

## Article

---

« Méthode multicritère de sélection de portefeuilles indiciels internationaux »

Nabil Khoury, Jean-Marc Martel et Marc Veilleux

*L'Actualité économique*, vol. 69, n° 1, 1993, p. 171-190.

Pour citer cet article, utiliser l'information suivante :

URI: <http://id.erudit.org/iderudit/602101ar>

DOI: 10.7202/602101ar

Note : les règles d'écriture des références bibliographiques peuvent varier selon les différents domaines du savoir.

---

Ce document est protégé par la loi sur le droit d'auteur. L'utilisation des services d'Érudit (y compris la reproduction) est assujettie à sa politique d'utilisation que vous pouvez consulter à l'URI <http://www.erudit.org/apropos/utilisation.html>

---

Érudit est un consortium interuniversitaire sans but lucratif composé de l'Université de Montréal, l'Université Laval et l'Université du Québec à Montréal. Il a pour mission la promotion et la valorisation de la recherche. Érudit offre des services d'édition numérique de documents scientifiques depuis 1998.

Pour communiquer avec les responsables d'Érudit : [erudit@umontreal.ca](mailto:erudit@umontreal.ca)

## MÉTHODE MULTICRITÈRE DE SÉLECTION DE PORTEFEUILLES INDICIELS INTERNATIONAUX\*

Nabil KHOURY

Jean-Marc MARTEL

Marc VEILLEUX

*Faculté des sciences de l'administration*

*Université Laval*

**RÉSUMÉ** – Dans cet article nous présentons une méthode multicritère permettant de sélectionner des portefeuilles indicieux internationaux formés à partir des indices boursiers de seize (16) pays. La première version de cette méthode (ELECTRE IS) permet d'identifier les portefeuilles candidats pour le choix final (noyau) et de les comparer à ceux de la frontière efficiente traditionnelle. La deuxième version (ELECTRE III) classe tous les portefeuilles envisagés du meilleur au moins désirable, à partir des préférences de l'investisseur révélées à travers les divers paramètres de la méthode.

**ABSTRACT** – *A Multicriterion Approach to the Selection of Global Index Fund Portfolio.* In this paper, we present a multicriterion approach of portfolio comparison and apply it to the selection of a global index fund portfolio using sixteen (16) national stock market indexes. The first algorithm used in the study (ELECTRE IS) solves for the subset of portfolios among which the investor must limit his choice (the Kernel). These portfolios can then be contrasted with those of the traditional efficient set. The second algorithm (ELECTRE III) ranks all the portfolios considered from best to worst, on the basis of investor's preferences revealed through the various parameters used in the calculations.

---

### INTRODUCTION

Il est de plus en plus évident que la gestion de portefeuilles internationaux est beaucoup plus complexe que la gestion d'un portefeuille composé uniquement de titres nationaux. Non seulement devons-nous considérer le risque inhérent aux devises dans un portefeuille international, mais aussi les différences spécifiques entre pays afin de bien cerner les nombreux aspects du risque lié à l'investissement. De plus, le manque d'intégration des différents marchés des capitaux nationaux influence aussi la nature du risque d'un portefeuille international en présentant des configurations rendement-risque différentes selon les pays. Toutes ces considérations sont de nature à faire en sorte que le modèle d'optimisation de

---

\* Cette recherche a bénéficié de soutien financier du FCAR et du CRSH.

portefeuille couramment utilisé dans le contexte national ait encore plus de chance d'être sous-optimal en situation de diversification internationale.

En pratique, la composition des portefeuilles indiciaires internationaux est typiquement effectuée en deux étapes successives. À la première étape, les séries chronologiques des indices boursiers des divers pays à partir desquels on voudrait composer le portefeuille international sont analysées et comparées historiquement sur la base d'un ensemble de caractéristiques communes en vue d'établir pour chaque indice, une estimation du risque et une autre du rendement anticipé. À la seconde étape, une méthode d'optimisation de type moyenne-variance (notée M-V) est appliquée pour identifier l'ensemble efficient en utilisant les données de risque et de rendement obtenues lors de la première étape. Le portefeuille optimal est alors choisi à partir de l'ensemble efficient en fonction de la tolérance au risque de l'investisseur.

La structure d'optimisation M-V présente cependant une sérieuse limite à savoir que les différents éléments caractérisant le risque et le rendement anticipés ne sont pas toujours quantifiables et ne peuvent être facilement agrégés uniquement en deux nombres. En effet, la combinaison des diverses caractéristiques de risque et de rendement en deux valeurs peut diluer leur contenu informationnel, en plus de causer de sérieux problèmes d'agrégation à cause de la nature hétérogène et conflictuelle de ces caractéristiques. Ces considérations sont habituellement négligées dans la méthode M-V traditionnelle même si elles peuvent influencer la relation rendement-risque et la décision d'investissement. D'ailleurs, lorsque la liste des caractéristiques quantifiables et non quantifiables de risque et de rendement s'allonge, le phénomène d'agrégation devient de plus en plus problématique et les mesures qui en résultent perdent leur pertinence comme indicateurs fiables du niveau du risque réel.

Plutôt que de combiner les différentes caractéristiques quantifiables de rendement et de risque en deux valeurs agrégées, il serait plus approprié de les incorporer individuellement dans une méthode de sélection. Une telle méthode permettrait une représentation plus appropriée des objets sur lesquels porte le choix et donnerait au gestionnaire de portefeuilles la possibilité additionnelle de donner des poids différents à ces caractéristiques.

Le présent article a pour objet de présenter une méthode multicritère de comparaison de portefeuilles et de l'appliquer au problème de composition d'un portefeuille indiciaire international utilisant seize (16) indices boursiers nationaux différents. À la section 1, nous exposons brièvement les problèmes inhérents à l'application d'une approche M-V au problème de composition d'un tel portefeuille et nous évaluons la pertinence d'utiliser une méthode multicritère. À la section 2, nous présentons certaines

caractéristiques des données reliées aux portefeuilles envisagés et enfin, aux sections 3 et 4, nous élaborons le modèle multicritère; les résultats de la stratégie de sélection utilisant ces deux versions du modèle multicritère sont analysés et sont comparés à ceux de l'approche M-V. Le résumé et les conclusions de l'étude sont présentés dans la dernière section.

## 1. PERTINENCE DE LA MÉTHODE MULTICRITÈRE

Dans le contexte international, le rendement espéré et la variance ne constituent pas toujours des mesures appropriées incorporant pleinement tous les critères que les investisseurs considèrent dans une décision d'investissement. En effet, plusieurs aspects importants pouvant affecter la performance anticipée de ces portefeuilles ne peuvent être pris en compte explicitement par la moyenne et la variance.

La liquidité des marchés boursiers étrangers est le premier de ces facteurs. Il y a, bien sûr, des différences significatives dans la liquidité entre les marchés qui se reflètent dans les coûts de transaction. Un autre facteur à considérer concerne la qualité des informations provenant des différents marchés. On sait très bien que le degré d'ouverture et l'efficacité informationnelle ne sont pas uniformes d'un marché boursier national à un autre. En ignorant ces considérations, les rendements anticipés à l'aide de la moyenne et de la variance ne peuvent fournir une description adéquate de la relation du risque réel et du rendement espéré devant laquelle est placé un gestionnaire de portefeuilles indiciels internationaux.

Au moment d'évaluer l'engagement financier dans un portefeuille indiciel international, les investisseurs devraient prendre en considération plusieurs critères en plus du rendement moyen et de la variance. Ces critères peuvent prendre la forme du coût total de transaction, du risque politique, du risque de change, etc., dont on sait qu'ils affectent les rendements ou le risque du portefeuille. Ces critères peuvent cependant difficilement être considérés explicitement dans la méthode d'optimisation traditionnelle de la moyenne-variance.

Pour réussir à articuler simultanément des critères multiples et potentiellement conflictuels dans le modèle traditionnel d'optimisation de la M-V, il faudrait les exprimer en termes de contraintes. Le nouveau modèle sous contraintes peut alors être résolu afin d'obtenir un portefeuille optimal [voir pour exemple Leibowitz et Henriksson, 1989]. En pratique, ces contraintes (coûts de transaction, liquidité, risque politique, risque de change, etc.) ajustées pour tenir compte de l'efficacité informationnelle pourraient être utilisées avec cette méthodologie. Si nécessaire, des poids maximum selon les pays peuvent aussi être incorporés dans le modèle sous forme de contraintes [voir à ce sujet Frost et Savarino, 1988; Kwan et Yip, 1987; Eun et Janakiraman, 1986]. Ainsi, la méthode d'optimisation sous

contraintes peut être particulièrement adaptée aux cas où il est difficile d'agréger les différents critères en termes de moyennes et de variances. Elle présente cependant le désavantage de limiter l'ensemble des opportunités disponibles à l'investisseur et ne pas lui donner la flexibilité de choisir l'importance relative des différents critères de décision au cours du processus de sélection d'un portefeuille. De plus, l'approche d'optimisation sous contraintes change la nature du problème puisqu'une contrainte, dans tout problème de décision, ne joue pas le même rôle qu'un critère que l'on cherche à satisfaire.

L'approche alternative présentée dans cet article en est une où les investisseurs considèrent séparément les critères qu'ils retiennent. Ce faisant, ils reconnaissent la nature hétérogène et incommensurable de ces derniers. Cette méthode alternative permet aussi aux investisseurs d'incorporer leurs préférences (subjectivité) dans le processus de sélection en fixant les valeurs des paramètres conduisant aux relations de surclassement ainsi que les poids relatifs des différents critères retenus. Nous vérifierons aussi que les portefeuilles obtenus par la méthode multicritère proposée dans cette étude sont consistants avec ceux de l'ensemble efficient M-V lorsque l'on utilise seulement les deux critères du rendement moyen et de la variance des rendements. De plus, la méthode multicritère peut jouer un autre rôle important dans le processus de décision quant au choix d'un portefeuille indiciel international en permettant une évaluation simultanée des critères multiples, potentiellement conflictuels, et en donnant à l'investisseur plus de flexibilité quant au nombre de critères à retenir et à leur importance relative.

## 2. CARACTÉRISTIQUES DES DONNÉES

Les données utilisées pour cette étude sont fournies par un important gestionnaire de portefeuille international, soit *State Street Bank and Trust Company*<sup>1</sup>. Ces données représentent les indices de seize marchés boursiers nationaux et couvrent la période de janvier 1985 à décembre 1989. Les pays échantillonnés sont listés au tableau A-1 en annexe. Les moyennes et les variances ont été calculées à partir des rendements mensuels pour les différents indices de marché exprimés en dollars US.

La méthode multicritère de comparaison de portefeuilles suggérée dans cette étude ne permet pas de déterminer directement l'allocation des actifs nécessaires à la composition des portefeuilles. Pour l'appliquer au problème de composition d'un portefeuille indiciel international, nous devons donc commencer par générer un ensemble de portefeuilles de

---

1. *State Street Bank* est une importante institution financière ayant son siège social à Boston, engagée dans la gestion de portefeuilles internationaux. Au 31 décembre 1991, la valeur des actifs dont elle avait la gestion s'élevait à 52 billions (\$).

comparaison (portefeuilles envisagés) qui servira de toile de fonds pour l'analyse. Cet ensemble de comparaison doit représenter la gamme des portefeuilles possibles parmi lesquels le gestionnaire peut effectuer un choix. En effet, les contraintes habituelles sur l'investissement étranger auxquelles sont confrontées la plupart des gestionnaires de portefeuilles institutionnels nous permettent de poser l'hypothèse que le domaine des portefeuilles potentiels est limité. Pour plus de simplicité et de réalisme, nous représentons ce domaine par un ensemble de dix-neuf portefeuilles, qui supposent l'absence de vente à découvert, énumérés au tableau A-1. Les douze premiers portefeuilles de cet ensemble représentent une répartition (égale ou non) entre les seize indices boursiers nationaux considérés ou entre des sous-ensembles de ces seize indices, reflétant ainsi les préférences des investisseurs quant à la localisation géographique des pays concernés. Les portefeuilles #13 et #14 répartissent les fonds alloués à chaque indice boursier national sur la base de facteurs tels la taille du marché boursier et le produit intérieur brut. Enfin, les cinq derniers portefeuilles (portefeuilles #15 à #19) sont ceux de l'ensemble efficient généré par un algorithme d'optimisation moyenne-variance (M-V) traditionnel<sup>2</sup>. Des informations détaillées sur la composition de ces dix-neuf portefeuilles apparaissent au tableau A-1 en annexe.

Considérant les limites imposées par la disponibilité des données, six critères ont été retenus pour illustrer les variables qui influencent les décisions des gestionnaires en quête d'un portefeuille indiciel international. Ces critères sont :

1. le rendement mensuel des cinq dernières années;
2. l'écart-type du rendement mensuel calculé sur les cinq dernières années;
3. le coût total des transactions;
4. la mesure du risque-pays (ou risque politique)<sup>3</sup>;
5. la couverture directe disponible pour les devises étrangères;
6. le risque de change (mesuré par l'écart-type des fluctuations de la devise).

Les deux premiers facteurs sont des critères de base pour la sélection de portefeuilles. Le troisième critère, qui englobe à la fois les frais de transaction ainsi que l'impact du marché, reflète le degré de liquidité du marché qui, comme mentionné précédemment, varie d'un pays à l'autre. La mesure du risque-pays reflète les risques économiques et politiques qui diffèrent d'un pays à l'autre [voir par exemple Arnott et Henriksson, 1989].

---

2. Le logiciel utilisé pour déterminer ces portefeuilles de la frontière « efficiente » est le *Modern Portfolio Strategies Optimizer* de MPS Inc.

3. Les *relative risk rating* sont ceux publiés par *Institutional Investor* (septembre 1989, p. 302).

Le cinquième critère (la couverture) est inclus pour refléter le degré de développement du marché des capitaux. Il exprime la proportion du portefeuille qui peut être directement couverte par des contrats à terme sur les devises étrangères. De plus, il peut être considéré comme une opportunité de couverture contre les variations de valeur des devises, facteur qui a une grande importance pour un investisseur qui présente une aversion au risque. Le sixième critère représente le risque de change des monnaies étrangères. À l'exception des critères portant sur l'écart-type du rendement et le risque de change, tous les autres critères sont des moyennes pondérées où les poids sont fonction de la part du portefeuille représentée par chaque indice boursier national.

Le tableau 1 présente les valeurs des six critères pour chacun des dix-neuf portefeuilles envisagés pour la comparaison multicritère.

TABLEAU 1  
MATRICE DES PERFORMANCES

# du portefeuille	Rendement mensuel 5 ans	Écart-type des rendements 5 ans	Coût total des transactions	Risque pays	Couverture directe devises étrangères	Risque de change
1	1.494	4.5809	0.635	82.725	0.500	2.7407
2	1.103	4.6161	0.238	86.520	1.000	1.1920
3	1.112	4.6305	0.244	86.310	1.000	1.2582
4	0.953	5.0907	0.130	90.300	1.000	0.0000
5	1.454	6.4597	0.517	76.600	0.667	3.0094
6	1.588	4.6990	0.748	83.400	0.364	3.4557
7	1.036	4.6602	0.190	88.200	1.000	0.6622
8	1.542	5.2623	0.350	94.900	1.000	3.8519
9	1.408	4.5089	0.148	92.120	0.800	3.0246
10	1.441	4.5478	0.469	88.229	0.857	2.4915
11	1.534	4.9816	0.764	78.444	0.222	3.0966
12	1.530	4.6229	0.669	82.220	0.467	2.9234
13	1.349	3.6662	0.342	91.245	0.947	2.3644
14	1.327	4.1341	0.403	89.046	0.859	2.0016
15	1.565	3.3246	0.535	83.850	0.473	3.0699
16	1.601	3.3340	0.562	83.400	0.423	3.2851
17	1.636	3.3584	0.585	83.064	0.384	3.5114
18	1.671	3.4243	0.642	81.086	0.271	3.6045
19	1.706	3.6494	0.710	77.700	0.126	3.5979

### 3. MODÈLE MULTICRITÈRE

Comme nous l'avons mentionné auparavant, la méthodologie multicritère est tout à fait appropriée pour apporter une solution au problème de sélection d'un portefeuille indiciel international étant donné que les caractéristiques (ou critères) retenus dans le choix des portefeuilles sont de nature hétérogène et conflictuelle. L'hétérogénéité des éléments de mesure complique l'agrégation des différents critères en un critère unique pour comparer les portefeuilles. La nature conflictuelle des critères complique les comparaisons entre portefeuilles lorsque l'on tient compte simultanément de l'ensemble de tous les critères. Ces difficultés mettent en évidence la nécessité d'une approche analytique qui préserve, d'une part, le contenu informationnel spécifique de chaque critère retenu dans l'analyse et qui, d'autre part, tolère l'absence de comparabilité due à la nature conflictuelle de ces critères.

Plusieurs méthodes multicritères peuvent être utilisées pour faire face à ce problème de sélection (Vincke, 1989; Bona e Costa, 1990). Nous avons opté pour la méthode ELECTRE parce qu'elle est basée sur des relations de surclassement<sup>4</sup>, lesquelles relations enrichissent les relations de dominance traditionnelles. On se rappelle que la relation de dominance est à la base de la méthode d'optimisation moyenne-variance et de la détermination de la frontière « efficiente » en gestion de portefeuille. Une relation de surclassement (relation binaire) est fondée sur une règle de la majorité plutôt que sur une règle de l'unanimité des critères comme c'est le cas pour la relation de dominance. Donc, on a plus de chances d'observer une relation de surclassement entre deux portefeuilles qu'une relation de dominance, particulièrement lorsque l'on est en présence de plusieurs critères de nature conflictuel ou contradictoire : ceci doit avoir comme conséquence que l'ensemble des portefeuilles « non surclassés » est plus petit que celui des portefeuilles non dominés (c'est-à-dire la frontière « efficiente » multicritère). En fait, dans un contexte multicritère, on devrait s'attendre *a priori* à ce qu'aucun portefeuille ne soit meilleur que tous les autres sur tous les critères.

Tel qu'expliqué dans Martel, Khoury et Bergeron (1988), la méthode ELECTRE I (Roy, 1968) s'adresse à un problème similaire à celui de l'approche M-V notamment la détermination d'un ensemble de portefeuilles « efficaces ». Il en va de même de la version ELECTRE IS (Roy et Skalka, 1985) où l'on exploite de manière plus nuancée que dans ELECTRE I, les

---

4. De manière générale, on peut dire qu'une relation de surclassement est une relation binaire  $S$  où l'on conclut que le portefeuille  $p$  surclasse le portefeuille  $p'$ , si en tenant compte de ce que l'on connaît des préférences de l'investisseur et des évaluations des portefeuilles, il y a assez d'évidence à l'effet que  $p$  est au moins aussi bon que  $p'$  et pas d'argument trop fort pour la proposition inverse. Une définition plus précise de la relation de surclassement est donnée dans cette section.



évaluations multicritères. Avec cette version de ELECTRE, on identifie un sous-ensemble  $N$  de portefeuilles, nommé noyau, tel que les portefeuilles dans  $N$  ne se surclassent pas entre eux et les portefeuilles envisagés qui ne sont pas dans  $N$  sont surclassés par au moins un portefeuille dans  $N$ . Ce sous-ensemble  $N$  correspond en quelque sorte à un ensemble « efficient » multicritère mais basé sur des relations de surclassement plutôt que des relations de dominance.

Les relations de surclassement à la base de ELECTRE IS sont construites à partir de deux indices : un indice de concordance et un indice de discordance. Ces indices sont basés sur l'ensemble des critères retenus par l'investisseur, c'est-à-dire dans le cas qui nous concerne sur les six (6) critères présentés précédemment. De plus, le fait que les critères n'ont pas toute la même importance relative se reflète dans le calcul de ces indices.

Nous disons que dans ELECTRE IS, les évaluations multicritères sont exploitées de manière plus nuancée que dans ELECTRE I, car dans la version IS on a recours à la notion de pseudo-critère plutôt qu'à celle de vrai-critère retenue dans ELECTRE I et dans la dominance traditionnelle. On dit que l'on est en présence d'un vrai-critère si, dès qu'un portefeuille  $p$  montre une performance plus élevée qu'un portefeuille  $p'$  sur ce critère, la préférence (stricte) va vers  $p$  sur ce critère, c'est-à-dire :

$$x_j(p) > x_j(p') \Rightarrow pP_jp'$$

où  $x_j(p)$  = évaluation de la performance du portefeuille  $p$  selon le critère  $j$ ; les valeurs  $x_j(p)$  sont illustrées dans le tableau 1;

et  $pP_jp'$  = le portefeuille  $p$  est strictement préféré au portefeuille  $p'$  au niveau du  $j^{\text{e}}$  critère.

Un pseudo-critère est un critère auquel sont associés deux seuils (dits de discrimination) : un seuil d'indifférence  $q$  et un seuil de préférence stricte  $r$  de manière à ce que l'on admette, pour deux portefeuilles  $p$  et  $p'$  :

$$x_j(p) \geq x_j(p') \rightarrow \begin{cases} pI_jp' & \text{si } x_j(p) - x_j(p') \leq q_j \\ pQ_jp' & \text{si } q_j < x_j(p) - x_j(p') \leq r_j \\ pP_jp' & \text{si } r_j < x_j(p) - x_j(p') \end{cases}$$

où  $pI_jp'$  = le portefeuille  $p$  est indifférent au portefeuille  $p'$  au niveau du  $j^{\text{e}}$  critère;

$pQ_jp'$  = le portefeuille  $p$  est faiblement préféré au portefeuille  $p'$  au niveau du  $j^{\text{e}}$  critère.

À noter que ces deux seuils  $q_j$  et  $r_j$  peuvent être fonction du niveau d'évaluation sur l'échelle du critère  $j(x_j(p))$  (Bouyssou et Roy, 1987).

La notion de pseudo-critère semble plus adéquate que celle du vrai-critère dans bien des situations, notamment pour évaluer les performances anticipées d'un portefeuille. En effet, si minutieuses que soient les procédures pour évaluer les performances anticipées d'un portefeuille selon chaque critère, les valeurs obtenues ne peuvent généralement pas être regardées comme indiscutables. Alors, afin de ne pas accorder aux  $x_j(p)$  une signification qu'ils n'ont pas, il semble réaliste d'introduire ces deux seuils  $q_j$  et  $r_j$ .

Le terme surclassement englobe, sans les différencier, des situations de préférences strictes, de préférences faibles et d'indifférence. Ainsi, le portefeuille  $p$  surclasse le portefeuille  $p'$  lorsque les évaluations disponibles  $(x(p) = (x_1(p), \dots, x_j(p), \dots, x_n(p)))$  et  $x(p') = (x_1(p'), \dots, x_j(p'), \dots, x_n(p'))$ , compte tenu de leur niveau de signification, justifie la proposition « le portefeuille  $p$  est au moins aussi bon que le portefeuille  $p'$  ».

Dans ELECTRE IS, pour chaque paire de portefeuille  $(p, p')$  on calcule un indicateur de concordance par critère<sup>5</sup>

$$c_j(p, p') = \frac{r_j - \min[x_j(p) - x_j(p'); r_j]}{r_j - \min[x_j(p) - x_j(p'); q_j]}, \quad (1)$$

c'est-à-dire que

$$c_j(p, p') = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j(p) + q_j \geq x_j(p') \\ 0 & \text{si } x_j(p) + r_j \leq x_j(p') \\ \text{linéaire entre les deux.} & \end{cases}$$

Cet indicateur  $c_j(p, p')$  exprime dans quelle mesure, compte tenu des seuils, les performances des portefeuilles  $p$  et  $p'$  sur le  $j^{\text{e}}$  critère entre en concordance avec l'affirmation «  $p$  au moins aussi bon que  $p'$  ». L'indice de concordance (global) est obtenu par l'agrégation, en tenant compte de l'importance relative de chaque critère, des indicateurs de concordance par critère :

$$C(p, p') = \sum_{j=1}^n \Pi_j c_j(p, p') \quad (2)$$

5. On suppose, sans perte de généralité, que les critères sont définis de telle manière que la préférence est croissante avec les performances.

où  $\Pi_j$  = l'importance relative du  $j^{\text{e}}$  critère, avec  $\Pi_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^n \Pi_j = 1$ , et  $n$  = nombre de critères.

Parallèlement à la notion de concordance, on fait intervenir une notion de discordance. Si par exemple tous les critères sauf un,  $j_0$ , concordent avec l'affirmation «  $p$  surclasse  $p'$  », il se peut que l'écart  $x_{j_0}(p') - x_{j_0}(p)$  du critère discordant  $j_0$  soit si grand qu'il devienne impossible de ne pas en tenir compte. Pour chaque paire de portefeuilles  $(p, p')$ , l'indicateur de discordance sur le critère  $j$ ,  $d_j(p, p')$ , est calculé de la manière suivante<sup>6</sup> :

$$d_j(p, p') = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j(p') \leq x_j(p) + q_j \\ H_j(d) & \text{si } x_j(p') > x_j(p) + q_j \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{où } H_j(d) = 1 - e^{-\lambda d}, d = \frac{x_j(p') - [x_j(p) + q_j]}{x_j(p)},$$

et  $\lambda$  = paramètre exprimant la tolérance vis-à-vis de la discordance.

L'indice de discordance (global) est obtenu en agrégeant les indicateurs de discordance par critère, c'est-à-dire :

$$D(p, p') = \sum_{j=1}^n \Pi_j d_j(p, p'). \quad (4)$$

Pour chaque paire de portefeuilles, on conclut au surclassement de l'un par l'autre à partir de deux tests nécessitant l'introduction de deux seuils de discrimination : un seuil  $c$  de concordance et un seuil  $d$  de discordance. Ces deux seuils prennent des valeurs entre 0 et 1. On dira donc qu'un portefeuille  $p$  surclasse un portefeuille  $p'$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$C(p, p') \geq c \text{ (test de concordance)} \quad (5)$$

et  $D(p, p') \leq d$  (test de non-discordance).

Si l'une de ces deux conditions n'est pas satisfaite, on se retrouve en situation d'incomparabilité entre  $p$  et  $p'$  sur la base de l'information disponible. Nous sommes évidemment intéressés par une valeur pour le seuil de concordance  $c$  qui est proche de 1 (une valeur égale à 1 pour  $c$  équivaut à exiger l'unanimité des critères, c'est-à-dire à exiger que  $p$  soit au moins aussi bon que  $p'$  sur tous les critères) et une valeur pour le seuil de discordance  $d$  qui est proche de 0.

6. Cette manière de calculer les indices de discordance est différente de celle proposée dans Roy et Skalka (1985).

Les relations de surclassement ainsi construites peuvent être représentées par un graphe dont les sommets sont les portefeuilles envisagés. On exploite ces relations à partir d'un algorithme permettant de déterminer le noyau  $N$  du graphe, c'est-à-dire l'ensemble des portefeuilles candidats au choix final.

Afin d'illustrer l'application de ELECTRE IS, nous prenons les 19 portefeuilles envisagés et dont les évaluations pour les six (6) critères retenus sont données au tableau 1. Pour appliquer cette méthode nous devons au préalable déterminer l'importance relative des critères ( $\Pi_j, j = 1, 2, \dots, 6$ ) ainsi que la valeur des autres seuils. Pour simplifier, et sans perte de généralité, nous limitons notre illustration à trois jeux de poids correspondant à trois types de profil d'investisseur (tableau 2).

TABLEAU 2  
JEUX DE POIDS POUR DIVERS PROFILS D'INVESTISSEURS

Profils	Rendement mensuel 5 ans	Écart-type des rendements 5 ans	Coût total des transactions	Risque pays	Couverture directe devises étrangères	Risque de change
Défensif	0.10	0.20	0.10	0.20	0.20	0.20
Intermédiaire	0.25	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Agressif	0.40	0.10	0.20	0.10	0.10	0.10

Compte tenu de la nature des critères et de l'information disponible, nous avons retenu comme valeur pour les seuils  $q_j = 0, j = 1, 2, \dots, 6$ ;  $r_j = 30\%$  de l'étendue de l'échelle du  $j^{\text{e}}$  critère et  $\lambda = 15$ .

Le tableau 3 reproduit les noyaux correspondants à chacun des trois profils d'investisseur et pour deux jeux de seuils de concordance et de discordance.

Tout d'abord, il est intéressant de noter que plus l'investisseur se montre agressif en accordant une plus grande importance relative aux critères portant sur le rendement et les frais de transaction, plus la taille du noyau est élevée et moins la méthode s'avère sélective. De même, on remarquera que pour un seuil de concordance ( $c$ ) plus faible, le nombre de portefeuilles dans le noyau est, par construction, plus faible. En examinant de plus près les résultats présentés à ce tableau, on dénote, par exemple, que pour un investisseur de type « défensif » où les seuils de concordance ( $c$ ) et de discordance ( $d$ ) s'élève respectivement à 0,7 et 0,3 on retrouve sept portefeuilles à l'intérieur du noyau dont un seul provient de l'ensemble efficient, soit le portefeuille à variance minimale globale (# 15). Lorsque les seuils de concordance et de discordance sont fixés à 0,6 et 0,3 respecti-

vement, le nombre de portefeuilles dans le noyau est alors de deux, soit le portefeuille équi pondéré nord-américain (# 7) et celui dont la pondération est établie sur la base de la capitalisation boursière (# 13). Remarquons enfin qu'on retrouve les cinq portefeuilles de l'ensemble efficient dans les deux noyaux du profil agressif, où le rendement reçoit un poids de 0,4.

TABLEAU 3  
PORTEFEUILLES COMPOSANT LE NOYAU  $N$  POUR DIFFÉRENTS PROFILS D'INVESTISSEURS

	Profils d'investisseur					
	Défensif		Intermédiaire		Agressif	
	( $c, d$ )	(0,7; 0,3) (0,6; 0,3)	(0,7; 0,3) (0,6; 0,3)	(0,7; 0,3) (0,6; 0,3)	(0,7; 0,3) (0,6; 0,3)	(0,6; 0,3)
		2 7	1 13	2	1 10	8
#des		4 13	2 15	4	2 13	9
portefeuilles		7	3 16	7	3 15	10
$\in N$		8	4 17	8	4 16	13
		9	7 18	9	5 17	15
		13	8 19	13	7 18	16
		15	9		8 19	17
					9	18
						19

Des résultats précédents émerge une constatation tout à fait cruciale : les portefeuilles dominants selon l'approche M-V peuvent être surclassés dans un contexte multicritère. Ainsi, l'investisseur a tout intérêt à ne pas restreindre ses critères de sélection aux seuls critères moyenne et variance des rendements mais plutôt à considérer l'ensemble de tous les critères qui, à ses yeux, ont de l'importance pour le choix d'un portefeuille indiciel international. Nous voyons également que la valeur du seuil de concordance  $c$  a une influence directe sur la taille du noyau c'est-à-dire sur le nombre de portefeuilles à considérer pour le choix final. Par exemple en abaissant suffisamment la valeur de  $c$  on peut être conduit à un noyau ne comptant qu'un seul portefeuille. Cette solution unique pourrait toutefois être trop risquée pour l'investisseur puisque les relations de surclassement construites sur la base de cette valeur de  $c$  ne seraient pas très clairement établies.

Si on fixe la valeur du seuil de concordance  $c$  à 1, ou à toutes autres valeurs faisant en sorte que le test de concordance exige l'unanimité de tous les critères, et que l'on utilise la notion du vrai-critère (c'est-à-dire  $q_j = r_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ ) alors l'ensemble des portefeuilles formant le noyau inclut l'ensemble des portefeuilles efficaces au sens de la dominance traditionnelle. En particulier si on se limite seulement aux deux premiers critè-

res, soit le rendement moyen et l'écart-type des rendements, le noyau n'inclut que les portefeuilles de la « frontière efficiente » du modèle M-V traditionnel (tableau 4).

TABLEAU 4  
PORTEFEUILLES COMPOSANT LE NOYAU EN UTILISANT UNIQUEMENT LES CRITÈRES  
MOYENNE ET VARIANCE (ÉCART-TYPE)\*

Poids ( $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_6$ )	Seuils ( $c, d$ )	# des portefeuilles $\in N$
(0,5 , 0,5 , 0 , ... , 0)	(1 ; 0)	{15, 16, 17, 18, 19}
(0,5 , 0,5 , 0 , ... , 0)	( $c > 0,5 ; d$ )	{15, 16, 17, 18, 19}
$\Pi_1 + \Pi_2 = 1$ et $\Pi_1, \Pi_2 > 0$	(1 ; $d$ )	{15, 16, 17, 18, 19}

\* En utilisant la notion du vrai-critère (c'est-à-dire  $q_j = 0$  et  $r_j = 0$ ) comme pour la dominance traditionnelle.

Il est intéressant de noter, à la rangée 3 du tableau 4, que l'on obtient le même noyau (les portefeuilles de la frontière efficiente) même si les poids des critères moyenne – écart-type ne sont pas égaux pourvu que l'on exige l'unanimité des deux critères.

#### 4. RÉSULTATS

En général, le noyau contiendra plus qu'un portefeuille. Pour déterminer le « meilleur » portefeuille (le portefeuille dit « optimal » selon certaines approches), les préférences de l'investisseur doivent être prise en compte. C'est également la situation à laquelle on est confronté lorsque l'on détermine la frontière efficiente traditionnelle (avec le modèle M – V) ou avec toutes autres approches multicritères/multiobjectifs qui consistent dans un premier temps à déterminer l'ensemble efficace.

Plutôt que de poursuivre dans cette direction, nous suggérons une approche alternative, ELECTRE III qui permet de classer tous les portefeuilles envisagés du meilleur au moins désirable sur la base des préférences de l'investisseur. Nous proposons d'appliquer ELECTRE III à l'ensemble des portefeuilles envisagés et non pas à l'ensemble des portefeuilles du noyau car ce dernier peut exclure d'éventuels « brillants » seconds. Dans ELECTRE III (Roy, 1978), comme dans les autres versions de la famille des méthodes ELECTRE, les relations de surclassement (des relations floues exprimées à l'aide de degrés de crédibilité) sont construites sur la base d'un indice de concordance et d'un indice de discordance. Pour les raisons évoquées dans la section précédente, on a recours à la notion de pseudo-critère et l'indice de concordance est construit exactement comme dans ELECTRE IS.

$$C(p, p') = \sum_{j=1}^n \Pi_j c_j(p, p') \quad (6)$$

$$\text{où } c_j(p, p') = \frac{r_j - \min[x_j(p) - x_j(p'); r_j]}{r_j - \min[x_j(p) - x_j(p'); q_j]}$$

$\Pi_j$  = l'importance relative du  $j^{\text{e}}$  critère,  $\Pi_j \geq 0$ ,  $\sum \Pi_j = 1$ ;

et  $n$  = nombre de critères.

Relativement à un couple  $(p, p')$ , un critère  $j$  est en discordance avec le surclassement de  $p'$  par  $p$  si  $C(p, p') = 0$ . Cette discordance est d'autant plus forte que la différence  $x_j(p') - x_j(p) - r_j$  est grande. On introduit un seuil de veto  $v_j$  (qui dépend éventuellement de la valeur de  $x_j(p)$  et de l'importance du critère  $j$ ) marquant la limite au-delà de laquelle on estime que l'opposition du critère  $j$  à la proposition «  $p$  au moins aussi bon que  $p'$  » est suffisamment violente pour motiver le rejet de la proposition. L'indice de discordance du  $j^{\text{e}}$  critère est défini de la manière suivante :

$$d_j(p, p') = \min \left[ 1, \max \left\{ 0, \frac{x_j(p') - x_j(p) - r_j}{v_j - r_j} \right\} \right], \quad (7)$$

c'est-à-dire que

$$d_j(p, p') = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j(p') - x_j(p) \leq r_j \\ 1 & \text{si } x_j(p') - x_j(p) \geq v_j \\ \text{linéaire entre les deux.} & \end{cases}$$

Si aucun critère n'est en discordance avec le surclassement de  $p'$  par  $p$ , ou si ces discordances  $d_j(p, p')$  ont des valeurs faibles eu égard à celle de l'indice de concordance  $C(p, p')$ , ce dernier est un bon reflet du degré de crédibilité global du surclassement. Cependant si un ou plusieurs critères font apparaître une discordance significative eu égard à l'indice de concordance ( $d_j(p, p') > C(p, p')$ ) alors leurs effets se conjuguent pour affaiblir le degré de crédibilité. Le degré de crédibilité global est défini par :

$$\delta(p, p') = \begin{cases} C(p, p') & \text{si } \{j / d_j(p, p') > C(p, p')\} = \emptyset \\ C(p, p') \prod_{j \in J} \frac{1 - d_j(p, p')}{1 - C(p, p')} & \\ \text{où } J = \{j / d_j(p, p') > C(p, p')\} & \end{cases} \quad (8)$$

Ce degré de crédibilité est un critère qui permet d'apprécier la plus ou moins grande crédibilité de surclassement de  $p'$  par  $p$ . On prend position sur le pouvoir discriminant du critère  $\delta(p, p')$  en introduisant un seuil de discrimination  $s$ , tel que si  $\delta(p, p') = \lambda$  et  $\delta(p', p) > \lambda - s$ , alors les deux degrés de crédibilité sont considérés comme étant du même ordre de grandeur.

Dans ELECTRE III, ces relations floues de surclassement entre chaque paire de portefeuilles sont exploitées de manière à obtenir un classement de tous les portefeuilles envisagés. On utilise un concept de qualification et une procédure dite de distillation pour y parvenir (Roy, 1978). La qualification d'un portefeuille dans un classement est la différence entre le nombre de portefeuilles auxquels il est strictement préféré et le nombre de portefeuilles qui lui sont strictement préférés.

En appliquant l'algorithme ELECTRE III aux dix-neuf portefeuilles indiciaires internationaux de notre ensemble de comparaison (tableau 1), nous obtenons pour chacun des trois profils d'investisseurs proposés dans la section précédente, les classements donnés dans le tableau 5.

En examinant les résultats de ce tableau, on note que le portefeuille # 13, celui dont la pondération est établie sur la base de la capitalisation boursière, est en tête pour les profils défensif et intermédiaire. Le portefeuille # 15, celui de la frontière efficiente à variance minimale globale, se range toujours parmi les deux premiers portefeuilles, alors qu'il se classe bon premier pour le profil agressif. On peut se rappeler que le portefeuille # 13 se retrouvait dans tous les noyaux présentés au tableau 3. On remarque également que quatre des cinq portefeuilles de la frontière efficiente se retrouvent dans les quatre premiers rangs pour l'investisseur présentant un profil agressif alors que le classement de ces portefeuilles est beaucoup plus étalé pour le profil défensif.

Il est vrai que les rangs obtenus dans le tableau 5, l'ont été en faisant varier les poids  $\Pi_j$  des critères mais en gardant fixe les divers seuils de la méthode. Les niveaux de ces seuils pourraient être fixés de manière différente pour chaque type d'investisseurs afin de bien tenir compte des différences entre les préférences de ceux-ci.

## CONCLUSION

L'objectif de cet article est d'appliquer l'analyse multicritère pour la sélection de portefeuilles indiciaires internationaux. L'approche la plus courante dans ce contexte consiste à déterminer un ensemble de portefeuilles « efficaces » en se basant sur deux paramètres risque-rendement composés, combinant un certain nombre de caractéristiques des marchés internationaux. Une règle est ensuite utilisée pour choisir dans cet ensemble le portefeuille qui rencontre le mieux le niveau de risque désiré par l'investisseur.



L'approche suggérée dans cet article s'appuie sur la méthodologie multicritère et s'inspire du principe que le risque et le rendement sont de nature multidimensionnelle. La prémisse de base est que les traits distinctifs des divers marchés internationaux ne devraient pas être combinés dans un score composé mais plutôt modélisés séparément afin de fournir à l'investisseur une image claire des objets de choix et conserver une plus grande flexibilité dans le processus de décision. De plus, le recours aux relations de surclassement permet de faire face à la nature hétérogène et conflictuelle des diverses caractéristiques que l'on rencontre souvent dans ce type d'étude.

TABLEAU 5  
RANG DES PORTEFEUILLES POUR DIVERS PROFILS D'INVESTISSEUR

Rang des portefeuilles	# des portefeuilles pour les trois profils retenus*		
	Défensif	Intermédiaire	Agressif
1	13	13	15
2	15	15-16-17	16
3	7-14		17-18
4			
5	16	10	8
6	9	8	13
7	3-10-17	9	10
8		4-18	9
9			19
10	8	1-2-3	4
11	2		2-3
12	4		
13	18	14	12
14	1	7	7
15	12	6-12	1-14
16	5		
17	6-19	19	6
18		5	5
19	11	11	11

\* Avec comme seuils :  $q_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ ,  $r_j = 30\%$  de l'étendue de l'échelle du critère  $j$ ,  $v_j = 60\%$  de l'étendue de l'échelle du critère  $j$  et  $s = 0.15$ .

Les deux versions de l'algorithme ELECTRE utilisées dans cet article sont ELECTRE I-S et ELECTRE III. Avec ELECTRE I-S on détermine l'équivalent d'un « ensemble efficace » (le noyau) au sens des relations de

surclassement, de sorte que la frontière efficiente du modèle M-V peut être vue comme un cas particulier du noyau. Quant à ELECTRE III, il permet de ranger tous les portefeuilles envisagés du meilleur au moins désirable sur la base des préférences de l'investisseur, telles qu'exprimées à travers les valeurs des divers paramètres (poids, seuils) de la méthode.

Que l'on fasse appel à l'une ou l'autre des deux versions de cet algorithme multicritère, elle semble plus en mesure d'aider l'investisseur dans la sélection d'un portefeuille indiciel international que l'approche traditionnelle moyenne-variance.

**TABLEAU A-1**  
**ENSEMBLE DES PORTEFEUILLES INTERNATIONAUX CONSIDÉRÉS**

Stratégie	Équipondéré et/ou répartition géographique									
	Pays\Portefeuilles	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Allemagne	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0.2
Australie	0.0625	0	0	0	0.33333	0	0	0	0	0
Autriche	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
Belgique	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
Canada	0.0625	0.9	0.95	0	0	0	0.5	0	0	0
Danemark	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
Espagne	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
États-Unis	0.0625	0.1	0.05	1	0	0	0.5	0	0	0.2
France	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
Italie	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
Japon	0.0625	0	0	0	0.33333	0	0	1	0	0.2
Norvège	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
Nouvelle-Zélande	0.0625	0	0	0	0.33333	0	0	0	0	0
Pays-Bas	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0.2
Royaume-Uni	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0
Suisse	0.0625	0	0	0	0	0.09091	0	0	0	0.2

(1) Équipondéré

(2) 10 % États-Unis, 90 % Canada

(3) 5 % États-Unis, 95 % Canada

(4) 100 % États Unis

(5) Équipondéré, Asie et Océanie

(6) Équipondéré, Europe

(7) Équipondéré, Amérique du Nord (excluant le Mexique)

(8) 100 % Japon

(9) Équipondéré, 5 pays présentant le meilleur risque pays

**TABLEAU A-1 (suite)**  
**ENSEMBLE DES PORTEFEUILLES INTERNATIONAUX CONSIDÉRÉS**

Portefeuilles efficients – moyenne-variance									
(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
0.14286	0	0.06667	0.03074	0.08745	0	0	0	0	0
0	0.11111	0.06667	0.01537	0.01955	0	0	0	0	0
0	0.11111	0.06667	0.00102	0.00926	0.19633	0.20937	0.21858	0.21183	0.17078
0	0.11111	0.06667	0.00717	0.01132	0	0	0	0.04341	0.08487
0.14286	0	0.06667	0.02561	0.03704	0.15409	0.08968	0.02011	0	0
0	0.11111	0.06667	0.00307	0.00823	0.33047	0.36769	0.39700	0.47332	0.56929
0	0.11111	0.06667	0.01025	0.02572	0	0	0	0	0
0.14286	0	0	0.02664	0.06893	0	0	0	0	0
0.14286	0	0.06667	0.01537	0.06070	0	0	0	0.00038	0.03443
0.14286	0	0.06667	0.45287	0.21502	0.31912	0.33000	0.33692	0.27106	0.12561
0.14286	0	0.06667	0.00205	0.00617	0	0	0	0	0
0	0.11111	0.06667	0.00102	0.00309	0	0	0	0	0.01502
0	0.11111	0.06667	0.01332	0.01646	0	0	0	0	0
0	0.11111	0.06667	0.08094	0.06070	0	0.00326	0.02739	0	0
0.14286	0	0.06667	0.01537	0.01337	0	0	0	0	0
0	0.11111	0.06667	0.29918	0.35700	0	0	0	0	0

(10) Équipondéré, 7 pays industrialisés

(11) Équipondéré sauf 7 pays industrialisés

(12) Équipondéré sauf États-Unis

(13) Pondération basée sur la capitalisation boursière

(14) Pondération basée sur le PIB

(15) Efficient selon M-V

(16) Efficient selon M-V

(17) Efficient selon M-V

(18) Efficient selon M-V

(19) Efficient selon M-V

## BIBLIOGRAPHIE

- ANNOT, R.D., et R.D. HENRIKSSON (1989), « A Disciplined Approach to Global Asset Allocation », *Financial Analyst Journal*, Mars/Avril : 17-28.
- BANA E COSTA, C.A. (Ed.) (1990), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag.
- BOUYSSOU, D., et B. ROY (1987), « La notion de seuils de discrimination en analyse multicritère », *INFOR*, Vol. 25, 4 : 302-313.
- EUN, C.S., et S. JANAKIRAMANAN (1986), « A Model of International Asset Pricing with a Constraint on Foreign Equity Ownership », *The Journal of Finance*, 41 : 897-914.
- FROST, P., et J. SAVARINO (1988), « For Better Performance : Constrained Portfolio Weights », *The Journal of Portfolio Management*, Automne : 30-34.
- KWAN, C.C.Y., et P.C.Y. YIP (1987), « Optimal Portfolio Selection with Upper Bounds for Individual Securities », *Decision Sciences*, 18 : 505-523.
- LEIBOWITZ et HENRIKSSON (1989), « Portfolio Optimization with Shortfall Constraints : A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk », *Financial Analyst Journal*, Mars/Avril : 34-41.
- MARTEL, J.-M., N. KHOURY et M. BERGERON (1988), « An Application of a Multicriteria Approach to Portfolio Comparisons », *Journal of Operational Research Society*, Vol. 39, 7 : 617-628.
- ROY, B. (1968), « Classement et choix en présence de points de vue multiples : la méthode ELECTRE », *RIRO*, Vol. 8 : 57-75.
- ROY, B. (1978), « ELECTRE III : Un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples », *Cahiers du CERO*, Vol. 20 : 3-24.
- ROY, B., et J.M. SHALKA (1985), « ELECTRE IS-Aspects méthodologiques et guide d'utilisation », Document du LAMSADE no. 30, Université Paris-Dauphine.
- VINCKE, PH. (1989), *L'aide multicritère à la décision*, Éditions de l'Université de Bruxelles, Belgique.