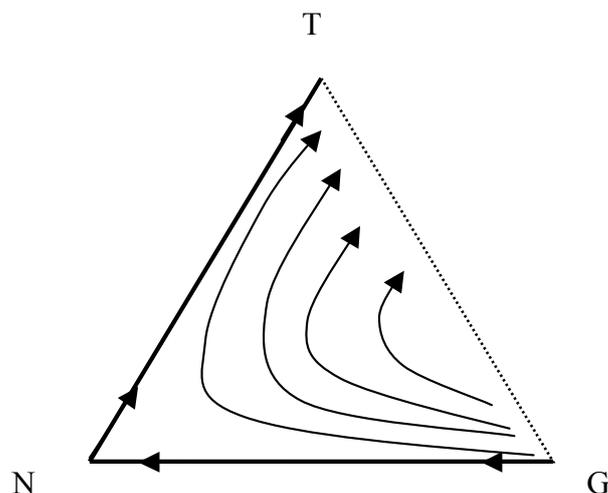


Figura 1

Possiamo enunciare il seguente risultato:

Proposizione 2: se valgono le ipotesi c., d., e., e il tipo T può discriminare perfettamente tra i tipi N e G, allora nel tempo sopravvivranno solo i tipi G e i tipi T. La proporzione degli uni rispetto agli altri dipenderà dalla situazione di partenza.

La proposizione 2 ci dice che i tipi G, cooperatori incondizionali, possono sopravvivere e affermarsi nel tempo se esiste un meccanismo (in questo caso il segnale perfetto utilizzato dai T) per riconoscere i tipi N. L'ipotesi del segnale perfetto è forte, e conferma il risultato, ormai noto, che non è possibile la cooperazione se non con un *reinforcement* esterno.

Ma quello che stiamo cercando di spiegare è proprio la possibilità di cooperazione senza "imposizioni" che vengano dall'esterno. Vediamo cosa succede se rimuoviamo l'ipotesi di riconoscibilità perfetta

2.3. Non perfetta riconoscibilità

Se il tipo T non dispone di un segnale perfetto, la situazione è più complicata. Ipotizziamo che esista una probabilità r , che il tipo T sbagli nell'individuare il tipo che ha di fronte.

Quindi se un tipo T si trova davanti ad un tipo N giocherà NC con probabilità r e C con probabilità $(1 - r)$, se invece si troverà davanti ad un tipo G giocherà C con probabilità r e NC con probabilità $(1 - r)$, e così via.

Introduciamo quindi, una nuova ipotesi (f), che sostituisce l'ipotesi e.

Ipotesi f.: le utilità attese dei tre tipi sono

$$U_n = p_n(0) + p_g\beta + p_t(1-r)\beta$$

$$U_g = p_n(-\gamma) + p_g(\beta - \gamma) + p_t[r(\beta - \gamma) + (1-r)(-\gamma)]$$

$$U_t = p_n(1-r)(-\gamma) + p_g[r(\beta - \gamma) + (1-r)\beta] + p_t\{r[r(\beta - \gamma) + (1-r)(-\gamma)] + (1-r)[r\beta]\}$$

Per l'analisi dinamica modifichiamo la matrice A, mentre tutto il resto rimane uguale.

Come abbiamo già accennato, in una situazione di questo genere si dimostra che nel tempo a sopravvivere saranno i tipi N oppure i tipi T, se la probabilità che i tipi T hanno di riconoscere gli altri giocatori è abbastanza alta, mentre se questa probabilità è bassa anche i tipi T si estingueranno, e quindi non cambierebbe nulla rispetto ad una situazione in cui sono presenti solo i tipi N e i tipi G.

Come possiamo vedere dalle figure 2a e 2b, i tipi G sono destinati comunque all'estinzione, mentre il discorso è diverso per tipi N e tipi T. Nel caso in cui la probabilità è bassa, semplicemente tutte le traiettorie convergono verso una situazione in cui solo i tipi N sopravvivono. Se la probabilità è alta, l'esito finale dipende dalla situazione di partenza, se ci si trova cioè nella parte bassa del grafico (che per come è costruito il simpleso significa relativamente molti N, molti G e pochi T, allora gli N avranno la meglio sia sui G che sui T. Se invece ci troviamo nella parte alta, dove si parte con più tipi T e meno N, allora saranno i T ad avere la meglio.

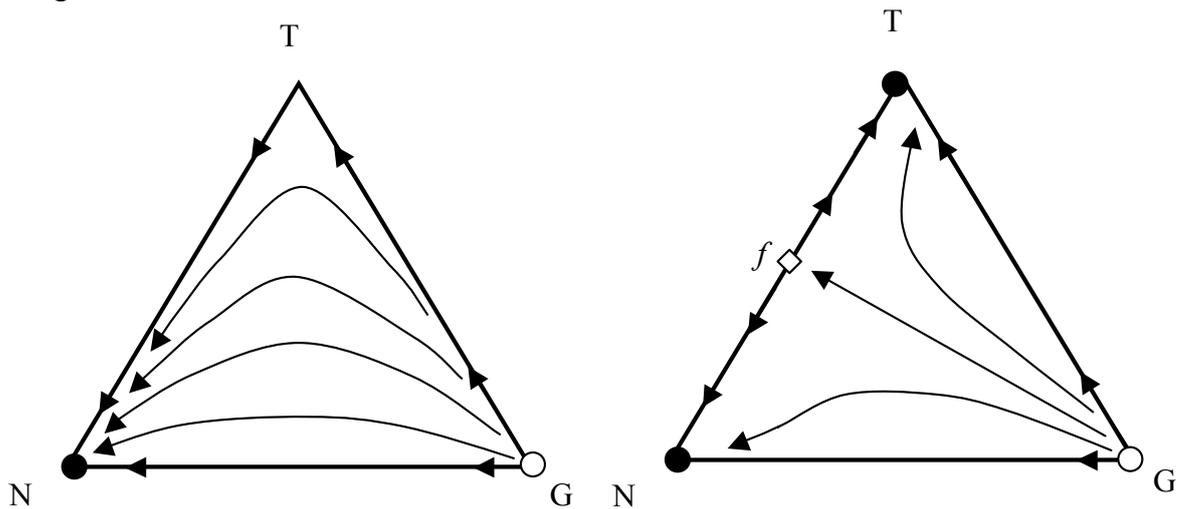


Figura 2. Caso 2a: $r < \frac{\beta}{2\beta - \gamma}$, caso 2b: $r \geq \frac{\beta}{2\beta - \gamma}$

Proposizione 3: se valgono le ipotesi d., e., f., e i tipi T con probabilità r riconoscono i tipi con cui giocano, allora nel tempo sopravvivranno solo i tipi N, se $r < \frac{\beta}{2\beta - \gamma}$.

Potranno sopravvivere i tipi N o i tipi T se $r \geq \frac{\beta}{2\beta - \gamma}$.

Come possiamo osservare dalla proposizione 3 la probabilità r dipende dal rapporto che c'è tra l'utilità che si ottiene non cooperando a spese di cooperare, e l'utilità di chi coopera con chi fa altrettanto. Il valore soglia di r (il valore minimo perché i tipi T possano avere la possibilità di sopravvivere nel tempo), può essere tanto più basso quanto più piccolo è il valore di γ , cioè quanto più piccolo è il vantaggio dello sfruttamento o il costo della coerenza. Per esempio, se avessimo $\beta = 2$ e $\gamma = 1$, il valore soglia di r sarebbe $2/3$. Nel secondo esempio, 2a, il possibile equilibrio dipende, a parità di altre condizioni, dalla posizione del punto fisso f . Si dimostra, infatti, che per r che tende al suo valore minimo, e cioè:

$$r \rightarrow \frac{\beta}{2\beta - \gamma}$$

Il punto tende a schiacciarsi verso il vertice T^6 , il che vuol dire che al diminuire di r l'equilibrio di soli N diventa più probabile (tutte le traiettorie che partono da un punto interno al semplice situato più in basso di f portano a N).

Un risultato analogo è ottenuto da Bowles e Gintis (2004). Nel loro modello, però ad interagire sono tre tipi diversi: il *selfish*, il cooperatore incondizionale, il reciprocitore che punisce a proprie spese il *selfish* quando riesce a riconoscerlo. Essi ottengono, come versione base del modello, la sopravvivenza, a livello asintotico, dei soli selfish. Facendo poi variare i parametri e attraverso simulazioni, ottengono alti livelli di cooperazione.

3. Il gioco dinamico: ripetuto ed evolutivo

⁶ Le coordinate del punto f sono infatti: $f \equiv \left(\frac{2r\beta - r\gamma - \beta}{2r\beta - 2r\gamma - \beta + \gamma}, 0, \frac{\gamma(1-r)}{2r\beta - 2r\gamma - \beta + r} \right)$ e al tendere di r al suo valore minimo la prima coordinata (p_n) tende a 0.

Se il punto di partenza è una situazione da dilemma del prigioniero one-shot, a meno di ipotesi forti quali la perfetta riconoscibilità, abbiamo visto che per i tipi G non c'è speranza di sopravvivere in quel contesto evolutivo.

Vediamo cosa succede se il gioco si ripete. Ipotizziamo, cioè, che ad ogni incontro casuale sia associata un'interazione ripetuta *con lo stesso soggetto*; interazione che può avere più o meno lunga durata, a seconda di un parametro: π , la probabilità che il gioco continui ancora per un round. Dopo una serie di interazioni con la stessa persona c'è un altro incontro casuale, e il gioco (ripetuto) ricomincia con un altro partner (accoppiato casualmente).

Sappiamo bene che se il gioco è ripetuto le strategie possibili sono infinite; noi ci limiteremo allo studio di quattro strategie, differenziando la strategia T (del paragrafo precedente) in due strategie, che chiameremo (con Sugden 2004) B (Brave) e C (cauta).

Le strategie che quindi prenderemo in considerazione saranno:

1. N: non coopera mai. N è una strategia molto importante, perché lo studio delle dinamiche della cooperazione diventa non banale proprio quando sono possibili scenari di non cooperazione.
2. G: coopera sempre
3. C: Coopera con chi coopera, non coopera con chi al primo turno non ha cooperato, inizia non cooperando. C sta infatti per Cauto. I tipi C hanno bisogno di vedere un certo numero di cooperatori per poter a loro volta cooperare. I C, quando incontrano altri C o gli N non cooperano mai. Quindi in un mondo fatto di soli C e N la cooperazione non sarà mai possibile, e non sarà possibile distinguere i C dagli N, che si comportano esattamente allo stesso modo.
4. B: è uguale a C, ma inizia con un atto di cooperazione. B sta infatti per *Brave*. I B sono coloro che iniziano cooperando, ma se poi non vedono gli altri cooperare, si fermano.

In questo paragrafo l'analisi sarà di giochi ripetuti ed evolutivi (i soggetti non cambiano strategia durante l'interazione, ma solo al termine del torneo). Come abbiamo già detto, il gioco è ripetuto, ma il primo incontro è casuale. Se indichiamo

con p_n, p_b, p_g, p_c , le probabilità di incontrare, rispettivamente un tipo N, B, G o C, le utilità attese in un mondo con quattro strategie possibili saranno:

$$U_n = p_n(0) + p_b\beta + p_g \frac{\beta}{1-\pi} + p_c(0) \quad [6]$$

Il tipo N, infatti, non coopererà mai con altri tipi N e con i tipi C che iniziano non cooperando e non cooperano se l'altro giocatore al primo turno non ha cooperato, da cui $p_n(0)$, $p_c(0)$; se incontra un tipo B, prenderà β al primo round, perché B inizia con un atto di cooperazione, ma i successivi payoff saranno pari a 0, in quanto B smetterà di cooperare; infine, se incontra un G, otterrà β ad ogni round, in quanto G coopererà sempre.

$$U_b = p_n(-\gamma) + p_b \frac{(\beta - \gamma)}{1-\pi} + p_g \frac{(\beta - \gamma)}{1-\pi} + p_c(-\gamma + \beta\pi) \quad [7]$$

Il tipo B comincia con un atto di cooperazione e prosegue cooperando se al primo turno l'avversario ha risposto cooperando. La cooperazione è assicurata con altri tipi B e con i G, ma non con gli N e neanche con i C.⁷

$$U_g = p_n \frac{-\gamma}{1-\pi} + p_b \frac{(\beta - \gamma)}{1-\pi} + p_g \frac{(\beta - \gamma)}{1-\pi} - p_c \left(\frac{\beta - \gamma}{1-\pi} - \beta \right) \quad [8]$$

G coopera sempre, quindi coopererà con B e con G, con i C a partire dal secondo round, mentre si lascerà 'sfruttare' dagli N.

$$U_c = p_n(0) + p_b(\beta - \gamma\pi) + p_g \left(\frac{\beta - \gamma}{1-\pi} + \gamma \right) + p_c(0) \quad [9]$$

⁷ Il payoff $p_c(-\gamma + \beta\pi)$ dipende dal fatto che B coopera la prima volta e C risponde non cooperando; B quindi avrà $(-\gamma)$, ma al secondo turno, avendo B cooperato al primo, C coopererà. Dal terzo turno in poi il payoff sarà pari a 0.

C, infine, non coopererà con N e C, coopererà con i G a partire dal secondo round e con i B prenderanno β al primo turno, in quanto i B cominciano con un atto di cooperazione, e $(-\gamma)$ al secondo turno; dal terzo turno in poi avranno 0.

Riassumendo, la tabella dei payoff è:

	N	B	G	C
N	0	β	$\beta/(1-\pi)$	0
B	$-\gamma$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$\beta\pi-\gamma$
G	$-\gamma/(1-\pi)$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$(\beta\pi-\gamma)/(1-\pi)$
C	0	$\beta-\pi\gamma$	$(\beta-\gamma\pi)/(1-\pi)$	0

TABELLA 3

3.1. Analisi dinamica

Per studiare l'evoluzione a livello dinamico, facciamo interagire tre strategie alla volta. Il gioco si svolge nel modo seguente:

- inizia con un accoppiamento casuale: ogni giocatore ha una certa probabilità di incontrare un tipo tra i tre presenti;
- il gioco di base è il dilemma del prigioniero della tabella 1, ma viene ripetuto per un certo numero di volte (che dipendono dal parametro π) con la stessa persona;
- finito il primo "torneo" c'è un secondo accoppiamento casuale, e così via.

Dopo la fine del primo torneo è verosimile pensare che la quota di soggetti che adottano la strategia che ha vinto aumenterà nei futuri "tornei", sarà imitata da altri, e chi si ostina a continuare a seguire una strategia "dominata" progressivamente diminuirà. Alla fine della prima tornata, i "punti" che le varie strategie hanno ottenuto nel torneo diventano infatti di dominio pubblico, e i vari giocatori possono modificare la propria strategia in modo da imitare quella che ha vinto. E' questo il nostro modo per svolgere una analisi *al tempo stesso ripetuta ed evolutiva*.

L'analisi sarà svolta ipotizzando che $\pi > \frac{\gamma}{\beta}$ ⁸.

3.1.1. Primo caso: N, C, G

Cominciamo a vedere cosa succede quando i tipi B non sono presenti. Le utilità attese con queste tre strategie saranno:

$$U_n = p_n(0) + p_c(0) + p_g \frac{\beta}{1-\pi}$$

$$U_c = p_n(0) + p_c(0) + p_g \frac{\beta - \gamma\pi}{1-\pi}$$

$$U_g = p_n\left(\frac{-\gamma}{1-\pi}\right) + p_c \frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} + p_g \frac{\beta - \gamma}{1-\pi}$$

E la tabella dei payoff, che origina la matrice A sarà:

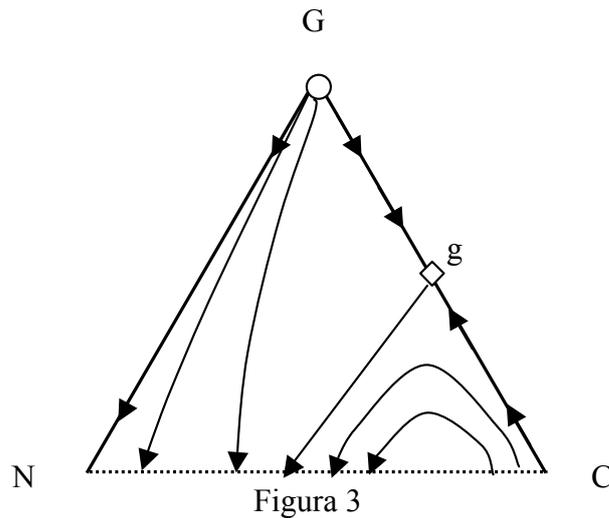
	N	G	C
N	0	$\beta/(1-\pi)$	0
G	$-\gamma/(1-\pi)$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$(\beta\pi-\gamma)/(1-\pi)$
C	0	$(\beta-\gamma\pi)/(1-\pi)$	0

TABELLA 4

La dinamica di replicazione può essere rappresentata con il seguente semplice:

⁸ Immaginiamo, infatti un accordo tra due giocatori attraverso il quale entrambi cooperano ad ogni round. Se l'accordo viene rispettato, l'utilità attesa di entrambi i giocatori è: $\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi}$; ma se l'accordo viene infranto da un giocatore, l'avversario non coopererà più. Un giocatore, dunque, che romperà l'accordo al primo round, avrà β , ma dal secondo round in poi avrà sempre 0. La condizione, dunque per aprire la possibilità di accordi di mutua cooperazione è proprio:

$$\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} > \beta \text{ Da cui segue: } \pi > \frac{\gamma}{\beta}.$$



Quando sono presenti strategie N, C e G si può finire in uno dei molteplici punti fissi lungo la linea NC, che vuol dire: non cooperazione. Se fossero presenti solo strategie G e C allora si potrebbe finire in un'unica combinazione di C e G, che dipende dalla posizione del punto (in questo caso di sella) g , cioè:

$$g \equiv \left(0, \frac{\gamma(1-\pi)}{(\beta-\gamma)\pi}, \frac{\beta\pi-\gamma}{(\beta-\gamma)\pi} \right)$$

A parità di altre condizioni, se $\pi \rightarrow 1$, quindi la possibilità di continuare con la stessa persona che si è incontrata all'inizio è molto alta, il punto si schiaccia verso il vertice G. Questo risultato ci sembra di una certa rilevanza: i tipi G sono gli unici che riescono in qualche modo ad 'attivare' i C che, senza di essi rimarrebbero sempre confinati in un mondo di non cooperazione.

Vale quindi la seguente proposizione:

Proposizione 4: In un mondo in cui sono presenti i tipi, o strategie, N, G, C, la dinamica di replicazione prevede due esiti diversi: una combinazione di C e G (punto fisso g), solo se p_n è uguale a 0, oppure una combinazione lungo la linea di punti fissi N,C (quindi non cooperazione).

Senza la presenza dei tipi B, che iniziano sempre con un atto di cooperazione, è difficile innescare meccanismi virtuosi di cooperazione.

3.1.2. Secondo caso: N, B, C

Un altro caso interessante è quello in cui non sono presenti i tipi G, i cooperatori incondizionali. Anche qui la non cooperazione è un equilibrio probabile. L'altro equilibrio è quello in cui sopravvivono le sole strategie B. In un mondo a tre in cui solo gli N, i C e i B sono presenti, infatti, gli N e i C non coopereranno mai tra di loro, e per di più gli N non hanno i G da sfruttare. I B invece tra di loro, e solo tra di loro, cooperano, ottenendo un payoff maggiore, se il gioco dura molto, di quello degli N e dei C. Le utilità attese sono infatti:

$$U_n = p_n(0) + p_b\gamma + p_c(0)$$

$$U_b = p_n(-\gamma) + p_b \frac{(\beta - \gamma)}{1 - \pi} + p_c(-\gamma + \beta\pi)$$

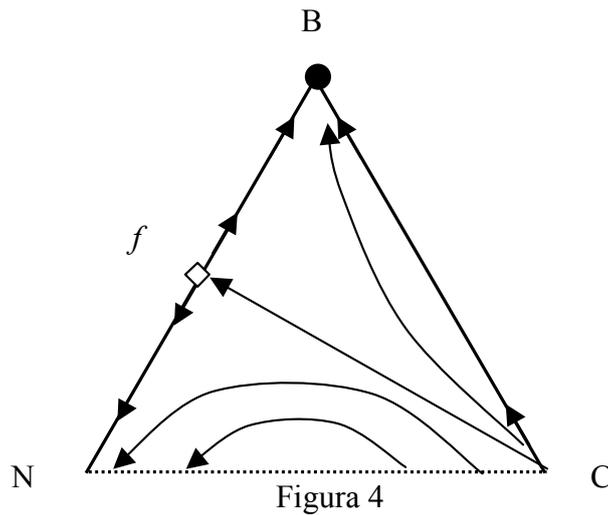
$$U_c = p_n(0) + p_b(\beta - \gamma\pi) + p_c(0)$$

E la tabella dei payoff:

	N	B	C
N	0	β	0
B	$-\gamma$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$\beta\pi-\gamma$
C	0	$\beta-\pi\gamma$	0

TABELLA 5

Anche qui, come possiamo vedere dal semplice della figura 4, il possibile equilibrio di lungo periodo dipende dalle coordinate del punto fisso f .



Tutti i punti di partenza, infatti, all'interno del semplice, che si trovano al di sotto della traiettoria che da C porta a f , si evolveranno verso un equilibrio non cooperativo con la presenza di N e C.

Proposizione 5: In un mondo in cui sono presenti i tipi, o strategie, N, C, B, la dinamica di replicazione prevede due esiti diversi: la sopravvivenza delle sole strategie B, oppure una combinazione lungo la linea di punti fissi N,C (quindi non cooperazione).

Adesso le coordinate del punto f sono:

$$f \equiv \left(\frac{\beta\pi - \gamma}{(\beta - \gamma)\pi} \quad 0 \quad \frac{\gamma(1 - \pi)}{(\beta - \gamma)\pi} \right)$$

Si vede facilmente che, per $\pi \rightarrow 1$ il punto tende a schiacciarsi verso il vertice N, quindi più è alta la probabilità che il gioco continui, maggiore è la possibilità che si affermino i B e che quindi si abbia l'esito cooperativo. In un mondo senza i tipi G, i C non iniziano a cooperare: in qualche modo possiamo dire che il sacrificio dei G risveglia le potenzialità di cooperazione dei C; senza la loro presenza l'unica forma di cooperazione è quella tra i tipi B. È da notare che i tipi B iniziano con un atto di cooperazione. Senza la loro presenza ci si attesterebbe su un equilibrio non cooperativo.

3.1.3. Terzo caso: N, B, G

Riportiamo ancora le utilità attese associate alle strategie N, B, G:

$$U_n = p_n(0) + p_b\beta + p_g \frac{\beta}{1-\pi}$$

$$U_b = p_n(-\gamma) + p_b \frac{\beta-\gamma}{1-\pi} + p_g \frac{\beta-\gamma}{1-\pi}$$

$$U_g = p_n\left(\frac{-\gamma}{1-\pi}\right) + p_b \frac{\beta-\gamma}{1-\pi} + p_g \frac{\beta-\gamma}{1-\pi}$$

La tabella dei payoff sarà quindi:

	N	B	G
N	0	β	$\beta/(1-\pi)$
B	$-\gamma$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$
G	$-\gamma/(1-\pi)$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$	$(\beta-\gamma)/(1-\pi)$

TAB G 6

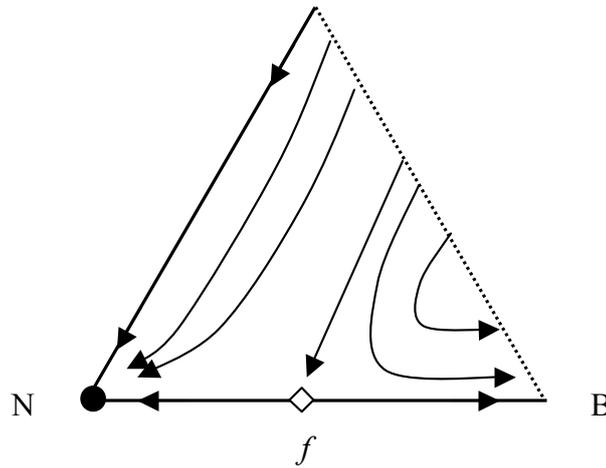


Figura 5

Dal semplice si nota che a seconda del punto di partenza e dalla posizione del punto fisso f sul lato NB, avremo un diverso equilibrio finale, che può essere una combinazione di G e B, oppure un mondo di soli N. Ciò significa che se partiamo da una popolazione composta di soli B e G queste due sono strategie evolutivamente stabili, e coesistono entrambe. Cosa diversa quando invece nella popolazione al

tempo 1 (quando inizia la dinamica) coesistono i tre tipi. Qui è possibile che si affermi la non-reciprocità, e cioè un equilibrio composto da soli tipi N.

Proposizione 6: In un mondo in cui sono presenti le strategie N, B, G, sono possibili due equilibri: la sopravvivenza dei soli tipi N e una coesistenza di tipi B e G, lungo la linea dei punti fissi sul lato B-G. Che si finisca in uno dei due equilibri dipende dalla posizione del punto fisso f lungo il lato N-B.

Considerando, per come è costruito il semplice, che la posizione di N in termini di probabilità è (1,0,0) e la posizione di B è (0,1,0), il punto fisso f ha le seguenti coordinate:

$$f = \left(\frac{\beta\pi - \gamma}{(\beta - \gamma)\pi}, \frac{\gamma(1 - \pi)}{(\beta - \gamma)\pi}, 0 \right)$$

La posizione del punto f dipende, quindi, da β e γ , e dal valore di π . In particolare, per $\pi \rightarrow \frac{\gamma}{\beta}$, allora il punto f si avvicinerà a B. Se invece $\pi \rightarrow 1$, allora il punto f tenderà a spostarsi verso N. Con un π piccolo, avremo quindi che, *ceteris paribus*, la probabilità che si affermino i soli tipi N è molto alta; con un π molto alto, invece, sarà molto probabile che l'equilibrio verso cui si tende è quello che vede la coesistenza dei tipi B e G.

Per ogni valore intermedio tra i due estremi, l'equilibrio finale dipenderà dal punto di partenza: se si parte da un punto *a sinistra* della traiettoria che dal lato B-G porta al punto f , allora si andrà verso un equilibrio di soli N, viceversa, se si parte da destra, si arriverà alla coesistenza di B e G. È da notare che i punti alla sinistra sono caratterizzati, a parità di altre cose, da una minore percentuale di B rispetto ai G. È importante quindi, che i tipi B siano relativamente più degli G e degli N, affinché si affermi l'equilibrio B-G. In sostanza abbiamo qui il ruolo delicato delle strategie G: se sono troppe, favoriscono l'emergere dei tipi N sugli B. Fuor di metafora, in una popolazione dove è presente la possibilità della non-cooperazione, se gli atti incondizionali sono troppi, non solo si avviano essi stessi all'estinzione, ma fanno estinguere anche possibilità di cooperazione per un equilibrio fatto di non-cooperazione generalizzata.

Al tempo stesso, le coordinate del punto f dipendono anche da β e γ . Il valore di γ è quello che più chiaramente ci dice la struttura sociale di premi e di ricompense: un alto γ ci rivela una cultura che penalizza la reciprocità, mentre un alto $(\beta-\gamma)$ una cultura che la premia. Infatti, se la prima coordinata è alta, il punto f tende ad N (stessa cosa se è bassa la seconda), mentre se è bassa f tende a B. E questo perché la coordinata di N (la prima) è direttamente proporzionale a $(\beta-\gamma)$ vediamo che mentre entrambe le coordinate dipendono da $(\beta-\gamma)$, il segno di γ è negativo nella coordinata di N e positivo nella coordinata di B. Questo ci dice che più una società, *ceteris* (il valore di β in particolare) *paribus*, rende costosa la reciprocità di tipo G e B (le sole che pagano γ), più rende probabile l'affermazione della non-cooperazione.

4. In un mondo a quattro dimensioni

Finora abbiamo confrontato tre strategie alla volta, e ne abbiamo studiato l'evoluzione dinamica. Ci chiediamo a questo punto, cosa cambia se le quattro strategie N,B,G,C interagiscono contemporaneamente. Per motivi di semplicità non svolgeremo un'analisi dinamica come quella utilizzata per i confronti a tre, ma ci soffermeremo su alcuni risultati di statica comparata, lasciandoci aiutare, alla fine da alcune simulazioni. I confronti avverranno con le utilità attese [6], [7], [8], [9], riportate nei paragrafi precedenti.

Andiamo ora a confrontare gli N e i B. In un mondo con quattro strategie vale la

$$\text{Proposizione 7: } U_b > U_n \Leftrightarrow p_b > \frac{\gamma(1-\pi)}{(\beta-\gamma)\pi} + p_g \frac{\gamma}{\beta-\gamma} - p_c \frac{\beta(1-\pi)}{\beta-\gamma}$$

Affinché l'utilità attesa dei tipi B sia maggiore di quella dei tipi N, la proporzione dei B deve essere maggiore di una certa quantità. Chiamiamo valore soglia di p_b , e cioè p_b^* la quantità:

$$p_b^* = \frac{\gamma(1-\pi)}{(\beta-\gamma)\pi} + p_g \frac{\gamma}{\beta-\gamma} - p_c \frac{\beta(1-\pi)}{\beta-\gamma}$$

Se avessimo giocato in un mondo a tre (B,G,N), il valore soglia sarebbe stato:

$$p_b^{**} = \frac{\gamma(1-\pi)}{(\beta-\gamma)\pi} + p_g \frac{\gamma}{(\beta-\gamma)}$$

il che significa che in un mondo dove sono presenti anche i tipi C, perché i B si affermino sugli N è richiesto un valore soglia è leggermente più basso. A parità di altre condizioni, più alta è la proporzione dei C e minore è quella dei G, minore può essere il valore soglia p_b^* .

Per capire il ruolo dei tipi G, conviene riscrivere la disuguaglianza in modo diverso:

$$U_b > U_n \Leftrightarrow p_g < p_b \frac{\beta - \gamma}{\gamma} + p_c \frac{\beta(1 - \pi)}{\gamma} - \frac{1 - \pi}{\pi}$$

Il valore soglia di p_g , sarà quindi:

$$p_g^* = p_b \frac{\beta - \gamma}{\gamma} + p_c \frac{\beta(1 - \pi)}{\gamma} - \frac{1 - \pi}{\pi}$$

Questa formulazione ci dice più chiaramente che, a parità di altre condizioni, se vogliamo che si affermi la strategia B su quella N, occorre che si lavori su più fronti.

Innanzitutto non far crescere troppo i tipi G, perché se superano il valore soglia si affermano gli N. Infatti in un mondo dove esiste la non-cooperazione, e, come vedremo, non si verificano altre condizioni, far troppi atti incondizionali potrebbe avere come non solo l'estinzione dei comportamenti G, ma anche l'effetto non intenzionale di far affermare solo N; ricordiamo, infatti che i G costituiscono il 'pasto' degli N che proliferano a spese dei G. Nello stesso tempo, però, i G cooperano con i B, quindi la loro presenza è benefica per essi.

Per quanto riguarda, invece, l'interpretazione dei parametri γ e $(\beta - \gamma)$. Il parametro γ è un indicatore, lo abbiamo detto, di quanto costa in una data popolazione la cooperazione, e $(\beta - \gamma)$ quanto è premiata invece la cooperazione. Se una data comunità premia poco la cooperazione (i vantaggi fiscali per le imprese sociali o le famiglie, ad esempio), e la rende invece molto costosa (con vari tipi di condoni, ad esempio), occorrerà un quota relativamente più alta di soggetti B perché si affermi la reciprocità. Ma c'è ancora di più.

Più alto è π più lunga è la durata media delle interazioni, maggiore è il valore soglia in termini di G, più alto può essere quindi il numero di operatori incondizionali in una popolazione perché si affermi una strategia di tipo B. Ciò ci conferma che la stabilità delle relazioni facilita la cooperazione, e la mobilità sociale (pensiamo al lavoro oggi nelle società di mercato), la riduce, ceteris paribus.

Le cose cambiano, invece, quando confrontiamo tra di loro gli N e i C. Infatti abbiamo la

*Proposizione 8: $U_n > U_c$ sempre se $\pi > 0$.*⁹

È questo un risultato su cui vale la pena soffermarsi: la presenza dei G fa sì che, se il gioco dura almeno due round, si affermi sempre la non cooperazione in un confronto a due N/C. Come interpretarlo? La presenza, e in un questo caso, il sacrificio degli G, fa sì fare l'esperienza della cooperazione agli C, ma non può evitare che la cooperazione renda meno (in termini di pay-off), a partire dal secondo round del gioco, rispetto alla non-cooperazione ($\beta > (\beta - \gamma)$). Nello stesso tempo, nel confronto con i B, i C hanno un payoff minore rispetto agli N.

Passiamo al confronto tra gli N e gli G, e con gli opportuni passaggi otteniamo la

Proposizione 9: $U_g > U_n \Leftrightarrow p_b > \frac{\gamma}{\beta\pi} - p_c$

Il valore soglia di p_b è dunque:

$$p_b^{\circ} = \frac{\gamma}{\beta\pi} - p_c$$

In un mondo a tre dimensioni esso sarebbe stato:

$$p_b^{\circ\circ} = \frac{\gamma}{\beta\pi}$$

In questo caso abbiamo il fattore p_c che si sottrae al valore soglia: quanto, cioè, più numerosi sono i tipi C, tanto minore può essere la presenza dei tipi B perché i G ottengano una utilità attesa maggiore degli N. Quando, allora, in una comunità

⁹ Infatti abbiamo $p_b(\beta - \gamma\pi) + p_g\left(\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + \gamma\right) > p_b\beta + p_g\frac{\beta}{1 - \pi}$

Questa disuguaglianza non è mai verificata perché $(\beta - \gamma\pi)$ è sempre minore di β , e quindi $\frac{\beta - \gamma\pi}{1 - \pi}$ è sempre minore di $\frac{\beta}{1 - \pi}$.

abbiamo attivate tutte e tre le forme di reciprocità (B,C,G)¹⁰, la possibilità che si affermi una reciprocità incondizionale richiede condizioni meno forti, ed è quindi più probabile.

Venendo al confronto tra i G e gli N, abbiamo la

$$\text{Proposizione 10: } U_g > U_b \Leftrightarrow p_c > p_n \frac{\gamma}{\beta\pi - \gamma}$$

In un mondo a tre dimensioni (N, B, G), gli G non potevano mai affermarsi sui B. Qui, invece, la sola presenza dei C, rende questa eventualità possibile. La presenza di soggetti cauti, che non inizieranno mai con un atto di cooperazione, ma che rispondono positivamente se rassicurati del fatto che altri cooperano, può consentire che in una data popolazione possa prevalere la forma di cooperazione incondizionale. Ritroviamo poi la stessa logica emersa in altri “confronti”, il valore soglia aumenta se aumentano il costo della cooperazione (γ), e la quota degli N, e diminuisce se aumenta il pay-off della cooperazione ($\beta-\gamma$), e se aumenta π .

Infine guardiamo al confronto tra gli C e gli B, da cui deriva la

$$\text{Proposizione 11: } U_c > U_b \Leftrightarrow p_b < \frac{\gamma(1-\pi)\pi}{(\beta-\gamma\pi)\pi} - p_c \frac{\beta(1-\pi)}{\beta-\gamma}$$

Anche qui, gli C prevalgono sui B, se i B sono pochi, se è relativamente alto il costo della cooperazione (γ , che sostiene solo G), se è basso il premio della cooperazione ($\beta-\gamma$), e se il gioco è relativamente lungo.

5. La dinamica quadridimensionale

¹⁰ Anche la strategia G viene qui interpretata come una forma di reciprocità, infatti, una strategia G può essere definita come “una azione non condizionata dalla risposta reciprocante degli altri nel momento della *scelta*, ma condizionata dalla risposta degli altri nei *risultati*. Un tale soggetto che segue una tale logica non è dunque una monade che rimane imperturbata e indifferenza di fronte alla risposta degli altri; resta una realtà profondamente relazionale, sebbene non condizioni la sua azione alle controprestazioni degli altri”(Bruni 2006).

Nel caso di 4 strategie, la dinamica di replicazione può essere rappresentata in un simpleso tridimensionale:

$$\Delta = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^4 : p \geq 0 \text{ e } p_n + p_b + p_g + p_c = 1 \right\}$$

In questo caso la matrice A diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \frac{\beta}{1-\pi} & 0 \\ -\gamma & \frac{\beta-\gamma}{1-\pi} & \frac{\beta-\gamma}{1-\pi} & \beta\pi-\gamma \\ -\gamma & \frac{\beta-\gamma}{1-\pi} & \frac{\beta-\gamma}{1-\pi} & \beta\pi-\gamma \\ 1-\pi & 1-\pi & 1-\pi & 1-\pi \\ 0 & \beta-\pi\gamma & \frac{\beta-\pi\gamma}{1-\pi} & 0 \end{pmatrix} \quad [10]$$

Il vettore ${}^t\mathbf{p} \equiv (p_n, p_b, p_g, p_c)$ quindi il sistema di equazioni diventa:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= p_n \left[(Ap)_1 - {}^t\mathbf{p} \cdot A\mathbf{p} \right] \\ \dot{p}_b &= p_b \left[(Ap)_2 - {}^t\mathbf{p} \cdot A\mathbf{p} \right] \\ \dot{p}_g &= p_g \left[(Ap)_3 - {}^t\mathbf{p} \cdot A\mathbf{p} \right] \\ \dot{p}_c &= p_c \left[(Ap)_4 - {}^t\mathbf{p} \cdot A\mathbf{p} \right] \end{aligned} \quad [11]$$

Essendo l'analisi del sistema di equazioni differenziali [11] di non facile soluzione, qui ci limitiamo a riportare le condizioni di frontiera (quelle in cui almeno una strategia è estinta). Seguendo l'esempio di Hirshleifer e Martinez Coll (1991) e di Antoci, Sacco e Zarri (2004) possiamo rappresentare sul piano la superficie (o frontiera) di Δ . Il simpleso Δ può essere immaginato avente come base triangolare N,C, B e G come vertice superiore (disegnando il simpleso della figura 6 in maniera tridimensionale, i tre vertici G diventerebbero l'unico vertice superiore).

6. Alcune simulazioni

Quali di questi equilibri siano più probabili dipende dalle condizioni iniziali. Per avere un'idea più chiara della dinamica riporto di seguito alcune simulazioni. Esse sono ottenute ponendo nel sistema diverse condizioni iniziali. Assegniamo ai parametri i seguenti valori:

$$\beta = 2$$

$$\gamma = 1$$

$$\pi = 4/5$$

Il primo grafico mostra l'evoluzione nel tempo delle strategie quando le condizioni iniziali prevedono: $p_m = p_b = p_w = p_c$.

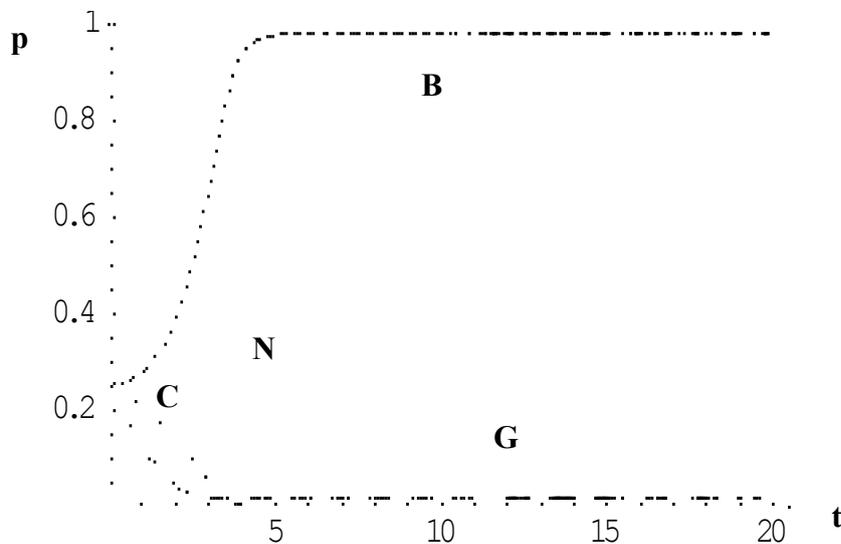


Figura 7

In questo caso si finisce in un equilibrio del tipo B-G dove la proporzione dei G è molto bassa. Cosa capita se cambiamo le condizioni iniziali? Il grafico successivo ci illustra una situazione in cui si parte con le seguenti proporzioni iniziali: $p_n = 0.25$, $p_b = 0.25$, $p_g = 0.1$, $p_c = 0.4$. Abbiamo lasciate inalterate le proporzioni di B e G, ma abbiamo aumentato i C rispetto ai G.

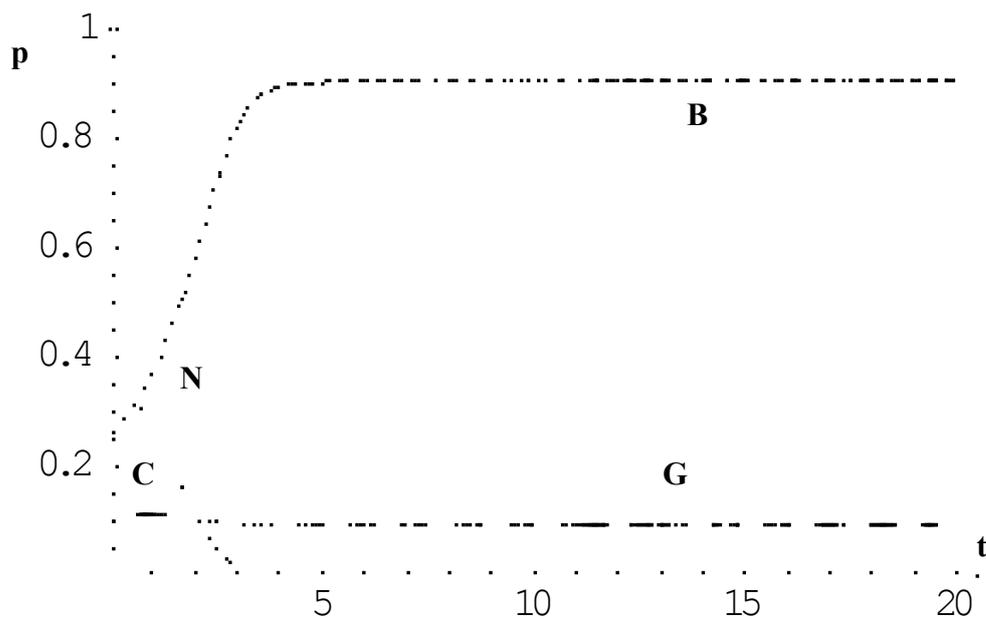


Figura 8

È interessante notare che una maggiore proporzione di C, sebbene non sia d'aiuto per la 'sopravvivenza' degli stessi, aiuta lo sviluppo dei G, che vediamo in questo caso rimanere costanti lungo il tempo. Nel paragrafo 3.1.1. avevamo visto che solo i tipi G riescono ad attivare i C, ora possiamo affermare che i C sono essenziali alla sopravvivenza dei G. L'importanza del ruolo dei C (che in un mondo a 3 sembravano essere quasi irrilevanti) emerge anche dal prossimo grafico. Esso è costruito con le proporzioni iniziali: $p_n = 0.4$, $p_b = 0.3$, $p_g = 0.1$, $p_c = 0.2$. In questo caso gli N cominciano con una proporzione maggiore rispetto ai B, e i C sono più dei G.

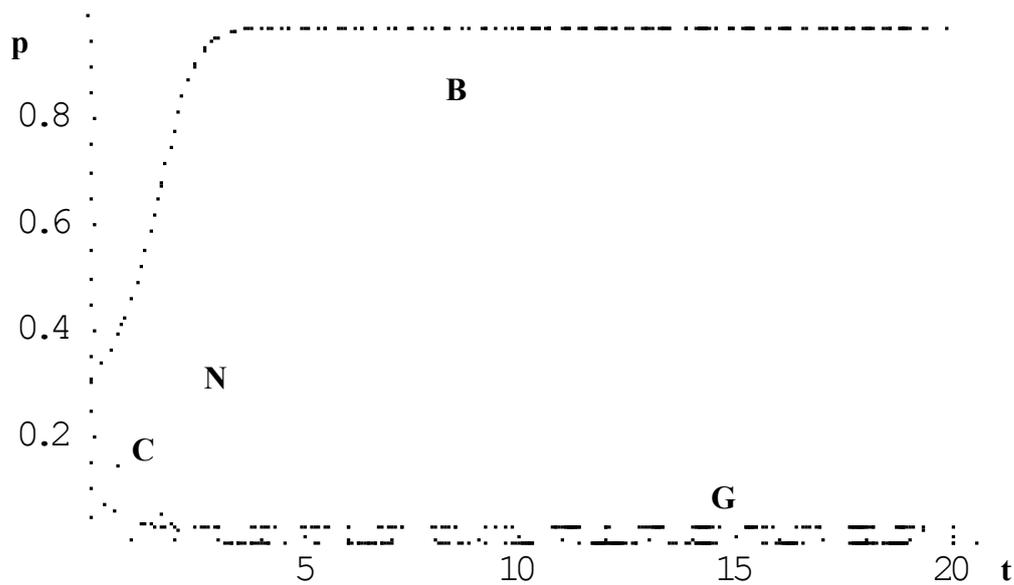


Figura 9

Dunque la cooperazione si può affermare anche se all'inizio gli N sono più dei B, a patto che i C siano abbastanza.

7. Conclusioni

Tiriamo qualche prima conclusione. Siamo partiti dall'ipotesi che esistessero solo due strategie: N e G, e abbiamo visto che in quel caso non c'è nessuna possibilità di cooperazione. Abbiamo anche visto che, quando ci sono incontri casuali dove il gioco dura solo un round, la cooperazione, in presenza di tre strategie (N, G, T) è possibile, ma solo se ipotizziamo che il tipo T possa riconoscere con un'alta probabilità i tipi che ha di fronte. Abbiamo già provato a dare una spiegazione di questo risultato: solitamente la cooperazione è una faccenda che suppone incontri ripetuti tra le stesse persone. In secondo luogo, l'analisi svolta ci ha permesso di constatare che la strategia T non ha alcuna efficacia senza l'ipotesi di riconoscibilità. Nella vita civile la riconoscibilità è importante, perché è alla base dei giochi di reputazione, nei quali cooperiamo perché riconosciamo gli altri e siamo riconosciuti da essi. Al tempo stesso, la riconoscibilità non è sempre possibile, soprattutto nelle interazioni delle grandi società, come sono le attuali globalizzate. Per questo abbiamo proseguito la nostra analisi abbandonando l'ipotesi di riconoscibilità, ed abbiamo avanzato altre ipotesi per spiegare l'emergere della cooperazione spontanea (o senza enforcement).

Riassumiamo i principali risultati emersi:

- *Il ruolo “critico” dei tipi G*: abbiamo visto in vari punti dell’analisi che i tipi G non devono essere troppi, altrimenti compromettono se stessi e anche la sopravvivenza, per esempio dei B (*proposizione 7*). In popolazioni dove esiste la possibilità della non cooperazione (e sono tutte quelle reali), gli atti incondizionali sono essenziali ma non devono essere troppi, altrimenti sono controproducenti;
- I tipi G svolgono un ruolo fondamentale, perché sono i soli capaci di attivare la cooperazione dei C. Senza la presenza dei tipi G, i C non sperimenterebbero mai la cooperazione e non risponderebbero mai, quindi, con un atto di cooperazione. La presenza dei tipi G è quindi preziosa, ma va tutelata. Il successo di molte esperienze di cooperazione – dalle imprese alla famiglie – dipende anche, e in certi casi soprattutto, dalla presenza di un numero, piccolo, di reciprocatori incondizionali che sono capaci di attivare persone che non si attiverebbero mai se messi in contatto soltanto con cooperatori condizionali.
- *Alleanze: i tipi C*: essi sono “attivati” solo dai G, ma nello stesso tempo la loro presenza è molto benefica per i G, perché ne aumenta l’utilità attesa. I G, infatti cooperano con i B e con i C, ma vengono sfruttati dagli N. In un mondo a quattro i C fanno emergere e proteggono i G dall’estinzione.

La cooperazione può dunque emergere in un mondo eterogeneo; anzi è favorita dall’eterogeneità, a condizione che le interazioni siano ripetute.

Si potrebbe obiettare che i tipi G, guardando il modello da un punto di vista matematico, non sono necessari. Basterebbero i B, magari con qualche sofisticazione in più, per favorire la cooperazione. Ma non è con questo intento, cioè quello di vedere quali strategie favoriscono la cooperazione, che il modello è stato pensato. La nostra analisi ha preso le mosse dall’ipotesi che i tipi G esistono (e chi nega nel mondo reale la presenza di azioni incondizionali? Anche Binmore (2006), noto per le sue posizioni radicali di *rational choice*, ne ammette l’esistenza), e il modello ci ha illustrato quali sono le condizioni per la loro sopravvivenza. Un mondo di troppi G non porta alla cooperazione, ma un mondo senza G sarebbe un mondo molto più povero e incivile.

Appendice

Dimostrazione della proposizione 1:

Supponiamo che nel tempo si affermino i tipi con le utilità attese maggiori, quindi dire che nel tempo sopravvivranno i tipi N equivale a dire che:

$$U_n \geq U_g$$

E quindi:

$$p_n(0) + p_g(\beta) > p_n(-\gamma) + p_g(\beta - \gamma)$$

Che diventa:

$$(p_n + p_g) \gamma \geq 0$$

Che per $p_n, p_g \in [0,1]$ è sempre verificata.

Dimostrazione della proposizione 2:

Le utilità attese dei tre tipi sono:

$$\begin{aligned} U_n &= p_n(0) + p_g(\beta) + p_t(0) \\ U_g &= p_n(-\gamma) + p_g(\beta - \gamma) + p_t(\beta - \gamma) \\ U_t &= p_n(0) + p_g(\beta - \gamma) + p_t(\beta - \gamma) \end{aligned}$$

Dalle utilità attese dei giocatori è possibile ricavare la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & \beta - \gamma & \beta - \gamma \\ 0 & \beta - \gamma & \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

che, sottraendo la prima riga diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & -\gamma & \beta - \gamma \\ 0 & -\gamma & \beta - \gamma \end{pmatrix}$

Tra i payoff vale la seguente relazione:

$$\beta > \gamma > 0$$

Seguendo Bomze (1983), il quale fa riferimento alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

per la proposizione 1 (pag. 210) possiamo dire:

1. l'autovalore del vertice N in direzione N-G è proporzionale ad $a(-\gamma)$ ed è negativo
2. l'autovalore di N in direzione N-T è uguale a zero

3. l'autovalore di G in direzione G-N è proporzionale a $-b$ (γ) ed è positivo
4. l'autovalore di G in direzione G-T è uguale a zero
5. l'autovalore di T in direzione T-N è proporzionale a $-f - (\beta - \gamma)$ ed è negativo
6. l'autovalore di T in direzione T-G è uguale a zero

Per la proposizione 5 (pag. 211), possiamo affermare che il lato del semplice T-G è costituito interamente di punti fissi. Infatti, seguendo la notazione di Bomze, si verifica che $e = b$ e $c = f$. Per la proposizione 2-ii (pag. 210) si può verificare che non esistono altri punti fissi negli altri lati. La non esistenza di punti fissi bel lato N-T implica che esiste un'unica traiettoria che congiunge i due vertici.

La dinamica è rappresentata nella figura 1.

Dimostrazione della proposizione 3:

Le utilità attese sono:

$$U_n = p_n(0) + p_g\beta + p_t(1-r)\beta$$

$$U_n = p_n(-\gamma) + p_g(\beta - \gamma) + p_t[r(\beta - \gamma) + (1-r)(-\gamma)]$$

$$U_t = p_n(1-r)(-\gamma) + p_g[r(\beta - \gamma) + (1-r)\beta] + p_t\{r[r(\beta - \gamma) + (1-r)(-\gamma)] + (1-r)[r\beta]\}$$

La matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta - r\beta \\ -\gamma & \beta - \gamma & r\beta - \gamma \\ r\gamma - \gamma & \beta - r\gamma & r\beta - r\gamma \end{pmatrix} \text{ e, dopo la trasformazione:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & -\gamma & 2r\beta - \beta - \gamma \\ r\gamma - \gamma & -r\gamma & 2r\beta - r\gamma - \beta \end{pmatrix}$$

Sempre seguendo Bomze (1983), per la proposizione 1 (pag. 210) possiamo dire:

1. l'autovalore del vertice N in direzione N-G è proporzionale ad a ($-\gamma$) ed è negativo
2. l'autovalore di N in direzione N-T è proporzionale a d ($r\gamma - \gamma$) ed è quindi negativo
3. l'autovalore di G in direzione G-N è proporzionale a $-b$ (γ) ed è positivo
4. l'autovalore di G in direzione G-T è proporzionale a $(e - b)$ e cioè: $(-r\gamma + \gamma)$, quindi è positivo
5. l'autovalore di T in direzione T-G è proporzionale a $(c - f)$ e cioè $(r\gamma - \gamma)$ ed è negativo
6. l'autovalore di T in direzione T-N è proporzionale a $-f$, cioè $(\beta + r\gamma - 2r\beta)$, ma questo valore può essere positivo o negativo, a seconda del valore di r , dobbiamo quindi distinguere due casi:

Primo caso: $r < \frac{\beta}{2\beta - \gamma}$, autovalore positivo

Secondo caso: $r \geq \frac{\beta}{2\beta - \gamma}$, autovalore negativo.

Procediamo nell'analisi distinguendo i due casi.

PRIMO CASO

Per la proposizione 2 (pag. 210) si dimostra che non ci sono punti fissi né sul lato NG, né sul lato NT.

Per la proposizione 5 (pag. 211) si dimostra che non ci sono punti fissi sul lato GT, e per la proposizione 6 si dimostra che non ci sono punti fissi interni. La dinamica è rappresentata nella 2a.

SECONDO CASO

Per la proposizione 2 (pag. 210) si dimostra che c'è un punto fisso f sul lato NT, infatti la quantità df , che corrisponde a $(r\gamma - \gamma)(2r\beta - r\gamma - \beta)$ è negativa. Gli autovalori associati al punto fisso sono proporzionali a $(-d$, quindi positivo) lungo il lato NT, e alla quantità

$\frac{af - cd}{f}$, pari a $\frac{-\gamma(2r\beta - r\gamma - \beta) - (2r\beta - \gamma - \beta)(r\gamma - \gamma)}{2r\beta - r\gamma - \beta}$ nell'altra direzione, quantità che è negativa.

La dinamica è rappresentata nella figura 2b.

Dimostrazione della proposizione 4:

Le utilità attese sono:

$$U_n = p_n(0) + p_c(0) + p_g \frac{\beta}{1-\pi}$$

$$U_c = p_n(0) + p_c(0) + p_g \frac{\beta - \gamma\pi}{1-\pi}$$

$$U_g = p_n \left(\frac{-\gamma}{1-\pi} \right) + p_c \frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} + p_g \frac{\beta - \gamma}{1-\pi}$$

La matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta}{1-\pi} \\ 0 & 0 & \frac{\beta - \gamma\pi}{1-\pi} \\ \frac{-\gamma}{1-\pi} & \frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} & \frac{\beta - \gamma}{1-\pi} \end{pmatrix} \text{ e, dopo la trasformazione: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\pi\gamma}{1-\pi} \\ \frac{-\gamma}{1-\pi} & \frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} & \frac{-\gamma}{1-\pi} \end{pmatrix}$$

Per la proposizione 1 (pag. 210) possiamo dire:

1. l'autovalore del vertice N in direzione N-C è proporzionale ad a e pari a 0
2. l'autovalore di N in direzione N-G è proporzionale a $d \left(\frac{-\gamma}{1-\pi} \right)$ ed è quindi negativo
3. l'autovalore di C in direzione C-N è proporzionale a $-b$ ed è pari a 0
4. l'autovalore di C in direzione C-G è proporzionale a $(e - b)$ e cioè: $\left(\frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} \right)$, quindi è positivo
(ricordiamo che abbiamo ipotizzato per tutta l'analisi dinamica che $\pi > \frac{\gamma}{\beta}$)
5. l'autovalore di G in direzione G-C è proporzionale a $(c - f)$ e cioè $\left(\frac{\gamma - \pi\gamma}{1-\pi} \right)$ ed è positivo

6. l'autovalore di G in direzione G-N è proporzionale a $-f$, cioè $\left(\frac{\gamma}{1-\pi}\right)$, ed è quindi positivo

Per la proposizione 2 (pag. 210) sappiamo che il lato N-C è costituito di punti fissi.

Per la proposizione 5 (pag. 211) sappiamo che c'è un punto fisso g (punto di sella) sul lato G-C, infatti la quantità $(e-b)(f-c)$ è negativa, e gli autovalori d'esso associati sono proporzionali a:

1. $-\frac{(e-b)(c-f)}{e-b+c-f}$, che vuol dire $-\frac{\left(\frac{\beta\pi-\gamma}{1-\pi}\right)\left(\frac{\gamma-\pi\gamma}{1-\pi}\right)}{\frac{\beta\pi-\pi\gamma}{1-\pi}}$: di questa quantità sappiamo che il

numeratore è negativo, mentre il denominatore è positivo, è quindi negativa;

2. $\frac{bf-ce}{e-b+c-f}$, quantità di cui studiamo il segno del solo numeratore, già sapendo che il

denominatore è positivo; esso è pari a: $0 - \left(\frac{\beta\pi-\gamma}{1-\pi}\right)\left(\frac{-\pi\gamma}{1-\pi}\right)$ ed è positivo

Dimostrazione della proposizione 5:

Utilità attese:

$$U_n = p_n(0) + p_c(0) + p_b(\beta)$$

$$U_c = p_n(0) + p_c(0) + p_b(\beta - \gamma\pi)$$

$$U_b = p_n(-\gamma) + p_c(\beta\pi - \gamma) + p_b\left(\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi}\right)$$

Matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta - \gamma\pi \\ -\gamma & \beta\pi - \gamma & \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} \end{pmatrix} \text{ che diventa: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma\pi \\ -\gamma & \beta\pi - \gamma & \frac{\beta\pi - \gamma}{1 - \pi} \end{pmatrix}$$

1. l'autovalore del vertice N in direzione N-C è proporzionale ad a è pari a 0

2. l'autovalore di N in direzione N-B è proporzionale a $d(-\gamma)$ ed è quindi negativo

3. l'autovalore di C in direzione C-N è proporzionale a $-b$ ed è pari a 0

4. l'autovalore di C in direzione C-G è proporzionale a $(e-b)$ e cioè: $(\beta\pi - \gamma)$, quindi è positivo

5. l'autovalore di B in direzione B-C è proporzionale a $(c-f)$ e cioè $\left(\frac{-\beta\pi + \gamma - \pi\gamma + \pi^2\gamma}{1-\pi}\right)$ ed è negativo

6. l'autovalore di B in direzione B-N è proporzionale a $-f$, cioè $\left(\frac{\gamma - \beta\pi}{1-\pi}\right)$, ed è quindi negativo

Dalla proposizione 2 (pag. 210) ricaviamo:

- il lato N-C è costituito di punti fissi

- Sul lato N-B c'è un punto fisso f (la quantità df è negativa); gli autovalori ad esso associati sono infatti proporzionali a :

$-d$, e cioè γ , quindi positivo

$$\frac{af - cd}{f} \text{ e cioè } \frac{0 - (-\gamma\pi)(-\gamma)}{\frac{\beta\pi - \gamma}{1 - \pi}} \text{ ed è negativo.}$$

Le coordinate del punto fisso sono $[0, q]$ dove $q = -\frac{d}{f}$; la trasformazione delle coordinate in un mondo a tre dimensioni è (Bomze 1983, pag. 204):

$$p_m = \frac{1}{1 + 0 + q} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\frac{\beta\pi - \gamma}{1 - \pi}}} = \frac{\beta\pi - \gamma}{(\beta - \gamma)\pi}$$

$$p_c = \frac{0}{1 + 0 + q} = 0$$

$$p_b = \frac{q}{1 + 0 + q} = \frac{\gamma(1 - \pi)}{(\beta - \gamma)\pi}$$

Per la proposizione 5 (pag. 211) sappiamo che non ci sono punti fissi sul lato C-B, e per la proposizione 6 sappiamo che non ci sono punti fissi interni. La dinamica è rappresentata nella figura 5.

Dimostrazione della proposizione 6:

Utilità attese:

$$U_n = p_n(0) + p_b\beta + p_g \frac{\beta}{1 - \pi}$$

$$U_b = p_n(-\gamma) + p_b \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + p_g \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi}$$

$$U_g = p_n\left(\frac{-\gamma}{1 - \pi}\right) + p_b \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + p_g \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi}$$

Matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & \frac{\beta}{1 - \pi} \\ -\gamma & \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} & \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} \\ -\gamma & \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} & \frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} \end{pmatrix}, \text{ che diventa: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & \frac{\beta\pi - \gamma}{1 - \pi} & \frac{-\gamma}{1 - \pi} \\ -\gamma & \frac{\beta\pi - \gamma}{1 - \pi} & \frac{-\gamma}{1 - \pi} \end{pmatrix}$$

1. l'autovalore del vertice N in direzione N-B è proporzionale ad $a(-\gamma)$ quindi è negativo

2. l'autovalore di N in direzione N-G è proporzionale a $d \left(\frac{-\gamma}{1-\pi} \right)$ ed è quindi negativo
3. l'autovalore di B in direzione B-N è proporzionale a $-b \left(-\frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} \right)$ ed è negativo
4. l'autovalore di B in direzione B-G è proporzionale a $(e - b)$ ed è pari a zero
5. l'autovalore di G in direzione G-B è proporzionale a $(c - f)$ ed è pari a zero
6. l'autovalore di G in direzione G-N è proporzionale a $-f$, cioè $\left(\frac{\gamma}{1-\pi} \right)$, ed è quindi positivo

Dalla proposizione 2 (pag. 210) sappiamo che c'è un punto fisso f lungo il lato N-B (in quanto $ab < 0$), gli autovalori ad esso associati sono proporzionali a :

$-a$, e cioè γ , quindi positivo

$$\frac{bd - ae}{b} \text{ e cioè } \frac{\left(\frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} \right) \left(\frac{-\gamma}{1-\pi} \right) - (-\gamma) \left(\frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi} \right)}{\frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi}}, \text{ che diventa: } \frac{-\gamma\pi}{1-\pi} \text{ ed è quindi negativo.}$$

Le coordinate del punto fisso sono $[p, 0]$ dove $p = -\frac{a}{b}$; la trasformazione delle coordinate in un mondo a tre dimensioni è (Bomze 1983, pag. 204):

$$p_m = \frac{1}{1+p+0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\frac{\beta\pi - \gamma}{1-\pi}}} = \frac{\beta\pi - \gamma}{(\beta - \gamma)\pi}$$

$$p_b = \frac{p}{1+p+0} = \frac{\gamma(1-\pi)}{(\beta - \gamma)\pi}$$

$$p_w = \frac{0}{1+p+0} = 0$$

Per la proposizione 5 sappiamo che il lato B-G è costituito di punti fissi (infatti $e = b, c = f$). La dinamica è rappresentata nella figura 6.

Dimostrazione della proposizione 7

$Ub > Un$:

$$p_n(-\gamma) + p_g \frac{\beta - \gamma}{1-\pi} + p_b \frac{\beta - \gamma}{1-\pi} + p_c(-\gamma + \beta\pi) - p_g \frac{\beta}{1-\pi} - p_b\beta > 0$$

$$-(1 - p_b - p_c - p_g)\gamma + p_b \frac{-\gamma + \beta\pi}{1-\pi} + p_g \frac{-c}{1-\pi} + p_c(-\gamma + \beta\pi) > 0$$

$$p_b \frac{(\beta - \gamma)\pi}{1-\pi} + p_g \frac{-\gamma\pi}{1-\pi} + p_c\beta\pi > \gamma$$

Da cui segue il valore soglia della proposizione 7.

Dimostrazione della proposizione 8

$U_n > U_c$ sempre se $\pi > 0$ (se invece $\pi = 0 \rightarrow U_n = U_c$).

$$\text{Infatti abbiamo } p_b(\beta - \gamma\pi) + p_g\left(\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + \gamma\right) < p_b\beta + p_g\frac{\beta}{1 - \pi}$$

Questa disuguaglianza non è mai verificata perché $(\beta - \gamma\pi)$ è sempre minore di β , e quindi $\frac{\beta - \gamma\pi}{1 - \pi}$ è sempre minore di $\frac{\beta}{1 - \pi}$.

Dimostrazione della proposizione 9

$$U_g > U_n \Leftrightarrow$$

$$p_n\frac{-\gamma}{1 - \pi} + p_g\frac{\beta}{1 - \pi} - p_g\frac{\gamma}{1 - \pi} + p_b\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} - p_c\gamma + p_c\frac{(\beta - \gamma)\pi}{1 - \pi} - p_g\frac{\beta}{1 - \pi} + p_b\beta > 0$$

$$-\gamma + p_c\beta\pi + p_b\beta\pi > 0$$

$$\text{quindi : } p_b > \frac{\gamma}{\beta\pi} - p_c$$

Dimostrazione della proposizione 10

$$U_g > U_b \Leftrightarrow$$

$$p_n\frac{-\gamma}{1 - \pi} + p_g\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + p_b\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + p_c\left[-\gamma + \frac{(\beta - \gamma)\pi}{1 - \pi}\right] > p_n(-\gamma) + p_g\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + p_b\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} - \gamma p_c$$

$$p_n\frac{-\gamma}{1 - \pi} + p_c\frac{(\beta - \gamma)\pi}{1 - \pi} + p_n\gamma > 0$$

$$p_c > p_n\frac{\gamma}{\beta\pi - \gamma}$$

Dimostrazione della proposizione 11

$$U_c > U_b \Leftrightarrow$$

$$p_b(\beta - \gamma\pi) + p_g\left(\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} + \gamma\right) - p_n(-\gamma) - p_b\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} - p_g\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi} - p_c(-\gamma + \beta\pi) \geq 0$$

$$\gamma - p_b\gamma + p_b\beta - p_b\gamma\pi - p_c\beta\pi - p_b\frac{\beta - \gamma}{1 - \pi}$$

Da cui segue:

$$\gamma - \gamma\pi - p_b\beta\pi + p_b\gamma\pi^2 - p_c\beta\pi + p_c\beta\pi^2 > 0$$

$$p_b < \frac{\gamma(1 - \pi)}{(\beta - \gamma\pi)\pi} - p_c\frac{\beta(1 - \pi)}{\beta - \gamma}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Antoci A., Sacco P. e Zarri L. (2004) “Coexistence of Strategies and Culturally-Specific Common Knowledge: An Evolutionary Analysis”, *Journal of Bioeconomics*, vol. 6, pagg. 165-194

Binmore K. (2005), *Natural Justice*, OUP, Oxford

Binmore K. (2006) “Why do people cooperate?”, *Politics, Philosophy and Economics*, vol. 5 (1), pagg. 81 – 96

Bomze I. (1983) “Lotka-Volterra Equation and Replicator Dynamics: A Two-Dimensional Classification”, *Biological Cybernetics*, vol. 48, pagg. 201-211

Bowles S., Gintis H. (2004), “*The Evolution of Strong Reciprocity: Cooperation in Heterogeneous Populations*”, *Theoretical Population Biology*, n. 65, 17 – 28

Bruni L. (2006) *Reciprocità. Dinamiche di cooperazione, economia e società civile*, Mondatori

Bruni L. e Crivelli L. (2004), *Per una economia di comunione - un approccio multidisciplinare*, a cura di, Città Nuova, Roma

Bruni L. e Smerilli A. (2004), “I dilemmi dell’individualismo e il paradosso della reciprocità. Ipotesi e giochi”, in Bruni e Crivelli (2004)

Heckathorn D. (1996) “The dynamics and dilemmas of collective action”, *American Sociological Review*, vol. 61, pagg. 250-277

Hirshleifer J., Martinez Coll J. (1991) “The limits of reciprocity”, *Rationality and Society*, vol. 3, pagg. 35-64

Sugden R. (2003) “The logic of team reasoning”, *Philosophical explorations*, vol. 6, pagg. 165-181

Sugden R. (2004) *The economics of rights, cooperation and welfare*, seconda edizione, Palgrave Macmillian