

LOS PRECIOS EN EL MERCADO DE VALORES: COMENTARIOS DE LA HIPOTESIS DE S. JAMES PRESS

JOSÉ MANUEL VARAS S. *
CARLOS MOLINA P. *

Uno de los obstáculos más serios con que se ha encontrado el desarrollo de la Teoría Financiera tiene relación con los Modelos de Precios para el Mercado de Valores.

En diciembre de 1968, S. James Press propuso ante la Asociación Americana del Avance de la Ciencia un "Modelo de Proceso Poisson compuesto para el Análisis Múltiple de Cambios en los Precios de Valores", cuya significación teórica y posibilidad computacional queremos comentar.

I. INTRODUCCION.

En primer lugar ubiquemos el modelo Press como última etapa en el marco histórico de los distintos esfuerzos por explicar la conducta de los precios de los valores¹.

El primer intento, en este sentido, se

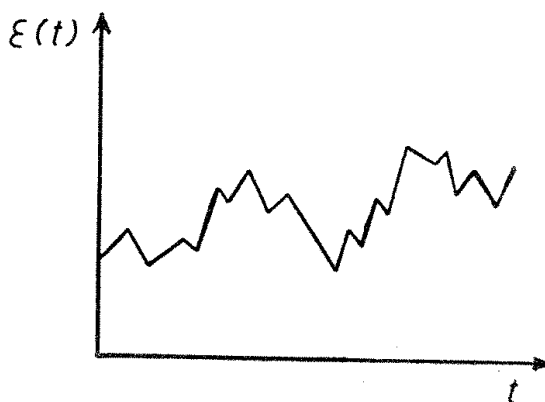
$$E\{\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t + \tau)\} = 0 \quad \text{con } \tau \neq 0 \text{ y } \tau \text{ entero}$$

y tal que, para cada tiempo t_0 , $\varepsilon(t_0)$ se distribuye normalmente.

Tal modelo pertenece a la categoría designada como de modelos de "camino

debió a Bachelier², en 1900, quien sostuvo que los cambios de precios estaban sujetos a la regla $p(t) - p(t-1) = \varepsilon(t)$ $t = 1, 2, \dots, T$, en que $p(t)$ denota el precio de un valor en el tiempo t y $\varepsilon(t)$ representa un proceso Gaussiano de variables independientes, esto es,

aleatorio"; es decir, las variaciones de los precios, a través de unidades de tiempo (pasos), siguen un camino no determinístico y tienen dos características:



* Profesores de la Escuela de Economía y Administración de la Universidad Católica de Chile.

¹ Ver: "A Compound Events Model For Se-

curity Prices". S. James Press, Journal of Business. Vol. 40, July 1967, Nº 3.

² Bachelier, L., *Théorie de la Spéculation*. París: Gauthier Villars, 1900.

1) Los cambios sucesivos en los precios son independientes.

2) Los cambios en los precios conforman alguna distribución de probabilidad.

Surgen, luego, otras versiones modificadas del modelo de Bachelier, entre las cuales se destaca aquella que postula la relación, $\ln p(t) - \ln p(t-1) = \varepsilon(t)$.

Esta modificación presenta dos características relevantes:

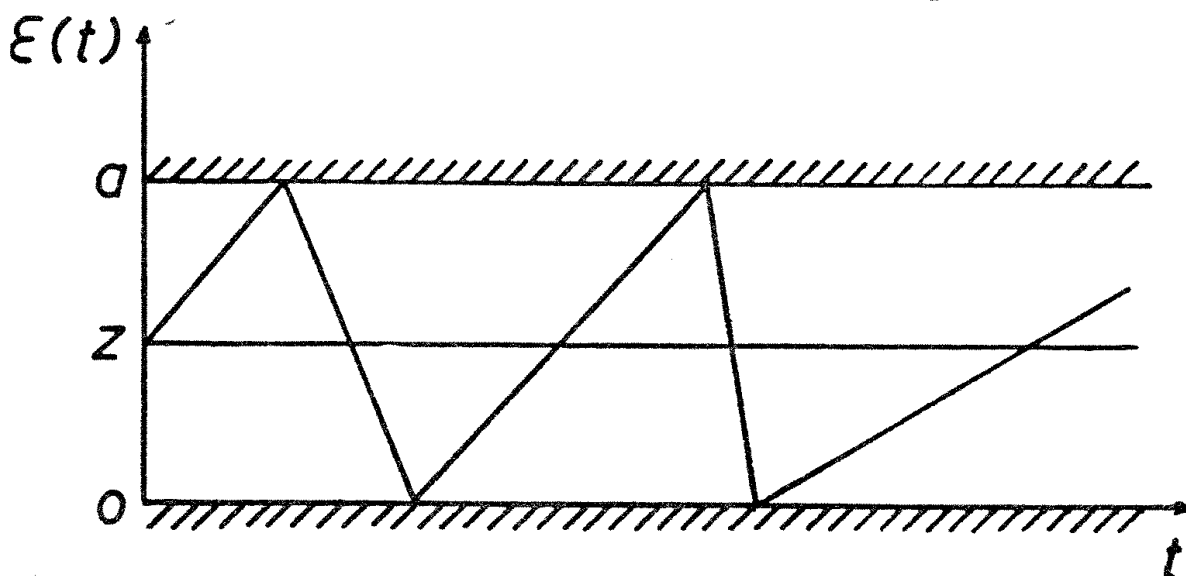
1) En vez de trabajar con niveles de precios, trabaja con cambios de precios, que tienen la ventaja de ser independientes entre sí (como había sido demostrado empíricamente por Moore)³.

2) La logaritimización de los cambios

en los precios permite trabajar con cambios relativos, facilita la computación de elasticidades y estabiliza las varianzas.

El modelo de camino aleatorio, sin embargo, aun en la forma logarítmica modificada, resulta inadecuado debido a que las colas de la distribución de los cambios de precios (o sus logaritmos) aparecen demasiado grandes, en la evidencia muestral, para ser explicadas por la distribución normal.

Cootner⁴ propone una variante de este modelo, introduciendo barreras refractantes según un proceso de Markov.



Conceptualmente, un proceso de Markov es un proceso probabilístico, donde el desarrollo futuro está completamente determinado por la situación presente y es independiente de la manera en que la situación presente se ha desarrollado.

Más tarde, Mandelbrot⁵ propuso un modelo para el comportamiento de los cambios de precios de los valores que suscitó un agudo interés en el área de las finanzas y de las matemáticas.

Sugirió una ecuación en diferencias finitas $\ln p(t) - \ln p(t-1) = \varepsilon^*(t)$

en que $\varepsilon^*(t)$ se comporta según un proceso estable no Gaussiano con media finita.

Así, para t fijo, cualquier función lineal de $\varepsilon^*(t)$ sigue la misma distribución de probabilidad que $\varepsilon^*(t)$, excepto que los parámetros podrían ser diferentes.

Dado que tales procesos estables no tienen varianzas finitas, estas hipótesis

³ Moore, A., *A Statistical Analysis of Common Stock Prices*, Chicago, 1962 (Ph.D.T.).

⁴ Cootner, P. H., "Stock Prices: Random VS. Systematic Changes" *Industrial Management Review*, III, Nº 2 (1962).

⁵ Mandelbrot, B., *The Variation of Certain Speculative Prices* (IBM Research Note, NC-87), 1962.

han sido propuestas como una posible explicación para la conducta errática de las variaciones de sucesivos cambios en los precios observados empíricamente.

Sin embargo, modelos alternativos, en los cuales los cambios de precios tienen segundos momentos finitos, podrían explicar varianzas de fluctuaciones de precios, al menos igualmente bien; y, a la vez, podrían no requerir que toda la teoría previa de selección de portafolio fuera abandonada.

Cootner (basado en la evidencia muestral de los precios del algodón), Godfrey, Granger y Morgenstern⁶, después de examinar valores seleccionados desde los dos puntos de vista del análisis espectral (tiempo y frecuencia), concluyeron que no se encontraba evidencia en ninguna de estas series de que el proceso por el cual eran generadas se condujera como si poseyese una varianza infinita.

Por otra parte, Fama⁷, basado en evidencias muestrales, sostuvo la hipótesis de distribuciones no Gaussianas con media distinta de cero, colas grandes y picudas.

No se concluye necesariamente de esta evidencia que la varianza sea infinita, sino que la ordenada modal es más alta de lo que se esperaría en una distribución normal.

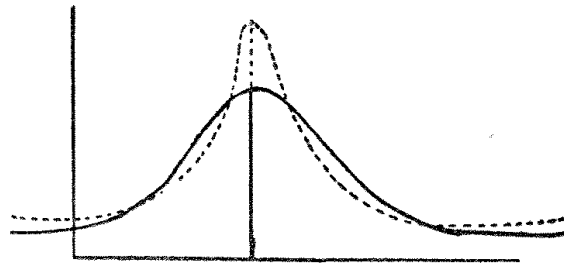
Se vio, entonces, que las propiedades distribucionales de cambios en los precios logaritmizados, encontrados empíricamente por Fama, eran precisamente las propiedades de un modelo de sucesos compuestos.

En un modelo así, varianzas muy grandes, en los cambios en el nivel logarítmico de precios, se obtienen si hay muchos cambios sobre el promedio du-

rante el intervalo de tiempo que interesa.

También se observó que la distribución asociada con el modelo de sucesos compuestos es leptocúrtica, en su comparación con la distribución normal, dependiendo de los parámetros específicos envueltos.

NOTA: Leptocurtosis es una transformación condicional de afinamiento que podríamos entender como un proceso de afinamiento en torno a la media de una distribución normal manteniendo su varianza constante.



Respondiendo a esta problemática es que surge el modelo de James Press⁸, el cual puede ser interpretado como la afirmación de que el precio de un valor puede medirse por la suma de un número aleatorio de cambios de precios de tamaño aleatorio (representado por un proceso Poisson compuesto), los cuales tuvieron lugar durante el intervalo de tiempo entre las observaciones (sobreimponiendo el movimiento browniano) (ver página 71).

II. EL MODELO.

El modelo propuesto por Press, en cuanto a las distribuciones de probabilidad de los cambios de precios, permite que tales movimientos, en los diferentes valores, estén correlacionados entre sí.

⁶ Godfrey, M. D., Granger, C. W. J. y Morgenstern, O., "The Random Walk Hypothesis of Stock Market Behavior", *Kyklos* XVII (1964).

⁷ Fama, E. F., "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 1965, N^o 1.

⁸ S. James Press, "A Compound Poisson Process Model for Multiple Security Analysis" - Report 6846 - Center for Mathematical Studies in Business and Economics - University of Chicago.

Su importancia reside en el método sugerido para estimar los parámetros de tales distribuciones y en que la forma de estas distribuciones son coincidentes con los estudios empíricos, vale decir, asimétricas, picudas, de cola abultada (distribución leptocúrtica) y, en ausencia de alguna tendencia, unimodales.

Este modelo explica simultáneamente el comportamiento de muchos valores, permitiendo que los cambios de precios de ellos estén mutuamente correlacionados. Así es como, aunque se permiten que "factores de mercado" y "factores industriales" estén separadamente interrelacionados, el modelo aún mantiene la propiedad del caso univariante en el que cada uno de los stocks posea separadamente el tipo requerido de distribución para las fluctuaciones de precios.

II. 1. Antes de especificar el modelo, quisiéramos referirnos brevemente a los conceptos estadísticos y matemáticos que en él se mencionan, a fin de facilitar la comprensión de aquellos lectores no familiarizados con ellos.

DEFINICIONES.

1) Serie de tiempo: un conjunto de observaciones ordenadas cronológicamente.

Sea $X(t)$ una observación hecha en el tiempo t . Al conjunto $\{X(t), t \in T\}$ se le denomina serie de tiempo, tal que $T = \{1, 2, \dots, N\}$ ó $T = \{0 \leq t \leq L\}$.

2) Una familia de variables aleatorias $\{X(t), t \in T\}$ se llama Proceso Estocástico.

Una manera de describir un proceso estocástico es especificar la distribución de probabilidad conjunta de las n variables aleatorias $X(t_1) \dots X(t_n)$, para todos los n enteros y n puntos $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$; especificando ya sea la distribución conjunta o la función característica. Para especificar la distri-

bución de probabilidad conjunta de un proceso estocástico, basta especificar las funciones características individuales.

3) La secuencia $\{S_n\}$ de sumas consecutivas $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ de variables aleatorias independientes $\{X_n\}$ constituye un proceso estocástico. La secuencia S_n se conoce como un camino aleatorio debido a que S_n puede ser interpretado como el desplazamiento, desde su posición inicial, de un punto que recorre un camino aleatorio en línea recta, realizando en el K ésimo paso un desplazamiento aleatorio de magnitud X_k .

Es conveniente notar que un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ es en realidad una función de dos argumentos

$$\{X(t,s); t \in T, s \in S\}.$$

Para un valor fijo de T , $X(t, \cdot)$ es función sobre el espacio de probabilidad S , ó, equivalentemente, $X(t, \cdot)$ es una variable aleatoria.

Por otro lado, para S fijo, $X(\cdot, s)$ es una función de t que representa una posible observación en el proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$.

A continuación nos referiremos a dos tipos de procesos estocásticos de particular importancia en el modelo, como son los de Wiener y Poisson.

4) Se entiende por Proceso Estocástico con incrementos independientes a aquél de parámetro continuo $\{X(t), 0 \leq t \leq \infty\}$ con $X(0) = 0$ y tal que para toda elección de índices $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las n variables aleatorias $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$, son independientes.

5) Y entenderemos como proceso estocástico con incrementos estacionarios independientes si $X(t_2+h) - X(t_1+h)$ tiene la misma distribución que $X(t_2) - X(t_1)$ para todo $h > 0$.

6) Entonces, podemos definir Proceso Wiener, a un proceso estocástico que

tiene incrementos estacionarios independientes, tal que para todo $t > 0$, $X(t)$ se distribuye normalmente con media o esperanza igual a cero y tal que $X(0)=0$.

7) Y definimos Proceso Poisson, a todo proceso valorado entero $\{N(t), t \geq 0\}$ con tasa o intensidad media ν , tal que:

a) Tiene incrementos estacionarios independientes; y b) Para tiempos s y t cualesquiera, tal que $s < t$, el número de eventos en el intervalo $[s,t]$, $N(t) - N(s)$ se distribuye según Poisson con media $\nu(t-s)$.

8) De igual modo, entenderemos por Proceso Poisson Compuesto a aquel Proceso Estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ que puede ser representado para $t \geq 0$ por $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ donde $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso Poisson; Y_n es una familia de variables aleatorias independientes equidistribuidas; y $\{N(t), t \geq 0\}$ e $\{Y_n\}$ son independientes entre sí.

9) Por último, diremos que un movimiento de extrema aleatoriedad es aquel que resulta cuando una partícula de tamaño microscópico se sumerge en un fluido, donde queda sujeta a un gran

número de impulsos aleatorios independientes debidos a colisiones con moléculas. El vector de funciones resultantes $[X_1(t), X_2(t), X_3(t)]$ que representa la posición de la partícula como una función del tiempo, es conocido como el Movimiento Browniano.

II.2. Definidos los conceptos estadísticos, podemos especificar el modelo.

La hipótesis es que el precio (logaritimizado) de un valor j en el tiempo t se compone del precio en el tiempo inicial ($t = 0$), una suma de cambios en el precio de su valor inicial peculiares al valor j , una suma de cambios de precios correlacionados con los movimientos del mercado de valores como un todo y, finalmente, un "ruido" inexplicable representativo del movimiento browniano.

Para un mercado de p valores, tenemos, entonces, la ecuación vectorial

$$Z(t) = C + H(t) + \sum_{k=1}^{M(t)} W_k + X(t)$$

en que

$H(t)$, W_k y $X(t)$ son vectores p variantes.

O también

$$\begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 = Z_1(0) \\ C_2 = Z_2(0) \\ \vdots \\ C_p = Z_p(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N_1(t)} Y_{k1} \\ \sum_{k=1}^{N_2(t)} Y_{k2} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N_p(t)} Y_{kp} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{M(t)} \begin{bmatrix} W_{k1} \\ W_{k2} \\ \vdots \\ W_{kp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{bmatrix}$$

En que $Z_j(t)$ = logaritmo del precio del valor j en el tiempo t .

$C_j = Z_j(0)$ = logaritmo del precio del valor j en el tiempo 0, conocido y fijo.

- $N_j(t)$ Suma de un número aleatorio $\{N_j(t)\}$ de cambios de precios (Y_{kj}) "propios" al valor j .
 $\sum_{k=1} Y_{kj} =$
 W_{kj} = Cambios de precios del valor j correlacionados con los demás valores del mercado. Movimiento "en grupo".
 $X_j(t)$ = "ruido" no explicado, manifestado como fluctuaciones aleatorias de precio del valor j , representativas del movimiento browniano.

Cada componente de $H(t)$, $(\sum_{k=1}^{N_j(t)} Y_{kj})$, es un proceso Poisson compuesto con componente normal. Para cada j , Y_{kj} se distribuye normalmente con media θ_j y varianza P^2 y $N_j(t)$, número aleatorio de cambios de precios, es un proceso Poisson con media $\lambda_j t$. Se supone $\{N_j(t), t \geq 0\}$, es independiente de Y_{kj} , V_j ; y éstos independientes entre sí.

De igual modo, $\sum_{k=1}^{M(t)} W_k$ es un vector de procesos de Poisson compuestos en que W_k , para cada k , se distribuye normalmente con vector de medias μ y matriz de varianza-covarianza Σ , $\Sigma > 0$ para todo k . Los W_k son independientes entre sí e independientes de $\{M(t), t \geq 0\}$, proceso Poisson con media λt que representa el número de cambios de precios que en el período $[0, t]$ afectaron a todo el Mercado como grupo.

Por último $\{X_j(t), t \geq 0\}$ es un proceso Wiener asociado al valor j , en que $X_j(t)$ se distribuye normalmente con media 0 y varianza tP^2 , para todo j . Se suponen los $X_j(t)$ independientes.

Además $H(t)$, $\sum_{k=1}^{M(t)} W_k$ y $X(t)$ son mutuamente independientes.

Nótese que haciendo $\lambda = 0$ se obtiene un modelo univariante.

En cuanto a las propiedades distribu-

cionales del modelo, éstas están desarrolladas en "A Compound Poisson Process Model for Multiple Security Analysis" de S. James Press, en el Report 6846, de noviembre de 1968, de la Universidad de Chicago, en 12 teoremas que detallaremos brevemente y cuyas demostraciones están en la obra citada.

Teorema 1.— $\{Z(t), t \geq 0\}$ es un vector de procesos de incrementos estacionarios independientes.

Teoremas 2 y 3.—Describen las medias y varianzas de $Z(t)$ y $\Delta Z(t)$.

Teorema 4.—Da las funciones características logaritmizadas de $Z(t)$ y $\Delta Z(t)$, que utilizaremos en el cálculo de los parámetros.

Teoremas 5, 6 y 7.—Obtiene la densidad de $\Delta Z(t) = Z(t) - Z(t-1)$.

Teorema 8.—Las distribuciones de todos los componentes de $\Delta Z(t)$ son leptocúrticas.

Teorema 9.—La distribución de $\Delta Z_j(t)$, para todo j , es más picuda en la vecindad de su media que la distribución de una variable aleatoria que lo hace normalmente con la misma media e igual varianza.

Teorema 10.—La distribución del vector $\Delta Z(t)$, es simétrica respecto a su media si, y sólo si, $E[\Delta Z(t)] = 0$.

Teorema 11.—La distribución de $\Delta Z(t)$ es unimodal si $\theta = \mu = 0$.

Teorema 12.—Para cada componente de $\Delta Z(t)$, la probabilidad en las colas de la distribución es mayor que la de una variable que se distribuye normalmente con la misma media y varianza.

III. METODO DE RESOLUCION.

Proponemos a continuación un método de resolución para el modelo.

III. 1. Aspectos teóricos.

La distribución de una variable pue-

de especificarse por medio de una función de frecuencia f , lo que a menudo se hace determinando la integral de probabilidad, que especifica la frecuencia total en la población para la cual la variable es menor que un valor dado de x .

Siempre se puede definir una función de variable real t en la forma

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} df$$

que se conoce como la función característica de la distribución.

Estudiando las distribuciones de variables conjuntas, cada una distribuida independientemente según una distribución conocida, Laplace introdujo la función cumulativa, que es simplemente el logaritmo de la función característica.

Si x se distribuye según una función densidad de probabilidad especificada por el elemento df_1 y la variable y según df_2 , en forma independiente, la frecuencia de la ocurrencia simultánea de cualquier par de valores particulares de

x e y será $df_1 df_2$; y la función característica de la suma $x + y$ será

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x+y)} df_1 df_2$$

que es el producto de las funciones características de x e y separadamente.

Consecuentemente, si $K = \log M$, la función cumulativa de $x + y$ es simplemente la suma de las funciones cumulativas de x e y separadamente. ($K =$ función cumulativa).

Evidentemente esta relación es válida para cualquier número de variables y fundamental en el estudio de distribuciones de variables compuestas.

La identidad de estas funciones, para todos los valores de t , implica la identidad de sus coeficientes cuando M y K son expresables por series de potencia.

Debemos reconocer, por lo tanto, los coeficientes de la expansión de K en potencias de t , como cantidades de particular importancia en la especificación de la distribución.

Estas cantidades, designadas por K_1, K_2, K_3, \dots se denominan cumulantes.

El mérito de Press reside en determinar las funciones de M y $K = \log M$ para el modelo con lo que podemos calcular los parámetros de éste

$$(\mu; \Sigma; \sigma^2; \theta; \lambda_1, \dots, \lambda_p; \sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2; \gamma)$$

según el método de cumulantes.

Para la estimación supondremos que los precios de todos los valores en el grupo están disponibles para $t=0,1,\dots,T$ o, equivalentemente, es posible formar los vectores de observaciones $[\Delta Z(1), \dots, \Delta Z(T)]$ los cuales son independientes e idénticamente distribuidos.

Press llega a plantear, en la obra citada, el sistema de ecuaciones que permite encontrar los parámetros y cuya resolución podría ser la siguiente:

III. 2. Resolución y diagrama de flujo.

El sistema no lineal es:

$$K_{1k} = \gamma \mu_k + \lambda_k \theta_k$$

$$K_{3k} = 3\mu_k \sigma_{kk} \gamma + \gamma \mu_k^3 + \lambda_k \theta_k^3 + 3\theta_k \lambda_k \sigma_k^2$$

$$K_{4k} = 3\gamma \sigma_{kk}^2 + 6\sigma_{kk} \mu_k^2 \gamma + \gamma \mu_k^4 + \lambda_k \theta_k^4 + 6\theta_k^2 \sigma_k^2 \lambda_k + 3\sigma_k^4 \lambda_k$$

$$K_{5k} = 15\sigma_{kk}^2 \mu_k \gamma + 10\sigma_{kk} \gamma \mu_k^3 + \gamma \mu_k^5 + \lambda_k \theta_k^5 + 10\lambda_k \theta_k^3 \sigma_k^2 + 15\theta_k \lambda_k \sigma_k^4$$

$$K_{6k} = 15\gamma \sigma_{kk}^3 + 45\sigma_{kk}^2 \mu_k^2 \gamma + 15\mu_k^4 \sigma_{kk} \gamma + \mu_k^6 \gamma + \lambda_k \theta_k^6 + 15\theta_k^4 \lambda_k \sigma_k^2 + 45\theta_k^2 \sigma_k^4 \lambda_k + 15\sigma_k^6 \lambda_k$$

$$S = \text{diag} [\sigma^2 + \lambda_1 (\theta_1^2 + \sigma_1^2), \dots, \sigma^2 + \lambda_p (\theta_p^2 + \sigma_p^2)] + (\Sigma + \mu' \mu)$$

Para K_{1k} $r = 1, 3, 4, 5$ $k = 1, 2, \dots, p$ $4p$ ecuaciones
 $r = 6$ $k = 1, 2$ 2 ecuaciones
 (S matriz de covarianzas). $\frac{p(p+1)}{2}$ ecuaciones

En resumen hay $[4p + 2 + \frac{p(p+1)}{2}]$ ecuaciones e igual número de incógnitas.

S y K_{rk} $r = 1, 3, 4, 5, 6$ $k = 1, \dots, p$ son estimados, luego se consideran como constantes.

$$\Sigma = (\sigma_{ij}) \quad (n!) = n!$$

Definamos para trabajar con mayor comodidad:

$$\begin{matrix} \downarrow & \gamma, \mu_1, \dots, \mu_p, \theta_1, \dots, \theta_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}, \dots, \sigma_{pp} \\ & x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{2p+1}, x_{2p+2}, \dots, x_{3p+1}, x_{3p+2}, \dots, x_{4p+1}, x_{4p+2}, x_{4p+3}, x_{4p+4}, \dots, x_n \end{matrix}$$

Es decir los componentes de Σ las consideramos $N = 4p + 2 + \frac{p(pH)}{2}$ como:

$$\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \dots, \sigma_{33}, \dots, \sigma_{ij}, \dots, \sigma_{p1}, \dots, \sigma_{pp}$$

También definamos: (En este orden)

$$f_1(x) = \gamma \mu_1 + \lambda_1 \theta_1 - k_{11} = x_1 x_2 + x_{p+2} x_{2p+2} - k_{11}$$

$$\begin{aligned} f_{p+1}(x) &= 3\mu_1 \sigma_{11} \gamma + \gamma \mu_1^3 + \lambda_1 \theta_1^3 + 3\theta_1 \lambda_1 \sigma_1^2 - k_{31} \\ &= 3x_1 x_2 x_{4p+3} + x_1 x_2^3 + x_{2p+2} x_{p+2}^3 + 3x_{p+2} x_{2p+2} x_{3p+2}^2 - k_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \lambda_p (\theta_p^2 + \sigma_p^2) + \gamma (\sigma_{pp} + \mu_p^2) - S_{pp} \\ &= x_{3p+1} (x_{2p+1}^2 + x_{4p+1}^2) + x_1 (x_n + x_{p+1}^2) - S_{pp} \end{aligned}$$

Es decir, hemos reducido el problema (en notación) a encontrar:

$$x^* \in \mathbb{R}^n : \\ f(x^*) = 0 \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \rightarrow f(x)$$

A. Algoritmo de Newton.—Este algoritmo será el que se usará para solucionar el sistema no lineal de ecuaciones.

Este algoritmo que es la generaliza-

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial x}{\partial x_j} - J_f^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial J_f^{-1}}{\partial x_j} f(x) \\ J_h(x^*) = I - J_f^{-1}(x^*) J(x^*) - \frac{\partial J_f^{-1}}{\partial x_j} f(x^*)$$

pero $f(x^*) = 0$ luego $J_h = 0$ escogiendo X lo "suficientemente" cercano a x^* nuestra función será de Lipschitz y se cumplirá:

- i) Todas las iteraciones estarán dentro de un entorno de X^0 .
- ii) Las iteraciones convergen por el teorema del punto fijo, a un $x^* \in \mathbb{R}^n$
- iii) X^* es la única raíz de f en el entorno del punto inicial.

Este teorema es una generalización trivial del caso de una dimensión.

Consideraciones sobre el algoritmo.— Como se dijo anteriormente, en la práctica el método funciona.

La convergencia del algoritmo depen-

$$X^{j+1} = h(X^j) \\ = X^j - J_f^{-1}(X^j) f(X^j) \\ \therefore J_f(X^j)(X^j - X^{j+1}) = f(X^j)$$

ción del método de Newton-Rephson para una dimensión, en la práctica ha funcionado muy bien.

La función de iteración es:

$$h(x) = x - (Jf(x))^{-1} f(x) \quad 9 \\ X^{j+1} = h(x^j) \quad Jf$$

Como el Jacobiano de h (que se puede considerar como la derivada, ya que las derivadas parciales en nuestro caso son continuas) es cero (matriz nula) en X^* :

de más o menos crucialmente del punto inicial (X^0); en la práctica el usuario tiene una cierta idea de los posibles valores de los parámetros, lo que resulta suficiente. Una búsqueda de un buen valor de partida cuando no se tiene conocimiento de éste, puede resultar muy oneroso, y ésta es cada vez más difícil a medida que el número de incógnitas crece.

Además el número de incógnitas debe ser ≤ 50 aunque esto depende de manera significativa del lenguaje y computador disponible.

Con respecto al método aclaremos que no es necesario invertir la matriz Jacobiana; para cada iteración lo que se hace es:

Luego resolvemos este sistema lineal

⁹ $|J_f(x)| \neq 0$ en el entorno del punto inicial.

de ecuaciones con nuestra incógnita $Z = X^J - X^{J+1}$. Para esto, podemos aplicar el método de Gauss-Seidel por ejemplo.

Como observación final acerca del algoritmo, podemos decir que es de segundo orden, en el sentido de que el error en cualquier iteración es proporcional al cuadrado del error de la iteración anterior.

Con respecto a la rapidez de convergencia, en 20 ó 25 iteraciones se debe tener ya un buen resultado.

DIAGRAMA DE FLUJO

Asumiremos la existencia de los siguientes subprogramas:

1) Subprograma que evalúa la función f .
 INPUT: Vector de parámetros (n)
 PARAM.

OUTPUT: Vector f (PARAM) = VALOR.

En este subprograma calculamos las funciones f_i $i = 1, \dots, n$ de acuerdo a las fórmulas que tenemos.

2) Subprograma que evalúa la matriz Jacobiana de f .

INPUT: PARAM vector de n dimensión.

OUTPUT: Matriz JACOB $n \times n$.

En este subprograma calculamos el Jacobiano, de la manera usual, es decir, detallamos cada elemento de la matriz para así poder evaluar.

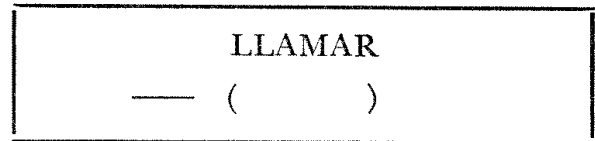
3) Subprograma que resuelve el sistema lineal $J_f(X^J) Z = f(X^J)$.

INPUT: JABOB \wedge VALOR.

OUTPUT: RESULT. Z.

Este subprograma aplica el método de Gauss-Seidel para solucionar el sistema de ecuaciones lineal.

Para llamar los subprogramas indicaremos de la siguiente manera:



— Nombre del subprograma

- 1) FUNC
- 2) JACOBNO
- 3) GAUSS

—: Nombre

() El input o argumento

Además, introducimos un vector ERROR que nos indica en qué momento hemos alcanzado una precisión adecuada. Las componentes pueden ser todas iguales, aunque no es necesario; en caso de ser iguales las n componentes, éstas podrían ser 10^{-4} (etc.).

Además, hay un contador de iteraciones, ya que en el caso general puede no converger y sirve como medio de parar el ciclo. En la práctica se puede hacer $NN = 20$ ó 25 .

