Cuadernos de Economía, Año 28, Nº 85, pp. 359-384 (Diciembre 1991)

REFLEXIONES EN TORNO A POLITICAS DE INVERSION ADECUADAS PARA LAS ADMINISTRADORAS DE FONDOS DE PENSIONES (AFP)*

EDUARDO WALKER H.**

ABSTRACT

This paper analyzes the investment strategies that should be followed by the pension fund administrators (AFPs) in Chile in order to maximize objective functions characterized by risk aversion. The investment problem is formally set up and solved for special cases using dynamic programming. Based on these results, on the recent empirical evidence presented for Chile and the current average time left for retirement, we conclude that the investment horizons for the AFPs have to be lengthened in order to benefit from the liquidity premia that exist in long term rates of interest. In this context the risk of changes in interest rates is irrelevant whereas reinvestment risk is crucial. We also conclude that the amounts currently invested in stocks are consistent with a relatively large degree of risk aversion. Finally, we argue that the model presented here is a useful benchmark for analyzing the incentives and restrictions imposed by the legal environment and the market structure that affect the behavior of AFPs.

I. INTRODUCCION

Escaso análisis se ha realizado en Chile, al menos en círculos académicos, en torno a la definición de objetivos de tipo financiero y políticas de inversión que son convenientes desde la perspectiva de los afiliados a las AFP. Este artículo pretende, entre otros objetivos, entregar algunas consideraciones, que se derivan de un modelo

* El autor agradece a Leonardo Hernández, Augusto Iglesias, a un árbitro anónimo y, en particular, a Salvador Valdés las ideas, comentarios y sugerencias recibidas durante la elaboración de este trabajo. En materia de datos necesarios para la elaboración del mismo, se agradece la colaboración de AFP Habitat.
Se agradece muy especialmente el valioso apoyo financiero de la Línea de Investigación del Sistema Previsional del Instituto de Economía, que ha recibido donaciones de AFP Provida.
Obviamente, los errores son de responsabilidad exclusiva del autor.

** Profesor Escuela de Administración, Pontificia Universidad Católica de Chile.

simplificado, sobre las estrategias de inversión que deberían seguir las AFP para optimizar un determinado tipo de funciones objetivo. Las conclusiones se fundamentan en base a evidencia empírica chilena reciente.

Más que una guía práctica, este artículo se limita a plantear algunos lineamientos generales útiles para analizar las políticas de inversión de las AFP y establecer un marco teórico simple para el estudio de algunos aspectos de la legislación que actualmente afecta a los fondos de pensiones en materia de inversiones.

II. Funciones Objetivo "Adecuadas" para un Fondo de Pensiones

Determinar qué tipo de objetivos debería perseguir un fondo de pensiones se relaciona estrechamente al motivo que da origen a los sistemas previsionales de carácter obligatorio. Entre las diversas hipótesis planteadas para explicar la existencia de un sistema de ahorro previsional oligatorio aquí se destaca la siguiente:

"El ahorro espontáneo de la gente es insuficiente como para satisfacer las necesidades de la vejez."

Esta hipótesis surge de una visión paternalista del Estado con respecto al comportamiento espontáneo de la gente: si los individuos no fueran forzados a ahorrar, el ahorro acumulado para la vejez sería "insuficiente" como para satisfacer las necesidades que surgen en esa etapa de la vida, a juicio del Estado e incluso de los propios afiliados al llegar a la vejez. En otras palabras, el óptimo privado lleva a un ahorro insuficiente, debido a una suerte de "racionalidad limitada" o "miopía" por parte de los afiliados.

Diamond [6] presenta evidencia en favor de esta hipótesis para el caso de Estados Unidos. Este autor muestra que un porcentaje importante de la gente (entre 20% y 50%) no acumula un ahorro suficiente como para satisfacer sus necesidades básicas a la edad de retirarse de la fuerza laboral. Esta evidencia sugiere que la única forma de garantizar un estándar razonable de vida es a través del establecimiento de un sistema de ahorro forzoso para la vejez[1].

No obstante lo anterior, debe tenerse presente que el establecimiento de un sistema de ahorro obligatorio para la vejez tiene sentido sólo en el contexto de un mercado de capitales imperfecto. Esto es así porque de lo contrario el afiliado puede **deshacer** cualquier política de inversión en activos financieros que estime inconveniente[2]. Por ejemplo, si es obligado a cotizar más de lo que ahorraría en forma voluntaria, a lo largo de su vida el afiliado se endeudaría a cuenta de sus recursos previsionales. El mismo tipo de argumentos es aplicable a la composición de la cartera de los fondos de pensiones. Se concluye entonces que el sistema de ahorro previsional cumple con su propósito de garantizar un estándar de vida dado durante la vejez sólo cuando los afiliados no pueden

1 En una interpretación que, para efectos de este artículo, es sólo ligeramente distinta a la planteada previamente, el Estado Benefactor es el representante de una sociedad en que sus integrantes se preocupan los unos por los otros, y nadie es abandonado a su suerte durante la vejez. Vergara [15] muestra que, para evitar el problema de *free rider* en este caso, el sistema previsional obligatorio puede resultar óptimo.

2 Este es el argumento clásico de Modigliani y Miller, quienes lo utilizan para demostrar la irrelevancia de las políticas de financiamiento de las empresas.

revertir las políticas de inversión llevadas a cabo por las AFP, vale decir, debe existir algún tipo de imperfección en el mercado de capitales[3]. Ejemplos de imperfecciones importantes desde este punto de vista son la dificultad de acceso a los mercados de capitales por parte de los afiliados de menores ingresos, la inembargabilidad de los fondos de pensiones, que impide endeudarse a cuenta de ellos, y las restricciones a las ventas cortas de instrumentos financieros.

Dependiendo de qué hipótesis se estime adecuada para explicar la existencia de un sistema de pensiones obligatorio, el planteamiento de los objetivos que deben perseguir las AFP puede ser distinto. Bajo la visión paternalista, la que en definitiva será adoptada aquí en virtud de la evidencia presentada por Diamond y su simplicidad relativa, la AFP debe maximizar una función de utilidad imputada a los afiliados (de facto) por el Estado. Más precisamente, se supone que ésta corresponde a la "función de utilidad que tendrán los propios afiliados al jubilar", conocida por parte de un Estado benefactor[4]. Las AFP, con sus políticas de inversión, deberían maximizar dicha función. La legislación actual permite suponer además que las funciones de utilidad imputadas muestran aversión al riesgo, ya que las políticas de inversión de las AFP se encuentran fuertemente reguladas y sesgadas hacia instrumentos de renta fija, en particular estatales o con garantía del Estado. Por ende, se supone aquí que la función de utilidad crece con la riqueza terminal a tasas decrecientes, vale decir, existe aversión al riesgo.

En resumen, se supone que las preferencias impuestas pueden ser representadas por una función de utilidad Monotónicamente Creciente y Estrictamente Cóncava (MISC), consistente con los axiomas (Von Neumann-Morgenstern) de maximización de utilidad esperada. Dicha función de utilidad representa a los propios afiliados en su vejez y tiene como único argumento la riqueza terminal acumulada al momento de la jubilación.

Plantear el problema en esta forma ciertamente tiene virtudes y limitaciones. La principal virtud es que, a pesar de su simplicidad, se obtienen conclusiones relativamente generales. En particular, el análisis entrega algunas luces sobre el tipo de consideraciones que deben realizarse al diseñar una estrategia de inversión. Las conclusiones también tienen trascendencia como marco de análisis para la legislación que restringe a los fondos de pensiones.

Entre las limitaciones del análisis, debe destacarse que esta forma de plantear el problema no asegura que se esté maximizando el bienestar privado del afiliado, destinatario último de los recursos administrados por las AFP. Este problema es inevitable, toda vez que existen sistemas forzosos como el previsional. Asimismo, el análisis no reconoce explícitamente el gran número de restricciones legales y de mercado que enfrentan las AFP al momento de diseñar estrategias de inversión, por lo que su importancia práctica es limitada.

En las secciones que siguen se analizará un conjunto de funciones objetivo consistentes con los supuestos de aversión al riesgo y maximización de utilidad esperada. Para cada tipo de función de utilidad, se analizarán las estrategias de inversión que cumplirían con el objetivo de maximizarla. También se estudiará el plazo óptimo para las

3 Es importante tener presente que, en el contexto de la literatura financiera, "perfección" implica "eficiencia" desde el punto de vista de la información, pero tal como se reiterará más adelante, un mercado de capitales imperfecto no necesariamente es ineficiente.

4 La función de utilidad también podría interpretarse como aquella del legislador. Bajo esta interpretación, no sólo la riqueza terminal podría ser importante sino también su trayectoria a través del tiempo, puesto que el prestigio político del legislador puede depender de los retornos intermedios obtenidos por los fondos de pensiones. Se debe suponer entonces que el legislador no tiene intereses propios y sólo actúa como representante de los propios afiliados al jubilar.

inversiones. El problema se resuelve suponiendo que existe un "afiliado tipo o representativo" para una AFP.

III. Planteamiento del Problema a ser Resuelto por el Fondo de Pensiones[5]

1. *Consideraciones previas*

Durante los últimos treinta años, la teoría financiera ha hecho hincapié en la importancia de considerar en las decisiones de inversión no sólo el retorno esperado sino también el riesgo comprometido en dicho retorno. Usualmente se piensa en el riesgo involucrado en la inversión en acciones, comparado con la inversión en instrumentos de renta fija. Sin embargo, en el contexto de los instrumentos de renta fija también existen distintos niveles de riesgo. Habitualmente se postula que es relativamente más seguro invertir en instrumentos de corto plazo que en los de largo plazo, debido a la distinta sensibilidad que tienen los instrumentos ante cambios en las tasas de interés y también al riesgo de crédito del emisor, que supuestamente aumenta junto con el plazo del instrumento.

Esto ha llevado a plantear que, suponiendo que los instrumentos más largos son más riesgosos, para inducir a los inversionistas a que compren dichos papeles deberá pagárseles un "premio por liquidez"[6], lo que se interpreta como que los instrumentos de largo plazo rentan más que los de corto plazo, en promedio.

Al margen del riesgo de crédito del emisor, el punto de vista anterior sufre de una deficiencia: el grado de riesgo de un instrumento de renta fija depende del horizonte de planeación del inversionista. En efecto, para un inversionista de corto plazo no cabe duda de que un bono de largo plazo es más riesgoso que uno de corto plazo. Sin embargo, desde la perspectiva de un inversionista con un horizonte de planeación de diez años, es claro que un bono que ofrezca sólo un pago dentro de diez años es el más seguro de todos. De este modo, un inversionista "largo" inserto en una economía con un horizonte "corto" podría verse beneficiado por el premio por liquidez.

Este bien parece ser el caso de la mayoría de los afiliados al nuevo sistema previsional. Se presume que ellos tienen aversión al riesgo y al afiliado promedio le faltan alrededor de 30 años para jubilar, por lo que en este sentido el horizonte de planeación es lejano. Entonces, parece natural recomendar a los fondos de pensión que inviertan los recursos en instrumentos de largo plazo para aprovechar el premio por liquidez y a la vez dar mayor seguridad a sus afiliados en relación al monto acumulado en la cuenta individual al jubilar. Esto se demuestra en forma analítica en los puntos siguientes.

Cabe preguntarse en qué medida podría maximizarse el bienestar de los afiliados siguiendo una política de inversión "miope", vale decir, preocupándose sólo de los resultados de corto plazo. Por ejemplo, la política de invertir todos los recursos en aquellos instrumentos financieros de corto plazo que brinden el mayor retorno esperado, período a período. En este caso, es casi seguro (en términos probabilísticos) que en el

5 El lector no interesado en el planteamiento formal (matemático) del problema puede saltarse las ecuaciones en la sección III y no obstante ello comprender las principales conclusiones del análisis que se presentan al final de cada subsección.

6 Ver Hicks (1946) y Keynes (1936), por ejemplo, citados en Copeland y Weston [4], pp. 68-69.

largo plazo se acumulará una "alta" riqueza. Sin embargo, esta política de inversión no toma en cuenta la (supuesta) aversión al riesgo por parte de los afiliados y, al margen de la regulación vigente, podría llevar a inversiones demasiado riesgosas tal como invertir todos los fondos en "la" acción que ofrezca el mayor retorno esperado. En este sentido, una política de inversión más conservadora podría lograr en mejor forma maximizar el bienestar de los afiliados.

A pesar de lo anterior, existen algunas circunstancias que justifican una estrategia miope, en que sea necesario preocuparse sólo del futuro cercano y no de lo que ocurrirá a largo plazo. Esto sucede cuando las tasas de interés son independientemente distribuidas a través del tiempo[7]. Por el contrario, no sería óptimo seguir una política miope cuando las tasas de interés siguen un comportamiento autorregresivo[8]. El comportamiento miope también puede justificarse para un tipo específico de funciones objetivo[9].

Las próximas secciones estudian algunos de los temas planteados aquí desde una perspectiva analítica.

2. *Formulación General del Problema*

Dada la discusión presentada en los puntos anteriores, se plantea aquí que los fondos de pensiones escogen sus carteras de inversión con tal de maximizar una única función terminal de utilidad esperada. Esta función es representativa de un afiliado que tiene aversión al riesgo, por lo que es MISC y cumple con los axiomas de Von Neumann y Morgenstern de maximización de utilidad esperada[10]. El afiliado jubila en el instante T, y entonces desde la perspectiva del instante t, el problema es

$$\text{Max } E_t\, U(\tilde{W}_T) \tag{1}$$

donde E_t representa el operador del valor esperado condicional, dada toda la información disponible en el instante t, $U(\cdot)$ es la función de utilidad MISC, y W_T representa la riqueza terminal, que es incierta desde la perspectiva de t. La maximización se hace con respecto a los porcentajes de la riqueza invertidos en los distintos activos a través del tiempo. La restricción que debe cumplirse en todos los períodos es que es preciso invertir en instrumentos financieros la totalidad de la riqueza disponible. En el instante t, la riqueza disponible para invertir es W_t+Y_t, donde W_t es la riqueza acumulada producto de las inversiones efectuadas en períodos anteriores e Y_t es la cotización neta que realiza el afiliado. Si Z_{t+1} representa al retorno bruto obtenido de la inversión entre el instante t y el instante $t+1$, entonces se da la relación recursiva (*ex post*)

$$W_{t+1} \equiv (W_t + Y_t)\, Z_{t+1} \tag{2}$$

Z_{t+1} es una función de la cartera de activos escogidos por la AFP y del "estado de la naturaleza" que ocurra en t+1.

7 Ver Ingersoll [8].

8 Cálculos preliminares del autor muestran una contundente evidencia en favor de la hipótesis de que las tasas de interés tienen un comportamiento autorregresivo en Chile.

9 Cuando la función que se desea maximizar es logarítmica.

10 Los axiomas aparecen en Copeland y Weston, op.cit.

En el instante t, la AFP invierte la proporción α_{it} en el activo "riesgoso" i. En términos vectoriales, α_t es un vector de nx1 que representa los porcentajes de la riqueza disponible en t que se invierten en los activos riesgosos. Asimismo, $1 - \alpha'_t \mathbf{1_n}$, representa la fracción de la riqueza invertida en el activo libre de riesgo, donde $\mathbf{1_n}$ es un vector unitario de nx1. De esta forma, el retorno total (o bruto) del portfolio escogido Z_{t+1} se explica como sigue:

$$Z_{t+1} = \alpha_t' z_{t+1} + (1-\alpha_t' 1_n) R_{t+1} \tag{3}$$

o bien

$$Z_{t+1} = \alpha_t' (z_{t+1} - 1_n R_{t+1}) + R_{t+1} \tag{4}$$

Aquí z_{t+1} representa el vector de retornos (brutos) de los n activos riesgosos y R_{t+1} es el retorno bruto del activo libre de riesgo entre t y t+1. Es necesario precisar que este último activo se supone libre de riesgo en el sentido de que *ex-ante* se conoce cuál será el resultado de la inversión en dicho instrumento.

De esta forma, el problema que debe resolver la AFP es maximizar (1) con respecto a todas las posibles trayectorias de α_t, sujeto a la restricción (4).

3. *Formulación Recursiva*

Lo planteado en el punto anterior es un problema típico de programación dinámica. El problema se resuelve de "atrás para adelante". Para estos efectos, se define una "Función de Utilidad Indirecta" $J[W_t,t]$ como sigue:

$$J(W_t,t) \equiv \text{Max } E_t U (\tilde{W}_T) \tag{5}$$

Vale decir, $J(W_t,t)$ es la función objetivo evaluada en el plan óptimo para las proporciones de inversión en los distintos activos, dada la información disponible en t.

Debe cumplirse además que

$$J(W_t,t) \equiv U (W_T) \tag{6}$$

El problema anterior se resuelve buscando la política óptima de inversión para el último período (T-1) en función del nivel de riqueza disponible para ser invertida en ese período y del tiempo (vale decir, resolver (5) sujeto a (4)). Luego se resuelve el problema para T-2, y así sucesivamente, hasta llegar al instante t.

Dada la formulación anterior, es posible demostrar[11] que el problema multiperiódico se transforma en uno de dos períodos:

11 Ver Ingersoll, op.cit. y Bellman [2].

$$J(W_t,t) \equiv \underset{\alpha_t}{\mathrm{Max}}\, E_t\, J\,(\tilde{W}_{t+1},\, t+1) \tag{7}$$

donde

$$\tilde{W}_{t+1} = (W_t + Y_t)\,(\alpha_t'\,(\tilde{Z}_{t+1} - 1_n\, R_{t+1}) + R_{t+1}) \tag{8}$$

Mediante la formulación recursiva anterior, puede resolverse el problema en forma relativamente fácil. Sin embargo, debe tenerse presente que, en general, la función de utilidad indirecta **J sí** depende de las oportunidades de inversión que se esperen para el futuro. La formulación anterior **no significa** que el problema puede resolverse íntegramente en forma "miope", mirando sólo un período hacia adelante en cada período. Sólo quiere decir que es posible encontrar una función objetivo relevante para las decisiones de este período, que permite resolver el problema **como si** fuera uno de dos períodos. Dadas estas aclaraciones, a continuación se presentan las condiciones de primer orden:

$$E_t\,\{J_w\,(\tilde{Z}_{it+1} - R_{t+1})\} = 0 \qquad \forall\ i,\ t \leq T - 1 \tag{9}$$

donde J_w representa la derivada parcial con respecto a la riqueza.

De la ecuación (9) pueden obtenerse los α_t óptimos, pero para ello se necesita una especificación de la función de utilidad y una descripción completa de las distribuciones de probabilidad de los retornos de los activos. No obstante, puede analizarse la solución implícita en (9).

Dado que R_{t+1}, el retorno bruto del activo libre de riesgo, es conocido en t y utilizando la definición de covarianza, puede reescribirse la condición de optimalidad como sigue:

$$- \frac{\mathrm{cov}_t(J_w, \tilde{Z}_{it+1})}{E_t(J_w)} = E_t\, \tilde{Z}_{it+1} - R_{t+1} \tag{10}$$

La interpretación de lo anterior es clara: dado que la función de utilidad es cóncava, la función de utilidad indirecta también lo es[12]. Por lo tanto, la utilidad marginal de la riqueza es decreciente. Esto quiere decir que un activo que tenga una "alta" covarianza con la riqueza, tendrá una "muy negativa" covarianza con la utilidad marginal (pagan "poco" cuando la utilidad marginal es alta y "mucho" cuando es baja). A estos últimos activos, para que sea óptimo invertir en ellos, se les exige un premio por riesgo. Por el contrario, un activo que covaríe en forma negativa con la riqueza, covaría positivamente con la utilidad marginal (paga "mucho" cuando la utilidad marginal es alta y "poco" cuando es baja). Para estos últimos, la condición de optimalidad permite exigir un premio por riesgo negativo. La interpretación anterior es esencialmente intuitiva, por lo que debe tenerse cautela al aceptarla. En rigor, la condición de optimalidad (9) dice que,

12 Ver Ingersoll, op.cit.

dado el premio por riesgo para el activo, éste debería incorporarse a la cartera en una cantidad tal que la utilidad marginal esperada de la inversión en dicho activo sea igual a la utilidad marginal esperada de invertir en un activo libre de riesgo.

Es necesario advertir además que la solución implícita en (10) en ningún caso supone que los porcentajes invertidos en instrumentos sean todos positivos o cero, ya que en el problema original no se han incluido restricciones a las "ventas cortas".

4. *Casos especiales*

Caso 1: Instrumentos "cortos" versus "largos"

Para entender mejor la condición de optimalidad de las carteras, a continuación se desarrolla un ejemplo simple, en el que intervienen dos activos y dos períodos de tiempo (tres instantes t=1,2,3). Para simplificar, pero sin pérdida de generalidad, se supone que no hay cotizaciones netas entre t=1 y t=3 ($Y_t = 0$).

En el segundo período (entre t=2 y t=3) puede invertirse el dinero en sólo un activo: el activo libre de riesgo. Dado que se está en t=2, la tasa de interés (bruta) que dará el activo libre de riesgo entre t=2 y t=3 es conocida e igual a ${}_2r_3$. De este modo, la riqueza final será $W_2\,{}_2r_3$, en función del resultado de las inversiones del período anterior, lo que está reflejado en W_2.

De este modo, (6) se transforma en

$$J(W_3, 3) = U(W_3) \tag{11}$$

Asimismo,

$$J(W_2, 2) = \text{Max } E_2 J(W_3, 3) = U(W_2\,{}_2r_3) \tag{12}$$

donde la segunda igualdad se produce porque se está en t=2 y se conocen W_2 y ${}_2r_3$. Dado que existe un solo instrumento para invertir en t=2, es obvio que no existe un problema de decisión de cartera.

A comienzos del primer período (en t=1) puede invertirse en dos instrumentos libres de riesgo de no pago. El primero es de corto plazo, que dará una rentabilidad total para el primer período de ${}_1r_2$, tasa que es conocida desde la perspectiva de t=1. El dinero que se reciba por concepto de inversiones en este instrumento deberá reinvertirse a la única tasa *spot* que rija en t=2 (${}_2\tilde{r}_3$), que es desconocida desde la perspectiva de t=1. El segundo instrumento que existe es uno que pagará \$1 con seguridad a fines de t=3. Entonces, dado su precio (b_1), se sabe en t=1 que ofrecerá una rentabilidad total para los dos períodos de ${}_1r_3$. Sin embargo, la rentabilidad que entregue para el primer período es incierta, y depende de la tasa de interés spot que rija en t=2. De este modo, la rentabilidad (bruta) de invertir en este instrumento largo por sólo un período es incierta e igual a $\tilde{z}_2 \equiv (b_1\,{}_2\tilde{r}_3)^{-1}$, lo que significa que el resultado de invertir en el instrumento largo durante un período depende de la tasa de interés *spot* que rija a fines del período. Nótese que ${}_2\tilde{r}_3\,\tilde{z}_2 = (b_1)^{-1} \equiv {}_1r_3$.

En t=1 debe decidirse la composición de la cartera. Vale decir, debe escogerse el porcentaje que deberá ser invertido en instrumentos largos y en instrumentos cortos. Si α es la proporción que se invierte en el instrumento largo, entonces, al cabo de un período (en t=2) la riqueza será

$$\tilde{W}_2 = W_1\,(\alpha(\tilde{z}_2 - {}_1r_2) + {}_1r_2) \tag{13}$$

El problema consiste entonces en encontrar un α tal que

$$\max_{\alpha} E_1\, J\,(\tilde{W}_2, 2) = \max_{\alpha} E_1\, U\,(W_1\,(\alpha(\tilde{z}_2 - {}_1r_2) + {}_1r_2)\, {}_2\tilde{r}_3)$$

La última igualdad se obtiene a partir de (12). El argumento de la función de utilidad en (14) puede simplificarse. Pasando ${}_2\tilde{r}_3$ al interior del paréntesis y factorizando por por ${}_1r_2$ se obtiene $W_1\,(\alpha({}_2f_3 - {}_2\tilde{r}_3) + {}_2\tilde{r}_3))\,{}_1r_2$, donde ${}_2f_3$ es la tasa *forward* implícita en los precios de mercado en t=1, que se define como ${}_1r_3/{}_1r_2$. Es importante destacar que esta tasa *forward* es conocida en t=1[13]. Con esta nueva formulación se ve claramente que, si α=1, la riqueza final (en t=3) es cierta. Asimismo, el máximo de incertidumbre para la riqueza final se da cuando α=0, pues toda la riqueza se invierte a corto plazo y queda sujeta al riesgo de reinversión en t=2.

Dada la nueva formulación, la condiciones de primer orden son

$$E_1\,\{\, U'[W_1(\alpha({}_2f_3 - {}_2\tilde{r}_3) + {}_2\tilde{r}_3)\,{}_1r_2]\,({}_2f_3 - {}_2\tilde{r}_3)\,\} = 0 \tag{15}$$

U' representa la derivada de la función de utilidad con respecto a la riqueza[14]. Gracias a la simplificación del problema, en este caso sí puede hacerse una afirmación concreta. La afirmación que sigue es una modificación de uno de los resultados de Arrow [1]:

El α óptimo (α^*) cumplirá con la siguientes características:

Si ${}_2f_3 < E_1\,{}_2\tilde{r}_3$ entonces $\alpha^* < 1$;

Si ${}_2f_3 = E_1\,{}_2\tilde{r}_3$ entonces $\alpha^* = 1$;

Si ${}_2f_3 > E_1\,{}_2\tilde{r}_3$ entonces $\alpha^* > 1$;

El tipo de argumento utilizado por Arrow, que permite demostrar lo anterior, es simple pero ilustrativo. La utilidad esperada (14) es una función de α, $f(\alpha)$, y tiene un máximo estricto, dada su concavidad. Para encontrar α^*, se hace $f'(\alpha)=0$. La pendiente de f cuando α=1, $f'(1)$, es

13 Conceptualmente, una tasa *forward* es una tasa de interés que puede fijarse hoy para algún período futuro. En el ejemplo, para prestar dinero *forward*, y asegurarse así la tasa ${}_2f_3$, se presta a la tasa larga (${}_1r_3$) y se pide prestada la misma cantidad a la tasa corta (${}_1r_2$). El resultado es un flujo de caja nulo en t=1, un flujo de cada negativo en t=2 y uno positivo en t=3.

14 La concavidad de la función de utilidad garantiza que se cumplan las condiciones de segundo orden para un máximo.

$$U'[W_1\ {}_2f_3\ {}_1r_2]\ ({}_2f_3 - E_1\ {}_2\tilde{r}_3) = 0 \tag{16}$$

Puede apreciarse que el signo de f'(1) es el mismo que el de la expresión $({}_2f_3 - E_1\ {}_2\tilde{r}_3)$. De este modo, si ${}_2f_3 < E_1\ {}_2\tilde{r}_3$, entonces la pendiente de f cuando $\alpha = 1$ es negativa, lo que significa que el α^* se encuentra a la "izquierda" (pensando en términos gráficos), y es menor que 1. Si ${}_2f_3 = E_1\ {}_2\tilde{r}_3$, entonces $\alpha^* =1$, ya que la pendiente de f es cero en ese punto. Un argumento similar se aplica al otro caso.

Se ha llegado, por lo tanto, a una conclusión bastante extrema: bajo los supuestos de este modelo no será conveniente invertir en papeles de corto plazo si existe un "premio por liquidez" $({}_2f_3 > E_1\ {}_2\tilde{r}_3)$[15]. El resultado es válido para cualquier función de utilidad que muestre aversión al riesgo. Cuando hay aversión al riesgo, conviene invertir un porcentaje de la riqueza a corto plazo sólo si se espera que en promedio esta estrategia de inversión brinde retornos mayores que la inversión en instrumentos de largo plazo.

El resultado anterior depende fundamentalmente de la aversión al riesgo. La idea es que la riqueza final obtenida al invertir a corto plazo es relativamente más riesgosa para un inversionista con un horizonte de largo plazo. Si además de un mayor riesgo la estrategia de invertir a corto plazo es menos rentable, entonces es lógico que sea dominada por la estrategia de inversión alternativa. Un supuesto importante es que ambos instrumentos considerados son libres de riesgo, lo que no es necesariamente cierto, particularmente en el caso de instrumentos de renta fija emitidos por empresas.

Una Solución Cerrada: Ahora se completa el Caso 1, especificando una distribución de probabilidad muy simple para la tasa de interés *spot* futura y una función de utilidad. En cuanto a la primera, se supone que ${}_2\tilde{r}_3$ toma el valor u con probabilidad p y el valor d con probabilidad (1-p), con $u \geq {}_2f_3 \geq d \leq 1$. Se supone además que $U(W) = W^\delta/\delta$, $\delta<1$ (aversión al riesgo relativa constante). Con estos supuestos adicionales, las condiciones de primer orden (15) se simplifican a:

$$p[\alpha({}_2f_3 - u) + u]^{\delta-1}\ ({}_2f_3 - u) + (1-p)\ [\alpha({}_2f_3 - d) + d]^{\delta-1}\ ({}_2f_3 - d)\ = 0 \tag{17}$$

Se define

$$u' = u - {}_2f_3\ ; \quad d' = {}_2f_3 - d \quad y \quad \phi = [(1-p)d'/pu']^{1/(1-\delta)}$$

u' y d' representan la "distancia" entre la tasa *spot* futura y la tasa *forward* cuando la tasa *spot* es alta y baja, respectivamente. Puede apreciarse además que cuando no hay premio ni castigo por liquidez (1-p)d'=pu', lo que implica que $\phi =1$. Del mismo modo, cuando hay premio por liquidez $\phi<1$.

Haciendo uso de las definiciones anteriores se llega al siguiente resultado para la proporción óptima invertida a largo plazo (α^*):

$$\alpha^* = \frac{u - \phi d}{u' + \phi d'} = 1 + \frac{(1 - \phi)\ {}_2f_3}{u' + \phi d'} \tag{18}$$

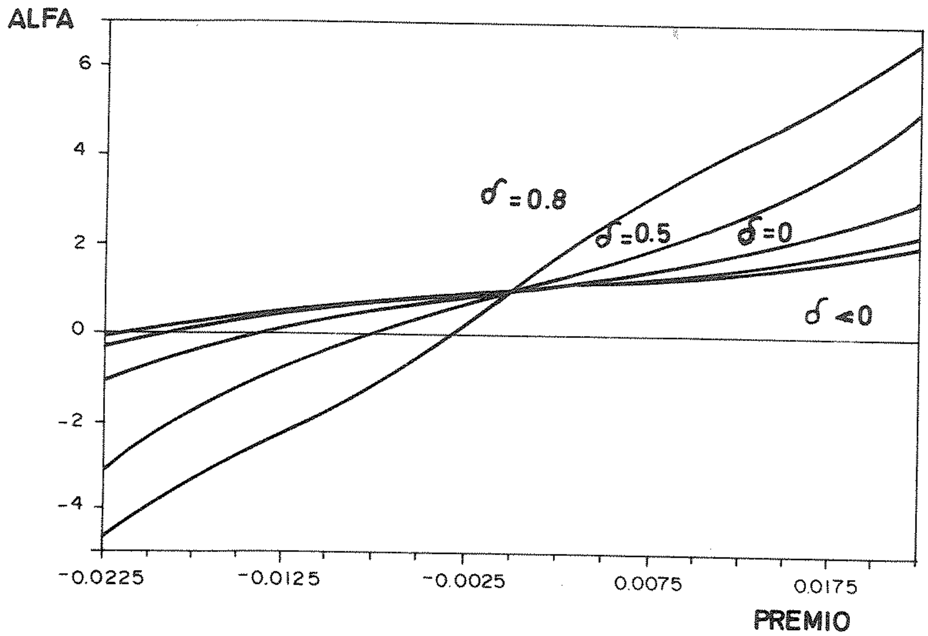
15 Esta definición de premio por liquidez se encuentra, por ejemplo, en Copeland y Weston, op.cit.

Es fácil verificar que la solución al caso general también se cumple aquí. Por ejemplo, si no existe premio ni castigo por liquidez (ϕ=1), entonces α^* =1.

El Gráfico 1 muestra α^* en función del premio por liquidez, para distintos grados de aversión al riesgo (mientras más cerca esté δ de 1, menor es la aversión al riesgo). Las curvas con mayor pendiente son aquellas con un parámetro menor de aversión al riesgo. Como se esperaba, cuando el premio por liquidez es cero, se invierte toda la riqueza en el activo de mayor plazo.

GRAFICO 1

PREMIO POR LIQUIDEZ
y Aversión al Riesgo



Proporción invertida en el instrumento largo vs. premio por liquidez, para distintos niveles de aversión al riesgo (δ). Supuestos: p = 1/2; 1/2 (u-d) = 4,5%.

Caso 2: Instrumentos Cortos, Medianos y Largos
(El Caso 1 con un período y un activo adicional)

En este caso se añade un período y un activo al problema estudiado anteriormente. Desde la perspectiva de t=0, hay tres alternativas de inversión, todas libres del riesgo de no pago: un instrumento corto, cuyo retorno es conocido para el período comprendido entre t=0 y t=1 (${}_0r_1$); existe también un instrumento que paga sólo en t=2, cuyo retorno total para el período entre t=0 y t=2 es conocido desde la perspectiva de t=0 (${}_0r_2$)); existe además un instrumento largo que pagará sólo en t=3, por lo que la tasa de interés relevante entre t=0 y t=3 también es conocida (${}_0r_3$)). De esta forma surge una variedad de estrategias de inversión permisibles, que van desde invertir todo largo hasta invertir todo corto y hacer un *rolling over* a corto plazo. Las características de los tres activos existentes y la notación utilizada se resumen en el Cuadro 1:

CUADRO 1

Activo	Precios t=0	Pagos t=1	t=2	t=3	Retorno t=1	Proporción W_0 Invertida
#1	$b_{01} \equiv ({}_0r_1)^{-1}$	1	0	0	${}_0r_1$	$1 - \alpha_{02} - \alpha_{03}$
#2	$b_{02} \equiv ({}_0r_2)^{-1}$	0	1	0	${}_0r_2/{}_1\tilde{r}_2$	α_{02}
#3	$b_{03} \equiv ({}_0r_3)^{-1}$	0	0	1	${}_0r_2/{}_1\tilde{r}_3$	α_{03}

Es útil destacar aquí que hay algunas estrategias de inversión que son redundantes. Por ejemplo, si se compra el instrumento #2 para venderlo al cabo de un período el retorno (bruto) será ${}_0r_2/{}_1\tilde{r}_2$. Si luego el dinero recibido por esta inversión se invierte a corto plazo, se obtiene un retorno total de $({}_0r_2/{}_1\tilde{r}_2){}_1\tilde{r}_2 = {}_0r_2$. Vale decir, da lo mismo comprar el activo #2 por un período para luego venderlo e invertir el resultado a corto plazo que simplemente comprar y mantener dicho activo hasta que expire[16]. Obviamente, esto también se aplica a la compra del activo #3 por dos períodos, para luego venderlo e invertir los resultados a corto plazo: es lo mismo que comprar dicho activo y mantenerlo hasta el final.

El problema para este período consiste en maximizar el valor esperado de la función de utilidad indirecta $J[W_1,1]$:

$$E_0 J(\tilde{W}_1, 1) \equiv E_0 \text{Max } E_1 J[\tilde{W}_2, 2] = E_0 U[\tilde{W}_1 (\tilde{\alpha}^* (\tilde{z}_2 - {}_1r_2)\, {}_2\tilde{r}_3] \tag{19}$$

donde α^* es la decisión óptima que será tomada en t=1, en función del "estado de la naturaleza" que se dé en ese momento.

La riqueza terminal para t=1 es incierta y será una función de las proporciones invertidas en los tres activos disponibles:

$$\tilde{W}_1 = W_0 ({}_0r_1 + \alpha_{02} [(b_{02}\, {}_1\tilde{r}_2)^{-1} - {}_0r_1] + \alpha_{03} [(b_{03}\, {}_1\tilde{r}_3)^{-1} - {}_0r_1]) \tag{20}$$

16 Esto sirve para ilustrar un caso en que si un afiliado se cambia de AFP en base al resultado observado ex-post, estaría perdiendo su tiempo. En efecto, si una AFP comprara el papel largo y la tasa de interés (entre t=1 y t=2) fuera alta, esta AFP mostraría un mal resultado. Si el afiliado a dicha AFP decidiera cambiarse a otra que invirtió a corto plazo (y por ende no mostró un mal resultado), al final se daría cuenta de que nada ganó al cambiarse, ya que la rentabilidad observada para el último período es la misma en ambas AFP.

Recuérdese además que $W_3 \equiv W_1 (\alpha^* (\tilde{z}_2 - {}_1r_2) + {}_1r_2)\, {}_2\tilde{r}_3$

Expresado en términos de tasas *forward*, la riqueza en t=1 puede escribirse como:

$$\tilde{W}_1 = W_0\, {}_0r_1 \left(1 + \alpha_{02} \left(\frac{{}_1f_3}{{}_1\tilde{r}_3} - 1\right) + \alpha_{03} \left(\frac{{}_1f_2}{{}_1\tilde{r}_2} - 1\right)\right) \tag{21}$$

donde se han utilizado las definiciones ${}_1f_3 \equiv {}_0r_3/{}_0r_1 \equiv (b_{03}\, {}_0r_1)^{-1}$ y ${}_1f_2 \equiv {}_0r_2/{}_0r_1 \equiv (b_{02}\, {}_0r_1)^{-1}$. El problema que se enfrenta en t=0 es maximizar (19) considerando la definición en (21), con respecto a las proporciones invertidas α_{02} y α_{03}. Las condiciones de primer orden son:

$$E_0 \{U'(\tilde{W}_3 \left(\frac{{}_1f_2}{{}_1\tilde{r}_2} - 1\right)\ {}_1\tilde{r}_2\ {}_2\tilde{r}_3 \} = 0 \tag{22}$$

$$E_0 \{U'(\tilde{W}_3 \left(\frac{{}_1f_3}{{}_1\tilde{r}_3} - 1\right)\ {}_1\tilde{r}_2\ {}_2\tilde{r}_3 \} = 0 \tag{23}$$

Las ecuaciones anteriores pueden manipularse para dar un resultado más comprensible intuitivamente. Para obtener esta simplificación, primero deben tenerse en cuenta las condiciones de primer orden para el problema que es resuelto en t=1. La ecuación (15) dice que la utilidad marginal esperada de la inversión a corto plazo debe ser igual a la utilidad marginal esperada de invertir a largo plazo: $E_1\{{}_1\tilde{r}_3\, U'(W_3)\} = E_1\{{}_1\tilde{r}_2\, {}_2\tilde{r}_3\, U'(W_3)\}$. Por la Ley de Expectativas Iteradas, esto también debe cumplirse con respecto al operador E_0. Juntando este resultado con (22) y (23), se obtiene que α_{02} y α_{03} se ajustarán hasta que:

$${}_1f_3 - E_0\{{}_1\tilde{r}_3\} = \frac{cov_0(U', {}_1\tilde{r}_3)}{E_0\{U'\}} \tag{24}$$

$${}_2f_3 - E_0\{{}_2\tilde{r}_3\} = \frac{cov_0(U', {}_2\tilde{r}_3)}{E_0\{U'\}} \tag{25}$$

En ambos casos se da que, si existe un premio por liquidez, será conveniente elegir las proporciones invertidas en los activos con tal de que la utilidad marginal covaríe positivamente con la tasa de interés respectiva. Es importante notar que, puesto que U' es decreciente, la covarianza con la utilidad marginal tiene el signo contrario a la covarianza con la riqueza. Por ejemplo, una covarianza positiva con la utilidad marginal significa una covarianza negativa con la riqueza terminal ($cov_0(W_3, {}_1\tilde{r}_3) < 0$ y $cov_0(W_3, {}_2\tilde{r}_3) < 0$. Esto lleva a concluir que **el signo del premio liquidez (definido en**

(22') y (23')) **será el signo opuesto al de la covarianza entre las tasas *spot* futuras y la riqueza terminal.** El hecho anterior puede utilizarse para caracterizar las políticas óptimas de inversión. A continuación se presenta un cuadro con posibles riquezas terminales en función de las estrategias de inversión seguidas junto a las covarianzas de dichas estrategias de inversión con las tasas *spot* futuras. Las covarianzas fueron obtenidas bajo un modelo específico para las tasas de interés presentado en el Anexo 1, donde se establecen condiciones suficientes para estos resultados. En lo substancial, dicho modelo supone que las tasas *forward* son una proporción fija las tasas *spot* esperadas para el período siguiente.

Cualquier otra estrategia factible es una combinación de dos o más de las estrategias anteriores.

Dadas las expresiones para la riqueza terminal derivadas de distintas estrategias, puede asociarse el signo del premio por liquidez con el signo de la covarianza de la riqueza con las tasas de interés *spot* futuras. En el Cuadro 2 puede apreciarse que las covarianzas son todas positivas, excepto para las estrategias #5 y #6. Esto quiere decir que *las estrategias de invertir inicialmente los recursos a corto o mediano plazo son óptimas sólo cuando el premio por liquidez para los períodos siguientes es negativo.* Sólo en el caso anterior el riesgo de reinversión implícito en las estrategias de corto y mediano plazo es compensado por un mayor retorno esperado, lo que las hace relativamente convenientes.

En el caso de las estrategias #5 y #6, se parte con todos los recursos invertidos en el papel largo (b_3). Esto resulta adecuado cuando el premio por liquidez es cero para el período completo incluso si existe la posibilidad de que en el último período haya un castigo por liquidez. Si *ex post* resulta haber un castigo por liquidez para el último período, entonces puede venderse el papel largo e invertir los recursos a corto plazo. La clave para entender este resultado es que, incluso si *ex post* sube la tasa de interés dando origen a una pérdida de capital, cuando existe un premio por liquidez en promedio es más rentable invertir a largo que a corto plazo. Por lo tanto, un afiliado que tenga aversión al riesgo estará dispuesto a asumir el riesgo de cambios en las tasas de interés, ya que en promedio se obtiene un retorno mayor y más seguro cuando los fondos se invierten a largo plazo. Para dar más claridad a este punto, puede compararse la estrategia #1 con la estrategia #5. La estrategia #1 no tiene riesgo de cambios en las tasas de interés mientras la #5 tiene dicho riesgo en la mayor cuantía posible. La razón de riquezas terminales (#5 dividido por #1) resulta ser ${}_1f_3/{}_1\tilde{r}_3$. Si existe premio por liquidez, entonces $({}_1f_3/E_0\,{}_1\tilde{r}_3)$ >1, lo que implica que $E_0({}_1f_3/{}_1\tilde{r}_3) > {}_1f_3/E_0\,({}_1\tilde{r}_3) > 1$[17]. El resultado es formalmente idéntico al comparar la estrategia #2 con la #6. Esto significa que **en promedio**, cuando hay premio por liquidez, se termina con una riqueza terminal mayor al invertir a largo plazo. Si a esto se le suma aversión al riesgo y un horizonte de evaluación lejano, esta estrategia es dominante.

17 Esto ocurre porque $1/{}_1r_3$ es una función convexa de ${}_1r_3$.

CUADRO 2

ESTRATEGIAS BASICAS DE INVERSION

	α_{02}	α_{03}	α^*	W_3	$cov_0(W_3,{}_1\tilde{r}_3)$	$cov_0(W_3,{}_2\tilde{r}_3)$
Est. #1	0	0	0	$W_0\,{}_0r_1\,{}_1\tilde{r}_2\,{}_2\tilde{r}_3$	>0	>0
Est. #2	0	0	1	$W_0\,{}_0r_1\,{}_1\tilde{r}_3$	>0	>0
Est. #3	1	0	0	$W_0\,{}_0r_1\,{}_1f_2\,{}_2\tilde{r}_3$	>0	>0
Est. #4	1	0	1	$W_0\,{}_0r_1\,{}_1f_2\,({}_1\tilde{r}_3/{}_1\tilde{r}_2)$	>0	>0
Est. #5	0	1	0	$W_0\,{}_0r_1\,{}_1f_3\,({}_1\tilde{r}_2\;{}_2\tilde{r}_3/{}_1\tilde{r}_3)$	0	>0
Est. #6	0	1	1	$W_0\,{}_0r_1\,{}_1f_3$	0	0

En palabras, las estrategias consisten en:

#1: invertir todo a corto plazo en t=0 y volver a invertir a corto plazo en t=1 (rolling over).

#2: invertir todo a corto plazo en t=0 y luego invertir todo a largo plazo (comprar b_3) en t=1.

#3: invertir todo a mediano plazo en t=0 (comprar el instrumento b_2) y luego venderlo en t=1 para invertir el resultado a corto plazo.

#4: invertir todo a mediano plazo en t=0 (comprar el instrumento b_2), venderlo en t=1 y contratar la tasa larga entre t=1 y t=3 (comprar b_3 en t=1).

#5: invertir todo a largo plazo (comprar b_3), venderlo al cabo de un período e invertir el resultado a corto plazo.

#6: invertir todo a largo plazo sin cambiar la posición hasta el final.

La discusión anterior ha permitido mostrar que, cualitativamente, los resultados son similares a aquellos obtenidos en el Caso 1. Incluso cuando no hay premio por liquidez, las inversiones de las AFP deberían estar sesgadas hacia el horizonte de jubilación del afiliado. La conclusión es aun más fuerte suponiendo que existen premios por liquidez. En otras palabras, los resultados encontrados hasta el momento permiten afirmar que para un afiliado con un horizonte de tiempo distante, que a su vez tenga aversión al riesgo, *es más importante el riesgo de reinversión que el de cambios en las tasas de interés, lo que unido a la existencia de un premio por liquidez hace más conveniente la inversión en instrumentos de largo plazo.*

Caso 3: Acciones vs. Renta Fija

Desde el surgimiento del Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM) de Sharpe [12], Lintner [10] y otros, el problema de la composición óptima de la cartera en términos de acciones e instrumentos de renta fija ha sido ampliamente estudiado.

Una primera conclusión importante obtenida en la literatura es que, dado que hay un premio por riesgo, cualquier inversionista que tenga aversión al riesgo debería estar dispuesto a invertir al menos una pequeña parte de su riqueza en acciones. El porcentaje de la riqueza invertido en acciones aumenta para inversionistas con mayor tolerancia al riesgo.

Una segunda conclusión importante es que los portfolios de los inversionistas estarán diversificados. En otras palabras, la composición de las carteras de los inversionistas será tal que no pueda obtenerse el mismo retorno esperado con una menor varianza.

Por otra parte, la conveniencia de una estrategia dinámica de inversión (en acciones y renta fija) que suponga que el negocio consiste en anticiparse a los vaivenes del mercado o encontrar instrumentos subvaluados depende de la cantidad de información que se crea reflejada en los precios de las acciones, vale decir, del grado de eficiencia del mercado. Una alternativa simple consiste en "comprar y mantener", la que supone que no se tiene información privilegiada, o que, si existe, al actuar en base a ella los precios se ajustan antes de que puedan obtenerse los beneficios esperados. Por el contrario, si el mercado mostrara signos de ineficiencia, entonces este tipo de estrategias dinámicas tendrían mayor justificación.

En base a datos chilenos recientes, Walker [16] encuentra evidencia de que, particularmente para las AFP de mayor tamaño, no ha sido posible ganarle a estrategias simples de comprar y mantener. Esto sugiere una tercera conclusión, de carácter preliminar: las estrategias de inversión para los fondos de pensiones deberían ser relativamente pasivas. Esta recomendación sigue siendo válida en un mercado ineficiente, cuando los costos de transacción son altos en relación a los beneficios que pueden obtenerse al explotar las ineficiencias.

Bajo las condiciones anteriores, una estrategia adecuada consistiría en definir el nivel de riesgo deseado, para luego comprar un portfolio bien diversificado de acciones y mantenerlo con pocas variaciones a través del tiempo, reinvirtiendo en las mismas acciones los dividendos recibidos.

El planteamiento de esta estrategia es idéntico a aquel desarrollado en la sección III.2. En particular, la ecuación (8) sigue representando la condición de primer orden. Un caso especial de la condición (8) es cuando se sigue una estrategia pasiva de inversión en acciones (comprar y mantener, sugerida por la hipótesis de mercados eficientes) e instrumentos de renta fija (se compra un bono largo con un solo pago final, sugerida por los resultados encontrados anteriormente). En este caso las condiciones de primer orden son:

$$E_0 \, {}_0\tilde{Z}_T - {}_0r_T = \frac{\mathrm{cov}_0(U'(\tilde{W}_T), {}_0\tilde{Z}_T)}{E_0 \, U'(\tilde{W}_T)} \tag{26}$$

donde ${}_0Z_T$ es el retorno total de invertir en acciones y ${}_0r_T$ es el retorno total de invertir en un instrumento de renta fija de largo plazo. En este caso se da un resultado similar a los encontrados anteriormente. Si el premio por riesgo de largo plazo es positivo ($E_0\, {}_0Z_T > {}_0r_T$), es conveniente invertir en acciones. ¿Qué porcentaje debería invertirse en acciones? En general, esto depende del grado de aversión al riesgo, del premio por riesgo y de la variabilidad en los precios de las acciones. Siempre será posible encontrar un grado de aversión al riesgo lo suficientemente alto como para que la estrategia conveniente sea invertir un "bajo" porcentaje en acciones. No obstante, es importante destacar que el premio por riesgo total crecerá en función del horizonte de evaluación. Por ejemplo, si ${}_0Z_T$ se distribuye lognormal, entonces:

$$ {}_0\tilde{Z}_T = \exp \{ \sum_{t=1}^{t=T} {}_{t-1}\tilde{Z}_t \} \equiv \exp \{ T\bar{Z} \} \tag{27} $$

donde el último término proviene de la definición de promedio muestral. Existe evidencia como para afirmar que los retornos accionarios mensuales no están correlacionados a través del tiempo para el caso chileno (ver Walker [17]). Por lo tanto, para efectos de ilustrar el punto, puede suponerse que el retorno instantáneo promedio se distribuye normal($\mu,\sigma^2/T$). Asimismo, definiendo ${}_0r_T \equiv \exp\{Tr\}$, se obtiene una expresión para el premio por riesgo:

$$ E_0\, {}_0\tilde{Z}_T - {}_0r_T = \exp \{ Tr \} [\exp \{T(\mu - r + \frac{\sigma^2}{2}\} - 1] \tag{28} $$

Puede apreciarse que el premio por riesgo crece a tasas exponenciales junto con el horizonte de inversión. También puede apreciarse que, como las pérdidas están acotadas y las ganancias son ilimitadas, el premio por riesgo total esperado crece con la varianza. Esta es una consideración netamente técnica, independiente del "equilibrio de retornos" que exista en el mercado.

A pesar de lo anterior, también es cierto que la varianza de la distribución aumenta con T. El coeficiente de variación (la desviación estándar dividida por la media) para la distribución de probabilidad anterior es $(\exp\{T\sigma^2\}-1)^{1/2}$. Como proporción de la media, la varianza aumenta con T. Esto significa que la optimalidad de aumentar la proporción invertida en acciones cuando se alarga el horizonte de inversión depende del grado de aversión al riesgo. Si hay suficiente tolerancia al riesgo, un mayor T implica aumentar la porporción invertida en acciones. Por último, vale la pena destacar que esta puede ser una buena forma de alargar los plazos de las carteras de los fondos de pensión.

IV. Políticas de Inversión Adecuadas: Conclusiones a la Luz de la Evidencia Empírica Chilena

El análisis de los tres casos especiales anteriores ha permitido obtener algunas conclusiones.

1. Inversión en renta fija

El análisis de los Casos 1 y 2 ha permitido concluir con bastante generalidad que, para un fondo de pensión cuyos afiliados tengan un horizonte de jubilación distante, el riesgo de cambios en las tasas de interés es irrelevante, importando sólo el riesgo de reinversión. Si a esto se le suma la existencia de un premio por liquidez, se llega a una conclusión un tanto extrema: conviene invertir todos los fondos a largo plazo.

¿Existe un premio por liquidez en Chile? El Gráfico 2 parece indicar que sí. Allí se grafica la Tasa Interna de Retorno (TIR) promedio de los instrumentos de renta fija contra el plazo de vencimiento de los papeles. En rigor, los instrumentos utilizados para construir la curva deberían ofrecer un solo pago al vencimiento, y este no es el caso. Por ejemplo, la tasa *spot* que aparece para los papeles que vencen entre 8,1 y 10 años (alrededor de 7,2%) es en realidad un promedio de las tasas *spot* observadas para pagos recibidos hasta la fecha de vencimiento, incluyendo pagos intermedios. En otras palabras, la estructura de tasas de interés aparecería demasiado "plana" en relación a su aspecto real. Por su parte, las tasas *forward* fueron calculadas como la razón entre el interés total (bruto) ganado hasta la fecha "t" (donde t es el punto medio del rango de plazos) dividido por el interés total bruto hasta "t-1", a tasas anualizadas.

Dada la definición utilizada aquí para el premio por liquidez, es importante tener presente que una estructura creciente de tasas de interés no significa necesariamente que exista un premio por liquidez. Esto es cierto sólo cuando la tasa de interés *spot* actual es un buen indicador del valor esperado de la tasa de interés *spot* futura, como por ejemplo, cuando el valor esperado es constante e igual al valor observado para la tasa *spot* hoy. Entonces, suponiendo que la tasa de interés promedio observada para el corto plazo sea un buen predictor de las tasas de interés *spot* futuras, puede concluirse que existe un premio por liquidez. Esto supone una distribución de probabilidad estable para las tasas de interés *spot* en el futuro, por lo que su valor esperado puede estimarse con el promedio muestral.

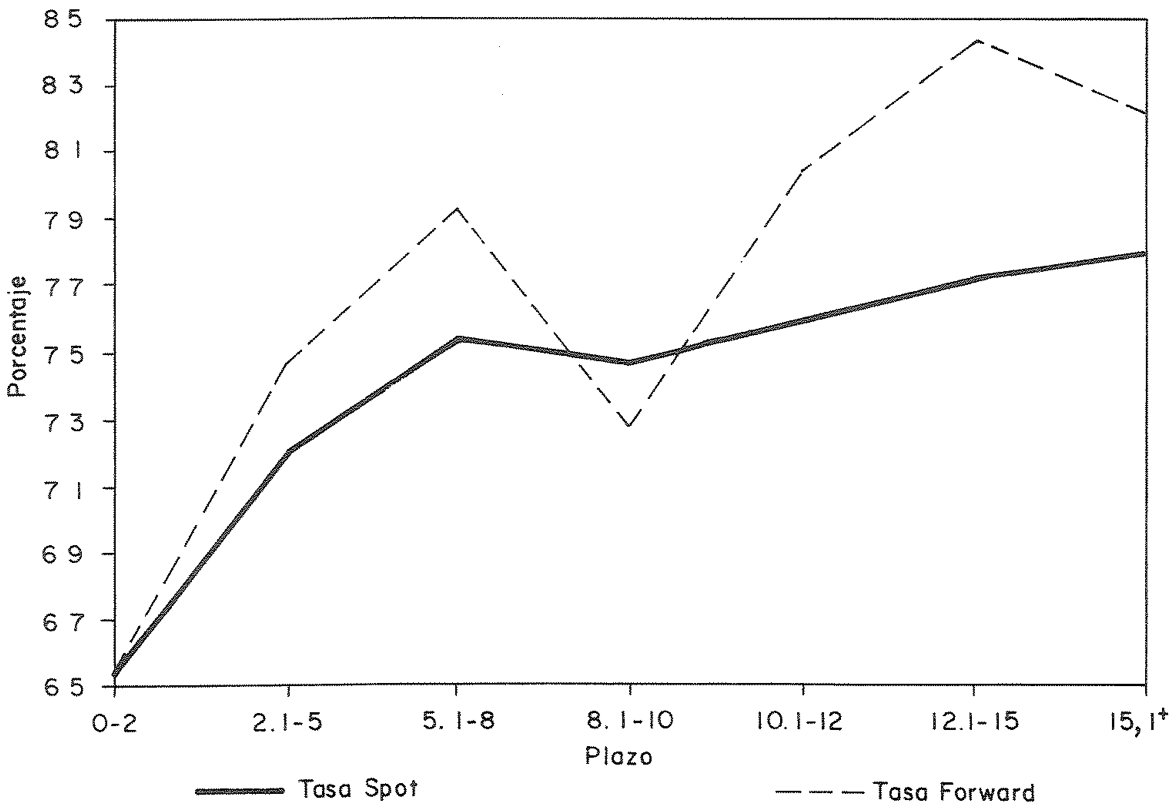
A pesar de todos los problemas anteriores, el Gráfico 2 parece mostrar una estructura de tasas de interés creciente y las tasas *forward* implícitas siempre son superiores a la tasa de interés *spot* de 0-2 años. Dado lo anterior, la recomendación obvia es que, para mayor seguridad y rentabilidad de la inversión a largo plazo, debería aumentarse el plazo promedio de las carteras de las AFP. *A priori*, no parece adecuado un plazo medio de 3-3,9 años para un inversionista con un horizonte de jubilación de 30 años. En base al Gráfico 2, tentativamente puede afirmarse que los sacrificios en rentabilidad promedio anual de largo plazo puede ser del orden de 0,1%-1,2% anual (comparando la máxima tasa *forward* y la mínima con la tasa para 2,1-5 años plazo). A su vez, este aumento de rentabilidad podría obtenerse con una mayor seguridad a largo plazo en la inversión.

Pueden obtenerse datos más precisos para estimar el premio por liquidez. El TIR promedio mensual base anual del PDP-10 entre junio de 1984 y agosto de 1990 fue de 7,04%. Este papel es de largo plazo, pues paga sólo intereses semestrales durante su vida, pagando el principal al cabo del año 10. Su duración es de aproximadamente 8 años. Asimismo, las letras hipotecarias del Banco del Estado a 12 años, entre enero de 1984 y agosto de 1990, rindieron un TIR anual promedio de 7,16% (duración aproximada de 5 años)[18]. Con estos datos pueden calcularse las tasas *forward* implícitas:

18 Fuente datos originales: HABITAT.

GRAFICO 2

ESTRUCTURA DE TASAS
Promedio 1983-1989



Estructura de tasas de interés. Promedio ponderado mensualmente por volumen transado, 1983-1989 (TIRM).
Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la Bolsa de Comercio de Santiago.

TASAS *FORWARD* PROMEDIO BASE ANUAL
Junio de 1984 - Agosto de 1990

Plazo	Tasa Prom.
0 - 0,25 años	6,70%
0,25 - 5 años	7,18%
5 - 8 años	6,84%

Comparado con la tasa de interés UF[19] a 90 días en base anual, los premios por liquidez estimados estarían entre 0,14% y 0,48%, respectivamente. Ambos porcentajes representan aproximadamente la pérdida anual derivada de una política de inversión de corto plazo. En cuarenta años, la diferencia de tasas implica una diferencia de riquezas acumuladas entre 5,4% y un 19,7% del valor del fondo[20].

2. *Inversión en Acciones*

La inversión en acciones por parte de los fondos de pensiones se encuentra restringida por ley. Considerando todos los límites a la inversión en acciones, Iglesias [6] encuentra que los límites efectivos fluctúan entre un 14,8% para los fondos de pensión de mayor tamaño, hasta alrededor de 30% para los de menor tamaño. A julio de 1990, alrededor de un 10% de los fondos de pensiones estaban invertidos en acciones.

No es fácil precisar qué porcentaje de inversión en acciones es apropiado, puesto que depende del grado de aversión al riesgo de los afiliados (o del grado de aversión al riesgo de la autoridad económica y de los propios administradores). Sin embargo, el Gráfico 3 muestra las proporciones óptimas a ser invertidas en acciones, en función del grado de aversión al riesgo.

Los datos utilizados para construir el gráfico son consistentes (pero conservadores) con respecto a datos históricos chilenos. Coloma [4] muestra que si se hubiese partido con 1 UF en noviembre de 1975 invertida en acciones (Indice de Precios Selectivo de Acciones, IPSA, corregido por dividendos mediante serie relacionada en Walker, op.cit.), en agosto de 1988 se habría acumulado un total de 40,54 UF. Esto da una tasa promedio anualizada del orden del 33% anual. Aplicando el retorno real del IPSA desde esa fecha hasta diciembre de 1989, se llega a (aproximadamente) 56 UF. Esto representa una rentabilidad del mismo orden anterior.

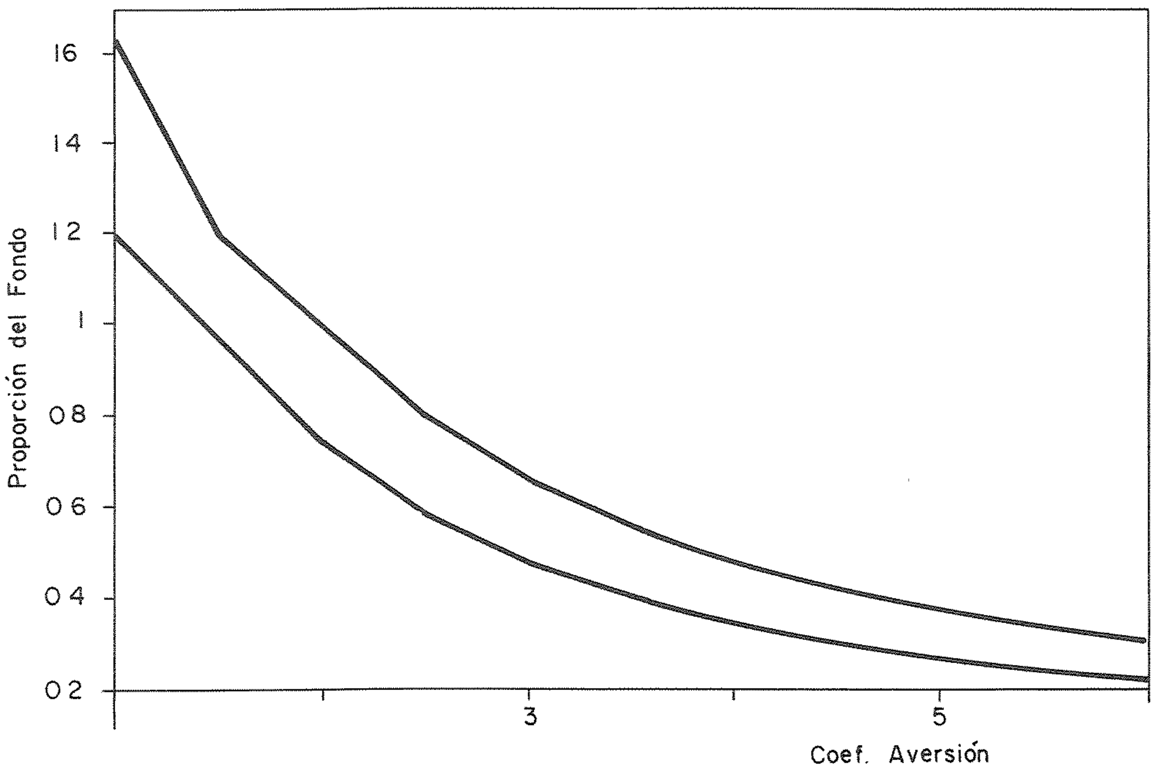
En base al gráfico, y dados los premios por riesgo, puede concluirse que los porcentajes invertidos en acciones actualmente son consistentes con una alta aversión al riesgo. Litzenberger y Ronn [11] encontraron para Estados Unidos un coeficiente de aversión relativa al riesgo de 4,22. Con ese parámetro, y dado el resto de los supuestos, correspondería invertir alrededor de un 30% en acciones. En este sentido, puede concluirse que el porcentaje actualmente invertido en acciones es demasiado bajo.

19 La Unidad de Fomento (UF) es una unidad de medida monetaria que se reajusta según la variación del Indice de Precios al Consumidor.

20 Es curioso notar en el gráfico anterior y en los resultados presentados, que justo para un horizonte de ocho años las tasas de interés parecen ser menores. Puede deberse a un problema de datos, con lo que el premio de 0,14% podría estar subestimado.

GRAFICO 3

INVERSION EN ACCIONES Y AVERSION AL RIESGO
(T = 60 meses; Sigma = 0.1)



Supone: retornos accionarios son iid lognormal; función de utilidad con aversión al riesgo relativa constante; política de inversión de comprar y mantener; tasa libre de riesgo anual 7,5%; premios por riesgo: 12,2% (curva inferior) y 19,6%.

V. Posibles Limitaciones del Analisis

Ciertamente, las conclusiones de los puntos anteriores sufren de una serie de limitaciones por el solo hecho de haber sido obtenidas a partir de un modelo simplificado. A continuación se analiza hasta qué punto los resultados específicos encontrados aquí pueden generalizarse.

1. El afiliado representativo que se mantiene en la misma AFP

Uno de los supuestos restrictivos consiste en el afiliado representativo con horizonte de jubilación distante que se mantiene en la misma AFP hasta su jubilación. Bajo este supuesto se llega a la conclusión extrema de que toda la cartera de renta fija de un fondo de pensión debería estar invertida a un único plazo, igual al horizonte de jubilación del afiliado. Asimismo, el porcentaje óptimo invertido en acciones dependerá del grado de aversión al riesgo de este afiliado.

Cuando hay muchos afiliados con diversos horizontes y distintos grados de aversión al riesgo, la conclusión anterior pierde validez general. No obstante, en la medida que (casi) todos los afiliados tengan un horizonte superior a, por ejemplo, 10 años, sigue siendo válida la recomendación de alargar la cartera hasta alcanzar un plazo similar a aquél. El problema del grado de aversión al riesgo, sin embargo, es más complicado.

En otra línea de argumentación, podría pensarse que el horizonte de inversión de las AFP debería ser corto porque los afiliados tienen la opción de cambiarse en cualquier momento de AFP. Este es un argumento falaz, porque al cambiarse de AFP el afiliado transfiere el saldo acumulado, que se valoriza a precios de mercado. Entonces, sólo si los instrumentos largos fueran sistemáticamente subvaluados por el mercado sería inconveniente la estrategia de inversión a largo plazo. Aun así podría argüirse que el afiliado que tiene la opción de cambiarse de AFP prefiere evitar pérdidas de capital por alzas en las tasas de interés, las que se dan en mayor medida en carteras largas. Sin embargo es fácil demostrar que no es óptimo para el afiliado cambiarse a otra AFP que no haya mostrado dichas pérdidas tan sólo porque esta última mantuvo una cartera más corta (ver nota 16).

De cualquier modo, el problema siempre puede plantearse al revés: que la AFP defina un nivel de riesgo y plazo deseados y que los afiliados se autoseleccionen según sus preferencias.

Por lo tanto se aprecia que, en términos generales, las conclusiones mantienen su validez a pesar de que este supuesto es restrictivo.

2. *Mayor riesgo de crédito en los instrumentos de mayor plazo*

El análisis anterior simplificó el problema de la inversión en renta fija suponiendo que los instrumentos financieros son libres de riesgo de no pago.

No obstante, también se consideró la inversión en acciones, las que por definición son más riesgosas que los instrumentos de renta fija emitidos por las mismas empresas. Combinando activos sin riesgo de no pago con acciones pueden diseñarse portfolios con las características deseadas de riesgo y retorno esperado. Una de tales combinaciones será similar a un bono riesgoso. Por lo tanto, no considerar bonos riesgosos en el análisis no parece ser gravitante en las conclusiones.

3. *Incentivos y restricciones a las AFP*

El análisis no contempló los incentivos y restricciones que afectan a las AFP y a sus afiliados. Estos van desde restricciones e incentivos legales hasta restricciones e incentivos impuestos por los mercados. Con ellos, puede ocurrir que los incentivos a las administradoras se contrapongan con objetivos que podrían considerarse adecuados para los fondos de pensiones o bien que la legislación o los mercados impidan el cumplimiento de objetivos deseables. Ejemplos de tales problemas son: ausencia de suficientes oportunidades de inversión; restricciones legales a la inversión por emisor e instrumento; la norma de rentabilidad mínima, el encaje y la forma en que se financia este último; los sistemas de valoración; la información a los afiliados y la capacidad de análisis o interés en el tema por parte de estos últimos.

A juicio del autor, el cúmulo de problemas anteriores no invalida las conclusiones. Por el contrario, puede ser útil revisar dichos problemas a la luz de los resultados encontrados aquí. A modo de ejemplo está la norma de la rentabilidad mínima exigida a las AFP. Esta obliga a las AFP a transferir parte de su encaje al fondo de pensiones toda vez que la rentabilidad obtenida en un año determinado esté "significativamente" por debajo del promedio[21]. Esto implica un fuerte desincentivo legal a las administradoras a alejarse del promedio del sistema en cuanto a su cartera de inversiones. De este modo, aumentar el plazo de la cartera o el porcentaje invertido en acciones puede ser riesgoso desde el punto de vista de una AFP, aunque para el afiliado sea óptimo. Esto sugiere que, para su cómputo y en caso de ser necesaria, la rentabilidad mínima debería considerar explícitamente el plazo de las inversiones en renta fija y el riesgo involucrado en la cartera accionaria.

VI. Comentarios Finales

Vale la pena reiterar algunas de las conclusiones expuestas aquí.

En cuanto a la política óptima de inversión en renta fija que maximiza una función de utilidad esperada con horizonte lejano y aversión al riesgo, se concluye que, en la medida que exista un premio por liquidez conviene fijar el plazo de la cartera cercano al horizonte de jubilación de los afiliados. Para estos afiliados sería más importante el riesgo de reinversión que el riesgo de cambios en las tasas de interés. La evidencia empírica, por su parte, es consistente con la existencia de premios por liquidez, lo que sugiere la conveniencia de mantener carteras "largas".

De cualquier modo, para determinar la composición óptima de la cartera según su plazo, no interviene directamente la tasa de interés vigente al momento de tomar la decisión. Lo relevante es comparar la tasa de interés esperada para los períodos siguientes con las tasas (*forward*) de interés implícitas para períodos futuros en los precios de mercado actuales de los instrumentos de renta fija. Por ejemplo, en una época de altas tasas de interés, cuando se espera que caigan a futuro, es posible que las tasas *forward* se encuentren altas, por lo que convendría invertir largo. Pero debe tenerse en cuenta que la información que permite predecir una caída en las tasas de interés de alguna manera puede estar reflejada en las tasas *forward* de los instrumentos largos. En este caso no es clara la conveniencia de "acortar" (alargar) las carteras a la espera de alzas (bajas) en las tasas de interés, a menos que las expectativas se basen en información privilegiada y que las decisiones que se derivan de ella pasen inadvertidas en el mercado.

Por otro lado, la política óptima de inversión en acciones consiste en mantener portfolios diversificados. Pero qué porcentaje del total del fondo debe invertirse en acciones es una pregunta sin respuesta única, ya que ésta depende del grado de aversión al riesgo de los afiliados. Si los premios por riesgo mostrados históricamente son buenos predictores del futuro, los porcentajes invertidos en acciones serían óptimos para afiliados con muy alta aversión al riesgo.

21 El Artículo 37 del DL 3.500 establece la rentabilidad mínima como la cantidad menor entre 2% por debajo del promedio de los fondos de pensiones y el 50% de la misma cantidad, calculado en base a la rentabilidad de los últimos 12 meses.

REFERENCIAS

Arrow, K. (1965). "The Theory of Risk Aversion", Cap. 3, Essays in the Theory of Risk Bearing.

Bellman, R. (1957). Dynamic Programming. Princeton, N.J., Princeton University Press.

Brown, K., W.V. Harlow y Sena M. Tinic (1989). "How Rational Investors Deal with Uncertainty (Or, Reports on the Death of Efficient Markets are Greatly Exaggerated)". *Journal of Applied Corporate Finance* Vol. 2, No. 3 (octubre), pp.45-59

Coloma, F. (1988). "Rentabilidad de Distintas Formas de Inversión (1975-1988)". Mimeo. Instituto de Economía. Pontificia Universidad Católica de Chile (septiembre).

Copeland, T. E. y J. Fred Weston (1983). Financial Theory and Corporate Policy. Segunda edición. Addison-Wesley.

Diamond, P.A. (1977). "A Framework for Social Security Analysis". *Journal of Public Economy* 8 pp. 275-298.

Iglesias, A. (1990). "Estrategias de Inversión de los Fondos de Pensiones". Charla presentada en el Tercer Congreso de Finanzas, Escuela de Administración, Pontificia Universidad Católica de Chile (agosto). (A ser impreso en Anales del Tercer Congreso de Finanzas).

Ingersoll, Jonathan E. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman and Littlefield, New Jersey.

Jensen, M. (1978). "Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency", *Journal of Financial Economics* 6, pp. 95-101.

Lintner, J. (1965). "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets." *Review of Economics and Statistics* 47 pp.13-37.

Litzengerger, R.H. y E.I. Ronn (1986). "A Utility-Based Model of Common Stock Price Movement" *Journal of Finance*, Vol XLI, No.1 (Marzo).

Sharpe, W. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". *Journal of Finance* 19, pp 425-42 (Septiembre).

Trainer, F.H., D. Levine y J.A. Reiss (1984). "A Systematic Approach to Bond Management in Pension Funds". *Journal of Portfolio Management* (primavera).

Valdés, S. y E. Navarro (1990). "Subsidios Cruzados en el Seguro de Invalidez y Sobrevivencia". *Documento de Trabajo* Nº 130. Instituto de Economía, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Vergara, R. (1990). "Government Inability to Commit as a Rationale for Social Security". Disertación Ph.D. sin publicar, Harvard University (septiembre).

Walker, E. (1991). "Evaluación del Desempeño Financiaro de las AFP. ¿Es Desventajoso ser Grande? ". Por aparecer en *Documentos de Trabajo*, Escuela de Administración. PUC.

Walker, E. (1988). "Inflation, Multiple Goods and the CAPM. Theory and Estimation under Thin Trading" (Tesis Doctoral). *Trabajo Docente* 188-01, Escuela de Administración, Pontificia Universidad Católica de Chile.

ANEXO

UN MODELO PARA LAS TASAS DE INTERES

Las covarianzas del Cuadro 2 fueron obtenidas en base a los siguientes supuestos, los que constituyen condiciones suficientes (pero no necesarias) para la obtención de los signos descritos.

Tasas Forward

Se supone que las tasas *forward* son proporcionales a las tasas de interés *spot* esperadas:

$$ {}_1f_2 = \pi_2 E_0\, {}_1\tilde{r}_2 \qquad (1)$$

$$ {}_2f_3' = \pi_3 E_1\, {}_2\tilde{r}_3 \qquad (2)$$

donde ${}_2f_3'$ representa la tasa de interés *forward* para el período t=2 a t=3 que se encontrará vigente en t=1. Los π son proporciones fijas. Si $\pi > 1$, hay un premio por liquidez. A su vez, la tasa de interés *forward* vigente en t=0 para el período t=2 a t=3 es

$$ {}_2f_3 = \pi_3 E_0\, {}_2\tilde{r}_3 = E_0\, {}_2f_3' \qquad (3)$$

Tasas Spot

Primero se descomponen las tasas de interés entre una parte que es esperada en base a la información disponible y una "sorpresa":

$$ {}_1\tilde{r}_2 \equiv (E_0\, {}_1\tilde{r}_2)\, \tilde{\varepsilon}_1 \qquad (4)$$
$$ {}_2\tilde{r}_3 \equiv (E_1\, {}_2\tilde{r}_3)\, \tilde{\varepsilon}_2 \qquad (5)$$
$$ E_1\, {}_2\tilde{r}_3 \equiv (E_0\, {}_2\tilde{r}_3)\, \tilde{u} \qquad (6)$$

donde $E\varepsilon_1 = E\varepsilon_2 = Eu = 1$. Además, para que haya consistencia con la ley de expectativas iteradas, se supone que ε_2 es independiente de u y de ε_1. Sin embargo, u y ε_1 pueden estar correlacionados.

Los supuestos anteriores son suficientes como para garantizar que $cov_0(W_3, {}_1r_3)$ tenga los signos expresados en el Cuadro 2 para las estrategias #1, #2, #5 y #6. Asimismo, bajo los supuestos anteriores $cov_0(W_3, {}_2r_3)$ tiene el signo descrito en el Cuadro 2 para las estrategias #3, #4, #5 y #6. Con los supuestos anteriores no puede determinarse el signo de $cov_0(W_{3,1}r_3)$ para las estrategias #3 y #4. Tampoco puede determinarse el signo de $cov_0(W_{3,2}r_3)$ para las estrategias #1 y #2.

Un proceso estocástico para evolución de las tasas de interés

Con el objeto de obtener los signos restantes para las covarianzas del Cuadro 2, se supone el siguiente proceso estocástico para las tasas de interés brutas (uno mas la tasa de interés):

$$_k\tilde{r}_{k+1} = (_{k-1}\tilde{r}_k)^{\beta}\ \mu^{1-\beta}\ \tilde{\varepsilon}_k \tag{7}$$

donde ε_k se distribuye i.i.d. Lognormal con los siguientes momentos:

$$E\varepsilon_k^t = \exp\left\{\frac{\sigma^2\ t(t-1)}{2}\right\} \tag{8}$$

Aquí σ^2 es la varianza de $\ln(\varepsilon)$. De esta forma se da, por ejemplo, que $E_1(_2r_3) = (_1r_2)^{\beta}\ \mu^{1-\beta}$, vale decir, si $_1r_2 = \mu$ no se espera que cambie la tasa de interés *spot* para el período siguiente. A su vez, ß=1 implica un *random walk* para las tasas de interés y ß=0 implica que las tasas de interés son i.i.d. Con esta especificación además puede encontrarse una expresión para u en (6):

$$u = \frac{\varepsilon^{\beta}}{E\varepsilon^{\beta}} \tag{9}$$

Con el conjunto de supuestos anteriores, es posible demostrar que para todo $1 \geq ß \geq 0$, las covarianzas en al Cuadro 2 tienen el signo descrito. Vale decir, los resultados presentados en este artículo son válidos para un amplio espectro de modelos para la determinación las tasas de interés. Las demostraciones formales no se presentan aquí en aras de brevedad y porque no aportan mayormente al análisis.