

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
CURSO DE MESTRADO EM ECONOMIA**

FÁBIO LÚCIO RODRIGUES

**IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PRECIFICAÇÃO DE
OPÇÕES COM DISTRIBUIÇÃO NÃO-GAUSSIANA**

JOÃO PESSOA / PB

2006

FÁBIO LÚCIO RODRIGUES

**IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PRECIFICAÇÃO DE
OPÇÕES COM DISTRIBUIÇÃO NÃO-GAUSSIANA**

**Dissertação apresentada ao Curso de
Mestrado em Economia do Programa de Pós-
Graduação em Economia da Universidade
Federal da Paraíba como requisito final para
obtenção do grau de Mestre em Economia.
Área de Concentração: Economia de
Empresas**

ORIENTADOR: PROFº DR. LUCIANO DA COSTA SILVA

JOÃO PESSOA / PB

2006

R696i

Rodrigues, Fábio Lúcio.

Implementação de métodos numéricos para precificação de opções com distribuição não-gaussiana / Fábio Lúcio Rodrigues. – João Pessoa, 2006.

86p. : il

Orientador: Luciano da Costa Silva.

Dissertação (mestrado) – UFPB/CCSA.

1. Mercado Financeiro. 2. Opções. 3. Modelo não-Gaussiano. 4. Modelo Black-Scholes. 5. Modelo de Borland. 6. Métodos Numéricos.

UFPB/BC

CDU 336.764.2 (043) 2. ed.

FÁBIO LÚCIO RODRIGUES

**IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PRECIFICAÇÃO DE
OPÇÕES COM DISTRIBUIÇÃO NÃO-GAUSSIANA**

Dissertação de mestrado submetida ao Curso de Mestrado em Economia do Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal da Paraíba como requisito final para obtenção do grau de Mestre em Economia, tendo como área de concentração Economia de Empresas. Aprovada pela Banca Examinadora em 07/03/2006.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano da Costa Silva
CCEN - UFPB
Orientador

Prof. Dr. Paulo Fernando de M. B. Cavalcanti Filho
CCSA – UFPB
Examinador Interno

Prof. Dr. Alexandre Stamford da Silva
PIMES - UFPE
Examinador Externo

A Providência Divina,
Aos meus pais, Manoel e Lúcia,
À minha esposa, Milena,
Ao meu filho, Fábio Jr.
A toda minha família

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que sempre confiaram e acreditaram em minha capacidade intelectual, pelo carinho e incentivo em todos os momentos da minha vida.

À minha esposa e ao meu filho, que souberam compreender minha ausência, pelo apoio incondicional, carinho e suporte emocional necessários à conclusão deste curso.

Ao amigo e professor Dr. Luciano da Costa Silva, mestre dentro e fora da sala de aula, pelo excelente trabalho de orientação, por sua ajuda e incentivo em todas as fases deste trabalho e, sobretudo, pela confiança em mim depositada.

Aos professores Dr. Paulo Fernando Cavalcanti e Dr. Alexandre Stamford da Silva, pelos comentários e sugestões que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho e por participarem da minha Banca Examinadora.

À professora Isabel Lausanne Fontgalland, que se tornou mestra e amiga, pela confiança, incentivo e auxílio em minha formação intelectual e pessoal.

À todos os professores do mestrado que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta dissertação.

À Terezinha Polari, secretária do mestrado, pela boa vontade e constante disponibilidade em auxiliar nossas pesquisas.

Ao LAPORTE do Departamento de Estatística do CCEN / UFPB, por disponibilizar o *software* MATLAB 6.1 e o *hardware* necessários à conclusão deste trabalho.

Aos colegas do mestrado, pelas constantes discussões e reflexões que tornou possível ascender a mais esse objetivo.

“Uma vez que uma mente se abre a uma nova
idéia, ela nunca mais volta ao tamanho original”.

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho se propõe a testar a possível vantagem existente em utilizar o modelo não-Gaussiano proposto por Borland (2002) para a precificação de opções em detrimento do modelo Black-Scholes. O modelo de Borland utiliza um processo de *feedback estatístico* que possibilita descartar a hipótese de mercado eficiente e assumir que o modelo tem memória do comportamento passado dos retornos dos ativos. É elaborado um algoritmo computacional baseado em métodos numéricos para a simulação dos preços das opções europeias (método Crank-Nicolson) que depois é modificado para a precificação de opções americanas (método SOR Projetado). Depois de obtidos os preços, são simuladas estratégias de *hedging*, em ambos os modelos, no intuito de comparar seus resultados e definir a melhor modelagem a ser aplicada. É simulada, também, a volatilidade implicada para verificar se o seu comportamento apresenta o que é conhecido como “sorriso da volatilidade”. As simulações mostraram que o modelo de Borland não apresenta resultados satisfatórios quando comparado com o modelo Black-Scholes e, mesmo quando os resultados da modelagem de Borland foram melhores, um teste de hipóteses provou que seus resultados eram estatisticamente iguais aos do modelo Black-Scholes básico. Conclui-se, portanto, que não parece ser vantajosa a aplicação do modelo de Borland para a precificação de opções em detrimento do uso da modelagem proposta por Black e Scholes.

Palavras-Chave: Mercado Financeiro. Opções. Modelo não-Gaussiano. Modelo Black-Scholes. Modelo de Borland. Métodos Numéricos.

ABSTRACT

This work intends to test the possible advantage existent in using the non-Gaussian model proposed by Borland (2002) for the options pricing in detriment of the Black-Scholes model. The Borland model uses a process of statistical feedback that makes possible to reject the hypothesis of efficient market and to assume that the model has memory of the last behavior of the stock returns. An algorithm computable is elaborated based on numerical methods for the simulation of the prices of the European options (Crank-Nicolson method) that later is modified for the pricing of American options (SOR Projected method). After having obtained the prices, they are simulating *hedging* strategies, in both models, in the intention of to compare your results and to define the best modelling to be applied. It is simulated, also, the implied volatility to verify your behavior it presents what is known as "volatility smile ". The simulations showed that the model of Borland doesn't present satisfactory results when compared with the Black-Scholes model and, same when the results of the modelling of Borland were better, a hypotheses test proved that your results were statistically same to the of the Black-Scholes model standard. It is ended, therefore, that doesn't seem to be advantageous the application of the Borland model for the options pricing in detriment of the use of the modelling proposed by Black and Scholes.

Keywords: Finance Market. Options. Non-Gaussian Model. Black-Scholes Model. Borland Model. Numerical Methods.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Resultado do Teste Kolmogorov-Smirnov	p. 50
Tabela 2	- Valor médio do saldo final de <i>hedging</i>	p. 65
Tabela 3	- P-value resultante do teste de comparação entre duas médias (teste t)	p. 67

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Payoff de uma opção de compra	p. 20
Figura 2	- Payoff de uma opção de venda	p. 21
Figura 3	- Estratégia ótima para uma opção de venda americana	p. 33
Figura 4	- Volatilidade real e o sorriso da volatilidade	p. 36
Figura 5.1	- Resultado do Teste Quantil - Quantil para o ativo Ambev PN	p. 51
Figura 5.2	- Resultado do Teste Quantil - Quantil para o ativo Belgo PN	p. 51
Figura 5.3	- Resultado do Teste Quantil - Quantil para o ativo Itaubanco PN	p. 52
Figura 5.4	- Resultado do Teste Quantil - Quantil para o ativo Petrobras PN	p. 52
Figura 5.5	- Resultado do Teste Quantil - Quantil para o ativo Telemar PN	p. 53
Figura 6.1	- Distribuição dos retornos diários do ativo Ambev PN	p. 54
Figura 6.2	- Distribuição dos retornos diários do ativo Belgo PN	p. 54
Figura 6.3	- Distribuição dos retornos diários do ativo Itaubanco PN	p. 55
Figura 6.4	- Distribuição dos retornos diários do ativo Petrobras PN	p. 55
Figura 6.5	- Distribuição dos retornos diários do ativo Telemar PN	p. 56
Figura 7.1	- Opção EuroCall – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Ambev PN	p. 57
Figura 7.2	- Opção EuroCall – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Belgo PN	p. 58
Figura 7.3	- Opção EuroCall – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Itaubanco PN	p. 58
Figura 7.4	- Opção EuroCall – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Petrobras PN	p. 59
Figura 7.5	- Opção EuroCall – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Telemar PN	p. 59
Figura 8.1	- Opção EuroPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Ambev PN	p. 60
Figura 8.2	- Opção EuroPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Belgo PN	p. 60
Figura 8.3	- Opção EuroPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Itaubanco PN	p. 61

Figura 8.4	- Opção EuroPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Petrobras PN	p. 61
Figura 8.5	- Opção EuroPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Telemar PN	p. 62
Figura 9.1	- Opção AmerPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Ambev PN	p. 62
Figura 9.2	- Opção AmerPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Belgo PN	p. 63
Figura 9.3	- Opção AmerPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Itaubanco PN	p. 63
Figura 9.4	- Opção AmerPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Petrobras PN	p. 64
Figura 9.5	- Opção AmerPut – Saldo final do <i>hedging</i> do ativo Telemar PN	p. 64
Figura 10	- Comparação entre os valores médios do saldo final de <i>hedging</i> Diferença entre os preços simulados para os dois modelos - EuroCall	p. 66
Figura 11	- Belgo PN	p. 68
Figura 12	- Volatilidade implicada - EuroCall Belgo PN	p. 69

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	14
JUSTIFICATIVA	17
OBJETIVOS	18
Objetivo Geral	18
Objetivos Específicos	18
REFERENCIAL TEÓRICO	19
Opções Financeiras	19
Conceito	19
Classificação das Opções	20
Valor Intrínseco e Valor Temporal de uma Opção	23
O Modelo Black-Scholes	24
Limitações do Modelo Black-Scholes	34
O Modelo de Retornos de Borland	36
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	41
Aspectos Metodológicos Gerais	41
Metodologia de Avaliação dos Métodos Numéricos	43
Métodos de Diferenças Finitas Padrão	44
Método de Diferenças Finitas Explícito	44
Método de Diferenças Finitas Implícito	45
Método Crank-Nicolson	46
Algoritmo de Douglas	47

Método SOR Projetado	48
APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES	50
CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
REFERÊNCIAS	74
APÊNDICE A	78
APÊNDICE B	84

INTRODUÇÃO

O crescente desenvolvimento dos mercados financeiros mundiais desde a década de 1970, aliado ao processo de globalização econômica e ao desenvolvimento tecnológico tem levado a um maior intercâmbio de informações entre investidores de todo o mundo. Essa interação global proporciona um melhor entendimento do funcionamento dos mercados e do comportamento dos mais diversos ativos financeiros. Atualmente, o mercado de ações, além de ser uma importante fonte de financiamento empresarial, é também um meio importante de captação de recursos individuais.

O crescente interesse pelo mercado acionário provoca o crescimento da concorrência entre os investidores, o que resulta na busca da tentativa de previsão do comportamento deste mercado e dos seus produtos. Desde o trabalho pioneiro de Markowitz (1952) que vem ocorrendo um avanço considerável na utilização de técnicas matemáticas, estatísticas e computacionais para a previsão de movimentos futuros no mercado financeiro. Dentre as técnicas mais utilizadas destaca-se o modelo criado por Black e Scholes (1973) e desenvolvido por Merton (1973), que faz uso do instrumental do cálculo estocástico para avaliar opções de ações européias. A fórmula de Black-Scholes diz aos investidores qual o valor a ser alocado nos derivativos financeiros, como o de opções. O modelo de Black-Scholes inaugurou uma nova fase na determinação de carteiras eficientes, sendo amplamente utilizado até os dias atuais.

Contudo, mesmo com o alto grau de aplicabilidade do modelo Black-Scholes no âmbito dos mercados financeiros na atualidade, após uma breve busca na bibliografia especializada é possível constatar que as opções americanas (aquelas que proporcionam o direito de exercício, a qualquer tempo, até a data de vencimento) não possuem um método

eficiente para precificação. Outros modelos, como, por exemplo, Bakshi, Cao e Chen (1997) e Heston (1993), procuram incluir volatilidade estocástica e saltos no processo de difusão do preço do ativo subjacente ao contrato de opção. Já Fajardo e Mordecki (2003) precificam derivativos cujos ativos subjacentes tenham seus preços determinados por processos de Lévy.

Em suma, os estudos teóricos sobre avaliação de derivativos são vastos, e cada vez mais, procuram relaxar as hipóteses simplificadoras adotadas por Black e Scholes na construção de seu modelo pioneiro. Este trabalho visa, também, contribuir para esta discussão e, principalmente, para um melhor entendimento dos processos que regem o mercado financeiro como um todo, e o de derivativos em particular.

1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Desde a publicação dos trabalhos pioneiros sobre a teoria da precificação de ativos derivativos por Black e Scholes (1973) e Merton (1973) que vários outros teóricos em finanças buscam desenvolver extensões deste modelo com o intuito de relaxar as hipóteses irrealistas utilizadas na construção do modelo. Margrabe (1978) criou um modelo, o qual foi desenvolvido posteriormente por Stulz (1982) e Johnson (1987), onde obteve uma solução analítica para o problema do apreçamento de uma opção europeia de troca de um ativo por outro utilizando distribuições de probabilidade normais univariadas. Além disto, Margrabe (1978) demonstrou em seu trabalho que a fórmula encontrada para opções europeias seria, também, válida para opções americanas, comprovando que não existe um prêmio pelo exercício antecipado no caso onde os ativos subjacentes não pagam dividendos (AZEVEDO; BARBACHAN, 2004).

Alguns autores procuraram relaxar as hipóteses, adotadas por Black e Scholes, de que o mercado financeiro é eficiente e o retorno dos ativos tem distribuição log-normal. Para propiciar uma maior aproximação entre os valores calculados e os observados empiricamente Gerber e Shiu (1994) introduzem a utilização da transformada de Esscher. Em seu trabalho, os autores, além de relaxarem a hipótese de mercados eficientes, consideram distribuições de probabilidade diferentes da normal para os retornos dos ativos, como, por exemplo, processos de Poisson, Gamma e Gaussiano Inverso.

MacBeth e Merville (1979), através da realização de pesquisas empíricas demonstraram falhas da fórmula de Black e Scholes, como, por exemplo, a geração de preços menores que os de mercado para opções que estão dentro do preço. Esse problema é decorrente da admissão, por parte do modelo, da hipótese de volatilidade constante. Contudo,

conforme descrito por Hull (1998), a volatilidade real apresenta um comportamento estocástico, não podendo ser, portanto, previsível como o modelo Black-Scholes básico necessita. Outro problema que não pode ser resolvido através do modelo Black-Scholes básico é o apreçamento de opções americanas. Neste sentido, Wilmott, Howison e Dewynne (1993) descrevem a transformação da equação diferencial parcial obtida através da fórmula Black-Scholes em uma inequação diferencial parcial, a qual incorpora a característica de possibilidade de exercício antecipado dada pela opção americana.

Borland (2002) modifica a fórmula básica de Black-Scholes e obtém um modelo não-gaussiano onde assume que a distribuição dos retornos dos ativos possui cauda pesada e volatilidade estocástica. Ao contrário de outros trabalhos onde o modelo Black-Scholes padrão é estendido para considerar um ruído não-normal, a autora deriva um novo modelo de flutuações dos retornos de ações diretamente de processos estocásticos. Neste trabalho, Borland admite que os movimentos dos retornos dos ativos são aleatórios e incorpora essa premissa na construção do seu modelo. O resultado é uma versão generalizada da fórmula de Black-Scholes com distribuição de probabilidades exibindo caudas pesadas. A autora explica, ainda, o fato da volatilidade real apresentar-se no formato de uma função convexa, ou seja, o chamado *sorriso da volatilidade*.

Mesmo com tantos desenvolvimentos, a teoria de precificação de derivativos ainda não fornece respostas a todas as questões existentes. Borland (2002), deriva um modelo interessante para resolver parte dos problemas que incomodam os teóricos. Contudo, a autora não desenvolve seu método para aplicá-lo nas opções americanas. Outra crítica que pode ser feita ao trabalho de Borland é quanto ao método utilizado na resolução da equação diferencial parcial obtida. O método de *medidas martigales equivalentes* não parece ser a melhor solução para utilizar na precificação de derivativos.

Desta forma, com base no trabalho de Borland (2002) e nos desenvolvimentos recentes da teoria de precificação de derivativos financeiros, o problema de pesquisa deste trabalho consiste em: “Quais as possíveis vantagens da utilização do modelo proposto por Borland (2002) sobre o Modelo Black-Scholes básico?”.

2. JUSTIFICATIVA

O advento da globalização e a crescente integração dos mercados mundiais resultaram em um maior interesse por parte dos investidores, sejam individuais ou institucionais, nos produtos do mercado acionário e na tentativa de realizar a previsão do comportamento dos ativos financeiros em geral. Desta forma, a realização deste trabalho se justifica pela necessidade ininterrupta de novos desenvolvimentos de modelos dentro do contexto do mercado financeiro, e mais precisamente, relacionados à teoria de precificação de derivativos financeiros.

Borland (2002), aperfeiçoou o modelo Black-Scholes básico através de processos estocásticos para representar os movimentos dos retornos do ativo-subjacente, proporcionando uma boa aproximação dos preços das opções em relação aos observados no mercado. Contudo, a autora não estende suas conclusões para análise de opções americanas. Neste sentido, o presente trabalho justifica-se, também, por se propor a aplicar a versão generalizada da equação diferencial parcial de Black-Scholes desenvolvida por Borland (2002) para analisar as opções do tipo americanas, tendo em vista que esse tipo de derivativo é o predominante nos mercados financeiros mundiais, e em especial no mercado financeiro brasileiro.

3. OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Testar a hipótese da possível vantagem da utilização do modelo proposto por Borland (2002) sobre o Modelo Black-Scholes básico.

3.2 Objetivos Específicos

- a) Utilizar métodos numéricos para elaborar um algoritmo com base na equação diferencial parcial de Black-Scholes generalizada desenvolvida por Borland (2002) que possibilite a obtenção dos preços de opções europeias.
- b) Estender a fórmula de precificação de opções europeias para a precificação de opções americanas.
- c) Simular estratégias de *hedging*, em ambos os modelos, no intuito de comparar seus resultados e definir a melhor modelagem a ser aplicada.
- d) Verificar se os valores obtidos numericamente com a fórmula de Borland (2002) reproduzem o *sorriso da volatilidade*, conforme afirmado pela autora em seu trabalho.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 OPÇÕES FINANCEIRAS

4.1.1 Conceito

Opções financeiras são títulos derivativos cujos preços são determinados a partir de ativos subjacentes. Isto significa que o valor de uma opção e suas características de negociação estão ligados ao ativo subjacente às opções (ou seja, uma opção da Telemar PN está ligada ao ativo TNLP4). O ativo ao qual a opção está sendo negociada pode ser uma ação, um índice, um contrato futuro, uma letra do tesouro, uma commodity, etc.

Uma opção dá ao seu portador o direito de comprar ou de vender o ativo a um determinado preço e dentro de um determinado período de tempo no futuro. Neste sentido, é fundamental o entendimento de que o portador (comprador) de uma opção tem um direito, e não uma obrigação. Se o portador de uma opção não exerce este direito antes do fim do período de tempo pré-determinado, a opção e a oportunidade (direito) de exercê-la deixam de existir. O vendedor (ou lançador) de uma opção, no entanto, é obrigado a preencher os requerimentos da opção se a mesma for exercida. No caso de uma opção de compra de uma ação, o lançador vendeu o direito de comprar aquela ação. O lançador da opção de compra é, portanto, obrigado a vender a ação ao portador da opção de compra se a opção for exercida pelo preço pré-determinado em contrato.

4.1.2 Classificação das opções

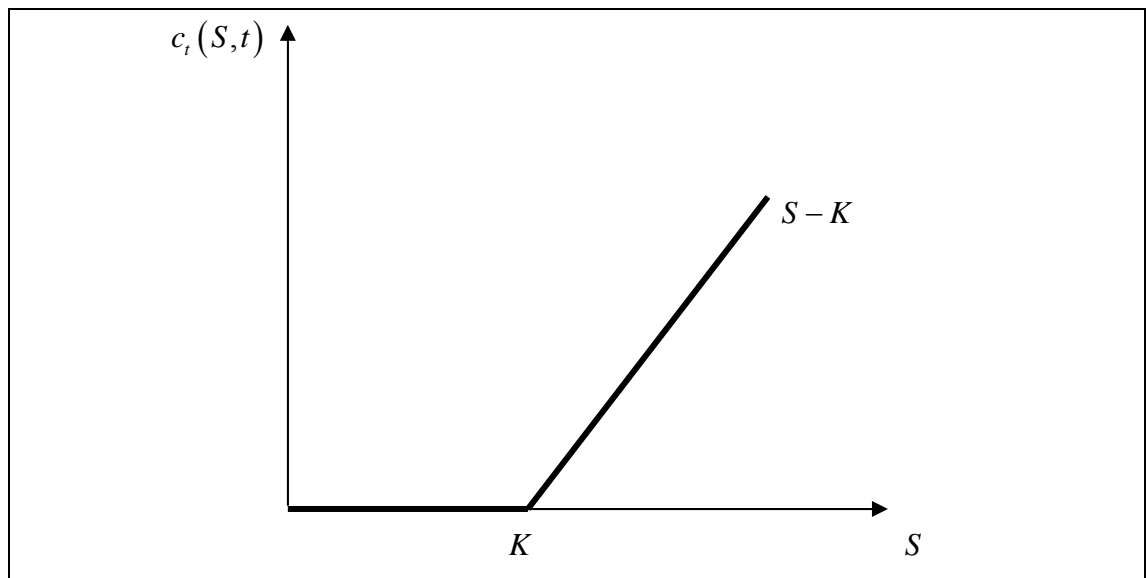
Existem dois tipos básicos de opções, quais sejam:

1. Opção de compra (Call Option): proporciona ao seu comprador o direito de comprar o ativo-objeto por um preço pré-estabelecido e em determinada data. O valor da opção de compra, c_t , no vencimento é dado por:

$$c_t = \begin{cases} S - K, & \text{se } S > K \\ 0, & \text{se } S \leq K \end{cases}$$

Graficamente teremos:

FIGURA 1
PAYOFF DE UMA OPÇÃO DE COMPRA



Fonte: Elaboração Própria.

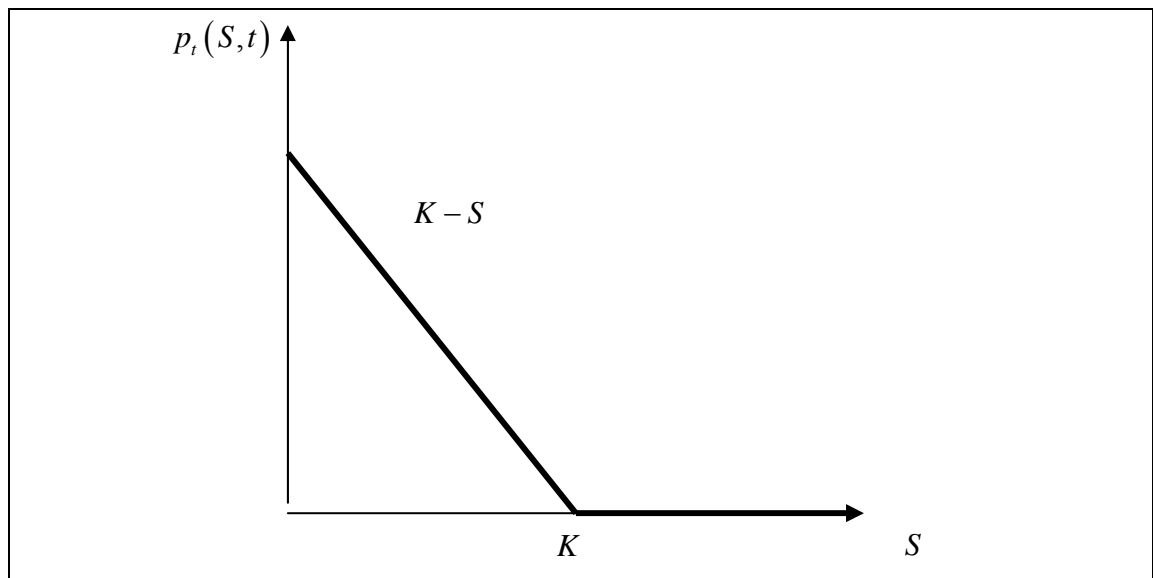
Onde S é o valor da opção no vencimento e K o seu preço de exercício. A opção somente será exercida se S for maior que K . Se o valor da opção for menor ou igual ao seu preço de exercício, ela não será exercida e o seu valor no vencimento será zero.

2. Opção de venda (Put Option): proporciona ao seu portador o direito de vender o ativo-objeto por um preço pré-estabelecido e em determinada data. O valor da opção de venda, p_t , no vencimento é dado por:

$$p_t = \begin{cases} 0, & \text{se } S \geq K \\ K - S, & \text{se } S < K \end{cases}$$

Neste caso, a opção só será exercida se o preço de exercício for maior que o valor da opção. Caso o valor da opção seja superior ao preço de exercício, o contrato expira com valor zero. Graficamente teremos:

FIGURA 2
PAYOFF DE UMA OPÇÃO DE VENDA



Fonte: Elaboração Própria.

As opções também se distinguem em relação às possibilidades de exercício, ou não, das mesmas em suas datas de vencimento. São elas:

1. Opções Europeias: permitem ao seu portador comprar ou vender o ativo-objeto somente na data de exercício prevista no contrato.
2. Opções Americanas: permitem ao seu portador comprar ou vender o ativo-objeto em qualquer tempo, até a data de exercício prevista no contrato.

As opções Americanas são encontradas mais facilmente em negociação nas Bolsas de Valores devido a sua flexibilidade quanto à data de exercício. Contudo, opções do tipo Europeu são mais simples de analisar, sendo seus resultados adaptados às opções americanas.

Outra classificação relevante é com relação à probabilidade de exercício de uma opção¹. Neste sentido, as opções dividem-se em três tipos, quais sejam:

1. *At-the-money (no dinheiro)*: opção de compra ou de venda na qual o preço de exercício seja igual ao preço à vista do ativo-objeto.
2. *In-the-money (dentro do dinheiro)*: opção de compra cujo preço de exercício é menor do que o preço à vista do ativo-objeto, ou opção de venda cujo preço de exercício é maior do que o preço à vista.
3. *Out-the-money (fora do dinheiro)*: opção de compra cujo preço de exercício é maior do que o preço à vista do ativo-objeto, ou opção de venda cujo preço de exercício é menor do que o preço à vista.

¹ A relação de seu preço de exercício com o preço do ativo-objeto.

4.1.3 Valor Intrínseco e Valor Temporal de uma Opção

O valor intrínseco de uma opção é definido como o máximo entre zero e o valor que a opção teria se exercida imediatamente. O valor intrínseco aparece somente nas opções do tipo americanas *dentro do dinheiro*, pois, neste tipo de opção, existe algum lucro que o portador pode realizar se exercer imediatamente a opção. Para uma opção de compra, o valor intrínseco será:

$$\max(S - K, 0)$$

No caso de uma opção de venda, o valor intrínseco é dado por:

$$\max(K - S, 0)$$

Desta forma, uma opção de compra tem valor intrínseco quando seu preço de exercício for menor que o preço do ativo subjacente, e, para uma opção de venda, o valor intrínseco surgirá quando seu preço de exercício for maior que o preço do ativo subjacente. Uma opção americana que está *dentro do dinheiro* “deve valer pelo menos tanto quanto seu valor intrínseco, uma vez que, se este for positivo, o titular da opção poderá realizá-lo exercendo-a imediatamente” (HULL, 1998, p.154). Quando a opção estiver no dinheiro, o “seu valor intrínseco será zero, e quando estiver fora do dinheiro, seu valor intrínseco passa a ser negativo” (MONTEIRO, 2003, p.79).

O valor temporal de uma opção americana dentro do dinheiro aparece quando o portador aguarda seu vencimento, em vez de exercê-la imediatamente, ou seja, o valor temporal “é a diferença entre o valor da opção e o seu valor intrínseco num determinado momento” (MONTEIRO, 2003, p. 80).

O preço total de uma opção será, portanto, a soma de seu valor intrínseco com seu valor temporal. Contudo, é no valor temporal que são utilizados os instrumentais teóricos para a precificação de opções, de maneira que ele pode ser entendido, também, como:

O valor de uma especulação contínua sobre um movimento favorável nos preços do ativo subjacente. Ao se comprar uma opção, além de se poder usufruir imediatamente do valor intrínseco (quando este existir), adquire-se ainda a possibilidade de se beneficiar das futuras variações de alta no preço (no caso de uma opção de compra), limitando a perda para o caso de baixa (MONTEIRO, 2003, p. 80).

4.2 O MODELO BLACK - SCHOLES

Com a publicação, em 1973, do artigo intitulado *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Fisher Black e Myron Scholes apresentaram uma formulação matemática para avaliação e precificação de opções europeias que norteou, daquele momento em diante, os rumos da moderna teoria financeira.

O modelo matemático desenvolvido por Black e Scholes é essencialmente teórico, visto que, na sua formulação, há uma completa ausência de dados empíricos. Contudo, a publicação deste trabalho influenciou o aumento do grau de complexidade e sofisticação nas pesquisas e modelagens na teoria financeira dos últimos trinta anos.

Para derivar a fórmula desenvolvida por Black e Scholes se faz necessário assumir algumas hipóteses que segundo Hull (1998) e Varga (1998), são:

1. O preço dos ativos segue o processo conhecido como **Movimento Browniano Geométrico** com o retorno esperado, μ , e a volatilidade, σ , constantes, ou seja, o preço de uma ação apresenta retorno log-normal.
2. Não existem oportunidades de arbitragem sem risco. A adoção desta hipótese garante que o preço obtido pela Fórmula de Black-Scholes é o que está em vigor no mercado.
3. A taxa de juros livre de risco de curto prazo (r), e a volatilidade do ativo objeto (σ) são constantes e iguais para todos os vencimentos.

4. A venda a descoberto de títulos é permitida, com total utilização dos recursos. Permite-se, com isso, operações de arbitragem onde a carteira equivalente contém uma posição vendida no ativo objeto, admitindo, assim, a compra da opção quando ela for barata.
5. Não existem custos de transação nem impostos. Todos os ativos são perfeitamente divisíveis. Admite-se essa hipótese para não modificar a operação de arbitragem.
6. O ativo não paga dividendos durante o período de maturação da opção².
7. A negociação com títulos é contínua, permitindo-se trabalhar com o modelo em tempo contínuo.
8. Ausência de spread bancário.

Dadas às hipóteses, partimos agora para a derivação da Fórmula de Black-Scholes.

Supondo, conforme a hipótese (1), que o preço de uma ação, S , segue o Movimento Browniano Geométrico, então:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw \quad (1)$$

Onde μ é o retorno esperado da ação e σ a sua volatilidade. Suponhamos, agora, a existência de uma opção com preço f dependente de S . O preço da opção, f , será, então, uma função de S e t .

$$f = f(S, t) \quad (2)$$

Onde t é o tempo. Aplicando o Lema de Ito na equação (2), teremos:

² A Formula de Black-Scholes é facilmente modificável para introduzir o pagamento de dividendos, porém, essa análise não faz parte do escopo do presente trabalho.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dw$$
(3)

Pela equação (3) obtém-se o comportamento do preço da ação como uma função do tempo, do preço do ativo-objeto e de um choque aleatório que afeta o preço do ativo-objeto. Será necessário, portanto, eliminar o termo aleatório da equação (3). De acordo com Hull (1998), isso pode ser feito escolhendo-se uma carteira da ação e do derivativo composta da seguinte maneira:

$$-f \Rightarrow \text{derivativo}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial S} \Rightarrow \text{ações}$$

Desta forma, o detentor desta carteira possui uma posição vendida num derivativo e uma posição comprada num valor $\frac{\partial f}{\partial S}$ em ações. Portanto, para a carteira π , por definição:

$$\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$
(4)

No intervalo de tempo dt , a variação de π será:

$$d\pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS$$
(5)

Substituindo (1) e (3) em (5), teremos:

$$d\pi = - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dw \right] + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dw)$$

$$d\pi = \left(- \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt$$
(6)

Temos, portanto, uma carteira com variação determinística no intervalo de tempo $[t, t + dt]$ ³. Dada a hipótese da não-arbitragem, o valor da carteira no instante inicial t , será zero e continuará valendo zero até o instante $t + dt$. Desta forma, de acordo com as hipóteses descritas anteriormente, monta-se uma carteira livre de risco, que contém uma posição no ativo subjacente e uma posição na opção, tendo, no período Δt , como retorno a taxa de juros livre de risco⁴. Um argumento de não-arbitragem mostra que:

$$d\pi = \pi r dt$$
(7)

Onde r é a taxa de juros livre de risco. De fato, de acordo com a equação (7),

Se o rendimento fosse maior que esse retorno, os arbitadores poderiam realizar um lucro sem risco, vendendo os títulos sem risco e utilizando os recursos para adquirir a carteira. Se o rendimento fosse menor, eles também poderiam realizar um lucro sem risco vendendo a carteira e comprando títulos sem risco (HULL, 1998, p.260).

Substituindo as equações (4) e (6) na equação (7), tem-se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) r dt$$
(8)

³ O termo aleatório dw foi eliminado na equação (6), portanto, a carteira π não deve ter risco no instante dt .

⁴ No modelo Black-Scholes “a posição montada na carteira equivalente só é livre de riscos por períodos muito curtos, praticamente instantâneos” (MONTEIRO, 2003, p.109).

Rearranjando a equação (8), teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf \quad (9)$$

A equação (9) é a Equação Diferencial Parcial (EDP) de Black-Scholes.

Resolvendo essa equação encontramos o preço $f(S, t)$ de uma opção do tipo Europeu. O preço do derivativo dependerá das *condições de fronteira* utilizadas. As condições de fronteira especificam os valores do derivativo nas fronteiras dos valores possíveis de S e t . Para opções de compra do tipo Europeu, a principal condição de fronteira é:

$$f(S, t) = \max(S - K, 0) \quad (10)$$

Sendo K o preço de exercício da opção. No caso de uma opção de venda do tipo Europeu:

$$f(S, t) = \max(K - S, 0) \quad (11)$$

De acordo com Hull (1998), utilizando transformações de variáveis nas equações (10) e (11), consegue-se reduzir a EDP de Black-Scholes a uma forma mais simples. Desta maneira, sendo c_t o preço da opção de compra do tipo europeu e $(T - t)$ o tempo até seu vencimento, teremos então:

$$c_t = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (12)$$

Sendo:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Onde $N(d_1)$ e $N(d_2)$ são *funções densidade de probabilidade* acumuladas para uma variável normal padrão (com média zero e variância igual a 1). De maneira análoga, o preço de uma opção de venda do tipo Europeu pode ser obtido de forma semelhante a da opção de compra. Assim, sendo p_t o preço de uma opção de venda Européia, teremos:

$$p_t = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(d_1) \tag{13}$$

Para a análise de opções do tipo Americanas, deve-se levar em consideração sua característica adicional de poder ser exercida a qualquer tempo, até a data de vencimento. A equação (9) é válida para opções européias nas quais o exercício antecipado não é permitido, mas, não necessariamente, dá o valor para opções americanas. De fato, dado que as opções americanas oferecem ao seu portador um direito adicional – o direito do exercício antecipado – potencialmente tem um valor mais alto.

No caso de uma opção de compra americana, a estratégia ótima a ser adotada pelo portador do ativo é nunca exercê-lo antecipadamente. Para comprovar esta afirmação considera-se que, já que o portador da opção de compra americana tem as mesmas oportunidades de exercício que o portador de uma *call* européia correspondente mais o direito do exercício antecipado, então:

$$C_t \geq c_t \quad (14)$$

Onde C_t é o preço de uma opção de compra americana. De acordo com a paridade entre *put* e *call*, teremos:

$$c_t = S + p_t - Ke^{-r(T-t)} \quad (15)$$

Onde $Ke^{-r(T-t)}$ é o preço de exercício trazido para valor presente. Fazendo $p_t \geq 0$, obtêm-se:

$$c_t \geq S - Ke^{-r(T-t)} \quad (16)$$

Como $e^{-r(T-t)} < 1$, então:

$$Ke^{-r(T-t)} < K \quad (17)$$

Invertendo os termos da equação (17):

$$-K < -Ke^{-r(T-t)} \quad (18)$$

A equação (18) prova que o termo $-K$ é sempre menor que $-Ke^{-r(T-t)}$. Aplicando esse resultado na equação (16), obtemos:

$$c_t > S - K$$

Como, de acordo com a equação (14), $C_t \geq c_t$, então:

$$C_t > S - K$$

Como $C_t \geq 0$, então o preço de uma opção de compra americana será o valor máximo entre $S - K$ e 0 , ou seja:

$$C_t \geq \max(S - K, 0)$$

Que é o mesmo valor de uma opção de compra europeia cujo exercício ocorre apenas na data de vencimento.

Sendo assim, a estratégia ótima para o portador de uma opção de compra do tipo americana será nunca exercê-la antes da data de vencimento. Desta forma, conclui-se que uma opção de compra americana tem o mesmo valor que uma opção de compra europeia correspondente à mesma ação. Isso significa que se pode utilizar a mesma fórmula de precificação de Black-Scholes derivada para uma opção de compra europeia (conforme equação 12) em uma opção de compra americana.

Para determinar a estratégia ótima a ser adotada pelo portador de uma opção americana de venda, deve-se considerar duas possibilidades no portfólio montado anteriormente e expresso por (4). Utilizando o argumento de não-arbitragem exposto em (7), devem-se analisar as seguintes possibilidades:

$$d\pi < r\pi dt \tag{19}$$

$$d\pi \geq r\pi dt \tag{20}$$

Sendo $R = r\pi$ ⁵. De acordo com (19), o investidor irá comprar f e vender a descoberto S (ou comprar S se $\partial f / \partial S < 0$). O investidor utilizará o recurso obtido com essa operação para comprar R . Desta forma, substituindo esse argumento em (4), a carteira montada será:

⁵ $R > 0$ significa investir em um ativo livre de risco e $R < 0$ significa tomar empréstimo.

$$-\pi + R = f - \frac{\partial f}{\partial S} S + R \quad (21)$$

Sendo assim, (19) mostra que com um investimento inicial de zero, o investidor obteve retorno positivo do seu portfólio, caracterizando a possibilidade de arbitragem. Se existe a possibilidade de arbitragem em (19), esta não é uma estratégia válida segundo a hipótese 2 descrita anteriormente.

Por outro lado, de acordo com (20), o investidor irá lançar f , comprar S (ou vender S se $\partial f / \partial S < 0$) e vender R . Substituindo esse argumento em (4), a carteira montada será:

$$\pi - R = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S - R \quad (22)$$

Porém, neste caso, a variação não é determinística, pois o comprador da opção pode decidir exercê-la a qualquer momento. Portanto, não há possibilidade de arbitragem. Deste modo, ao substituir (4) e (6) em (20), teremos:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \geq \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt \quad (23)$$

Rearranjando (23), teremos:

$$0 \geq \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf \quad (24)$$

A inequação (24) é chamada de *inequação de Black-Scholes* e é válida para o preço da opção americana de venda durante toda a vida da opção.

Se não existisse a possibilidade de exercício antecipado da opção teríamos $P_t = p_t$ (sendo P_t o preço da opção americana de venda). Contudo, $P_t \neq p_t$, pois $p_t < \max(K - S_t, 0)$ para alguns valores de S_t . Portanto, deve existir, necessariamente, a possibilidade de exercício antecipado. Para simplificar a notação pode-se definir um operador linear com base em (24):

$$\ell_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + rf \frac{\partial}{\partial S} - r \quad (25)$$

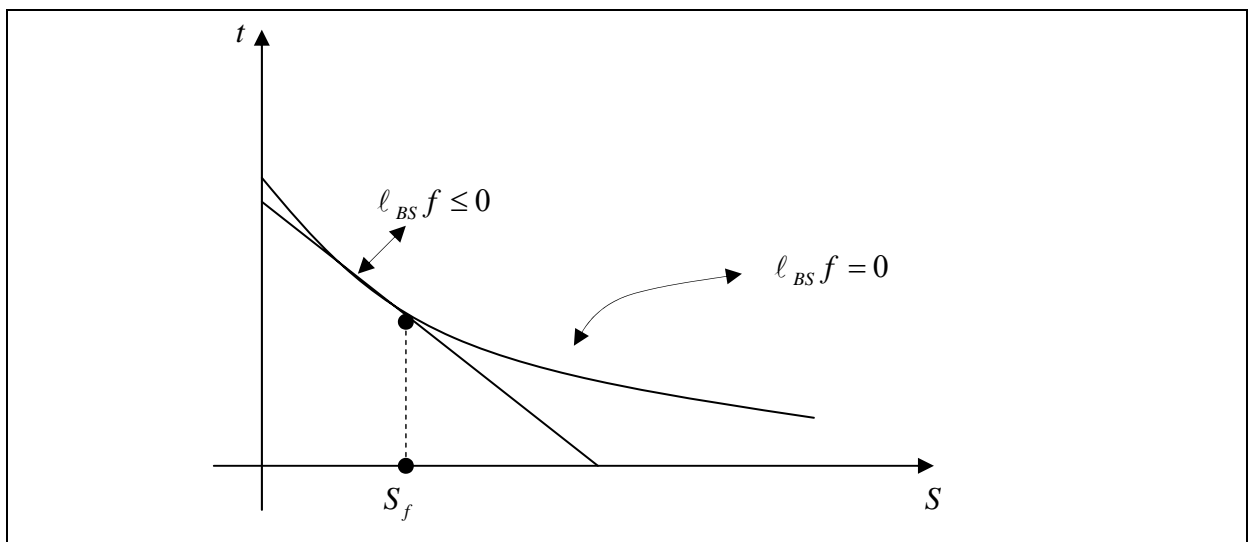
Onde:

$$S_t > S_f(t) \Rightarrow \ell_{BS} f = 0$$

$$S_t \leq S_f(t) \Rightarrow \ell_{BS} f \leq 0$$

Graficamente teremos:

FIGURA 3
ESTRATÉGIA ÓTIMA PARA UMA OPÇÃO DE VENDA AMERICANA



Fonte: Wilmott (1998).

Desta forma, a estratégia ótima para o portador da opção americana de venda dependerá do valor de fronteira S_f , conforme pode ser visualizado na Figura 3. Para valores abaixo de S_f , a opção deve ser exercida. Por outro lado, para valores acima de S_f , a opção deve ser mantida até o vencimento, tornando-se semelhante a uma opção européia. O valor de S_f sempre estará variando e a essa variação dá-se o nome de *fronteira livre*. Portanto, para se obter o valor de uma opção americana de venda, é necessário solucionar o problema de fronteira livre existente.

4.3 LIMITAÇÕES DO MODELO BLACK-SCHOLES

O modelo desenvolvido por Black e Scholes tornou-se um dos mais utilizados na prática, principalmente nas últimas três décadas, devido a sua boa aproximação do preço real das opções européias. Contudo, existem alguns argumentos utilizados no modelo que vêm sofrendo diversas críticas desde a sua publicação. De acordo com Wilmott (1998), as principais limitações do Modelo Black-Scholes são:

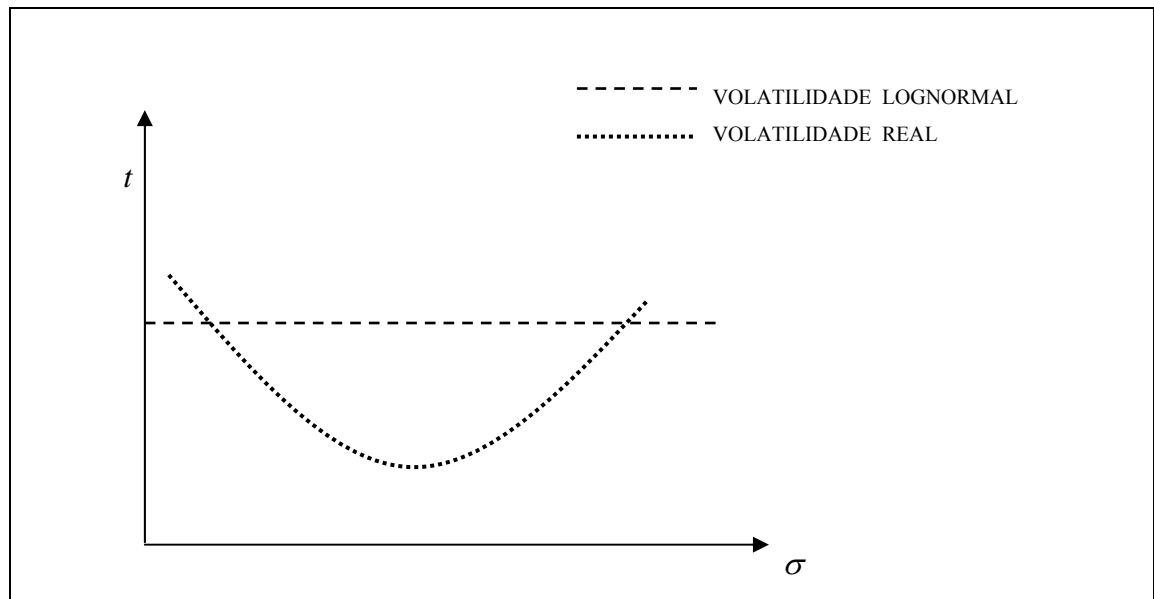
- a) *Não-normalidade dos preços dos ativos* → Na sua construção, o modelo Black-Scholes admite que o preço de um ativo segue o movimento browniano geométrico, ou seja, apresenta uma distribuição log-normal. Contudo, esse comportamento não é observado empiricamente. Em mercados reais, a distribuição final dos preços dos ativos não apresenta normalidade nas suas variações. Nota-se, na verdade, movimentos imprevistos semelhantes a saltos, quase sempre descontínuos, não incorporados por modelos log-normais. Esse problema ocasiona a determinação de opções mal precificadas, ou seja, os valores obtidos por meio da fórmula de Black-Scholes divergem dos observados empiricamente.

- b) *O sorriso da volatilidade* → Segundo o modelo Black-Scholes, o preço de um ativo é função da volatilidade do mesmo, sendo esta uma constante.

$$c_i(S, t) = f(\sigma)$$

Desta forma, se o modelo Black-Scholes é válido, ao invertermos a função acima e calcularmos a volatilidade com base nos preços observados do ativo devemos ter o mesmo valor para vários preços de exercício e várias datas de exercício. Contudo, ao fazermos $\sigma = f^{-1}(c)$ e calcularmos a volatilidade do preço de um ativo para vários preços diferentes, de acordo com Wilmott (1998) e Hull (1998), obteremos uma curva que decresce e depois cresce novamente, assemelhando-se a um sorriso. Em outras palavras, a volatilidade de opções de vários preços de exercício forma uma função convexa, ao invés da linha plana esperada. Na Figura 4 pode-se visualizar o caminho feito pela volatilidade descrita por Black-Scholes (linha tracejada) e a volatilidade calculada em função do preço do ativo (linha pontilhada). Desta forma, é claramente observável a incongruência do modelo proposto por Black-Scholes com os valores reais obtidos para a volatilidade.

FIGURA 4
VOLATILIDADE REAL E O SORRISO DA VOLATILIDADE



Fonte: Hull (1998).

- c) *Volatilidade estocástica* → A equação de Black-Scholes admite que a volatilidade é constante ou, que seja uma função conhecida do tempo e do preço do ativo. Entretanto, as séries de volatilidade obtidas empiricamente apresentam valores extremamente instáveis. Em outras palavras, a volatilidade do preço de um ativo é teoricamente imprevisível. Desta forma, admite-se a volatilidade como sendo uma variável aleatória, ou seja, a volatilidade é estocástica.

4.4 O MODELO DE RETORNOS DE BORLAND

Na busca de incorporar as características dos mercados reais nos instrumentais teóricos da precificação de opções, Lisa Borland desenvolve um modelo não-gaussiano onde assume que a distribuição dos retornos dos ativos possui cauda pesada e volatilidade estocástica, diferentemente das hipóteses de construção do modelo Black-Scholes básico. Ao contrário de outros modelos onde o modelo Black-Scholes padrão é estendido para considerar

um ruído não-normal, Borland deriva um novo modelo de flutuações dos retornos de ações diretamente de processos estocásticos.

Para construir seu modelo, Borland (2002) assume que o modelo padrão de movimentos dos preços do ativo é dado por:

$$S(\tau - t) = S(\tau) e^{Y(t)} \quad (25)$$

que, ao ser logaritimizada se torna $Y(t) = \ln S(\tau - t) / \ln S(\tau)$, onde Y segue um processo estocástico do tipo:

$$dY = \mu dt + \sigma d\Omega \quad (26)$$

no tempo t , onde deve-se modelar o ruído como sendo uma distribuição não-gaussiana. Para fazer isso, assume-se que Ω segue um processo de feedback estatístico do tipo:

$$d\Omega = P(\Omega)^{\frac{1-q}{2}} d\omega \quad (27)$$

Onde P é a função de distribuição de probabilidade de Ω , evoluindo de acordo com a equação não-linear de Fokker-Planck⁶ e ω é um processo de ruído gaussiano com média zero como definido por (1). No limite, quando $q \rightarrow 1$, Ω se torna ω , o modelo Black-Scholes padrão é restabelecido e P_q se torna uma gaussiana. Para $q < 1$, essas distribuições exibem baixa curtose, resultando em regimes onde $P_q = 0$. Neste trabalho, serão considerados somente valores de $q > 1$, para os quais as distribuições exibem caudas largas. Existe,

⁶ P é função de Ω , assim como Ω é função de P (feedback estatístico)

também, um limite natural em $q = 3$. Após esse limite, os valores das distribuições não são normalizáveis (variância infinita)⁷. Aplicando o Lema de Ito em (25), teremos:

$$dS = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} P_q^{1-q} \right) S dt + \sigma S d\Omega \quad (28)$$

Fazendo $\mu + \frac{\sigma^2}{2} P_q^{1-q} = \bar{\mu}$ e substituindo em (28), teremos:

$$dS = \bar{\mu} S dt + \sigma S d\Omega \quad (29)$$

Supondo, agora, a existência de uma opção com preço f dependente de S e t . O preço da opção é dado, então, por:

$$f = f(S, t) \quad (30)$$

Aplicando o lema de Ito em (30), teremos:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \bar{\mu} S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2 P_q^{1-q}) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S P_q^{\frac{1-q}{2}} d\omega \quad (31)$$

Escolhendo-se uma carteira π , composta por uma posição vendida em um derivativo e uma posição comprada de valor $\partial f / \partial S$ em ações:

$$\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (32)$$

⁷ Neste trabalho utilizam-se somente processos com variância positiva e finita. Tais processos estão dentro do intervalo $1 < q < 5/3$, o qual cobre apenas os valores de interesse empírico.

No intervalo de tempo dt , a variação de π será:

$$d\pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \quad (33)$$

Substituindo (28) e (31) em (33) e rearranjando os termos, teremos:

$$d\pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 P_q^{1-q}\right) dt \quad (34)$$

o retorno deste portfólio será a taxa de juros livre de risco r . Um argumento de não-arbitragem mostra que:

$$d\pi = \pi r dt \quad (35)$$

Substituindo (32) e (34) em (35), teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 P_q^{1-q} = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \quad (36)$$

Rearranjando os termos em (36), obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 P_q^{1-q} = rf \quad (37)$$

A equação (37) é uma versão generalizada da equação diferencial parcial de Black-Scholes definida por (9).

Em seu trabalho, Borland (2002) consegue, realmente, supostas soluções para os principais problemas do modelo Black-Scholes básico. Admitindo valores de $q > 1$ o modelo incorpora curtose positiva, ou seja, as distribuições deixam de ser normais e exibem caudas largas, propiciando valores mais próximos aos observados empiricamente. A autora utiliza um *processo de feedback estatístico* (memória no modelo) para representar a volatilidade estocástica dos retornos do ativo-subjacente na própria definição do modelo, o que, ao contrário do modelo Black-Scholes básico, proporciona uma boa aproximação dos preços das opções em relação aos observados no mercado. Borland afirma, ainda, que a distribuição dos retornos das ações é mais bem modelada com q sendo aproximadamente 1,5. Usando esse valor para o parâmetro q no modelo de precificação, a autora reproduz o *sorriso da volatilidade* e aproxima a distribuição de probabilidades do modelo teórico com aquela observada nos mercados reais.

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS GERAIS

Este trabalho envolve a obtenção de informações teóricas, através de pesquisa exploratória, seguida de estudos formais descritivos, calcados em pesquisa bibliográfica junto a autores consagrados na abordagem do tema tratado. Além, ainda, da leitura de artigos específicos sobre o assunto existentes no mercado, com a finalidade de levantar os conceitos sobre derivativos, opções financeiras, precificação de ativos, etc. Dessa forma, far-se-á uso de livros, periódicos especializados, revistas, jornais especializados nacionais e estrangeiros, dissertações, teses de doutoramento, documentos impressos ou inseridos em meios eletrônicos, e vários tipos de comunicados científicos, entre outros, relativos à temática, seguido da consolidação do tema nas diversas abordagens já publicadas.

Os ativos-objetos utilizados na simulação são ações preferenciais nominativas (PN) referentes às empresas: Petrobras, Banco Itaú, Telemar, Siderúrgica Belgo Mineira e Ambev. Tais empresas representam diferentes segmentos de atividade econômica e são representativas em seus setores de mercado (petroquímico, financeiro, telefônico/tecnológico, siderúrgico e de bebidas).

A amostra é composta por 1240 (um mil duzentos e quarenta) dados diários por cada empresa, correspondentes a 5 (cinco) anos de preços diários das ações, abstraindo-se os fins de semana, feriados e dias em que a BOVESPA (Bolsa de Valores de São Paulo) não operou. Os dados são referentes ao preço de fechamento diário de cada ação.

Serão aplicados testes de normalidade nos dados a fim de verificar quais ativos apresentam distribuição de probabilidade não-gaussiana. Os testes aplicados serão: Teste

Kolmogorov-Smirnov e Teste Quantil-Quantil. Ambos os resultados serão demonstrados a fim de melhor entender a aplicabilidade do modelo de Borland.

As simulações de *hedging* realizadas se referem à três tipos de opções, quais sejam: opção de compra européia (*EuroCall*), opção de venda européia (*EuroPut*) e opção de venda americana (*AmerPut*). A simulação para a opção de compra americana (*AmerCall*) não será realizada porque, de acordo com (14), seu preço será igual à opção de compra européia, não havendo necessidade, portanto, de realizar sua simulação.

O cálculo da volatilidade (σ) será realizado utilizando-se os 200 (duzentos) primeiros dados de cada amostra para obter o coeficiente a ser utilizado nos 40 (quarenta) dados seguintes, e assim sucessivamente. Esse processo diminuirá o tamanho da amostra de cada empresa utilizada na simulação para 1040 (um mil e quarenta) dados, dividindo-a em 26 (vinte e seis) sub-amostras de 40 (quarenta) dados.

O parâmetro (q) utilizado na equação de precificação de Borland definida por (37) é estimado por meio de MQO (Mínimos Quadrados Ordinários) para cada ativo separadamente. Esse processo visa à obtenção de mínima variância do parâmetro estimado.

A simulação dos preços das opções *EuroCall* e *EuroPut* será realizada por meio do *Método de Diferenças Finitas de Crank-Nicolson* exemplificado na próxima seção. Não foi necessário utilizar o Algoritmo de Douglas para realizar essas simulações, dado que os resultados e o custo computacional (90 segundos em média) do método de Crank-Nicolson foram satisfatórios. Contudo, como o nível de precisão do Algoritmo de Douglas é superior em relação aos demais, supõe-se que esse método levaria um menor tempo de computação para apresentar os resultados das simulações se fosse empregado.

A simulação dos preços da opção *AmerPut* será realizada utilizando-se o *Método SOR Projetado* exemplificado na próxima seção.

5.2 METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Para a utilização de métodos numéricos na precificação de opções é extremamente vantajoso reduzir a equação básica de Black-Scholes em uma variante da equação fundamental do calor. Segundo Wilmott (1998), após algumas transformações de variáveis⁸ em (9), teremos:

$$c_i(S, t) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (38)$$

Onde:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right)$$

$$\beta = -\frac{1}{4} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right)$$

$$S = e^x$$

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

Logo, $u(x, t)$ satisfaz a equação de difusão:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (39)$$

A equação (39) é a equação diferencial parcial parabólica mais simples e mostra que a função u depende de apenas duas variáveis, x e τ .

Para a precificação de opções europeias de compra e venda e das opções americanas de compra, as quais possuem solução analítica conhecida podem ser utilizados

⁸ Para detalhamento matemático ver Apêndice A.

métodos de diferenças finitas padrão. Já para a precificação de opções americanas de venda, cujo valor inicial é desconhecido, o método utilizado será o SOR Projetado. Vejamos, a seguir, a exemplificação dos principais métodos numéricos que podem ser utilizados no apreçamento de ativos.

5.2.1 MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS PADRÃO

A idéia básica dos métodos de diferenças finitas é aproximar as derivadas parciais de uma equação diferencial pelas diferenças finitas correspondentes. Para isto, é definida uma grade de pontos que representa os possíveis valores que o tempo e o preço da ação podem assumir. Definidas as condições de fronteira, a grade é representada pelo valor máximo que o preço da ação pode assumir, pelo prazo até o vencimento da opção, e pelos intervalos de tempo Δt e de preço da ação ΔS (SAITO; ROCHMAN, 1999).

Para encontrar a solução de (39) pode-se utilizar três abordagens distintas do método de diferenças finitas padrão. De acordo com Wilmott, Howison e Dewynne (1996) e Saito e Rochman (1999), são elas:

5.2.1.1 Método de Diferenças Finitas Explícito

Considere a forma geral transformada da equação diferencial parcial de Black-Scholes para uma opção europeia definida por (39). Utilizando a aproximação *forward difference* para o termo $\partial u / \partial \tau$ e uma aproximação simétrica central para o termo $\partial^2 u / \partial x^2$, a aproximação por diferenças finitas explícitas de (39) é dada por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta \tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (40)$$

Fazendo $\Delta \tau / (\Delta x)^2 = \alpha$ e rearranjando (40), teremos:

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j+1}^n + (1 - 2\alpha)u_j^n + \alpha u_{j-1}^n \quad (41)$$

A equação (41) define o esquema de diferenças finitas explícito. A principal vantagem na utilização do esquema explícito é o relacionamento direto de uma variável desconhecida, u_j^{n+1} , a três variáveis diferentes mas conhecidas, u_{j+1}^n , u_j^n e u_{j-1}^n . Contudo, o esquema explícito apresenta dois problemas que podem inviabilizar a sua utilização na precificação de opções. O primeiro problema se refere ao fato de que nem sempre o método converge para o resultado da equação diferencial parcial, causando muitos problemas de instabilidade, dependendo das magnitudes de ΔS e Δt . O segundo problema é o alto “custo” computacional devido ao aumento de variáveis que determinam o valor do ativo-objeto.

5.2.1.2 Método de Diferenças Finitas Implícito

Considere a forma geral transformada da equação diferencial parcial de Black-Scholes para uma opção europeia definida por (39). Utilizando a aproximação *backward difference* para o termo $\partial u / \partial \tau$ e uma aproximação simétrica central para o termo $\partial^2 u / \partial x^2$, a aproximação por diferenças finitas implícitas de (39) é dada por:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta \tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (42)$$

Fazendo $\Delta \tau / (\Delta x)^2 = \alpha$ e rearranjando (42), teremos:

$$-\alpha u_{j-1}^n + (1 - 2\alpha)u_j^n - \alpha u_{j+1}^n = u_j^{n-1} \quad (43)$$

A equação (43) define o esquema de diferenças finitas implícito. O valor do preço da opção no instante t será, então, uma média ponderada descontada dos três preços seguintes em $t + \Delta t$. Diferente do esquema explícito, o esquema implícito sempre converge para a solução da equação diferencial parcial quando $\Delta S \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$. Porém, apesar da boa aproximação do preço da opção dada pelo método implícito, este ainda deixa a desejar na precisão dos valores obtidos.

5.2.1.3 Método Crank-Nicolson

Considere a forma geral transformada da equação diferencial parcial de Black-Scholes para uma opção europeia definida por (39). Utilizando a aproximação *forward difference*, o esquema explícito é dado por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta \tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (44)$$

Utilizando, agora, aproximação *backward difference* em (39), o esquema implícito será:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta \tau} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (45)$$

O método de diferenças finitas Crank-Nicolson é, essencialmente, uma média dos métodos explícito e implícito. Portanto, somando (44) com (45) e dividindo o resultado por 2, o esquema de Crank-Nicolson será dado por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (46)$$

Fazendo $\Delta \tau / (\Delta x)^2 = \alpha$ e rearranjando (46), teremos:

$$u_j^{n+1} - \frac{1}{2} \alpha (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) = u_j^n + \frac{1}{2} \alpha (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \quad (47)$$

Note que as variáveis u_j^{n+1} , u_{j-1}^{n+1} e u_{j+1}^{n+1} são, agora, determinadas implicitamente em termos de todos os u_j^n , u_{j+1}^n e u_{j-1}^n . O método Crank-Nicolson converge mais rapidamente pra a solução da equação diferencial parcial, além de ser incondicionalmente estável.

5.2.1.4 Algoritmo de Douglas

Este é um método que apresenta erro de truncamento local de $O(\Delta S^4, \Delta t^2)$ com o mesmo custo computacional do esquema Crank-Nicolson. Poderia ser esperado que para obter uma ordem mais alta de precisão do que em Crank-Nicolson, o esquema de Douglas requiera de mais pontos de direção de S , mas, na verdade, isso não acontece. Considere a equação (46) que define o método Crank-Nicolson. Conforme (46), o esquema numérico é

uma média entre os métodos explícito e implícito. Defini-se, então, uma nova variável chamada θ . Quando $\theta = \frac{1}{2}$, o método de Crank-Nicolson é restabelecido. Para um valor geral de θ , o erro de truncamento local é:

$$O\left(\frac{1}{2}\Delta t + \frac{1}{12}\Delta S^2 - \theta\Delta t, \Delta S^4, \Delta t^2\right) \quad (48)$$

Quando $\theta = 0$, $\frac{1}{2}$ ou 1 nós obtemos os resultados esperados pelo método de Crank-Nicolson. Mas se $\theta = \frac{1}{2} - \frac{\Delta S^2}{12\Delta t}$, então o erro de truncamento local é aperfeiçoado.

A implementação do Algoritmo de Douglas não possui custo computacional muito maior do que o esquema de Crank-Nicolson, porém, sua precisão atinge ordem $O(h^4)$, apresentando, portanto, o dobro da acurácia do método Crank-Nicolson.

5.2.2 MÉTODO SOR (SUCESSIVE OVER-RELAXATIONS) PROJETADO

O método iterativo SOR Projetado é um refinamento de outro método iterativo conhecido como *Método Gauss-Seidel*, que por sua vez, é um desenvolvimento do *Método Jacobi*. A vantagem do método SOR Projetado na precificação de opções de venda americanas é a solução direta dada ao sistema de equações com barreiras, não obtida com o uso de outros métodos. O método SOR Projetado é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y_j^{n,k+1} = \frac{1}{1+2\alpha} (b_j^n + \alpha (u_{j-1}^{n,k+1} + u_{j+1}^{n,k})) \\ u_j^{n,k+1} = u_j^{n,k} + w (y_j^{n,k+1} - u_j^{n,k}) \end{cases} ,$$

(49)

Onde $w > 1$ é o parâmetro de super-relaxamento. De acordo com Wilmott, Howison e Dewynne (1996), o algoritmo SOR Projetado converge para a solução correta da inequação diferencial parcial se $\alpha > 0$, desde que $0 < w < 2$, que proporciona uma convergência mais rápida para a solução, aumentando a eficiência do método.

6. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Os resultados dos testes de normalidade são apresentados a seguir. Na Tabela 1, são apresentados os resultados do Teste Kolmogorov-Smirnov (Teste KS) para cada ativo-objeto e seu respectivo *p-value*.

TABELA 1
RESULTADO DO TESTE KOLMOGOROV-SMIRNOV

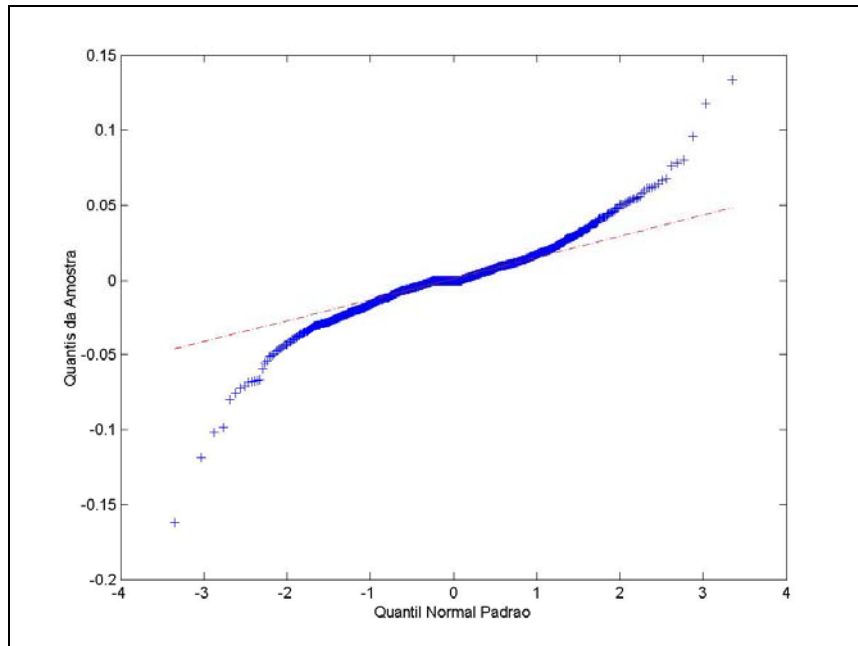
Ativo-Objeto	Resultado Teste KS	<i>p-value</i>
Ambev PN	Rejeita normalidade	$3,7624E^{-010}$
Belgo PN	Rejeita normalidade	$1,2531E^{-009}$
Itaubanco PN	Aceita normalidade	0,0595
Petrobras PN	Aceita normalidade	0,0525
Telemar PN	Aceita normalidade	0,1748

Fonte: Elaboração própria com base nos resultados do Teste KS.

As Figuras 5.1 a 5.5 apresentam os resultados do Teste Quantil-Quantil, também para cada ativo-objeto. A linha reta e tracejada representa a Distribuição Normal. Os pontos azuis são os dados amostrais de cada ativo-objeto. A normalidade dos dados é alcançada quando os dados da amostra, em azul, coincidem com a linha representativa da Distribuição Gaussiana.

FIGURA 5.1

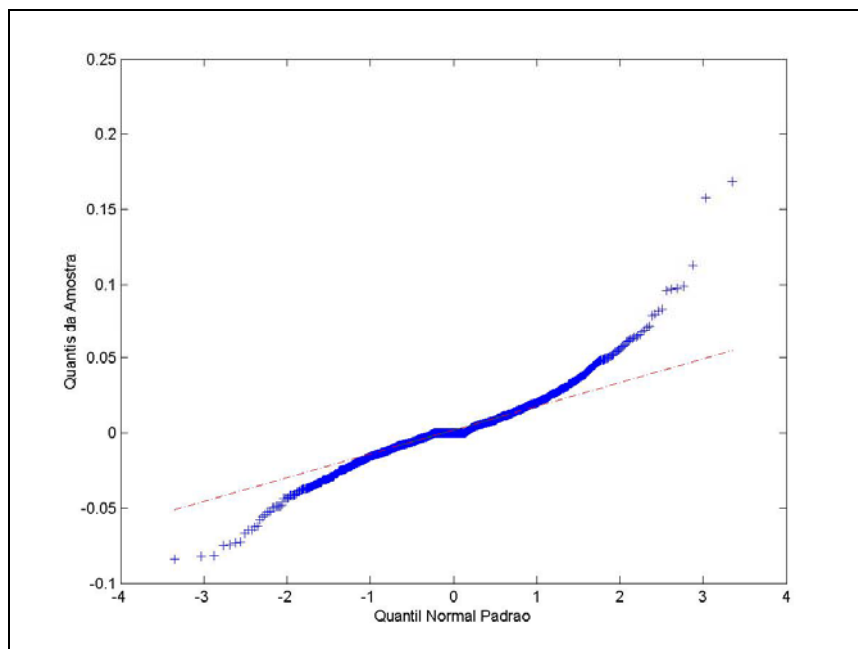
RESULTADO DO TESTE QUANTIL - QUANTIL PARA O ATIVO AMBEV PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados do Teste Quantil-Quantil.

FIGURA 5.2

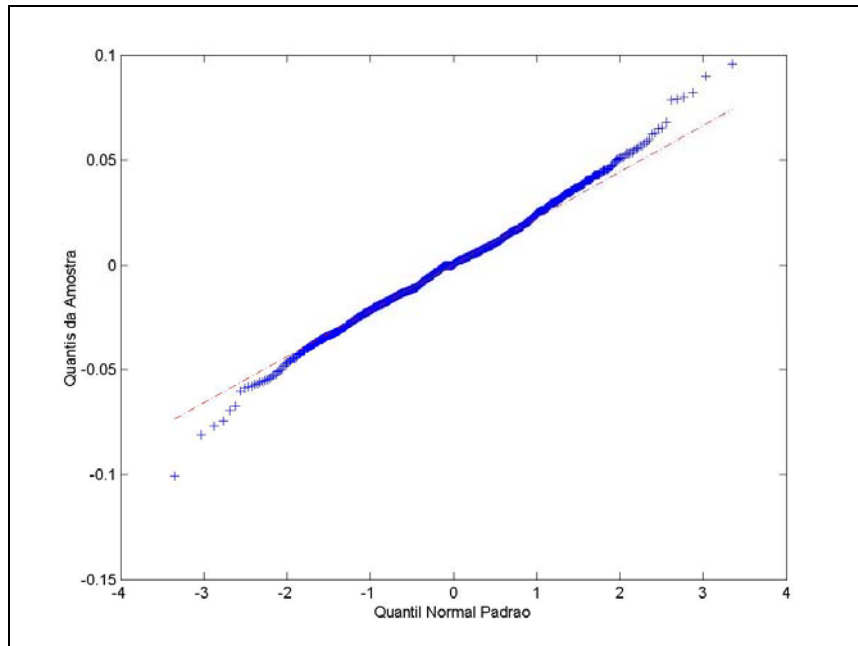
RESULTADO DO TESTE QUANTIL - QUANTIL PARA O ATIVO BELGO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados do Teste Quantil-Quantil.

FIGURA 5.3

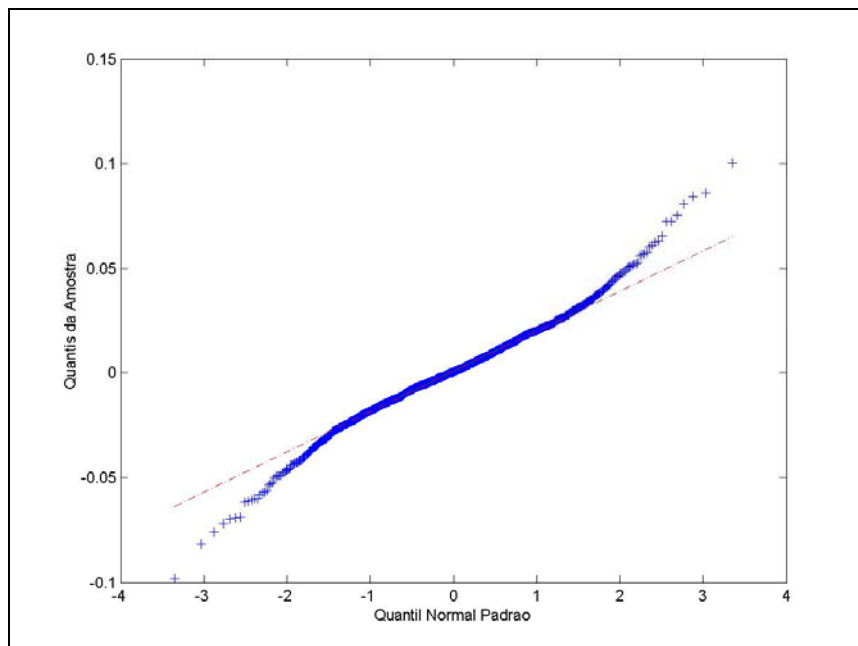
RESULTADO DO TESTE QUANTIL - QUANTIL PARA O ATIVO ITAUBANCO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados do Teste Quantil-Quantil.

FIGURA 5.4

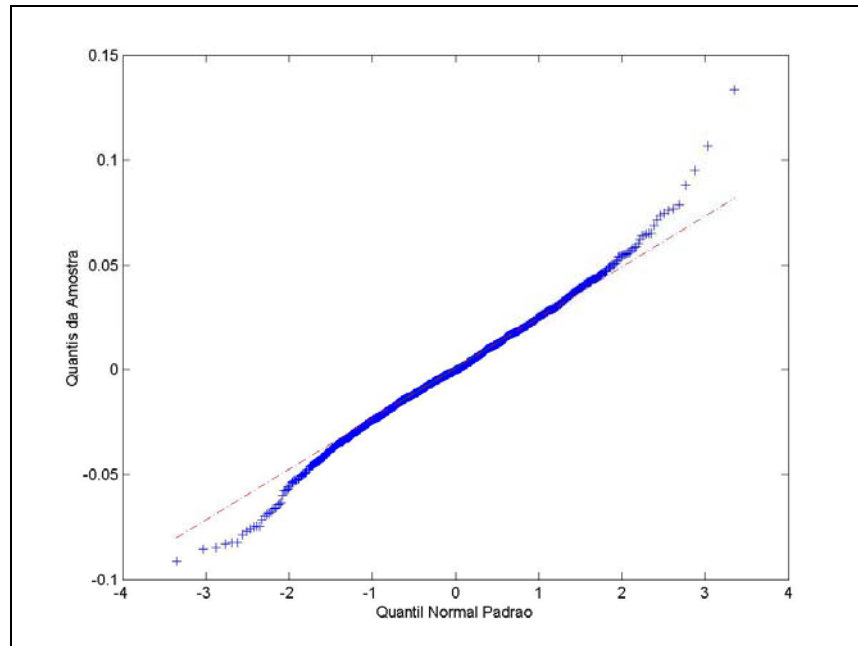
RESULTADO DO TESTE QUANTIL - QUANTIL PARA O ATIVO PETROBRAS PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados do Teste Quantil-Quantil.

FIGURA 5.5

RESULTADO DO TESTE QUANTIL - QUANTIL PARA O ATIVO TELEMAR PN

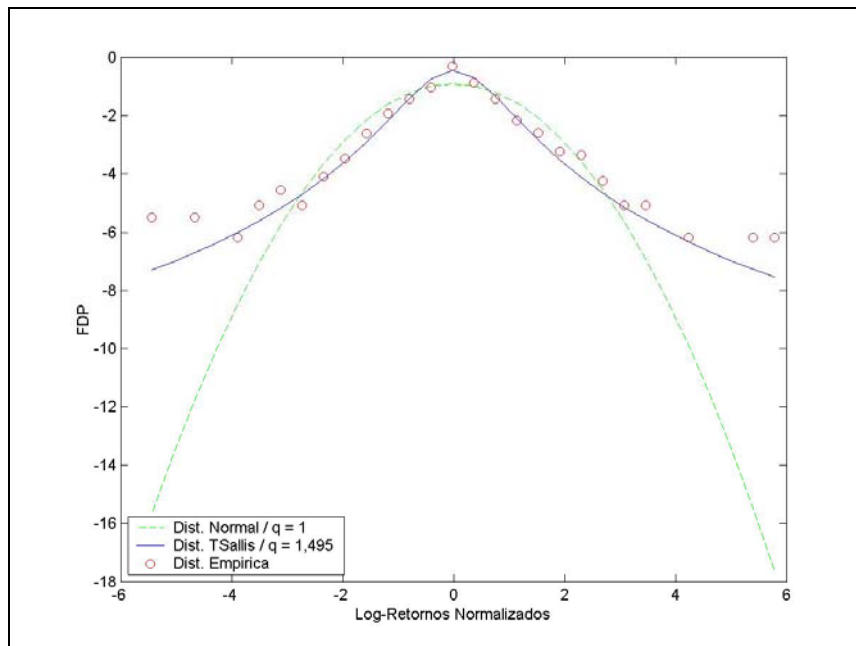


Fonte: Elaboração própria com base nos resultados do Teste Quantil-Quantil.

Depois de calculado o parâmetro q por meio de MQO para cada amostra, é feita a simulação dos preços das opções referentes aos ativos-objetos em análise. As Figuras 6.1 a 6.5 apresentam a distribuição dos log-retornos obtidos com a simulação para cada ativo e compara-os com as Distribuições Normal e de Tsallis para cada parâmetro q estimado. Quando $q=1$ a Distribuição de Tsallis coincide com a Distribuição Gaussiana e o modelo Black-Scholes básico é restabelecido. Para valores de $q > 1$ a distribuição exibe caudas largas e parece ajustar-se melhor aos dados reais, como mostrado abaixo nas Figuras 6.1 a 6.5.

FIGURA 6.1

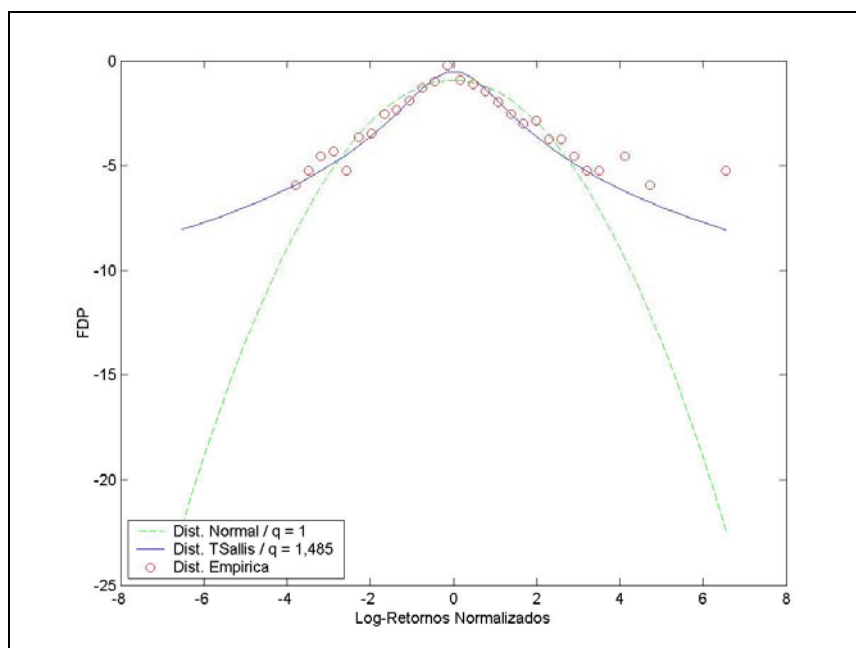
DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS DO ATIVO AMBEV PN



Fonte: Elaboração própria.

FIGURA 6.2

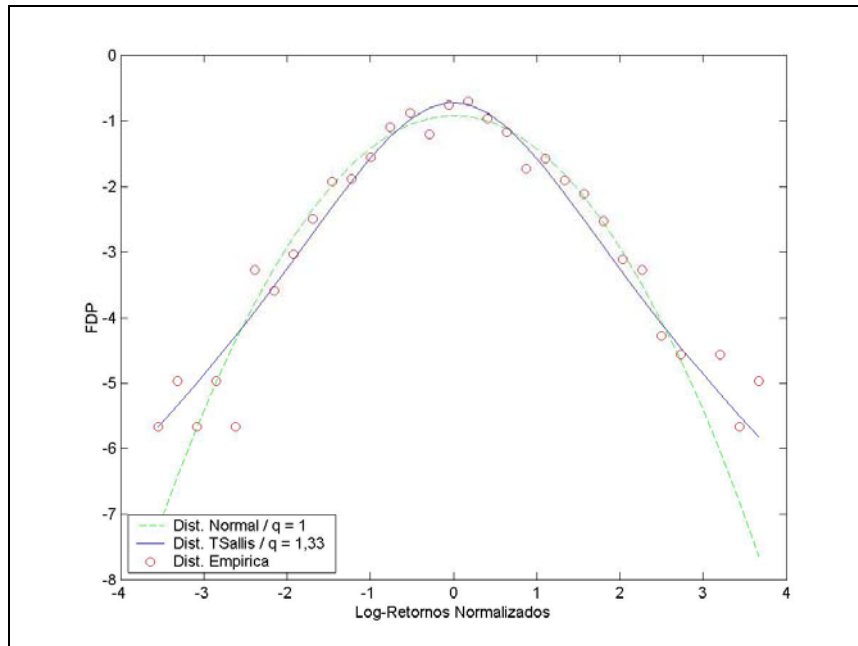
DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS DO ATIVO BELGO PN



Fonte: Elaboração própria.

FIGURA 6.3

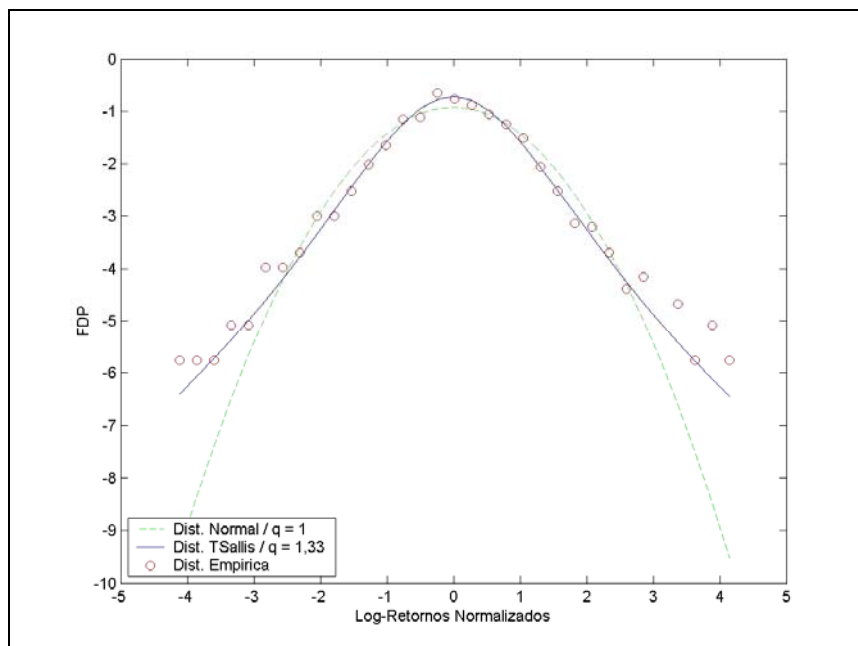
DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS DO ATIVO ITAUBANCO PN



Fonte: Elaboração própria.

FIGURA 6.4

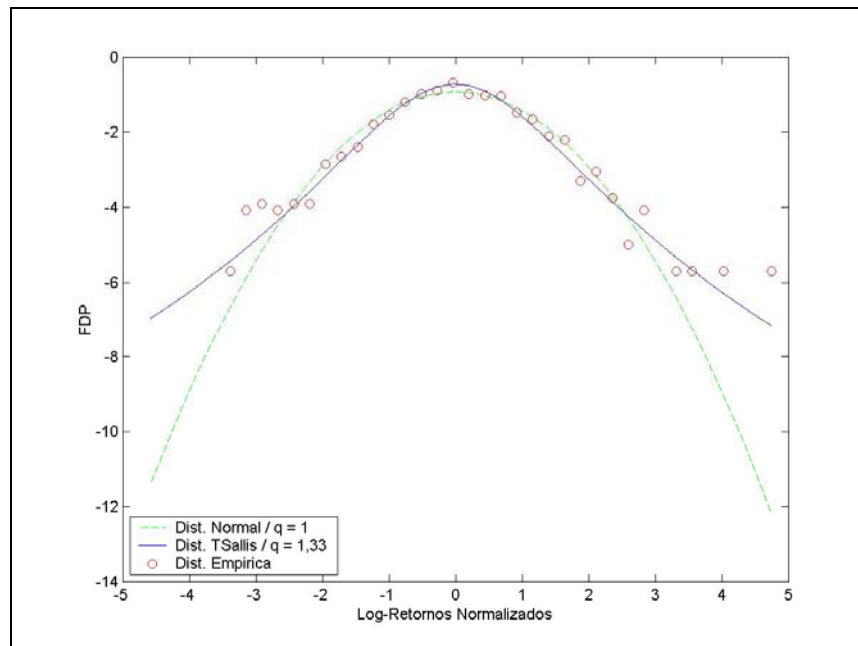
DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS DO ATIVO PETROBRAS PN



Fonte: Elaboração própria.

FIGURA 6.5

DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS DO ATIVO TELEMAR PN



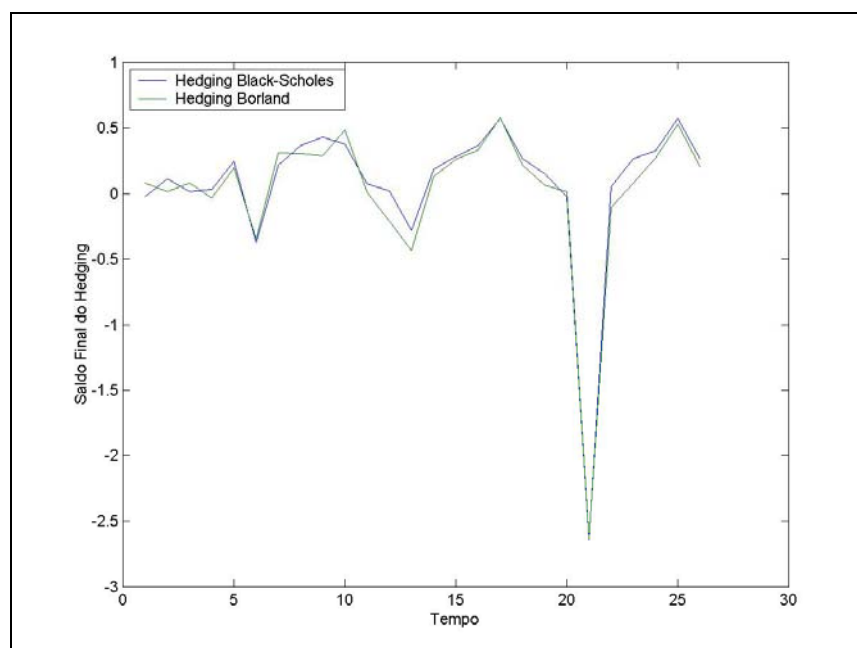
Fonte: Elaboração própria.

Como pode ser verificado observando as Figuras 6.1 a 6.5, a Distribuição de Tsallis com o parâmetro q ajustado para o ativo-objeto em análise apresenta melhores resultados do que os obtidos com a Distribuição Normal. Esse fato ocorre devido à distribuição de probabilidades dos dados empíricos apresentar curtose positiva, evidenciando a necessidade de substituir a hipótese de retornos log-normais adotada pelo modelo Black-Scholes por uma outra hipótese onde a distribuição de probabilidades dos dados reais admita o aparecimento de caudas largas na sua representação. A Distribuição de Tsallis resolve esse problema e parece, realmente, apresentar melhores resultados quando de sua utilização na modelagem de precificação de opções. Outra observação interessante é o fato de que o valor do parâmetro q ser aproximadamente 1,5, como dito pela autora em seu trabalho, parece, verdadeiramente, apresentar os melhores resultados, principalmente, quando os dados apresentam rejeição a hipótese de normalidade.

A seguir, são apresentados os resultados das simulações de *hedging* para cada tipo de opção referente a cada ativo-objeto, com base na simulação realizada para a obtenção dos preços das opções. Cada simulação de preços utilizando a modelagem de Borland levou, em média, 40 minutos de processamento computacional, enquanto que a modelagem de Black-Scholes apresenta o resultado quase que simultaneamente (90 segundos), sendo, inclusive, desnecessário a utilização de softwares complexos como o MATLAB. Os resultados são demonstrados como o saldo final do *hedging* calculado como um valor percentual do preço da opção em análise como função do tempo. As Figuras 7.1 a 7.5 apresentam os resultados da opção *EuroCall*. As Figuras 8.1 a 8.5 apresentam os resultados da opção *EuroPut*. As Figuras 9.1 a 9.5 apresentam os resultados da opção *AmerPut*. O *hedging* obtido com o modelo de Black-Scholes é representado pela linha azul e o *hedging* obtido com o modelo de Borland é representado pela linha verde.

FIGURA 7.1

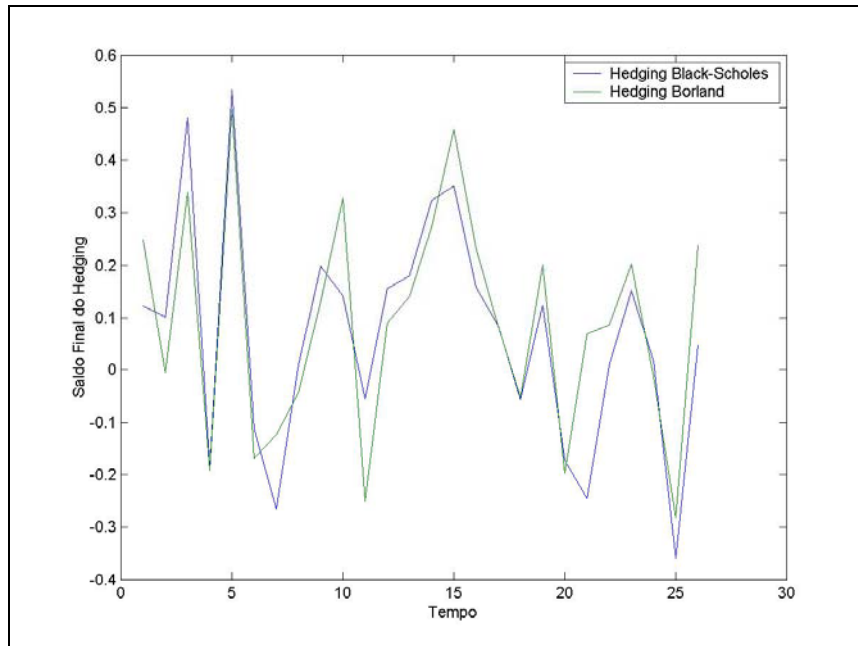
OPÇÃO EUROCALL – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO AMBEV PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 7.2

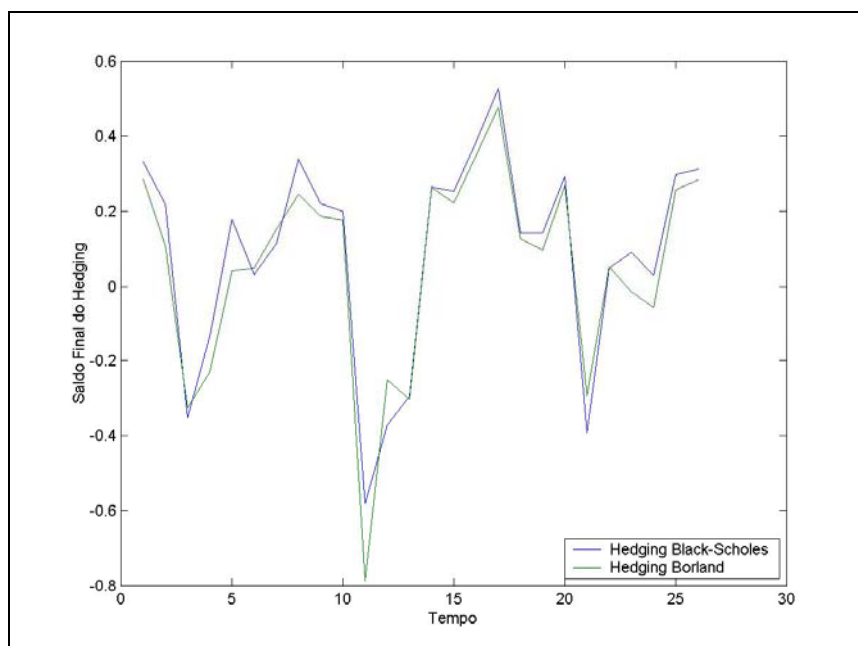
OPÇÃO EUROCALL – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO BELGO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 7.3

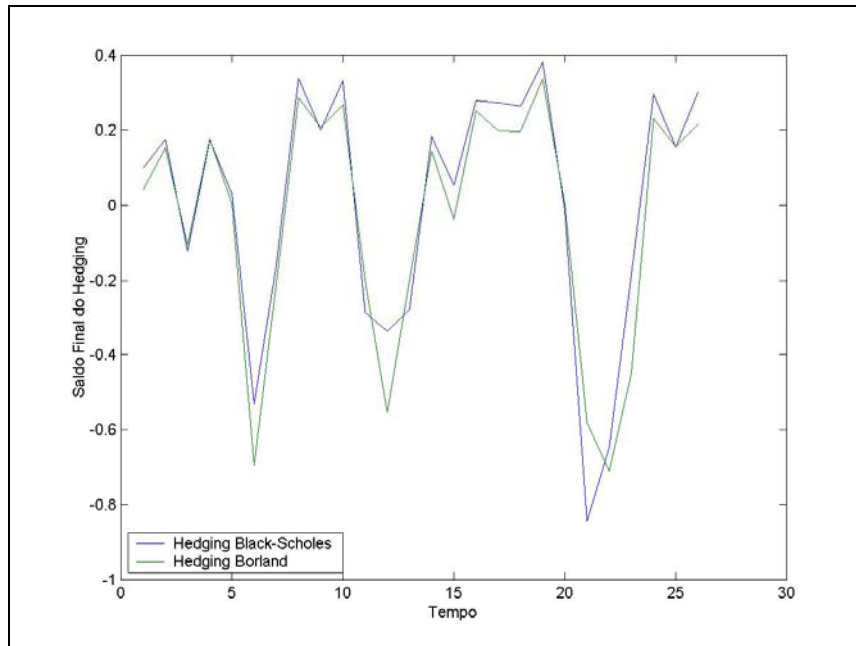
OPÇÃO EUROCALL – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO ITAUBANCO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 7.4

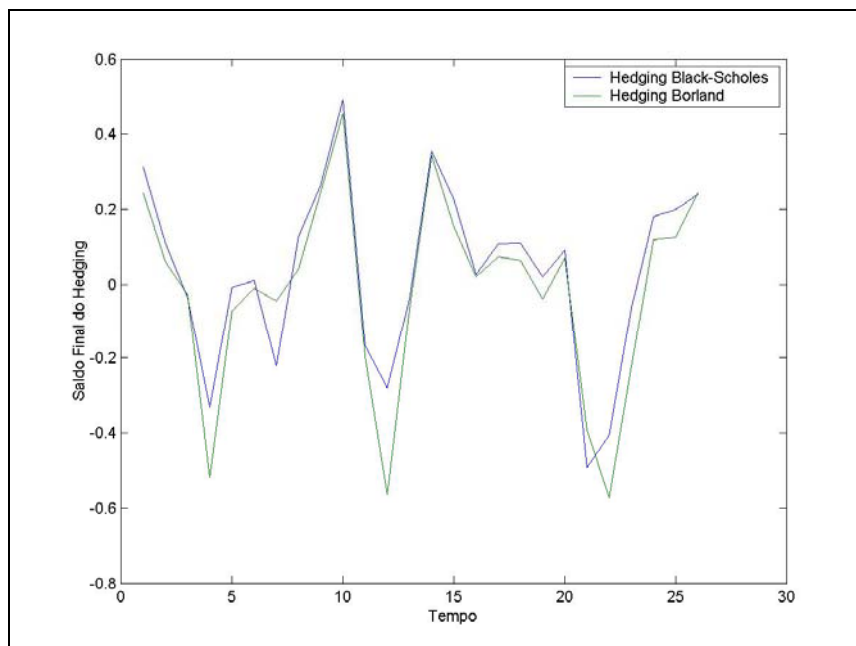
OPÇÃO EUROCALL – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO PETROBRAS PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 7.5

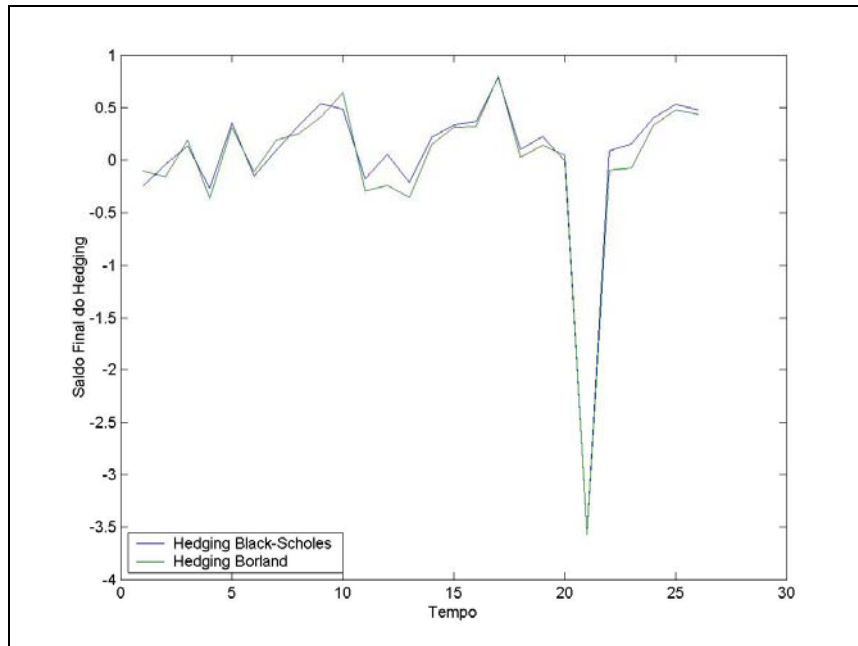
OPÇÃO EUROCALL – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO TELEMAR PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 8.1

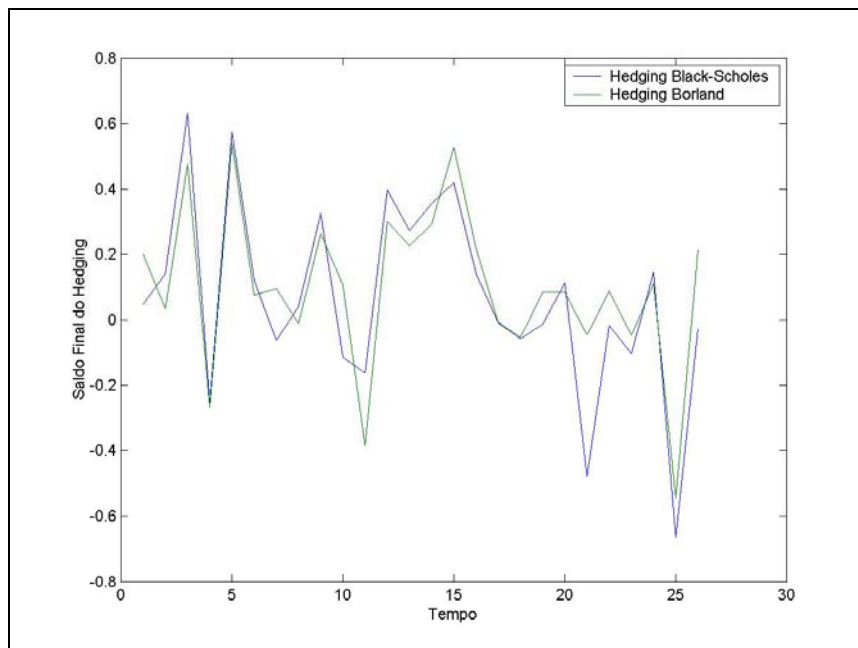
OPÇÃO EUROPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO AMBEV PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 8.2

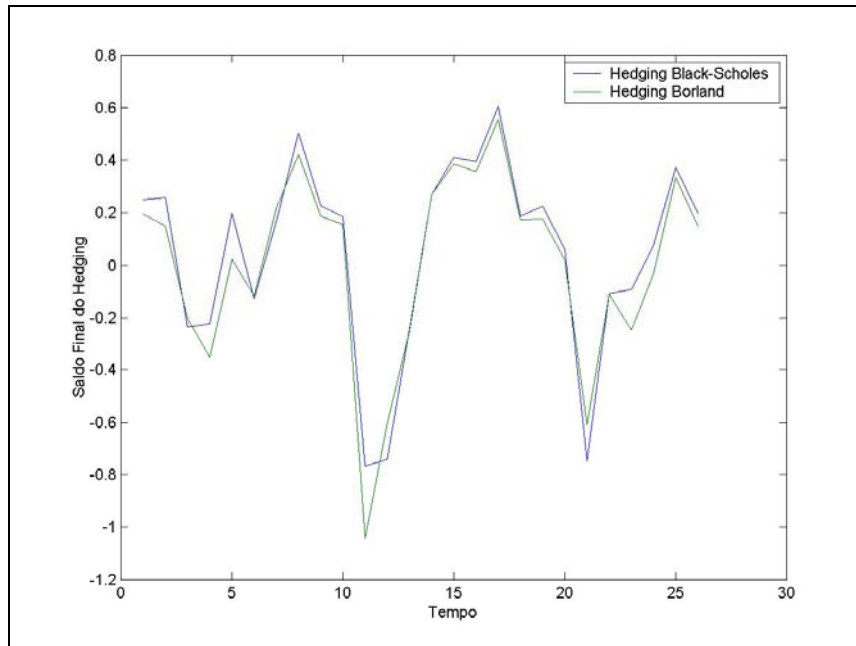
OPÇÃO EUROPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO BELGO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 8.3

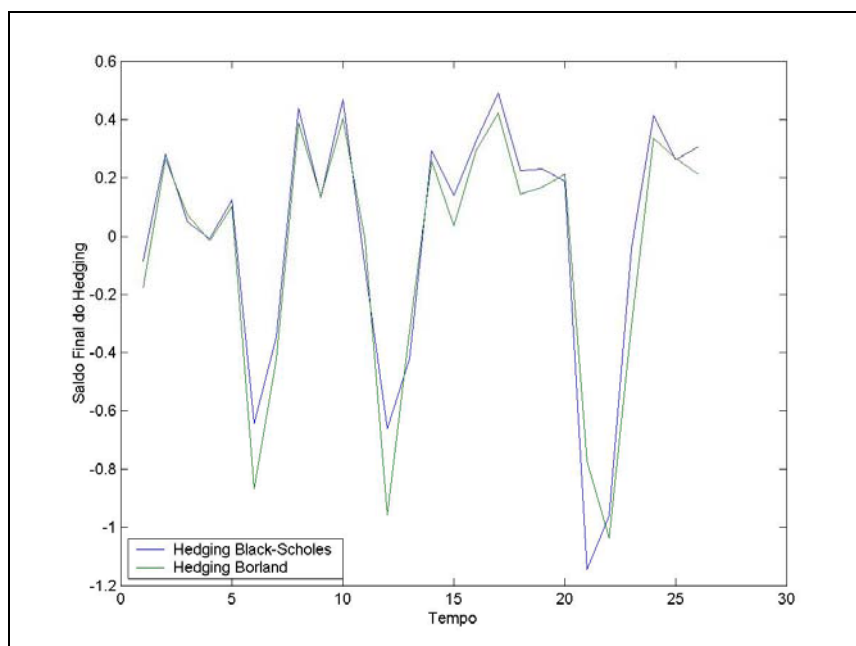
OPÇÃO EUROPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO ITAUBANCO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 8.4

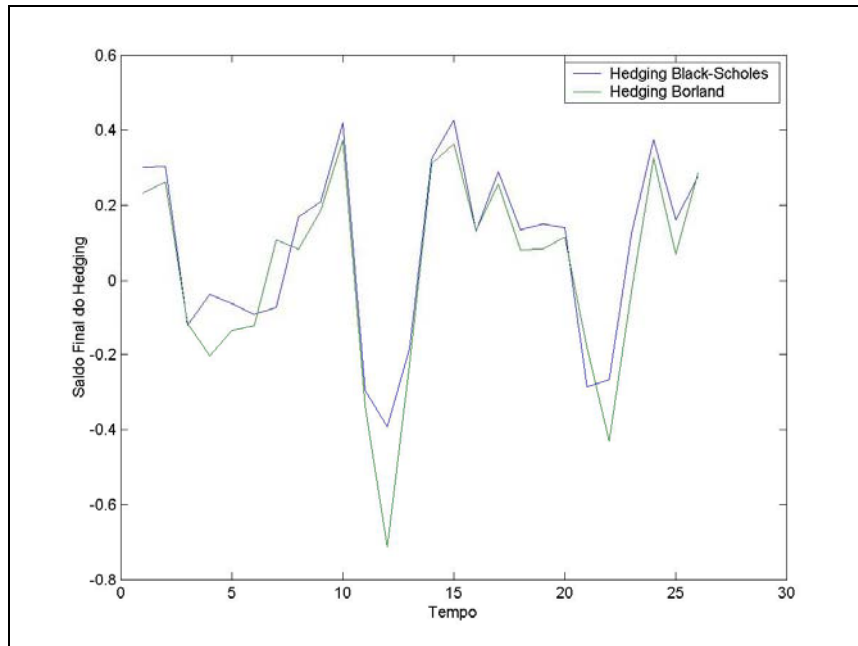
OPÇÃO EUROPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO PETROBRAS PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 8.5

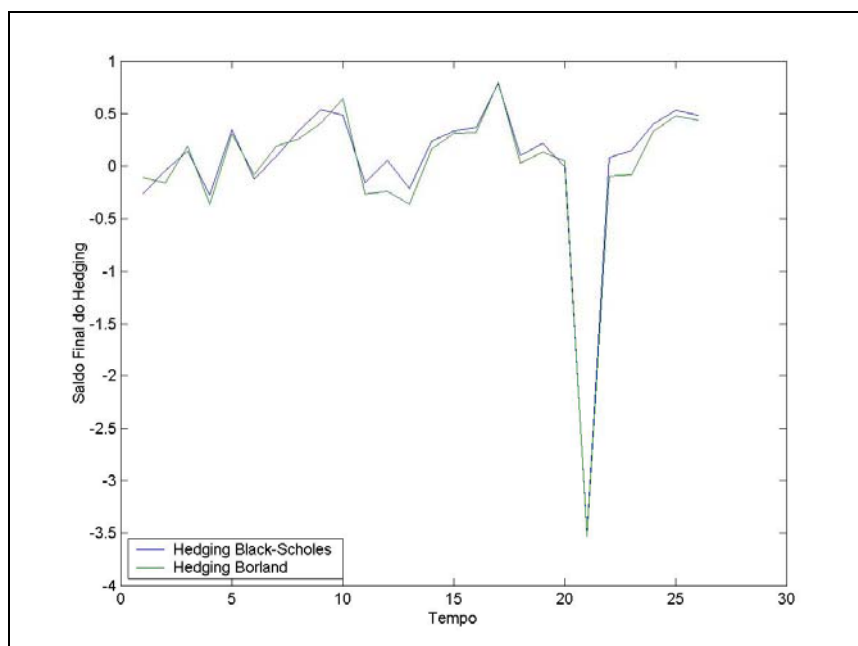
OPÇÃO EUROPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO TELEMAR PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 9.1

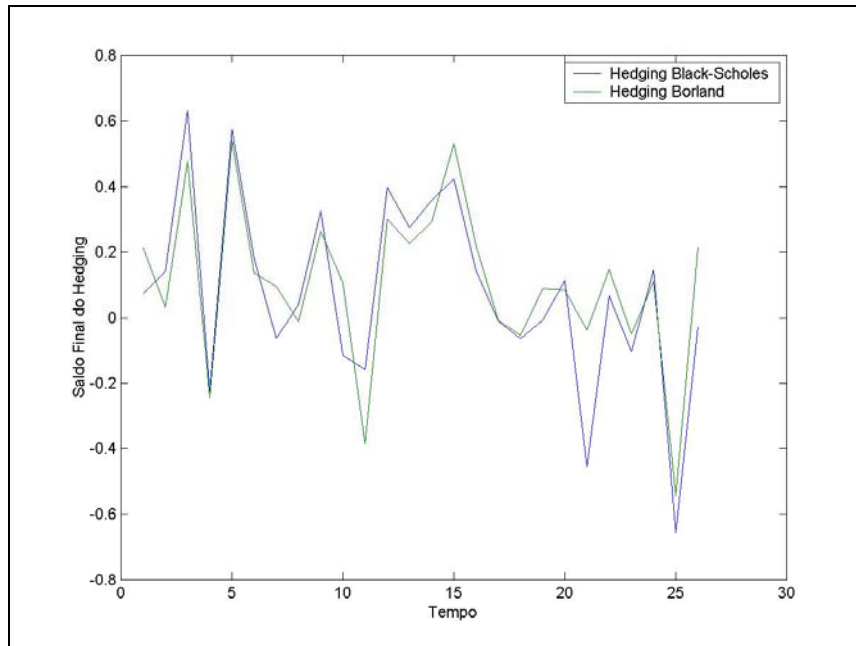
OPÇÃO AMERPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO AMBEV PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 9.2

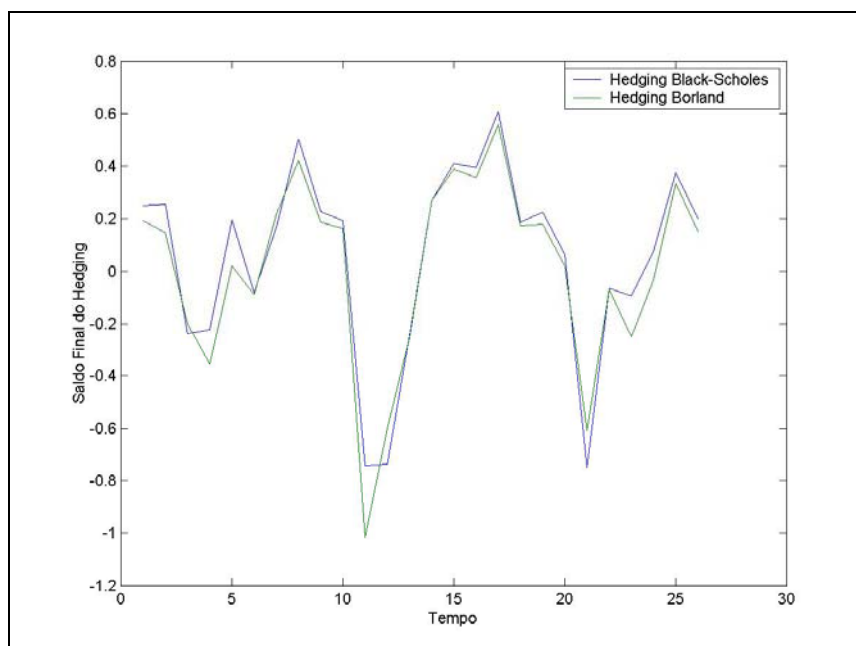
OPÇÃO AMERPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO BELGO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 9.3

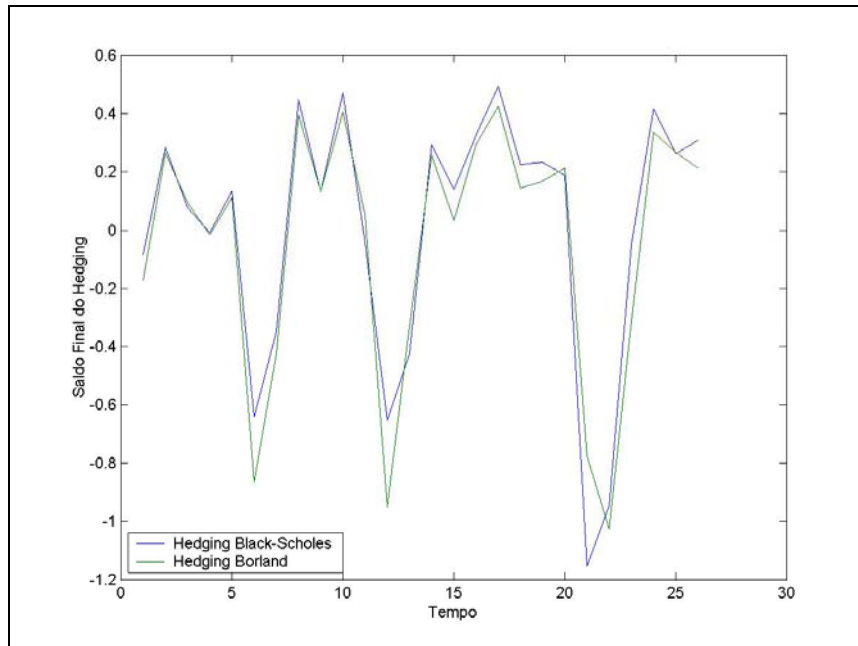
OPÇÃO AMERPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO ITAUBANCO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 9.4

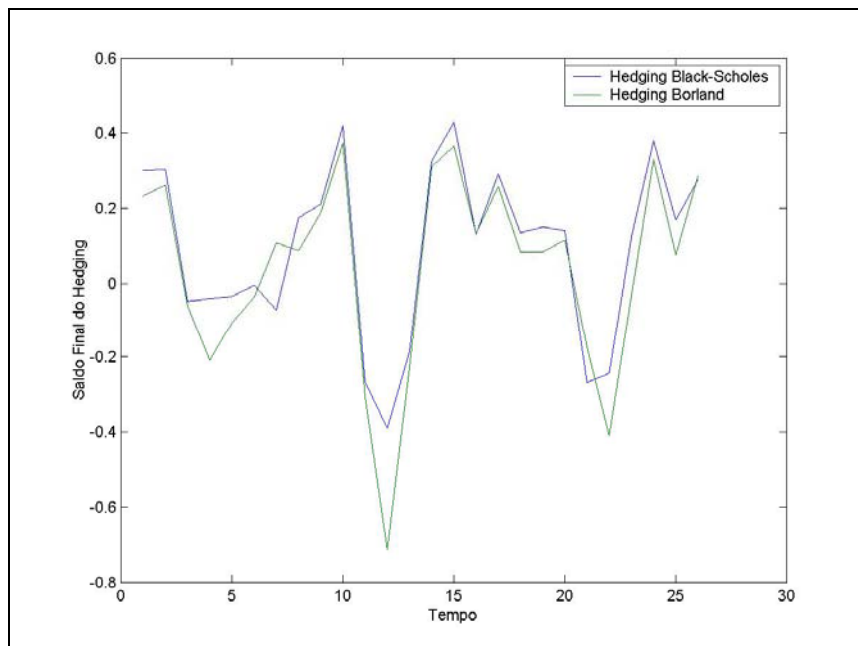
OPÇÃO AMERPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO PETROBRAS PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

FIGURA 9.5

OPÇÃO AMERPUT – SALDO FINAL DO HEDGING DO ATIVO TELEMAR PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

Observando as figuras percebe-se que os resultados obtidos com a simulação são, em sua maioria, favoráveis à modelagem Black-Scholes básica. É interessante destacar o comportamento atípico dos *hedgings* referentes ao ativo **Ambev PN**. Percebe-se que todas as figuras de *hedging* relacionadas a esse ativo apresentam *outlier*, ou seja, pontas nos mesmos intervalos da amostra para os três tipos de opções em análise. Esse fato pode ser explicado pela fusão, em meados de 2004, da Ambev com a multinacional belga Interbrew. A união das duas empresas fez cair os preços das ações de ambas no mercado financeiro, provocando um movimento de cautela por parte dos investidores, fato refletido nas simulações de *hedging* para esse ativo. A Tabela 2 abaixo apresenta a média dos saldos finais de *hedging* calculado para cada tipo de opção referente a cada ativo-objeto.

TABELA 2
VALOR MÉDIO DO SALDO FINAL DE HEDGING

ATIVO OBJETO	EUROCALL		EUROPUT		AMERPUT	
	Hedg. BS	Hedg. Bor	Hedg. BS	Hedg. Bor	Hedg. BS	Hedg. Bor
Ambev PN	0,0711	0,0271	0,0394	-0,0114	0,0439	-0,0076
Belgo PN	0,0668	0,0880	0,0675	0,0992	0,0770	0,1059
Itaubanco PN	0,0884	0,0531	0,0506	0,0080	0,0553	0,0118
Petrobras PN	0,0051	-0,0335	-0,0020	-0,0451	0,0032	-0,0406
Telemar PN	0,0323	-0,0177	0,0821	0,0301	0,0927	0,0393

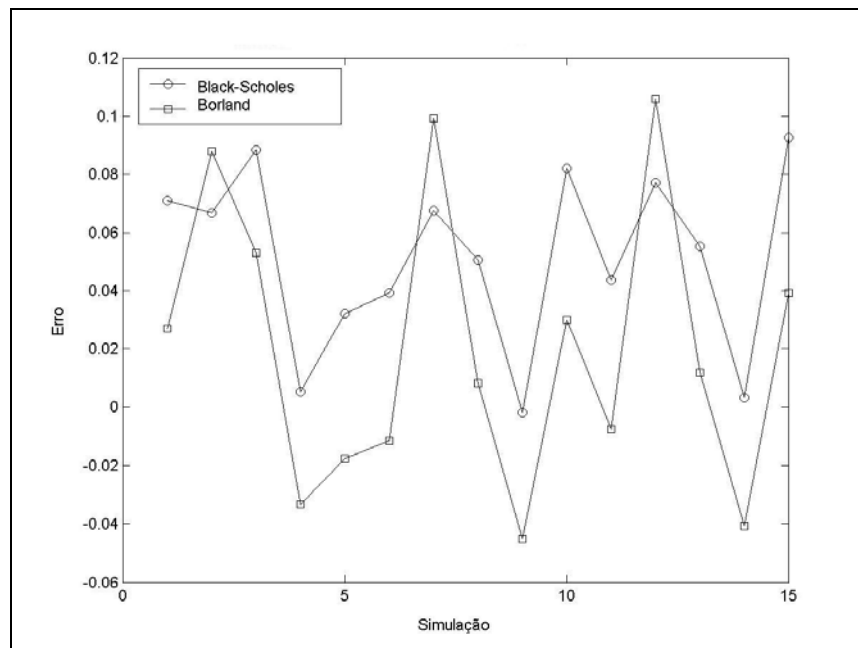
Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

De acordo com a Tabela 2, a simulação utilizando-se o modelo de Borland somente apresentou melhores resultados, em comparação com o modelo Black-Scholes básico, quando aplicado ao ativo **Belgo PN**. Levando em consideração os testes de normalidade apresentados anteriormente, esse resultado parece estar de acordo com a hipótese

de aplicação do modelo de Borland em ativos cujos comportamentos dos retornos apresentam distribuição de probabilidades não-normal. Contudo, se esta hipótese fosse realmente válida, esperava-se que as simulações de *hedging* referentes ao ativo **Ambev PN** também apresentassem melhores resultados quando simulados utilizando o modelo de Borland. Sendo assim, como pode ser mais bem observado na Figura 10, o modelo de Borland não apresenta resultados satisfatórios que justifiquem a sua aplicação.

FIGURA 10

COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES MÉDIOS DO SALDO FINAL DE HEDGING



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

Para comprovar essa afirmação, foi feito um teste de hipóteses para a diferença entre as médias dos dois modelos (teste *t*), cujas hipóteses testadas são:

$$H_0 : \bar{\mu}_{BS} = \bar{\mu}_{BOR}$$

$$H_1 : \bar{\mu}_{BS} \neq \bar{\mu}_{BOR}$$

Onde $\bar{\mu}_{BS}$ é a média do saldo final de *hedging* do modelo Black-Scholes e $\bar{\mu}_{BOR}$ é a média do saldo final de *hedging* do modelo Borland. A Tabela 3 abaixo apresenta os resultados do teste para cada tipo de opção referente a cada ativo-objeto.

TABELA 3

P-VALUE RESULTANTE DO TESTE DE COMPARAÇÃO ENTRE DUAS MÉDIAS (TESTE T)

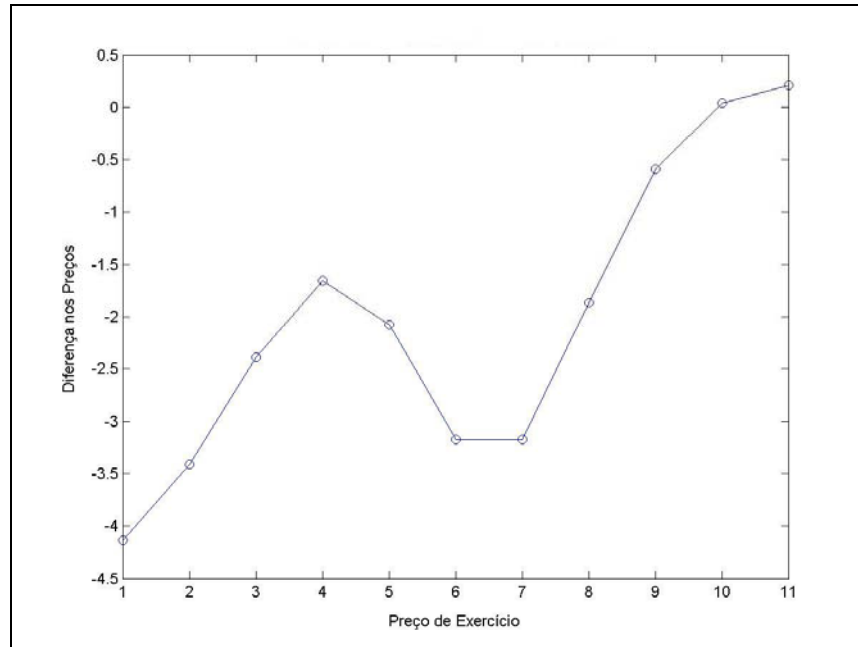
ATIVO – OBJETO	EUROCALL	EUROPUT	AMERPUT
Ambev PN	0,7908	0,8168	0,8120
Belgo PN	0,7239	0,6759	0,7013
Itaubanco PN	0,6490	0,6779	0,6691
Petrobras PN	0,6713	0,7249	0,7201
Telemar PN	0,4778	0,4639	0,4400

Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

Observando a Tabela 3 percebe-se que todos os *p-values* obtidos com o *Teste t* são valores altos, o que significa que o teste aceita a hipótese nula (H_0) de igualdade entre as médias em todos os casos. A aceitação da hipótese nula finda qualquer possibilidade de obtenção de melhores resultados com a utilização do modelo de Borland. Infelizmente, mesmo com o ótimo *insight* de Borland na construção de sua modelagem, o alto custo computacional que a mesma requer e a igualdade estatística verificada em relação ao modelo Black-Scholes inviabilizam sua utilização.

A diferença entre os preços obtidos com os dois modelos pode ser observada na Figura 11. A Figura 11 demonstra a diferença entre os preços como função do preço de exercício para a opção **EuroCall Belgo PN** com $S_0 = 718,75$; $r = 0,05$; $t = 0,08$ (20 dias); $\mu = 0,4764$; $\sigma_0 = 0,2723$ e $q = 1,35$.

FIGURA 11
DIFERENÇA ENTRE OS PREÇOS SIMULADOS PARA OS DOIS MODELOS
EUROCALL BELGO PN

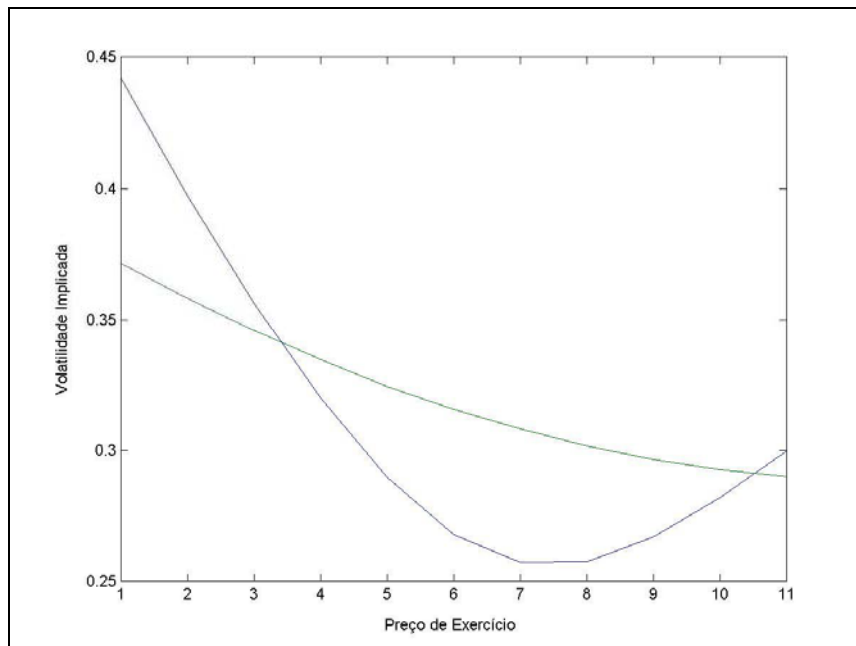


Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

Outra hipótese levantada por Borland (2002) foi que os preços obtidos com seu modelo reproduzem o comportamento conhecido como “sorriso da volatilidade”. Para verificar essa hipótese, a volatilidade foi simulada como função do preço de exercício para a opção **EuroCall Belgo PN** com $S_0 = 718,75$; $r = 0,05$; $t = 0,08$ (20 dias); $\mu = 0,4764$; $\sigma_0 = 0,2723$ e $q = 1,35$. A Figura 12 apresenta o resultado desta simulação, onde a linha azul se refere aos valores obtidos com o modelo de Borland. A linha verde corresponde à simulação da volatilidade implicada quando $q = 1$, para motivo de comparação.

FIGURA 12

VOLATILIDADE IMPLICADA - EUROCALL BELGO PN



Fonte: Elaboração própria com base nos resultados da simulação realizada.

Como pode ser visto na Figura 12, os preços obtidos com o modelo de Borland realmente apresentam volatilidade implícada condizente com suas hipóteses, ou seja, a volatilidade tem a forma de um “sorriso”. Contudo, não parece plausível que a representação do “sorriso da volatilidade” seja feita utilizando-se os valores obtidos com o modelo de Borland. A suposição de que a volatilidade implícada tem a forma de um “sorriso” é uma hipótese de construção do modelo, então, é de se esperar que qualquer simulação realizada com a modelagem apresente sempre esse resultado. Contudo, essa é a forma que a autora utiliza para demonstrar o comportamento da volatilidade.

Parece mais lógico que os dados que devam ser utilizados na simulação da volatilidade implícada sejam obtidos no mercado real e aplicados ao cálculo da volatilidade. Assim, se o comportamento da volatilidade implícada calculada com dados reais apresentar a forma de um “sorriso”, pode-se aceitar a hipótese lançada por Borland em seu trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde os primeiros indícios de constituição de sua racionalidade que o homem busca equacionar a relação entre suas escolhas e os riscos que estas podem acarretar. O desenvolvimento da lógica e da matemática auxiliou, sobremaneira, a busca de uma noção eqüitativa entre essa relação dispare, norteando estudiosos a criarem teorias que melhor demonstrassem as interações ocorridas entre risco e retorno no cotidiano social. Com o surgimento e conseqüente desenvolvimento dos mercados financeiros essas idéias e teorias encontraram campo fértil de aplicação empírica. Contudo, apenas a partir dos trabalhos pioneiros de Markowitz (1952) e os desenvolvimentos posteriores feitos por Sharpe (1964), Merton (1973) e Black e Scholes (1973) que as relações entre risco e retorno foram sistematizadas, utilizando processos e formalizações matemáticas e estatísticas, para formar o que chamamos hoje de moderna teoria das finanças.

Dentre as várias ferramentas desenvolvidas no âmbito da moderna teoria das finanças, é destacável a utilização da modelagem criada por Black e Scholes (1973), principalmente nos últimos 30 anos. Apesar de suas hipóteses altamente simplificadoras, o Modelo Black-Scholes é o que mais frequentemente vem sendo utilizado pelos teóricos em finanças na busca de melhores resultados no apreçamento de derivativos financeiros. Esse fato se justifica por ser esse o instrumental teórico que demonstra mais estreitamento com a realidade, qualificando-o como o modelo padrão para a precificação de derivativos das últimas três décadas.

Em meio a tantos recentes desenvolvimentos que visam aprimorar a modelagem proposta por Black e Scholes, merece destaque o trabalho de Borland (2002). Em suas pesquisas, Borland rejeita a hipótese básica de log-normalidade dos retornos dos ativos e

aplica uma nova distribuição de probabilidades não-gaussiana, a qual tem sua evolução representada pela equação não-linear de Fokker-Planck. Esse aprimoramento representa um processo chamado de *feedback estatístico* que, em outras palavras, possibilita descartar a hipótese de mercado eficiente e assumir que o modelo tem memória do comportamento passado dos retornos dos ativos.

Apesar da excelente idéia de representar o comportamento dos retornos dos ativos como um processo de feedback, a autora falha em não utilizar um método matemático objetivo para demonstrar a solução do seu modelo. Além disso, utiliza sua modelagem para precificar somente opções européias que, no âmbito do mercado financeiro, são de pouco uso e de baixa complexidade analítica se comparadas com as opções americanas. Diante disso, este trabalho buscou sistematizar uma metodologia objetiva com base em métodos numéricos para solucionar a equação parcial diferencial generalizada desenvolvida por Borland, possibilitando a precificação de opções européias e a sua adequação para o apreçamento de opções americanas⁹, permitindo, assim, um adicional teórico ao modelo proposto por Borland.

Utilizando o algoritmo construído para simular os preços utilizando ambas as modelagens, Black-Scholes e Borland, percebeu-se, como primeiro fato interessante, o alto custo computacional do modelo de Borland levando em consideração o tempo médio necessário para processamento do algoritmo para cada tipo de opção e cada ativo-objeto. Enquanto os resultados do modelo Black-Scholes são obtidos, em média, em 90 segundos (podendo-se, inclusive, fazer uso de planilhas eletrônicas simples e/ou calculadoras científicas programáveis), para os resultados do modelo de Borland são necessários, em média, 40 minutos de processamento computacional para cada tipo de opção de cada ativo-objeto.

Após as simulações para obtenção dos preços das opções, são realizadas simulações de estratégias de *hedging*, onde o saldo final da estratégia é utilizado para

⁹ O algoritmo principal e as modificações necessárias para todos os tipos de opções estão exemplificados no Apêndice B.

comparar os resultados dos dois modelos e verificar se, mesmo com alto custo computacional, o modelo de Borland apresenta melhores resultados que os obtidos com a modelagem de Black-Scholes. Contudo, o que pôde ser observado foi a ineficiência do modelo de Borland em gerar resultados melhores do que os obtidos com o modelo Black-Scholes e, mesmo quando os resultados da modelagem de Borland foram melhores, um teste de hipóteses provou que seus resultados eram estatisticamente iguais aos do modelo Black-Scholes básico.

Quanto à volatilidade, verifica-se que os preços obtidos com o modelo de Borland realmente apresentam volatilidade implicada condizente com suas hipóteses, ou seja, a volatilidade tem a forma de um “sorriso”. Contudo, não parece plausível que a representação do “sorriso da volatilidade” seja feita utilizando-se os valores obtidos com essa modelagem. Parece mais lógico que os dados que devam ser utilizados na simulação da volatilidade implicada sejam obtidos no mercado real e aplicados ao cálculo da volatilidade.

Desta forma, no que se refere ao objetivo principal deste trabalho, qual seja “testar a hipótese da possível vantagem da utilização do modelo proposto por Borland (2002) sobre o modelo Black-Scholes básico”, pode-se concluir que, devido ao seu alto custo computacional e a sua maior complexidade matemática para obter resultados semelhantes aos verificados com o modelo Black-Scholes básico, não parece ser vantajosa a aplicação do modelo de Borland para a precificação de opções em detrimento do uso da modelagem proposta por Black e Scholes (1973), a qual é de bem mais simples aplicação.

Contudo, apesar da inviabilidade de aplicação do seu modelo, Borland obteve alguns resultados que são merecedores de mérito. O principal deles é a utilização da Distribuição de Tsallis para representar o comportamento dos retornos de um ativo, pois, como pôde ser visto nas Figuras 7.1 a 7.5, essa distribuição de probabilidades apresenta melhor adequação com os dados do que o verificado com a Distribuição Normal. Outro resultado interessante, e que pôde ser comprovado neste trabalho, é que o valor do parâmetro

q que parece melhor ajustar os resultados empíricos com a Distribuição de Tsallis é aproximadamente 1,5; principalmente quando os dados amostrais dos log-retornos apresentam comportamentos mais distantes da normalidade estatística.

Por fim, podem-se delinear algumas estratégias de pesquisas futuras com base nos resultados aqui apresentados. A primeira é aplicar a modelagem de Borland aqui apresentada em um maior número de ativos e verificar se seus resultados continuam insatisfatórios quando comparados com o modelo Black-Scholes. A segunda é adequar e testar a viabilidade da aplicação desta modelagem em outros tipos de opções que não opções de ações (taxas de juros, taxas de câmbio, exóticas, etc.). Terceiro, simular a volatilidade implicada utilizando os preços reais coletados no mercado financeiro e verificar se o comportamento de “sorriso” realmente será representado. Por último, testar a hipótese de eficiência do mercado financeiro brasileiro, pois, como pôde ser percebido quando apresentado os resultados dos testes de normalidade dos retornos, a suposição de ineficiência do mercado financeiro brasileiro não parece condizente com o que foi aqui apresentado.

REFERÊNCIAS

AMES, W.F. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**. San Diego: Academic Press, 1992.

ARAÚJO, G. S. et al. Contornando os pressupostos de Black & Scholes: Aplicação do modelo de precificação de opções de Duan no mercado brasileiro. Brasília: Depec/BCB, out. 2003. **Série Trabalhos para Discussão**, 78.

ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro**, São Paulo: Atlas, 1999.

AZEVEDO, H. D. O.; BARBACHAN, J. F. Apreçamento de derivativos bidimensionais. **FinanceLab Working Paper**, n. 6, São Paulo: Ibmecc, 2004.

BAKSHI, G.; CAO, C.; CHEN, Z. Empirical performance of alternative option pricing models. **The Journal of Finance**, vol. 5, 1997.

BARONE-ADESI, G.; WHALEY, R. E. Efficient analytic approximation of american options values. **The Journal of Finance**, v. 42, p. 301-320, Jun. 1987.

BARROS, J. T. **Precificação de Opções Exóticas**: Uma aplicação para opções de barreira. Dissertação (Mestrado em Administração). PUC / Departamento de Engenharia Industrial, Rio de Janeiro, 1996.

BESSADA, O. **O Mercado de Derivativos Financeiros**. Rio de Janeiro: Record, 2000.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**: Chicago, n.81, p. 637-654, May/June 1973.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. **Fundamentos de Investimentos**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BORLAND, L. A Theory of non-Gaussian option pricing. **Quantitative Finance**, n. 2, p. 415-431, 2002.

CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. **The Econometrics of Financial Markets**. New Jersey: Princeton University Press, 1997.

COURTADON, G. A more accurate finite difference approximation for the valuation of options. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v.17, n.5, p. 697-704, dec. 1982.

COX, J. C.; ROSS, S. A. The valuation of options for alternative stochastic processes. **Journal of Financial Economics**, v. 3, p. 145-166, mar. 1976.

COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. **Journal of Financial Economics**, n. 7, October 1979.

DUAN, J. The GARCH option pricing model. **Mathematical Finance**, n. 5, p. 13-32, 1995.

FAJARDO, J. S.; MORDECKI, E. **Pricing derivatives on two Lévy-Driven stocks**. Proceedings of the seven annual meeting on insurance: Mathematics and economics. Lyon, France, 2003.

GERBER, H. U.; SHIU, E. S. W. Martingale approach to pricing perpetual american options on two stocks. **Mathematical Finance**, v. 6, n. 3, p. 303-322, 1996.

HESTON, S. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. **The Review of Financial Studies**, v. 6, 1993.

HULL, J. C. **Introdução aos Mercados Futuros e de Opções**. 2. ed. São Paulo: BM&F, 1996.

HULL, J. C. **Opções Futuros e Outros Derivativos**. 3. ed. São Paulo: BM&F, 1998.

HULL, J. C.; WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. **Journal of Finance**, v. 42, n. 2, p. 281-300, jun. 1987.

HULL, J. C.; WHITE, A. The use of the control variate technique in option pricing. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 23, n. 3, p. 237-251, sep. 1988.

ITÔ, K. **Kiyoshi Itô selected papers**. New York: Springer-Verlag, 1987.

JOHNSON, H. Options on the maximum or the minimum of several assets. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, n. 22, p. 277–283, 1987.

LANARI, C. S.; SOUZA A. A.; DUQUE, J. C. Desvios em relação ao modelo de Black & Scholes: Estudos relacionados à volatilidade dos ativos subjacentes às opções. **Anais XIX ENEGEP**, Rio de Janeiro, 1999.

MACBETH, J.; MERVILLE, L. An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model. **The Journal of Finance**, n.34, p. 1173-1186, dec. 1979.

MARGRABE, W. The value of an option to exchange one asset for another. **The Journal of Finance**, n. 33, p. 177-186, 1978.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **Journal of Finance**. vol VII, p. 77-91, 1952.

MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**. n.4, p. 141-183, 1973.

MONTEIRO, R. C. **Contribuições da abordagem de avaliação de opções reais em ambientes econômicos de grande volatilidade** - Uma ênfase no cenário latino-americano. Dissertação (Mestrado em Contabilidade), FEAC/USP, São Paulo, 2003.

NEFTCI, S. N. **An introduction to the mathematics of financial derivatives**. San Diego: Academic Press, 1996.

PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes in C: the art of scientific computing**. New York: Cambridge University Press, 1992.

ROSS, S. A. Options and efficiency. **Quarterly Journal of Economics**, v. 90, p. 75-89, feb. 1976.

SAITO, R.; ROCHMAN, R. R. **Avaliação de métodos numéricos para precificação de derivativos**: Aplicação ao mercado brasileiro. São Paulo: Núcleo de Pesquisas e Publicações da EAESP/FGV, mar. 1998.

SILVA NETO, L. A. **Opções**: Do tradicional ao exótico. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1996.

SILVA, L.M. **Mercado de Opções: Conceitos e estratégias.** 2 ed. Rio de Janeiro: HALIP, 1999.

SMITH, G. D. **Numerical solution of partial differential equations.** London: Oxford Mathematical Handbooks, 1965.

STULZ, R. Options on the minimum or the maximum of two risky assets: Analysis and applications. **Journal of Financial Economics**, n. 10, p. 161-185, 1982.

VARGA, G. **Aplicação do modelo Black-Scholes ao mercado brasileiro de opções de compra utilizando-se metodologias diferenciadas para o cálculo da volatilidade.** Dissertação (Mestrado em Finanças), EPGE/FGV, São Paulo, 1990.

VARGA, G. **Notas de Aula: Cálculo do preço de opção de compra para o mercado brasileiro.** Disponível em: <<http://www.fce.com.br>>. Acesso em: 19 mar. 2005.

WILMOTT, P. **Derivatives: The theory and practice of financial engineering.** West Sussex: John Wiley & Sons, 1998.

WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. **Option pricing: Mathematical models and computation.** Oxford: Oxford Financial Press, 1996.

**APÊNDICE A – SIMPLIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BLACK-SCHOLES E
BORLAND NA FORMA DA EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DO CALOR**

Admitindo-se que o preço de uma ação, S , segue o processo abaixo:

$$dS = a(S, t) dt + b(S, t) dw_t \quad (A.1)$$

Suponhamos, agora, a existência de uma opção com preço f dependente de S . O preço da opção, f , será, então, uma função de S e t .

$$f = f(S, t) \quad (A.2)$$

Onde t é o tempo. Aplicando o Lema de Ito na equação (A.2), teremos:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} a(S, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b(S, t)^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} b S dw_t \quad (A.3)$$

Por hipótese, escolhe-se uma carteira da ação e do derivativo composta da seguinte maneira:

$$\pi = -f + \Delta S \quad (A.4)$$

No intervalo de tempo dt , a variação de π será:

$$d\pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \quad (A.5)$$

Substituindo (A.1) e (A.3) em (A.5), teremos:

$$d\pi = - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial S} a(S, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b(S, t)^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} b(S, t) dw_t \right] + \frac{\partial f}{\partial S} [a(S, t) dt + b(S, t) dw_t]$$

Simplificando a equação acima teremos:

$$d\pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b(S,t)^2 \right) dt \quad (A.6)$$

Um argumento de não-arbitragem mostra que:

$$d\pi = \pi r dt \quad (A.7)$$

Substituindo as equações (A.4) e (A.6) na equação (A.7), tem-se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b(S,t)^2 \right) dt = \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) r dt \quad (A.8)$$

Rearranjando a equação (A.8), teremos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b(S,t)^2 + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS = rf \quad (A.9)$$

Definem-se, então, duas novas variáveis:

$$\theta = T - t$$

$$x = e^{r(T-t)} S = e^{r\theta} S$$

Assumindo que $v(x, \theta) = f(S, t) = f(e^{-r\theta} x, T - \theta)$, substitui-se essa nova função em (A.9) e aplica-se a Regra da Cadeia nas derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial S}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = e^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.9.1})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(e^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = e^{r\theta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = e^{2r\theta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{A.9.2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial \theta} - rx \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.9.3})$$

A equação resultante será, então:

$$\frac{1}{2} b(S, t)^2 x^2 e^{-2r\theta} \left(e^{2r\theta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial \theta} - rx \frac{\partial v}{\partial x} + r(e^{-r\theta} x) \left(e^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = rv$$

Que, ao ser simplificada, torna-se:

$$\frac{1}{2} b(S, t)^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} = rv$$

(A.10)

Define-se uma nova função $u(x, \theta) = e^{+r\theta} v(x, \theta) = e^{+r\theta} f(e^{-r\theta} x, T - \theta)$. Substitui-se essa nova

função em (A.10) e aplica-se a Regra da Cadeia nas derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{r\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.10.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -re^{-r\theta} u + e^{-r\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -rv + e^{-r\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{A.10.2})$$

A equação resultante será, então:

$$\frac{1}{2} b(S, t)^2 x^2 e^{r\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rv - e^{-r\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} = rv$$

Simplificando os termos da equação acima teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{2} b(S, t)^2 e^{2r\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(A.11)

Definindo uma nova volatilidade:

$$\bar{b}(x, \theta) = e^{r\theta} b(e^{-r\theta} x, T - \theta)$$

(A.12)

Substituindo (A.12) em (A.11) teremos a uma versão simplificada da equação fundamental do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \bar{b}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(A.13)

No caso da equação de Black-Scholes, onde $b(S, t) = \sigma S$, tem-se:

$$\bar{b}(x, \theta) = e^{r\theta} \sigma e^{-r\theta} x = \sigma x \quad (A.14)$$

Substituindo (A.14) em (A.13) teremos a equação de Black-Scholes na forma da equação fundamental do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sigma^2 x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (A.15)$$

No caso da equação de Borland, onde $b(S, t) = \sigma_0 SP(\Omega)^{\frac{1-q}{2}}$, sendo que:

$$\Omega = \frac{\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) - \mu t}{\sigma_0}$$

$$P(\Omega) = \frac{1}{Z(t)} \left(1 + (q-1)\beta(t)\Omega^2\right)^{\frac{1}{1-q}}$$

Tem-se, então:

$$\bar{b}(x, \theta) = e^{r\theta} b(e^{-r\theta} x, T - \theta) \quad (A.16)$$

Fazendo \bar{b}^2 , teremos:

$$\bar{b}(x, \theta)^2 = \left[\sigma_0^2 x^2 Z(t)^{q-1} \left(1 + (q-1)\beta(t)\Omega^2\right) \right] \quad (A.17)$$

Onde:

$$\beta(t) = C^{\frac{1-q}{3-q}} \left((2-q)(3-q)(T-\theta) \right)^{-\frac{2}{3-q}} \propto (T-\theta)^{-\frac{2}{3-q}} = \frac{1}{(T-\theta)^{\frac{2}{3-q}}}$$

$$C = \frac{1}{q-1} \left(\int \frac{1}{(1+\Omega^2)^{\frac{1}{q-1}}} d\Omega \right)^2$$

$$Z(t) = \frac{C^{\frac{1}{2}}}{\beta(t)^{\frac{1}{2}}}$$

Substituindo (A.17) em (A.13) teremos a equação de Borland na forma da equação fundamental do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \left[\sigma_0^2 x^2 Z(t)^{q-1} (1 + (q-1)\beta(t)\Omega^2) \right] \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(A.18)

**APÊNDICE B – ALGORÍTMO PARA SIMULAÇÃO DOS PREÇOS DA OPÇÃO
TIPO *AMERPUT* E MODIFICAÇÕES NECESSÁRIAS PARA AS OUTRAS OPÇÕES**

O algoritmo apresentado abaixo foi utilizado para simular os preços da opção de venda americana (*AmerPut*) utilizando o software MatLab 6.1 para todos os ativos-objetos do trabalho.

```

1 function [S,V,D] = boramerput(S0,X,r,T,sig0,mu,q,N,J)
2
3 % [S,V,D] = boramerput(S0,X,r,T,sig0,mu,q,N,J)
4
5
6 c = const(q);
7
8
9 % discretização do espaço:
10
11 xmax = 2*S0*exp((r-sig0^2)*T+4*sig0*sqrt(T));
12
13 if nargin < 9, J = 200; end
14
15 dx = xmax/J;
16
17 x = (0:J)*dx;
18
19
20 % discretizacao do tempo:
21
22 if nargin < 8, N = 200; end
23
24 dt = T/N;
25
26 t = (0:N)*dt;
27
28
29 % condicoes de fronteira:
30
31 for j=1:J+1
32
33     u(j,1)=max(X-x(J),0);
34

```

```

35 end
36
37 for n=2:N+1
38
39     u(1,n)=X*exp(r*t(n));
40
41     u(J+1,n)=0;
42
43 end
44
45
46 % loop principal:
47
48 for n=2:N+1
49
50     for j=2:J
51
52         %% volatilidade de borland: %%
53
54         beta = c^((1-q)/(3-q))*((2-q)*(3-q)*(T-t(n)))^(-2/(3-q));
55
56         Zq1 = (c/beta)^((q-1)/2);
57
58         Om = (log(x(j)/S0)-mu*(T-t(n))-r*t(n))/sig0;
59
60         sig2 = sig0^2*x(j)^2 * Zq1*(1+(q-1)*beta*Om^2);
61
62         %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%
63
64         dt = t(n)-t(n-1);
65
66         a = 1/2*dt/dx^2;
67
68         alpha(j-1) = a/2*sig2;
69
70         d(j-1)=(1-2*alpha(j-1))*u(j,n-1) + alpha(j-1)*u(j-1,n-1) + alpha(j-1)*u(j+1,n-1);
71
72         h(j-1) = max(x(j)-exp(r*t(n))*X);
73
74     end
75
76     d(1)=d(1)+alpha(1)*u(1,n);
77
78     (J-1)=d(J-1)+alpha(J-1)*u(J+1,n);
79
80     Bn=1+2*alpha;
81
82     An=-alpha(2:J-1);
83

```

```

84     Cn=-alpha(1:J-2);
85
86     u(2:J,n)=sortri(An,Bn,Cn,d,1.2,0.0001,h);
87
88     end
89
90
91     % transforma para as variáveis originais:
92
93     for n=1:N+1
94
95         S(:,n) = exp(-r*t(N-n+2))*x';
96
97         V(:,n) = exp(-r*t(N-n+2))*u(:,N-n+2);
98
99         D(1:J,n) = (V(2:J+1,n)-V(1:J,n))./(S(2:J+1,n)-S(1:J,n));
100
101     end

```

As seguintes modificações são necessárias para aplicar a simulação visando obter os preços da opção de compra (*call option*) e da opção tipo européia (*euro option*).

- a) Cálculo de opções de compra (*call option*):** Na Linha 33 substitui-se a equação “ $u(j,1) = \max(X - x(J), 0)$;” por “ $u(j,1) = \max(x(J) - X, 0)$;”. Essa modificação altera as condições de fronteira, possibilitando alterar o cálculo de uma opção *put* para uma opção *call*.
- b) Cálculo de opções tipo européias (*euro option*):** Na linha 86 remove-se o parâmetro h . Esse parâmetro representa o problema de obstáculo caracterizado, na opção americana, pelo direito adicional de exercício antecipado. A simples remoção do parâmetro possibilita a simulação de preços de opções européias.