PROGRAMACION LINEAL Y TEORIA ECONOMICA

JORGE CAUAS

Profesor de la Escuela de Economía y Administración de la Universidad Católica de Chile.

ESTE ARTICULO COMPLEMENTA A OTRO ANTERIOR DEL AUTOR (1). COMO AQUEL, SU PROPOSITO ES DIDACTICO, Y EN EL SE TRATA DE ADECUAR LAS NORMAS DE PROGRAMACION LINEAL PARA SU EMPLEO EN TEORIA ECONOMICA.

EN ESPECIAL, SE ABORDARA AQUI EL CASO DE TEORIA DE LA FIRMA Y OPTIMIZACION DE LA PRODUCCION Y TEORIA DEL EQUILIBRIO GENERAL Y DE LA PROGRAMACION. LOS DESARROLLOS SE CEÑIRAN AL ESTUDIO DE LOS CASOS GENERALES, DEL MISMO MODO COMO SE PLANTEABA EL TEMA EN EL ARTICULO YA MENCIONADO.

HAY OTROS CAMPOS, COMO EL DE TEORIA DE JUEGOS, EN EL QUE LA PROGRAMACION LINEAL HA CONTRIBUIDO EN ASPECTOS FUNDAMENTALES A SU DESARROLLO. SIN EMBARGO, AQUELLOS CONTENIDOS ESTA VEZ QUEDARAN FUERA DE ANALISIS POR CUANTO NECESITAN DE UN DESARROLLO MAS EXTENSO.

POR OTRA PARTE, ES CONVENIENTE ADVERTIR QUE LA PROGRAMACION LINEAL REPRESENTA SOLO UNA DE LAS TECNICAS INCLUIDAS EN EL AMBITO MAS VASTO DE LA PROGRAMACION MATEMATICA QUE, EN OTROS DESARROLLOS, TAMBIEN DESTACA POR SUS APORTES AL DOMINIO DE LA TEORIA ECONOMICA. PERO, EN TODO CASO, ELLA DEBE TENERSE POR EL GERMEN Y PUNTO DE APOYO DE TECNICAS MAS ELABORADAS Y ES DE HECHO, LA QUE HA CONDUCIDO A LOS RESULTADOS MAS FRUCTIFEROS. DE ALLI LA NECESIDAD DE SU CONOCIMIENTO.

1 "Fundamentos de la Técnica de Programación Lineal", *Cuadernos de Economía* Nº 5, enero-abril de 1965.

1] TEORIA DE LA FIRMA Y OPTIMIZACION DE LA PRODUCCION.

La finalidad de la programación lineal consiste en encontrar el valor positivo del vector x, tal que se haga máxima (o mínima) una función lineal llamada **función objetivo,** $z = gx$ cuando las variables están sujetas a un conjunto de restricciones de forma también lineal.

$$Ax \leq b \quad (2)$$

Es obvio que, si se aceptan las hipótesis de programación lineal, este planteamiento corresponde a alguna de las formas de optimización pertinente a la firma como, por ejemplo, determinar niveles de actividad que permitan maximizar los retornos sin sobrepasar las disponibilidades de recursos; o bien, servir una demanda conocida, al mínimo costo.

Las hipótesis que deben aceptarse son básicamente las siguientes:

a) **Proporcionalidad.**—Esto significa que cada actividad emplea recursos, o entrega productos, en proporción directa al nivel de la actividad. En la terminología de teoría económica corresponde a una situación de homogeneidad de primer grado. Desde el punto de vista de los recursos o productos, la proporcionalidad envuelve la noción de complementaridad. En otras palabras, existe una proporción entre los recursos que entran en el proceso o los productos que éste genera, la cual es óptima en cuanto a que si se altera, disminuye el rendimiento de la actividad.

b) **Aditividad.**—Considera que cada actividad es independiente. Para la economía esto expresa que los recursos usados o productos obtenidos pueden atribuirse a cada actividad en forma inequívoca.

c) **Función objetivo lineal.**—Significa que la contribución unitaria de cada actividad al objetivo es constante. En lo económico representa que si se trata de precios o costos, se está operando en un mercado competitivo.

Estas hipótesis que aparecen como fuertemente restrictivas, en el hecho no lo son. Responden a una aproximación razonable en la mayoría de los casos, permitiendo resolver problemas que con los procedimientos clásicos presentan grandes complejidades, como cuando se trata de funciones de producción múltiples.

El problema dual, por otra parte, permite valorizar los recursos y los productos. Como se expresó en el artículo anterior, el problema dual consiste en encontrar el valor positivo del vector w tal que se minimice (o maximice) la función lineal $y = wb$ sujeta a las condiciones $wA \geq g$.

Este planteamiento consiste en valorizar cada recurso o cada producto, de suerte que el aporte de la actividad correspondiente medido por esta valorización sea ventajoso al confrontarlo con la valorización obtenida mediante el aporte a la función objetivo en el problema primitivo, haciendo mínimo el empleo de recursos o máximo el retorno por los productos.

Las conclusiones del artículo ya referido permiten afirmar que los valores

2 Se supondrán las relaciones escritas en tal forma que la desigualdad tenga el sentido de la expresión anterior cuando la función z debe hacerse máxima.

w_i corresponden a las productividades marginales de los recursos o los costos marginales de los productos, valores que hacen posible ordenar la asignación de recursos y llegar a un sistema de precios o tarifación adecuado.

2] UN EJEMPLO.

La distribución óptima de los distintos tipos de fuentes para generar energía eléctrica es un punto que se ha resuelto por programación lineal. En Francia la aplicó Electricité de France y, en Chile, la Empresa Nacional de Electricidad.

Se esbozará aquí una simplificación extrema con el propósito de mostrar la forma de aplicación de programación lineal a problemas económicos que atañen a la empresa.

Se trata de obtener la proporción de los distintos equipos generadores de electricidad para servir la demanda de un año determinado (3) al menor costo anual, incluyendo costos de capital y gastos de explotación. Se considerarán sólo dos tipos de equipos: hidroeléctricos y termoeléctricos y se supondrá que la demanda está caracterizada por la potencia máxima (medida en miles de KW o MW) y la energía total generada en el curso de un año (medida en millones de KWh o GWh (4). Se supondrá que los valores unitarios posibles de generar desde el punto de vista tecnológico para cada tipo de equipo y los costos anuales son los siguientes:

	Equipos Hidroeléctricos	Equipos Termoeléctricos
Potencia (MW por MW instalado)	1	1
Energía (GWh por MW instalado)	4.66	7.45
Costo anual (US$ por MW instalado)	44.000	67.000

Si se llama x_1 y x_2 a la capacidad hidroeléctrica y termoeléctrica que se debe instalar, y se supone —por simplicidad— que la demanda de potencia es de 1 MW y la de energía es de 5 GWh, el problema consiste en encontrar los valores de x_1 y x_2 positivos, tales que hagan mínimo el valor de la función que representa el costo anual:

$$z = 44000\, x_1 + 67000\, x_2$$

sujetos a las condiciones de demanda:

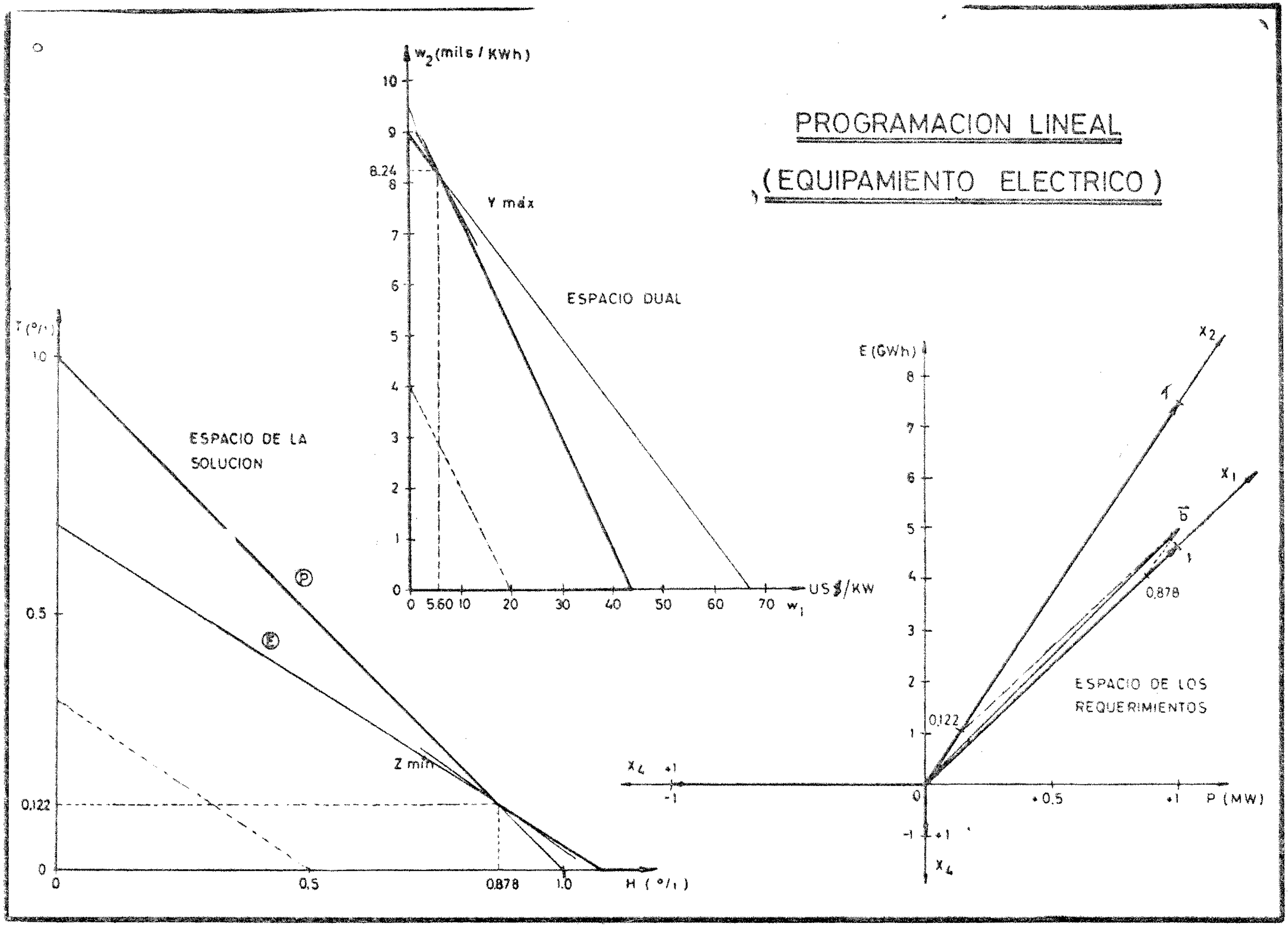
Potencia $\qquad x_1 + x_2 \geq 1$

Energía $\qquad 4.66x_1 + 7.45x_2 \geq 5$

3 Esta demanda se supone determinada a través de métodos de previsión.

*

4 La demanda es variable momento a momento en el curso del año. De allí que sea necesario definir, por lo menos, su valor máximo. El otro elemento que conviene utilizar es la integral de esta demanda durante el año; es decir, la energía generada. En rigor, habría que diferenciar con más detalle la demanda de distintas épocas del año.


PROGRAMACION LINEAL
(EQUIPAMIENTO ELECTRICO)
w2 (mils / KWh)
8.24
Y max
ESPACIO DUAL
0 5.60 10 20 30 40 50 60 70 w1
US$/KW
ESPACIO DE LA SOLUCION
P
E
Z min
0.122
0.5
0.878
1.0
H (°/1)
E (GWh)
X2
X1
b
0,878
0,122
ESPACIO DE LOS REQUERIMIENTOS
X4
+0.5
P (MW)

La solución para este caso simple (ver figura) conduce a los valores:

Potencia instalada hidroeléctrica	$x_1 = 0.878$ MW.
Potencia instalada termoeléctrica	$x_2 = 0.122$ MW.
Costo anual	$z = 46.800$US$.

El problema dual en este caso estriba en valorizar la potencia (w_1) y la energía (w_2), de manera que se haga máximo el retorno total anual

$$y = w_1 + 5\ w_2$$

y, al mismo tiempo se cumpla la condición de que en cada tipo de equipo la valoración alcance como máximo el costo unitario de la actividad:

Equipos hidroeléctricos	$w_1 + 4.66\ w_2 \leqq 44000.$
Equipos termoeléctricos	$w_1 + 7.45\ w_2 \leqq 67000.$

La solución (ver figura) conduce a los valores:

Dual de la potencia	$w_1 =$ 5.60 US$/KW.
Dual de la energía	$w_2 =$ 8.24 mils/KWh.
Retorno anual	$y =$ 46.800 US$.

Se observan en estos resultados las propiedades mencionadas en el artículo anterior y la posibilidad de utilizar w_1 y w_2 como el costo marginal de la potencia y de la energía para el sistema estudiado.

En la figura, además del espacio de la solución y del espacio dual, se agregó el espacio de los requerimientos con la finalidad de establecer comparaciones con el artículo ya referido.

3] EQUILIBRIO GENERAL Y PROGRAMACION ECONOMICA.

El equilibrio general puede ser analizado en un modelo lineal que conduce a un modelo de programación económica. Las hipótesis que deben aceptarse son las enunciadas en el párrafo 1. Desde el punto de vista económico estos modelos suponen generalmente una demanda definida en forma exógena, e industrias que configuran unidades de producción con una tecnología definida por las hipótesis mencionadas.

Se analizarán a continuación tres modelos: el de equilibrio estático, denominado de relaciones interindustriales; un modelo de programación; y, por último, un modelo que incluye consideraciones acerca del proceso de capitalización, al que se puede conceptuar, por lo tanto, como "modelo dinámico".

4] EL MODELO DE RELACIONES INTERINDUSTRIALES.

Para facilitar los desarrollos, se estudiará el caso simple de una economía dividida en dos sectores, en la cual hay dos factores. Las relaciones de producción y uso de los factores en términos físicos son:

Producción del sector 1
$$x_{11} + x_{12} + d_1 = x_1$$
Producción del sector 2
$$x_{21} + x_{22} + d_2 = x_2$$
Factor 1
$$f_{11} + f_{12} = f_1$$
Factor 2
$$f_{21} + f_{22} = f_2$$

en que

x_{ij} es la parte de la producción del sector i que utiliza el sector j como materia prima.

x_i es la producción total del sector i.

d_i es la demanda para uso final de la producción del sector i.

f_{sj} es la cantidad del factor s usado en el proceso productivo del sector j.

f_s es la disponibilidad del factor s.

Aceptadas las hipótesis de programación lineal, las igualdades anteriores se transforman en:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1 = x_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2 = x_2$$
$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = f_1$$
$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = f_2$$

que en notación matricial se expresan en:

$$Ax + d = x$$
$$Bx = f$$

La solución de este sistema es:

$$(I-A)x = d$$
$$x = (I-A)^{-1}\, d$$

es decir, se obtienen las producciones totales necesarias para sustentar una demanda final que se supone exógena. El uso de factores estará dado por

$$f = B(I\text{-}A)^{-1}d$$

El sistema de precios implícito en este modelo puede obtenerse al estudiar las relaciones de costos totales en cada sector e igualarlos al valor de la producción:

$$p_1a_{11}x_1 + p_2a_{21}x_1 + + w_1b_{11}x_1 + w_2b_{21}x_1 = p_1x_1$$

$$p_1a_{12}x_2 + p_2a_{22}x_2 + + w_1b_{12}x_2 + w_2b_{22}x_2 = p_2x_2$$

en que p_i son los precios de los productos; w_s son los precios de los factores.

En notación matricial se tiene:

$$pA + wB = p$$

de donde
$$p\ (I\text{-}A) = wB$$
$$p = wB(I\text{-}A)^{-1}$$

o sea, los precios de los productos han sido expresados en función de los precios de los factores.

De las relaciones anteriores es posible lograr la relación de igualdad entre el valor de la producción para uso final (Producto) y el total de las remuneraciones pagadas a los factores (Ingreso):

Producto $P = pd = wB(I\text{-}A)^{-1}d$
Ingreso $Y = wf = wB(I\text{-}A)^{-1}d$

5] UN MODELO DE PROGRAMACION MATEMATICA

El modelo anterior es fácilmente aplicable para el caso en que se suponga que los factores son escasos. En esa situación es factible plantear la maximización del producto sujeto a condiciones de restricción de los factores, es decir,

$$\text{maximizar} \quad P = \mathbf{pd}$$
$$\text{sujeto a} \quad \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \leqq \mathbf{f}$$
$$\mathbf{d} \geqq \mathbf{0} \quad (5)$$

que no es otra cosa que un problema de programación lineal.

El problema dual en este caso permite encontrar los valores w_i tales que se minimize el gasto en recursos sujeto a condiciones de valoración de cada actividad, o sea,

$$\text{minimizar} \quad Y = \mathbf{wf}$$
$$\text{sujeto a} \quad \mathbf{wB}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geqq \mathbf{p}$$
$$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$$

Los teoremas mencionados del problema dual permiten asimilar los valores w_i obtenidos con las productividades marginales de los factores y, por lo tanto, pueden ser utilizados como **precios-sombra** o **costos de oportunidad** en evaluación de proyectos. Es de observar, además, que se cumple la igualdad entre el máximo de P y el mínimo de **Y**.

6] LA INFLUENCIA DEL CAPITAL. UN MODELO DINAMICO.

Si se desglosa la demanda final en consumo e inversión, se tiene

$$\mathbf{d} = \mathbf{c} + \triangle\,\mathbf{k} \text{ en que}$$

c es la demanda final para consumo.

$\triangle$ **k** es la demanda final para inversión.

Las relaciones enunciadas en el párrafo 5 pueden estudiarse suponiendo que el consumo es determinado en forma exógena, mientras se trata de maximizar el Producto. Puesto que se supone que el consumo es constante, se tratará de

$$\text{maximizar} \quad P = \mathbf{p}\triangle\mathbf{k}$$
sujeto a
$$\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\triangle\mathbf{k} \leqq \mathbf{f} - \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$$
$$\triangle\mathbf{k} \geqq 0$$

Si se considera que el capital es el único factor escaso y que se lo distingue en capital de diferentes tipos por industria de origen, la ecuación de restricción anterior se transforma en:

$$\triangle\mathbf{k} \leqq (\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c} \qquad (6)$$

Si se considera el período de tiempo t del análisis

$$\triangle\mathbf{k}(t) \leqq \mathbf{D}\,\mathbf{k}(t) - \mathbf{c}(t)$$
$$\text{en que} \quad \mathbf{D} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{B}^{-1}$$

El resultado anterior limita el valor del capital alcanzable si se supone que el consumo es dato. Como

$$\triangle\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(t+1) - \mathbf{k}(t)$$
se tiene
$$\mathbf{k}(t+1) - \mathbf{k}(t) \leqq \mathbf{D}\,\mathbf{k}(t) - \mathbf{c}(t)$$
$$\mathbf{k}(t+1) \leqq (\mathbf{I} + \mathrm{D})\ \mathbf{k}(t) - \mathbf{c}(t)$$

que es un modelo en el cual, conocido el valor del capital al comienzo de un período y el consumo del período, se logran los valores máximos del capital obtenible al final del período.

5 Pueden imponerse condiciones adicionales del tipo $d \geqq d_M$ es decir, valores mínimos para la demanda de uso final.

6 B^{-1} está definido, puesto que la matriz B en este caso es la matriz cuadrada de los coeficientes de capital-producto.

Sin embargo, este modelo no permite asegurar un crecimiento sostenido, dado que el nivel de capital alcanzado al final de un período sostiene la producción de los períodos posteriores.

El paso siguiente consiste en maximizar una función objetivo que abarque un programa de varios años. Como

$$\triangle \mathbf{k}(t) \leqq \mathbf{D}\mathbf{k}(t) - \mathbf{c}(t)$$

y se tiene

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(0) + \sum_{1}^{t-1} \triangle \mathbf{k}(t)$$

luego

$$\triangle \mathbf{k}(t) \leqq \mathbf{D}[\mathbf{k}(0) + \sum_{1}^{t-1} \triangle \mathbf{k}(t)] - \mathbf{c}(t)$$

$$-\mathbf{D}\sum_{1}^{t-1} \triangle \mathbf{k}(t) + \triangle \mathbf{k}(t) \leqq \mathbf{D}\mathbf{k}(0) - \mathbf{c}(t)$$

para $t = 1 \ldots\ldots T$

La función a maximizar puede ser el valor actualizado del Producto en el período **T**

$$\sum_{1}^{T} \mathbf{p}(t)\,[\mathbf{c}(t) + \triangle \mathbf{k}(t)]$$

en que se supone que **p** (t) contiene los factores de actualización y la variación prevista de los precios.

Si se considera **c** (t) determinado en forma exógena, el problema consiste en

maximizar $\quad P = \sum_{1}^{T} \mathbf{p}(t) \triangle \mathbf{k}(t)$

sujeto a las condiciones

$$-\mathbf{D}\sum_{1}^{t-1} \triangle \mathbf{k}(t) + \triangle \mathbf{k}(t) \leqq \mathbf{D}\mathbf{k}(0) - \mathbf{c}(t)$$

$$\triangle \mathbf{k}(t) \geqq \mathbf{0}$$

para $t = 1 \ldots\ldots T$

Este es un modelo de programación lineal que define una trayectoria óptima de capitalización conocida la trayectoria del consumo.

BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA

SOBRE PROGRAMACION LINEAL Y TEORIA ECONOMICA

*

BAUMOL, *"Economic Theory and Operations Research"*. Prentice Hall (1961).

DORFMAN, SAMUELSON and SOLOW, *"Linear Programming and Economic Analysis"*, Mc Graw Hill (1958).

HENDERSON and QUANDT, *"Microeconomic Theory"*. Mc Graw Hill (1958).