

1
2010

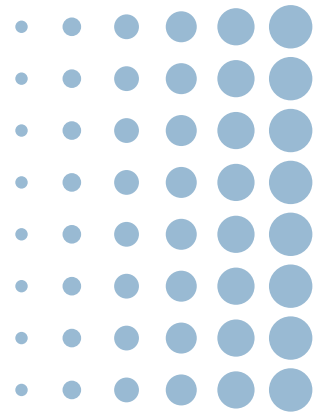


análisis

revista del mercado de valores

NÚMERO 1 EDICIÓN DICIEMBRE 2010
ISSN 2215-9150

Estimación de una superficie de volatilidades para las opciones sobre la tasa de cambio USD/COP



Andrés Gómez*

Resumen

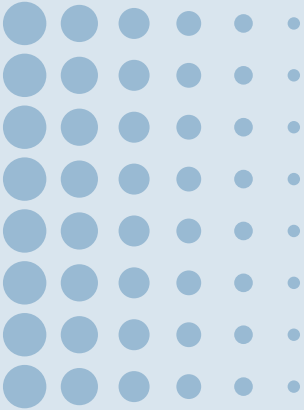
En este trabajo se describen algunos de los estándares del mercado de opciones sobre divisas y se analizan algunos modelos que son utilizados para la obtención de precios. Particularmente se hace uso del modelo NGARCH para obtener precios de opciones sobre la tasa de cambio USD/COP. A partir de estos precios se obtienen volatilidades implícitas por plazo y delta, lo que genera una superficie de volatilidades teórica para las opciones sobre la tasa de cambio USD/COP.

Palabras clave: estimación, métodos de simulación, tasas de cambio, valoración de activos contingentes.

Clasificación JEL: G12, G13.

* Mesa de Divisas,
Bancolombia. Beca Fulbright
Suramericana. Maestría en
Mathematical Finance, Illinois
Institute of Technology.
Correo electrónico:
gomezandr@gmail.com.

Documento recibido:
16 de junio de 2010.
Versión final aceptada:
1º de octubre de 2010.



Volatility Surface for Options on the Exchange Rate USD/ COP: An Estimation

Andrés Gómez*

* Foreign Exchange Bureau,
Bancolombia. South American
Fulbright Scholarship. Master of
Mathematical Finance, Illinois
Institute of Technology.
Email: gomezandr@gmail.com.

Document received:
16 June 2010.
Final version accepted:
1 October 2010.

Abstract

This work describes some of the standards of the foreign exchange option market and also analyzes some of the most used models for pricing currency options. The study has been done particularly with the NGARCH model applied on the USDCOP currency pair. After obtaining option prices, implied volatilities for some maturities and deltas are calculated, generating that way a theoretical volatility surface for the USDCOP currency options.

Key words: Simulation methods, currency options, contingent claim valuation, volatility surface.

JEL classification: G12, G13.

INTRODUCCIÓN

El mercado de derivados en Colombia es aún incipiente debido a que sólo se negocian unos pocos instrumentos, y su volumen y liquidez, comparados con mercados de derivados de otros países, son bajos. En la actualidad se negocian algunos instrumentos entre los que se pueden mencionar *forwards*, *swaps* y opciones. Algunas características del mercado local, por ejemplo, ciertas regulaciones a las posiciones en moneda extranjera y los problemas en el desarrollo de un mercado monetario, han impedido que estos mercados se desarrollen como lo han hecho en otras partes del mundo¹. El mercado de opciones sobre la tasa de cambio está aún muy poco desarrollado en cuanto al número de creadores de mercado existentes, el *bid-ask spread* con el cual se hacen las posturas en firme y la profundidad del mercado, entre otros aspectos. En la actualidad, en este mercado se negocian básicamente opciones europeas sobre la tasa de cambio USD/COP, mientras que la negociación de otro tipo de opciones, como las americanas, las barreras o las asiáticas, es prácticamente inexistente.

La formación de precios en un mercado de opciones se da normalmente a partir de la volatilidad. Ésta, pese a no tener un precio directamente observable en el mercado, se considera un activo que se compra y que se vende. Las opciones tienen usualmente diferentes volatilidades según el plazo y el precio del ejercicio de la opción. A esta relación se le conoce con el nombre de “superficie de volatilidades”. En un mercado desarrollado esta superficie está determinada por las fuerzas de la oferta y la demanda. Sin embargo, cuando tal mercado no existe o está muy poco desarrollado, un creador de mercado se enfrenta al problema de determinarla. Una forma de hacerlo es a partir de modelos teóricos.

Este trabajo pretende dar una alternativa metodológica para la creación de una superficie de volatilidades que permita tener una aproximación de los precios de las opciones de la tasa de cambio USD/COP.

1 Existen, por ejemplo, límites a las posiciones que pueden tener los agentes en moneda extranjera. Esto distorsiona la formación de precios en el mercado cuando se alcanzan estos límites por parte de las instituciones financieras. La inexistencia de un mercado monetario desarrollado limita igualmente el desarrollo de productos de tasas de interés, como los FRA o los *swaps*.

La primera sección describe el funcionamiento de los mercados de opciones en el mundo y sus estándares, con especial énfasis en los mercados de opciones sobre tasas de cambio. La segunda sección recoge los modelos más usados en la literatura para obtener los precios de las opciones. Allí se muestra como modelo básico el de Black-Scholes-Merton, además de otros modelos que se han desarrollado para capturar de manera más apropiada dos fenómenos que ocurren en la realidad, como son las discontinuidades del activo subyacente y la naturaleza estocástica de la volatilidad. Otros fenómenos, como la naturaleza estocástica de las tasas de interés o los costos transaccionales, han sido estudiados con diferentes modelos; éstos, sin embargo, no son objeto de estudio de este trabajo. En la tercera sección se muestra la estimación estadística de los parámetros del modelo elegido a partir de la serie de retornos de la tasa de cambio USD/COP y se realizan simulaciones de Montecarlo para la obtención de una superficie de volatilidades teórica. Por último, en la cuarta sección se dan algunas conclusiones.

I. EL MERCADO DE OPCIONES SOBRE LA TASA DE CAMBIO

Los mercados de opciones existen desde la antigüedad. Sin embargo, desde hace aproximadamente cuatro décadas su desarrollo ha sido vertiginoso. Algunas razones que explican este fenómeno son los desarrollos de la informática, que han permitido tener mejores sistemas de cómputo, la liberalización de los mercados financieros, que ha aumentado la volatilidad en variables como las tasas de interés, y la globalización de los mercados, que genera una interrelación mucho mayor de las economías de los países.

El mercado de opciones sobre las tasas de cambio es hoy en día uno de los mercados de opciones más líquidos en el mundo. En el cuadro 1 se pueden observar los volúmenes mundiales diarios promedio que se negocian en derivados de tasas de cambio y de tasas de interés. Se puede observar que para el año 2007 se negociaban en promedio 212 mil millones de dólares diarios en el mercado de opciones sobre tasas de cambio. En comparación, en el mercado *spot* del peso colombiano se operan en promedio mil millones de dólares diarios y en el mercado de opciones sobre

la tasa USD/COP existen muchos días en los cuales no se ejecuta ninguna transacción en el mercado de *brokers*.

Cuadro 1. Promedio diario de negociaciones de derivados sobre tasas de interés y tasas de cambio (cifras en millones de dólares)

Instrumento	1998	2001	2004	2007	Crecimiento 04-07
A. Instrumentos mercado cambiario	97	67	140	292	108,6%
Swap Divisas	10	7	21	80	281,0%
Opciones	87	60	117	212	81,2%
Otros	0	0	2	0	-100,0%
B. Instrumentos tasas de interés	265	489	1.025	1.684	64,3%
FRA	74	129	233	258	10,7%
Swaps	155	331	621	1.210	94,8%
Opciones	36	29	171	215	25,7%
Otros	0	0	0	1	
Errores reportados	13	19	55	113	105,5%
Total	375	575	1.220	2.089	71,2%

Fuente: Bank for International Settlements (BIS), Grupo Bancolombia.

La liquidez de un mercado se puede medir normalmente a partir de dos factores. El primero es la diferencia entre las posturas de compra y de venta de los agentes, lo cual es conocido como el *bid-ask spread*. El segundo factor es la profundidad del mercado, lo cual hace referencia al volumen que se puede encontrar en cada postura de compra o venta y al volumen disponible al próximo precio. A diferencia de los mercados de opciones de monedas del G10, los mercados de opciones sobre monedas de países emergentes son aún bastante ilíquidos. En Latinoamérica los que más se han desarrollado son los de México y Brasil, seguidos por el de Chile. El mercado de opciones sobre la tasa de cambio en Colombia es aún incipiente.

El mercado de opciones europeas sobre la tasa de cambio USD/COP se opera básicamente a través de *brokers*, es decir, es un mercado *over the counter* (OTC) o de mostrador, y es allí en donde se da una primera aproximación a la formación de precios. Los precios en este mercado pueden darse como las primas que se pagarán o que se recibirán por las opciones particulares,

o bien como las volatilidades implícitas en estas primas. Esto se debe a que la práctica usual del mercado es emplear el modelo de *Black-Scholes-Merton*, en donde todas las variables son observables por los agentes, con excepción de la volatilidad (Taleb, 1997, p. 88). Para los mercados de opciones OTC sobre tasas de cambio la forma más utilizada para cotizar los precios es a través de las volatilidades. La razón de esto es que las volatilidades implícitas deben ajustarse menos rápido que los precios de las opciones ante cambios en el precio del activo subyacente (De Rosa, 2000, p. 64).

Hasta 1987, cuando se produjo el *crash* del mercado de acciones en Estados Unidos, era usual que los operadores de opciones usaran la misma volatilidad para calcular el precio de opciones con diferentes precios de ejercicio o *strike* (Derman, 2003). Además, las volatilidades eran similares para diferentes plazos al vencimiento. Si se graficara entonces la volatilidad como una función de dos variables, el *strike* y su tiempo hasta el vencimiento, se tendría un plano paralelo al origen. Sin embargo, después del *crash* se empezó a notar un comportamiento diferente en las volatilidades. Para el caso de las acciones, las opciones PUT con *strikes* bajos tenían volatilidades más altas que las opciones CALL con *strikes* altos de similar nivel. Esto debido a que los operadores empezaron a percibir que cuando las acciones caían, tenían movimientos mucho mayores que cuando las acciones subían². Adicionalmente empezaron a diferenciar la volatilidad entre opciones de corto plazo y largo plazo, teniendo en cuenta un fenómeno observado en los mercados, en el que la volatilidad tiene aparentemente una media de largo plazo a la cual converge (Natenberg, 1994, p. 275). Entonces, para opciones con diferentes plazos y *strikes* se tenían diferentes niveles de volatilidad. Esto se empezó a conocer como la superficie de volatilidades.

En el mercado de opciones sobre la tasa de cambio, la superficie de volatilidad se determina generalmente a partir de las volatilidades implícitas en tres estructuras. La primera de ellas se conoce como el *straddle*, que no es más que la compra o venta simultánea de una CALL y una PUT con el mismo *strike*. Los *straddles* deben estar *at the money* (ATM), es decir, el *strike* debe ser igual que el

2 Si se graficara un histograma de retornos, se podría ver que la distribución no es simétrica sino que está sesgada. Hay retornos negativos mucho mayores en valor absoluto que los retornos positivos.

precio *forward*³ vigente en el mercado a una fecha determinada. Estas opciones tienen un delta cercano al 50% cada una, de allí que la combinación de ambas tenga un delta cercano a cero⁴. La segunda estructura se conoce como el *risk reversal* (RR), que consiste en la compra de una CALL y la venta de una PUT, o viceversa. En este caso ambas opciones estarían *out of the money* (OTM)⁵. Esta estructura da una idea de cuán costosas están las CALL sobre las PUT y viceversa. En general, para monedas que sean igual de fuertes las CALL y las PUT deberían cotizar con volatilidades similares. Sin embargo, en el caso de monedas de países emergentes, por ejemplo para las cotizaciones del USD contra otra divisa, es usual que las CALL sean más caras que las PUT debido a las posibilidades de devaluaciones fuertes ante choques externos con un consecuente aumento en la volatilidad. Esto se conoce como el efecto *smirk*. Intuitivamente el RR debe ser cercano a cero si no existe una alta correlación entre la dirección del activo subyacente y la volatilidad, o por el contrario es mayor o menor que cero dependiendo de la correlación entre el activo subyacente y la volatilidad. El RR es una estructura que se cotiza usualmente para opciones con delta igual a 25% y 10%, respectivamente. La tercera estructura se denomina *butterfly* (BF) y consiste en la compra o venta de un *straddle* ATM contra la venta o compra de dos opciones OTM, una PUT y una CALL. Así, se observa qué tan costosas se encuentran en promedio las opciones que están OTM frente a las opciones ATM. En muchas divisas se observa que las opciones OTM tienen volatilidades más altas que las ATM, lo cual es conocido como el efecto *smile*. En el siguiente capítulo se ahondará un poco más en las causas de los efectos *smirk* y *smile*. El BF en general muestra en promedio qué tan costosas están las opciones OTM frente a las ATM.

En Colombia el mercado para opciones sobre la tasa de cambio USD/COP se está empezando a desarrollar básicamente

-
- 3 Las opciones ATM tienen el *strike* igual que el precio *spot* únicamente en el caso en el cual las tasas de interés son iguales a cero.
 - 4 Esto se da porque el delta de la CALL es contrario al de la PUT.
 - 5 Dado el teorema de la paridad PUT/CALL, las opciones que están OTM tienen una paridad con las que están *in the money* (ITM). Así, una CALL OTM que tenga, por ejemplo, un delta de 25% debería cotizar con la misma volatilidad de una PUT ITM con un delta de 75%. El estándar del mercado es cotizar siempre opciones ATM u OTM.

para opciones ATM; para opciones que están OTM el mercado aún es incipiente y para las estructuras de RR y BF el mercado es prácticamente inexistente. La liquidez para opciones ATM es aún muy baja en Colombia. Mientras que en los mercados de opciones sobre las tasas de cambio del G10 el *bid-ask spread* con respecto a la volatilidad es de diez puntos básicos, en Colombia es de trescientos puntos básicos. Los volúmenes del mercado del G10 son de 50 a 100 millones de dólares en una postura y cambia máximo en cinco puntos básicos al próximo precio. En Colombia existen volúmenes de aproximadamente cinco millones de dólares y el próximo precio puede estar en muchas ocasiones a más de cien puntos básicos del anterior. En los mercados desarrollados los RR y BF se negocian activamente, lo que permite tener una gran cantidad de volatilidades implícitas con las cuales se puede construir una superficie de volatilidades⁶ y con base en ella un creador de mercado puede dar precios para opciones de diferentes *strikes* y plazo al vencimiento, además de definir estrategias de cobertura y cotizar opciones exóticas. A diferencia de un mercado desarrollado, en donde la superficie está determinada en el mercado por las fuerzas de la oferta y la demanda, en el mercado colombiano sólo se tiene una incipiente curva de volatilidades ATM a diferentes plazos⁷. De allí que una primera aproximación para tener una idea de cuál debería ser el precio de los RR o BF sea a partir de modelos teóricos. De esta forma se podrían determinar, por lo menos en la teoría, cuáles son los efectos *smile* y *smirk* para el mercado de opciones sobre la tasa de cambio USD/COP. En el siguiente capítulo se profundizará en la teoría básica para determinar el precio de las opciones y se discutirán algunos modelos que tratan de representar de una manera más fiel los fenómenos observados en la realidad y que dan lugar a una superficie de volatilidades.

6 Usualmente se tienen las cotizaciones de las estructuras anteriormente mencionadas para plazos estándares, como 1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año, etc., y para opciones ATM y deltas de 25% y 10%. Para el espectro restante se utilizan diversas técnicas de interpolación.

7 Por esta razón, el presente trabajo se enfoca en estudiar la relación entre las volatilidades y los *strikes*.

II. ALGUNOS MODELOS UTILIZADOS PARA LA ESTIMACIÓN DEL PRECIO DE LAS OPCIONES

Para estimar el precio de una opción existen fórmulas desde hace varios siglos. Algunos autores argumentan, sin embargo, que es a partir de 1973, con la fórmula de Black-Scholes-Merton (BSM), cuando el mercado acepta una metodología general para calcular el precio de las opciones y que desde ese momento el mercado de éstas tiene un desarrollo importante. En esta sección se describirán algunos detalles de los modelos más utilizados en la literatura para calcular el precio de una opción y se discutirán los supuestos en que están basados.

A. El modelo de Black-Scholes-Merton

Black, Scholes y Merton desarrollaron un modelo suponiendo inicialmente que el activo subyacente seguía un proceso estocástico denominado movimiento browniano geométrico (MBG). Esta clase de movimientos se caracterizan porque van evolucionando a lo largo del tiempo de forma continua y porque tienen desviaciones de su media de largo plazo o *drift* en forma aleatoria. El MBG se observa en la ecuación (1), en donde μ es la media de los retornos de largo plazo, σ es la volatilidad de los retornos del activo subyacente y dz es un proceso de *Wiener*.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz. \quad (1)$$

Se puede consultar a Hull (2003, p. 242) o Neftci (1996) para una descripción detallada de la metodología con la cual se llega a la ecuación (2), que es la fórmula cerrada de BSM para calcular el precio de una CALL sobre una acción que no paga dividendos. Esta fórmula se convirtió en el estándar de la industria durante mucho tiempo.

$$C_{BS} = S_t N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \quad (2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

y

- S_t : precio *spot* del activo subyacente en el tiempo actual
- K : precio de ejercicio o *strike*
- r : tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente
- T : tiempo hasta el vencimiento (años)
- σ : volatilidad del activo subyacente anualizada
- $N(\phi)$: función de probabilidad normal acumulada

La ecuación (3) se conoce como la fórmula de Garman-Kohlhagen y permite obtener el precio para una CALL sobre divisas.

$$C_{CK} = S_t e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-r T} N(d_2), \quad (3)$$

donde:

- S_t : precio *spot* del activo subyacente en el tiempo actual
- K : precio de ejercicio o *strike*
- r_l : tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente en moneda local
- r_f : tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente en moneda extranjera
- T : tiempo hasta el vencimiento (años)
- σ : volatilidad del activo subyacente anualizada
- $N(\phi)$: función de probabilidad normal acumulada

En Hull (2003) se encuentran resumidos los supuestos en los cuales se basa la fórmula de BSM. La relajación de uno o varios de estos supuestos ha llevado al desarrollo de nuevas fórmulas y modelos para calcular los precios de opciones. En este trabajo, la atención se centra particularmente en los supuestos relacionados con la continuidad del activo y la aleatoriedad de la volatilidad. Es fácil demostrar para la mayoría de activos que su volatilidad cambia a lo largo del tiempo. De hecho, el mercado de opciones es un mercado de volatilidad en el que los operadores compran y venden esta volatilidad con expectativas de tener retornos positivos, lo cual hace que las volatilidades implícitas cambien en el tiempo.

Por otra parte, la presencia constante de saltos o de movimientos bruscos en cortos períodos hace pensar que los movimientos del precio de los activos financieros no siguen un MBG. La naturaleza estocástica de la volatilidad y la presencia de discontinuidades hacen que cobre importancia la utilización de otros procesos estocásticos diferentes al MBG.

B. El modelo de salto de Merton

Según Natenberg (1994), un proceso que cambia de forma continua a lo largo del tiempo se conoce como un proceso de difusión o *diffusion process*. Los activos financieros en muchos casos parecen seguir procesos similares. Allí los precios van cambiando en forma cuasicontinua⁸ y tienen saltos en algunos momentos. Merton (1975) propone un modelo en el cual existe una probabilidad positiva de tener un cambio de gran magnitud en el precio del activo subyacente⁹, independientemente del tamaño del intervalo de tiempo en el cual se observe. Usando el lenguaje de Merton, el cambio en el precio del activo subyacente estaría dado, entonces, por las vibraciones normales que se tienen en un proceso de difusión más los cambios por vibraciones extraordinarias, dado el arribo de información importante e inesperada. Este último componente se puede modelar a partir de un proceso de Poisson y es el responsable de la ocurrencia de los saltos. En la ecuación (4) se ilustra el modelo planteado por Merton.

$$dS = (\alpha - \lambda k)Sdt + \sigma Sdz + Sdq, \quad (4)$$

donde:

- α : retorno esperado del activo subyacente
- σ : volatilidad del retorno del activo subyacente, condicionada a que no ocurra el evento tipo Poisson
- dz : proceso de Wiener
- dq : proceso de Poisson. Éste se asume independiente de dz

8 No es continua, pero en la medida en que el mercado tiene mayor liquidez, el *bid-ask spread* es más estrecho y el proceso tiende a cambiar en cada *tick*.

9 Esto en el modelo de difusión no se podría dar porque violaría algunas propiedades de un proceso de Markov en el cual el activo subyacente sólo cambia en cantidades pequeñas.

- λ : número promedio de llegadas de información extraordinaria por unidad de tiempo
- k : esperanza del cambio porcentual en el precio del activo subyacente dado que llegue información extraordinaria $k = E(Y - 1)$, donde Y es una variable aleatoria y las variables aleatorias de la sucesión $\{Y_i\}$ son independientes e idénticamente distribuidas.

(4) puede reescribirse como (4')

$$dS = (\alpha - \lambda k)Sdt + \sigma Sdz, \text{ si el evento Poisson no ocurre} \tag{4'}$$

$$dS = (\alpha - \lambda k)Sdt + \sigma Sdz + (Y - 1)S, \text{ si el evento Poisson ocurre}$$

Como lo explica Merton (1975, p. 10), la técnica del rebalanceo continuo no puede ser empleada en este caso para eliminar el riesgo de un portafolio compuesto por una opción y una cantidad del activo subyacente. La técnica que utiliza se basa en el argumento de que el cambio en el valor del portafolio explicado por el proceso de salto constituye riesgo no sistemático¹⁰ o diversificable y, por lo tanto, este componente debe tener un retorno igual a la tasa libre de riesgo.

Si el logaritmo natural de la variable Y tiene una distribución normal con varianza s^2 , entonces el precio de una CALL europea puede expresarse según la ecuación (5) (Hull, 2003, p. 458).

$$C_M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T} (\lambda'T)^n}{n!} f_n \tag{5}$$

donde:

$$\lambda' = \lambda(1+k)$$

f_n : precio de una CALL según el modelo de Black Scholes-Merton con varianza $\sigma^2 + \frac{ns^2}{T}$ y tasa libre de riesgo $r - \lambda k + \frac{n \ln(1+k)}{T}$.

Jorion (1984) desarrolló uno de los primeros trabajos en los que se aplicó el modelo de salto, particularmente para el caso de una divisa. Realizó un estudio sobre la tasa de cambio USD/

10 El riesgo no sistemático hace referencia al riesgo que no está valorado en la economía. Este riesgo no está correlacionado con el mercado y, por lo tanto, tiene un $\beta = 0$.

DEM y encontró que el efecto de los saltos era importante para la determinación del precio de las opciones sobre este par de divisas. En su trabajo encontró que si se utilizara un modelo basado en un proceso de difusión sin saltos, el precio de las opciones OTM se subestimaría en algunos casos hasta en 30% (Jorion, 1984, p. 439).

C. El modelo GARCH

Como se había mencionado anteriormente, la volatilidad del activo subyacente parece cambiar a lo largo del tiempo. Dos grandes tipos de modelos se han desarrollado para considerar esta característica de la volatilidad. Por una parte están los modelos que trabajan bajo un proceso de difusión para el activo subyacente y con otro proceso para la volatilidad, es decir, tienen dos fuentes de incertidumbre (Kalsen y Taqqu, 1995, p. 7). Por otra, están los modelos que consideran que el activo subyacente sigue un proceso GARCH¹¹, en el cual la volatilidad presente depende de la volatilidad pasada. Duan (1996) muestra que estos dos enfoques se pueden unificar en un solo resultado. El modelo propuesto por Duan (1995) supone que el retorno del activo subyacente sigue un proceso GARCH. Dado que en este caso no se puede asumir completitud¹² del mercado, se deben hacer algunos supuestos sobre las primas de riesgo o las preferencias de los agentes para determinar el precio de las opciones. La ecuación (6) ilustra el modelo propuesto por Duan (1995) que, a diferencia de los anteriores modelos, considera una economía discreta y el proceso se describe para el retorno logarítmico del activo subyacente.

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad (6)$$

-
- 11 Se denomina GARCH por las siglas en inglés de *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*.
- 12 En un mercado completo el precio de cualquier derivado puede ser replicado a partir de los precios de otros activos disponibles en la economía. En estos mercados cualquier derivado que se introduzca es redundante, en el sentido de que no expande las oportunidades de inversión ya que puede ser replicado a partir de otros activos. Cuando existen riesgos que no se pueden cubrir a partir de los activos disponibles en la economía, el mercado es incompleto. Una explicación más amplia puede ser encontrada en Glasserman (2004).

donde:

- S_t : precio *spot* del activo subyacente en el tiempo actual
 r : tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente para el período actual
 λ : prima de riesgo
 ε_t : proceso GARCH(p,q) con media cero y varianza condicional σ_t^2

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 .$$

Como lo menciona Christoffersen (2003), $r + \lambda$ es el retorno esperado del activo subyacente. La prima de riesgo aparece por la imposibilidad de cubrir el riesgo de volatilidad, el cual es aleatorio. El método empleado por Duan (1995) para obtener el precio de la opción consiste en buscar una medida de probabilidad en la cual la opción pueda ser cubierta completamente entre el período t y $t + 1$. De esta forma puede eliminar la prima de riesgo en la ecuación del retorno del activo subyacente. Este procedimiento, sin embargo, no le permite eliminar la prima de riesgo en la ecuación de la varianza. El proceso bajo la medida de probabilidad equivalente se ilustra en la ecuación (7).

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t , \quad (7)$$

donde:

- ξ_t : proceso con media cero y varianza condicional σ_t^2

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-i})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 .$$

En su trabajo Duan (1995) no encuentra una ecuación cerrada para determinar el precio de la opción, sin embargo, llega a una ecuación en donde describe la dinámica del activo subyacente. Utilizando la medida de probabilidad neutral al riesgo dada la propiedad de la martingala equivalente (Glasserman, 2004, p. 28), es posible descontar el pago esperado de la opción con la tasa libre de riesgo y de esta forma encontrar el precio de la opción. En el trabajo de Barone-Adesi, Engle y Mancini (2005) se describe paso a paso el procedimiento para realizar la simulación de Montecarlo

necesaria para obtener el precio de la opción. Además, se describe allí un modelo GARCH asimétrico para calcular el precio de ésta.

En general, el modelo GARCH permite describir algunos aspectos observados en los mercados de opciones, tales como el efecto *smile*, la subvaloración de las opciones OTM o la aparición de una estructura temporal de las volatilidades implícitas. Además, este modelo permite explicar un fenómeno bastante observado en los mercados financieros conocido como el *clustering* de la volatilidad. Éste se caracteriza básicamente por que días altamente volátiles tienden a estar precedidos de días altamente volátiles y días con baja volatilidad de días con baja volatilidad.

Una variante del modelo GARCH es el modelo GARCH asimétrico, denominado NGARCH. Allí se adiciona el parámetro θ que representa la correlación entre los retornos del activo subyacente y la volatilidad. Los otros parámetros son los mismos que en el modelo GARCH. Existen en la literatura trabajos como el de Posedel (2006), que utilizan el NGARCH para obtener precios de opciones sobre divisas. El modelo NGARCH(1,1) puede ser expresado según la ecuación (8).

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad (8)$$

donde:

- S_t : precio *spot* del activo subyacente en el tiempo actual
- r : tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente para el período actual
- λ : prima de riesgo
- ε_t : proceso NGARCH(1,1) con media cero y varianza condicional σ_t^2

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2(\varepsilon_{t-1} - \theta\sigma_{t-1})^2.$$

Note que cuando θ es igual a cero, se tiene el caso especial del GARCH(1,1).

D. El modelo de Heston

Como se había mencionado en el apartado anterior, existe una clase de modelos que suponen un tipo de proceso estocástico

para el movimiento del activo subyacente y otro proceso para la volatilidad. En la literatura se conocen como modelos de volatilidad estocástica. Shepard (2007) hace una revisión histórica de estos modelos exponiendo los avances que se han dado a lo largo del tiempo. Uno de los modelos más importantes en esta corriente es el propuesto por Hull y White (1987), en el cual se permite una correlación entre los procesos de la volatilidad y el activo subyacente. Heston (1993) logra obtener una fórmula cerrada para un modelo de volatilidad estocástica, lo cual no había sido desarrollado hasta entonces. Los procesos seguidos por el activo subyacente y la volatilidad se ilustran en la ecuación (9).

$$dS = \mu S dt + \sqrt{v} S dz_1, \quad (9)$$

$$dv = \kappa(\theta - v) dt + \sigma \sqrt{v} dz_2,$$

donde:

- μ : retorno esperado del activo subyacente
- \sqrt{v} : volatilidad del retorno del activo subyacente. Es una función del tiempo
- dz_i : proceso de Wiener para $i = 1, 2$. Los procesos tienen correlación ρ . Esto indica que dependiendo de la dirección del activo subyacente la volatilidad tenderá a aumentar o disminuir según la correlación que tenga con el proceso del activo subyacente.
- θ : media de largo plazo de la varianza
- κ : constante de reversión a la media para la varianza
- σ : volatilidad de la volatilidad del retorno del activo subyacente

Heston (1993, p. 329) propone una solución a la ecuación diferencial parcial estocástica y luego, a partir de funciones características, logra definir las probabilidades neutras al riesgo que se utilizarían para tener así una fórmula cerrada. En su trabajo hace algunos ejercicios numéricos para observar los efectos que sobre el precio de las opciones pueden tener los cambios en la volatilidad o diferentes niveles de correlación entre el proceso del activo subyacente y el de la volatilidad. Observa que cuando σ es mayor que cero, se aumenta la curtosis de los retornos del activo subyacente, lo que hace que la distribución tenga “colas pesadas”. Por otra

parte, la correlación afecta el sesgo de la distribución. Por ejemplo, si se tiene una correlación positiva, intuitivamente se espera que la volatilidad aumente para niveles altos del activo subyacente y, por lo tanto, que la distribución esté sesgada a la derecha.

Numerosos trabajos se han desarrollado para evidenciar la característica cambiante de la volatilidad. Para el caso de las opciones sobre divisas, un análisis exhaustivo de diferentes tasas de cambio se puede encontrar en Melino y Turnbull (1991).

III. OBTENCIÓN DE LA SUPERFICIE DE VOLATILIDADES

Los precios de las opciones europeas pueden calcularse esencialmente a partir de tres metodologías: a) fórmulas cerradas cuando es posible su obtención, dadas las características del proceso estocástico, b) simulación de Montecarlo, dado que no se tengan fórmulas cerradas y c) árboles binomiales.

Algunos procesos estocásticos permiten la deducción de fórmulas cerradas para la obtención de precios. Tal es el caso del MBG, en el cual, a partir de la aplicación de técnicas como el rebalanceo dinámico, se pueden obtener fórmulas cerradas como las ecuaciones (2) o (3). En estos casos basta el conocimiento de los parámetros de la ecuación para simplemente introducirlos en la fórmula y obtener un precio para la opción. Para algunos procesos de salto sencillos, tal como el expuesto en este trabajo, es posible obtener igualmente fórmulas cerradas. La ecuación (5) puede considerarse una fórmula cerrada. Allí, además de reemplazar los parámetros, debe realizarse un procedimiento iterativo para obtener el precio de una opción. Aunque la fórmula indica una sumatoria hasta el infinito, esta puede ser truncada para obtener precios suficientemente aproximados (Jorion, 1984, p. 443). En muchos otros casos la obtención de una fórmula cerrada es imposible. Tal es el caso de algunos modelos GARCH. En estas situaciones la obtención de precios para las opciones puede darse a partir de la simulación de Montecarlo. La técnica utilizada consiste en calcular el valor del activo subyacente al vencimiento¹³ y obtener el pago de la opción según su *strike*. Luego este pago se

13 Esto para el caso de opciones *plain vanilla* europeas. En el caso de otro tipo de opciones, el pago se debe definir según las condiciones de la opción.

trae a valor presente con la tasa libre de riesgo y se calcula el pago promedio para obtener el valor de la opción. El procedimiento de cálculo de precios en el que se aplica la simulación de Montecarlo puede ser encontrado con gran detalle en Glasserman (2004, pp. 19-30).

Como se discutió en el capítulo anterior, el MBG supone una distribución normal en los retornos logarítmicos del activo subyacente. En la literatura es común observar que esta hipótesis se rechaza para el caso de las tasas de cambio (Johnston y Scott, 1999). En general, las distribuciones de probabilidad de los retornos tienen sesgo y curtosis diferentes a los de una distribución normal. Estos fenómenos pueden ser bien explicados por la presencia de saltos o discontinuidades, o por la naturaleza cambiante de la volatilidad. Retornos alejados de la media en gran magnitud generan la curtosis en la distribución, mientras que la correlación entre el activo subyacente y la volatilidad generan el sesgo. Sin embargo, aún hoy en día no existe un modelo que se considere superior a otro. Los modelos de salto han evolucionado bastante y no solamente consideran saltos en el activo subyacente sino que permiten igualmente saltos en la volatilidad. Los modelos de salto sencillos como el descrito en este documento no permiten una descripción muy apropiada de los efectos *smile* y *smirk*, lo cual se debe a varias razones, entre ellas, que generalmente un salto en el activo subyacente trae consigo un salto en la volatilidad que luego se diluye a lo largo del tiempo, o que los saltos pueden darse en una u otra dirección dependiendo del impacto de noticias positivas o negativas. Estas características pueden ser modeladas con otro tipo de ecuaciones que están fuera del alcance de este trabajo. Por otra parte, para el caso del modelo de Heston, la estimación de parámetros se realiza normalmente a partir de las cotizaciones de opciones y no a partir de datos históricos.

Los modelos GARCH tienen una ventaja sobre los otros modelos, sobre todo en mercados de opciones ilíquidos, en donde no es posible observar los precios de éstas. La ventaja radica en la posibilidad de estimar los parámetros del modelo y los precios de las opciones únicamente a partir de la información histórica del activo subyacente. Los modelos GARCH más utilizados en la literatura son el modelo NGARCH y el modelo de Heston y Nandi (Chang y Pant, 2001). Hisieh y Ritchken (2006) compararon estos dos tipos de modelos y encontraron que el modelo NGARCH

explicaba mejor los precios de las opciones para los diferentes vencimientos y grados de *moneyness*. Debido a estas consideraciones, en este trabajo se decidió utilizar el modelo NGARCH para obtener la superficie de volatilidades para las opciones sobre la tasa de cambio USD/COP. El modelo NGARCH permite capturar los fenómenos observados en el mercado tales como el *smile* y el *smirk* (Duan, 1995) y, aunque no tiene una fórmula cerrada, es un modelo que se puede implementar mediante la simulación de Montecarlo.

Los pasos para la obtención de la superficie de volatilidades se resumen a continuación:

1. Estimar a partir de los datos históricos los parámetros para el modelo NGARCH de volatilidad.
2. Realizar la simulación de Montecarlo para determinar el nivel del activo subyacente al vencimiento. Este procedimiento se explicará en detalle en el capítulo III, apartado B.
3. Obtener los precios de opciones con diferentes plazos al vencimiento y diferentes *strikes*.
4. Una vez se obtengan los precios de las opciones dada la simulación de Montecarlo, el último paso consiste en obtener las volatilidades implícitas de estos precios según la fórmula Garman-Kohlhagen. De este modo se puede analizar para un plazo determinado y diferentes *strikes* la forma de esta relación y se puede tener una indicación de cómo son los efectos *smile* y *smirk*.

Estos pasos se explicarán con más detalle a continuación.

A. Estimación de los parámetros del modelo NGARCH

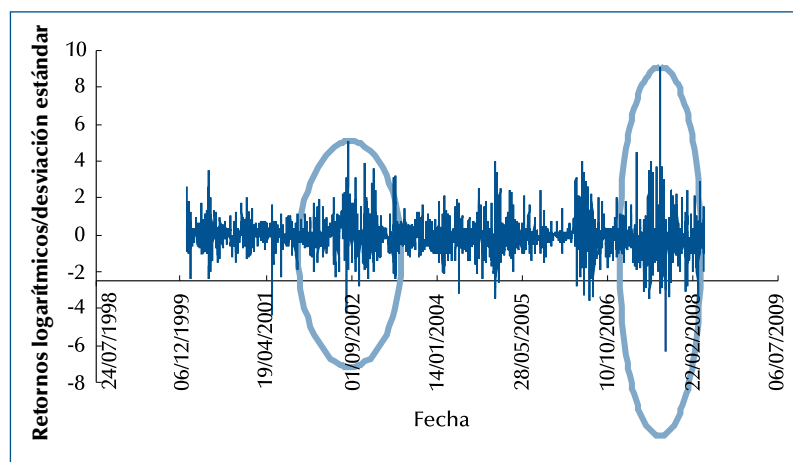
Se utilizó la serie diaria de precios de cierre de la tasa de cambio USD/COP en el período comprendido entre el 3 de enero de 2000 y el 30 de abril de 2008. En este período la tasa de cambio USD/COP se encontraba en un esquema de flotación libre y desde el año 2000 el mercado de tasa de cambio incrementaba paulatinamente su liquidez. En la muestra se tienen diferentes tendencias en la tasa de cambio. Se tiene un proceso de devaluación fuerte de la moneda hacia finales del año 2001 y también un proceso prolongado de revaluación desde finales de 2005¹⁴.

14 La primera versión de este trabajo se realizó en mayo de 2008, antes de que ocurriera la crisis financiera en Estados Unidos. Tal vez sea importante realizar

La serie de retornos logarítmicos de la tasa de cambio USD/COP en el período analizado se muestra en el gráfico 1. Allí se puede observar que los retornos oscilan alrededor del 0%, pero existen épocas de una mayor variabilidad. Esto verifica que la varianza no es constante a lo largo del tiempo. Se puede observar además el fenómeno en el que días altamente volátiles tienden a estar precedidos de otros altamente volátiles. En particular volátiles son los períodos de agosto de 2002 y agosto de 2007, los cuales están marcados en rojo en el gráfico 1. Allí se pueden observar movimientos de cinco y nueve desviaciones estándar, respectivamente.

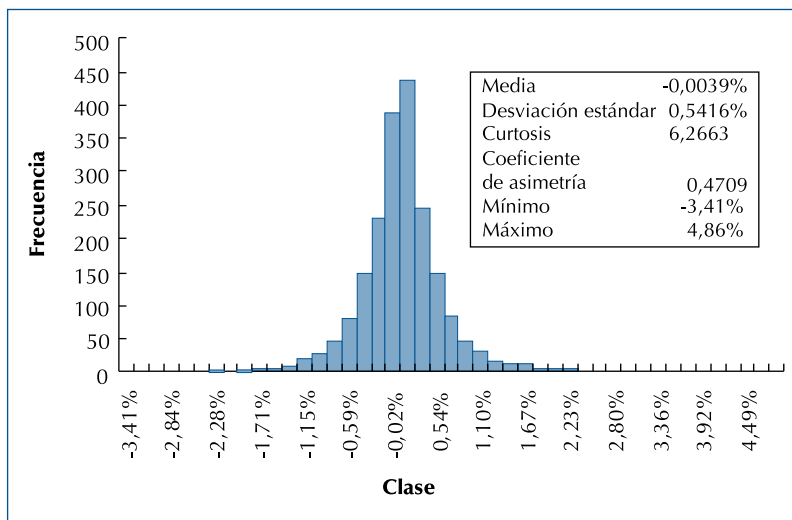
En el gráfico 2 se observa el histograma de los retornos logarítmicos de la tasa de cambio USD/COP. Allí se puede ver que la distribución no corresponde a una normal, debido al exceso de curtosis que presenta y a la presencia de asimetría positiva. Esto haría suponer la existencia de un *risk reversal* y *butterfly* positivos.

Gráfico 1. Retornos logarítmicos de la tasa de cambio USD/COP



Fuente: Bloomberg, precios de cierre del indicador COFX y cálculos propios, 2008.

futuros trabajos en donde se incluyan las observaciones de los últimos meses de 2008 y los primeros meses de 2009, pues hay comportamientos extraordinarios en los retornos de los activos financieros que pueden enriquecer el análisis.

Gráfico 2. Histograma de retornos de la tasa de cambio USD/COP

Fuente: Bloomberg, precios de cierre del indicador COFX y cálculos propios, 2008.

Se tomó un total de 2.021 observaciones y se utilizó el modelo NGARCH(1,1) descrito en la ecuación (7), pero ajustado para el caso de una divisa. Este modelo se puede observar en la ecuación (10).

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r_{local} - r_{exterior} + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad (10)$$

donde:

S_t : precio *spot* de la tasa de cambio USD/COP

r_{local} : tasa de interés en COP del mercado monetario

$r_{exterior}$: tasa de interés en USD del mercado monetario

λ : prima de riesgo

ε_t : proceso NGARCH(1,1) con media cero y varianza condicional σ_t^2

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2(\varepsilon_{t-1} - \theta\sigma_{t-1})^2.$$

El logaritmo natural de la función de máxima verosimilitud viene definido por la ecuación (11).

$$L = \frac{-T}{2} \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^T \ln \left[\frac{1}{\sigma_t} \exp \left(\frac{-(x_t - r_{local} + r_{exterior})^2}{2\sigma_t^2} \right) \right]. \quad (11)$$

De esta forma, los parámetros $(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \theta)$ que hagan que la función de la ecuación (11) obtenga un máximo global son los parámetros de máxima verosimilitud buscados. Hay que restringir los parámetros β_0 , β_1 y β_2 a valores positivos, de forma tal que se asegure la no negatividad y estacionariedad de la varianza. Se utilizó el programa GAUSS para obtener los parámetros de máxima verosimilitud, según la metodología utilizada por Duan¹⁵. Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 2.

Cuadro 2. Parámetros de máxima verosimilitud

Parámetro	Valor	Error estándar
λ	-0,0438660643	0,0554393457
β_0	0,0000008137	0,0000000833
β_1	0,7877043927	0,0139706276
β_2	0,2052930727	0,0166505525
θ	-0,0296533838	0,0349371285
Log Max Verosimilitud = 9877,6084838174.		

Fuente: cálculos propios.

Se puede observar que todos los parámetros son significativos a un nivel del 5% de confianza, a excepción de la prima de riesgo que tiene un error estándar levemente superior al 5%. Además, se cumplen las condiciones para asegurar la no negatividad y la estacionariedad de la varianza.

La varianza incondicional o de largo plazo se puede escribir como la ecuación (12).

$$\sigma^2 = E[\sigma_{t+1}^2] = \frac{\beta_0}{1 - \beta_2(1 + \theta^2) - \beta_1} \quad (12)$$

Según los parámetros obtenidos, el valor de la varianza incondicional es 0,0119% y expresado como una desviación estándar anualizada, utilizando 240 días hábiles, se obtiene un valor de 16,92%. Ésta será la volatilidad utilizada en la simulación de Montecarlo como valor inicial. Se puede observar adicionalmente que la prima de riesgo tiene un valor negativo, lo que indica una apre-

15 Se agradece al profesor Duan la posibilidad de utilizar el código disponible en su página web.

ciación de la moneda local¹⁶. Esto se debe analizar comparando el diferencial de tasas de interés promedio del período analizado y la prima de riesgo. El diferencial de tasas de interés promedio entre el 3 de enero de 2000 y el 30 de abril de 2008 fue de 4,8%. Dada una prima de riesgo de -4,38% y un diferencial promedio de 4,8%, se explica un efecto casi neto en la tasa de cambio durante el período total analizado. El parámetro θ es negativo, lo cual indica que un aumento en la volatilidad viene acompañado generalmente de una depreciación de la moneda local. Por último, es interesante mencionar la cantidad $\beta_2(1+\theta^2)+\beta_1$, la cual es conocida como la persistencia del modelo (Posedel, 2006). Si esta cantidad tiende a uno, se dice que la serie de tiempo tiene una memoria larga, esto es, que los choques tienden a persistir en el tiempo. Para la estimación actual esta cantidad tiene un valor de 0,9931, lo cual indica una alta persistencia en la serie de tiempo.

B. Procedimiento de simulación de Montecarlo

Como se describió anteriormente, el modelo NGARCH no tiene una fórmula cerrada para obtener el precio de las opciones. Por ello, se utiliza la técnica de simulación de Montecarlo. Los retornos del activo subyacente se pueden simular siguiendo la ecuación (13), la cual es similar a la ecuación (7) y se encuentra en un mundo neutral al riesgo.

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r_{local} - r_{exterior} - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad (13)$$

donde:

ε_t : proceso con media cero y varianza condicional σ_t^2

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2[\varepsilon_{t-1} - (\lambda + \theta)\sigma_{t-1}]^2.$$

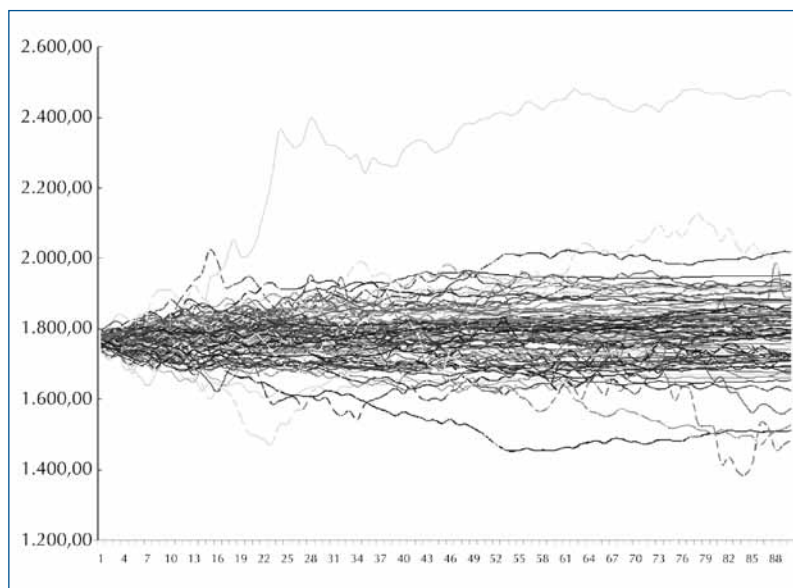
Aplicando la función exponencial a ambos lados de la ecuación (13), es posible obtener una ecuación para describir la evolución del activo subyacente a lo largo del tiempo. En la simulación se utilizaron las tasas de interés de la política monetaria vigentes en Colombia y Estados Unidos al 30 de abril de 2008, las cuales eran

16 Esto se debe a que la media del proceso del USD/COP es negativa.

de 9,75% y 2,25%, respectivamente¹⁷. La simulación de Montecarlo empleada consiste básicamente en la generación de variables aleatorias normales para su utilización en la ecuación (13). Se utilizó la técnica de variaciones antitéticas, la cual es una técnica de reducción de varianza. Esta consiste en generar una variable aleatoria normal Z_1 y luego se cambia su signo. De esta forma, si se tienen n variables aleatorias Z_n que corresponden al número de simulaciones deseadas, se tendrá equivalentemente otra serie de $-Z_n$. Luego el valor de la variable que se simulará al final se obtiene por el promedio entre los valores obtenidos a partir de las series Z_n y $-Z_n$. Este procedimiento se puede consultar en Hull (2003, p. 414).

Como valores iniciales de la simulación se utilizaron una tasa de cambio inicial de 1.770¹⁸ y una varianza igual a la varianza incondicional de la serie. Una simulación de noventa días al vencimiento y de cien simulaciones se puede observar en el gráfico 3.

Gráfico 3. Simulación de Montecarlo con $N = 100$ y $T = 90$



Fuente: cálculos propios.

- 17 El 30 de abril de 2008 se produjo una reducción de la tasa de interés por parte de la Reserva Federal de los Estados Unidos. Esta tasa aplicaría para observaciones posteriores al 30 de abril. No se tomó un promedio histórico porque el objetivo del ejercicio es pronosticar una superficie de volatilidades con los datos vigentes en el mercado en una fecha determinada.
- 18 La TRM que se formó ese día fue de 1.767,27. Se tomó el valor de 1.770 como una aproximación.

Se realizaron diez mil corridas con la técnica de variaciones antitéticas para obtener los precios de las opciones europeas sobre la tasa de cambio USD/COP. De esta forma se obtuvieron para cada plazo veinte mil valores finales de la tasa de cambio USD/COP. La obtención del precio se describe en la siguiente sección.

C. Obtención de precios y volatilidades por plazos

Los precios de las opciones europeas a partir de la simulación de Montecarlo se obtienen únicamente comparando el valor del activo subyacente al vencimiento de la opción con el *strike*. De esta forma el valor de una CALL al vencimiento será el máximo entre cero y la diferencia entre el *spot* y el *strike*, y para una PUT será el máximo entre cero y la diferencia entre el *strike* y el *spot*. Esto se ilustra en la ecuación (14).

$$\begin{aligned} \text{CALL} &= \text{MAX}(0, \text{spot} - \text{strike}) \\ \text{PUT} &= \text{MAX}(0, \text{strike} - \text{spot}). \end{aligned} \quad (14)$$

En las simulaciones llevadas a cabo se tienen veinte mil valores finales de la tasa de cambio, los cuales se comparan contra el *strike* para obtener el pago de las opciones CALL o PUT. Luego estos valores se promedian y se traen a valor presente neto con la tasa de interés en pesos, para obtener las primas (precio de la opción) en esta moneda. Dependiendo del plazo de la opción que se desee simular y de los *strikes*, se obtendrán diferentes valores de primas. Por ejemplo, si se desea obtener el valor de una CALL a un mes con *strike* de 1.800, se realiza el siguiente procedimiento: se simulan veinte mil valores que la tasa de cambio USD/COP pueda tener dentro de un mes, suponiendo que ésta sigue un proceso estocástico determinado, en este caso el NGARCH. Luego se calculan los pagos de esta opción dado su *strike* y los diferentes niveles de la tasa de cambio en un mes. Así, si la tasa cambio al final del mes es de 1.900 pesos por dólar, quiere decir que el pago de esta opción es de 100 pesos. Como se tienen veinte mil valores de la tasa de cambio a un mes, se tendrán igualmente veinte mil pagos diferentes. Estos pagos se promedian y luego se traen a valor presente neto. El resultado será el valor de la opción según la técnica de simulación de Montecarlo.

Las simulaciones se llevan a cabo para plazos de un mes, tres meses, seis meses y un año. Se hacen simulaciones para opciones CALL sobre la tasa de cambio USD/COP con *strikes* que generen

deltas entre 10% y 90%¹⁹. Luego, a partir de los precios obtenidos según la simulación de Montecarlo, se buscan las volatilidades implícitas inherentes a cada *strike*. Esto se realiza y se obtiene la volatilidad, que ingresada en el modelo de Garman-Kohlhagen²⁰ genera un precio igual al obtenido por la simulación de Montecarlo.

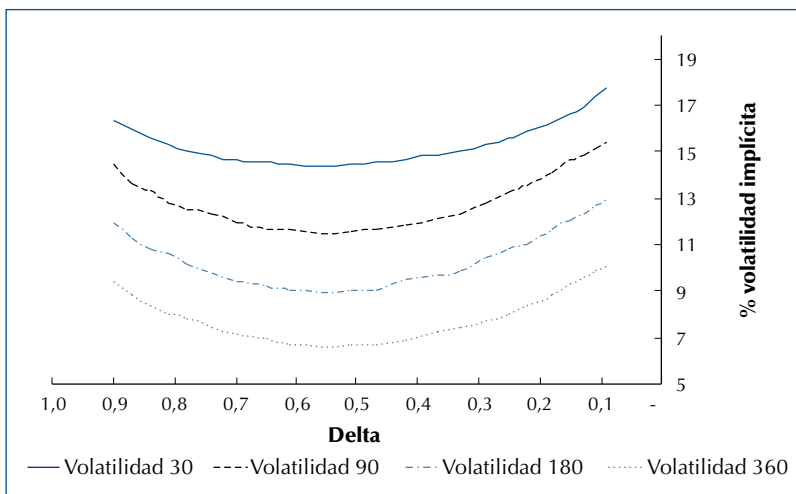
Obtenidas, entonces, las volatilidades implícitas para cada plazo analizado, se pueden obtener los RR y BF teóricos. Esto básicamente haciendo la diferencia entre las volatilidades de las opciones de 25% y 75% de delta y de 10% y 90% de delta en el caso de los RR, y del promedio de las volatilidades de las opciones de 25% y 75%, y 10% y 90% contra la volatilidad ATM, es decir, la de 50% de delta, en el caso de los BF. En el gráfico 4 se pueden observar las volatilidades implícitas para los plazos de un mes, tres meses, seis meses y un año, respectivamente. Además se pueden observar los valores teóricos para los RR y los BF. Se puede apreciar que según el modelo NGARCH, se tendrían RR y BF positivos, como lo sugería la distribución de retornos de la tasa de cambio USD/COP. El 25 delta y 10 delta RR tienden a tener niveles similares, a excepción de las opciones de un mes. Esto sugiere que aunque las CALL USD tienen volatilidades mayores que las PUT USD, la diferencia no se acentúa a medida que las opciones están más OTM. Los niveles de RR son menores en el plazo de un año que en los otros plazos, lo cual sugiere que en el largo plazo las volatilidades de las CALL y PUT tienden a diferir en menor cantidad. Esto es consistente con lo observado en la literatura, en donde los saltos tienden a ser promediados en el largo plazo haciendo que las CALL y PUT con deltas similares tengan un valor semejante en volatilidad. Se observa igualmente la existencia de BF positivo. En este caso sí existen diferencias importantes entre las opciones de 25 y 10 delta. En general, el BF es mucho más alto para las opcio-

19 El estándar del mercado es no cotizar opciones que tengan deltas menores al 10% cuando están OTM. Debido a la paridad PUT-CALL, una CALL ITM con un delta de 90% tiene la misma volatilidad que una PUT con 10% de delta.

20 Se utilizó la ecuación (3). Es importante recordar que el modelo de Garman-Kohlhagen es una variación del modelo de BSM para el caso de una divisa. Para obtener el precio de las CALL y las PUT europeas, básicamente se incluyen las tasas de interés de cada uno de los países, junto con otros parámetros.

nes muy OTM. Esto intuitivamente se da debido a la existencia de eventos extremos²¹.

Gráfico 4. Volatilidades implícitas



	25RR	10RR	25BF	10BF
1 mes	0,75%	1,38%	0,74%	2,55%
3 meses	0,93%	0,99%	1,21%	3,37%
6 meses	0,82%	0,99%	1,20%	3,45%
1 año	0,47%	0,58%	1,17%	3,11%

Fuente: cálculos propios.

Por último, en el cuadro 3 se puede observar la superficie de volatilidades para opciones sobre la tasa de cambio USD/COP. Se observa cómo las opciones ATM decrecen en volatilidad a medida que aumenta el plazo al vencimiento. En el gráfico 2 se puede apreciar que la serie tiene una desviación estándar de 0,5416%, la cual en términos anuales equivale a una volatilidad cercana al 8,4%. Acá se puede observar el fenómeno de la reversión a la media de la volatilidad. Si se considera el valor de 8,4% como la volatilidad de largo plazo, uno esperaría que las opciones de largo plazo se coticen con volatilidades implícitas cercanas a este valor. La volatilidad semilla del 16,92% que se utilizó corresponde

21 En la muestra se tienen retornos diarios de -3,41% y 4,86% como el máximo y el mínimo, respectivamente.

a la volatilidad inicial estimada en el modelo, la cual es particularmente alta en relación con la volatilidad de largo plazo debido a la existencia de retornos grandes en magnitud en las últimas observaciones de la serie. Esto se puede observar en el gráfico 1. De esta forma, el modelo está sugiriendo una volatilidad ATM del 14,5% para las opciones a un mes, la cual es alta respecto a su media de largo plazo, pero para opciones ATM a un año reconoce el efecto de reversión a la media. Esto estaría indicando una estructura temporal negativa en las volatilidades, lo cual es frecuente cuando ocurren choques en la volatilidad de corto plazo²².

Como se puede observar, el cuadro 3 contiene la superficie de volatilidades teórica para las opciones sobre la tasa de cambio USD/COP. Esta es una superficie particular con los parámetros obtenidos según el período analizado y los valores iniciales de la simulación de Montecarlo. Se puede observar que se tienen únicamente veinte datos, los cuales pueden ser considerados como los pilares de la superficie. Para obtener la volatilidad implícita de opciones con otros plazos y deltas, se pueden utilizar diversas técnicas de interpolación.

Cuadro 3. Superficie de volatilidades para opciones sobre la tasa de cambio USD/COP

	90D	75D	ATM	25D	10D
1 mes	16,36%	14,87%	14,50%	15,62%	17,74%
3 meses	14,50%	12,37%	11,63%	13,30%	15,49%
6 meses	11,97%	9,81%	9,02%	10,63%	12,96%
1 año	9,47%	7,58%	6,64%	8,05%	10,05%

Fuente: cálculos propios.

IV. CONCLUSIONES

En la literatura existen varios modelos alternativos al de BSM para determinar el precio de opciones sobre diferentes subyacentes. Uno de los problemas del BSM es que supone que el activo subyacente sigue un MBG, lo cual en muchos casos es incon-

22 Por el contrario, si el mercado se encontrara en un período de calma en el momento de la estimación de la volatilidad semilla, seguramente este valor sería bajo. Si este valor estuviera por debajo de la media de largo plazo, seguramente la estructura temporal de las volatilidades tendría una pendiente positiva.

veniente suponer en la realidad. Otros modelos que consideran procesos estocásticos diferentes al MBG han demostrado explicar con mayor precisión fenómenos observados en los mercados de opciones, como por ejemplo los efectos *smile* y *smirk*. Los modelos GARCH tienen ventajas sobre los modelos sencillos de salto, debido a que permiten modelar los efectos *smile* y *smirk* de una manera más apropiada. También tienen ventajas sobre los modelos de volatilidad estocástica, sobre todo cuando no existe un mercado de opciones del cual se pueda extraer información y la única fuente para estimar los parámetros es la historia del activo subyacente. Esto debido a que para su estimación se necesita únicamente información histórica del activo subyacente.

Para el caso de las opciones sobre la tasa de cambio USD/COP se muestra la existencia de efectos *smile* y *smirk* positivos. Este resultado es esperado dada la existencia de sesgo y curtosis mayor a tres. Se observa, entonces, la existencia de RR y BF positivos, lo cual le puede dar una indicación a un creador de mercado cuando necesite realizar cotizaciones de opciones OTM. En general, no se observa que el RR aumente para opciones que estén cada vez más OTM, ya que los RR de 25 y 10 delta son similares a excepción del plazo de un mes. Para el caso de los BF se observa un efecto diferente, ya que las opciones de 10 delta sí cotizan con un BF mucho mayor que las de 25 delta. Esto debido seguramente a la alta curtosis de la distribución, la cual se comprobó con las pruebas estadísticas estándar y empíricamente con la existencia de movimientos que exceden nueve desviaciones estándar. Se encuentran algunos eventos de movimientos fuertes en la tasa de cambio como un día de revaluación de 3,41% y uno de devaluación de 4,86%. Por último, se encuentra una estructura temporal de las volatilidades decreciente. Esto como explicación al fenómeno de convergencia a la volatilidad de largo plazo.

La información obtenida de un modelo teórico puede ser útil para que un creador de mercado genere precios en diferentes plazos y *strikes*. Lógicamente, ésta es una información incipiente y debe ser complementada con otro tipo de análisis. Por ejemplo, la probabilidad de una devaluación fuerte de la moneda local puede hacer que las volatilidades de largo plazo sean más altas que las sugeridas por este modelo. También la posibilidad de cambios en las tasas de interés por ciclos de política monetaria puede afectar la volatilidad, especialmente la de las opciones de largo plazo, lo

que hace que ésta sea más alta. Igualmente puede afectar el valor esperado de la tasa de cambio, con los correspondientes efectos sobre la volatilidad.

El desarrollo de estos ejercicios en los que se utiliza otro tipo de modelos ayudará a conocer más a fondo las características de la tasa de cambio USD/COP. De esta forma este trabajo puede ser utilizado como punto de partida para investigaciones futuras. En la medida en que el mercado de opciones sobre la tasa de cambio USD/COP se desarrolle y empiecen a cotizarse activamente los RR y BF, podrá recopilarse información para luego utilizar modelos de volatilidad estocástica en la estimación y calibración de parámetros. Esto permitirá el análisis cada vez más exhaustivo de la superficie de volatilidades para las opciones sobre la tasa de cambio USD/COP.

REFERENCIAS

- Barone-Adesi, G., Engle, R., & Mancini, L. (2005). *GARCH options in incomplete markets*. Consultado en <http://cei.ier.hit-u.ac.jp/working/2005/2005WorkingPapers/wp2005-12.pdf>. Recuperado el 10 de octubre de 2007.
- Chang, W., & Pant, V. (2001). *The valuation of options in illiquid markets: A comparison of methods*. Consultado en <http://ssrn.com/abstract=356160>. Recuperado el 10 de octubre de 2007.
- Christoffersen, P. (2003). *Elements of financial risk management*. Academic Press. Inglaterra: Londres
- Derman, E. (1999). Regimes of volatility: Some observations on the variation of S&P500 implied volatilities. *RISK*, 12(4), 55-59
- Derman, E. (2003). *Laughing in the dark-The problem of the volatility smile*. Consultado en www.ederman.com/new/docs/euronext-volatility_smile.pdf. Recuperado el 15 de octubre de 2007.
- De Rosa, D. (2000). *Options on foreign exchange*. Nueva York: Ed Wiley.
- Duan, J. (1995). The GARCH option pricing model. *Mathematical Finance*, 5(1), 13-32.
- Duan, J. (1996). A unified theory of option pricing under stochastic volatility-From GARCH to diffusion. Consultado en <http://citeseer.ist.psu.edu/duan96unified.html>. Recuperado el 15 de octubre de 2007.

- Glasserman, P. (2004). *Montecarlo methods in financial engineering*. Nueva York: Springer.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.
- Hisieh, K., & Ritchken, P. (2006). An empirical comparison of GARCH option pricing models. *Review of Derivatives Research*, 8(3).
- Hull, J. (2003). *Options, futures and other derivatives*. Nueva Jersey: Prentice Hall.
- Hull, J., & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2), 281-300.
- Jhonston, K., & Scott, E. (1999). The statistical distribution of daily exchange rate price changes: Dependent vs independent models. *The Journal of Finance and Strategic Decisions*, 12(2), 39-50.
- Jorion, P. (1984). On jump processes in the foreign exchange and stock markets. *The Review of Financial Studies*, 1(4), 427-445.
- Kalsen, J., & Taqqu, M. (1995). *Option pricing in ARCH-type models: With detailed proofs*. Consultado en <http://citeseer.ist.psu.edu/62162.html>. Recuperado el 15 de octubre de 2007.
- Melino, A., & Turnbull, S. (1991). The pricing of foreign currency options. *The Canadian Journal of Economics*, 24(2), 251-281.
- Merton, R. (1975). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.
- Natenberg, S. (1994). *Option volatility and pricing*. Nueva York: McGraw-Hill.
- Neftci, S. (1996). *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. Londres: Academic Press.
- Posedel, P. (2006). Analysis of the exchange rate and pricing foreign currency options on the Croatian market: The NGARCH model as an alternative to the Black-Scholes model. *Financial Theory and Practice*, 30, 347-368.
- Shepard, N. (2007). Stochastic volatility. *New Palgrave dictionary of economics*. Hampshire: Ed. Palgrave Macmillan.
- Taleb, N. (1997). *Dynamic hedging*. Nueva York: Wiley.
- Wystop, U. (2006). *FX options and structured product*. West Sussex: Wiley.

