LAMETA
Laboratoire Montpelliérain d'Economie Théorique et Appliquée

UMR
Unité Mixte de Recherche

DOCUMENT de RECHERCHE

«Approche Conceptuelle et Algorithmique des Equilibres de Nash Robustes Incitatifs »

Cédric WANKO

DR n°2008-03

Faculté de Sciences Economiques - Espace Richter
Avenue de la Mer - Site de Richter C.S. 79606
3 4 9 6 0 MONTPELLIER CEDEX 2
Tél: 33(0)467158495 Fax: 33(0)467158467
E-mail: lameta@lameta.univ-montp1.fr

Université Montpellier 1
agro Montpellier Ecole Nationale Supérieure Agronomique
CNRS Centre National de la Recherche Scientifique
INRA

Approche Conceptuelle et Algorithmique des Equilibres de Nash Robustes Incitatifs

CÉDRIC WANKO*
LAMETA-CNRS
Université Montpellier 1, Faculté des Sciences Economiques,
Avenue de la Mer CS 79606, Montpellier 34960 cedex 2, France
cedric.wanko@lameta.univ-montp1.fr

Dernière version modifiée remplaçant celle du 17 Février 2008

15 octobre 2008

Résumé

On propose une analyse de la robustesse des équilibres de Nash dans le cadre d'un mécanisme Bayésien incitatif. On met en valeur une contrainte de robustesse comme élément de réponse au problème de rationalité individuelle (intermédiaire) selon 1/ une approche conceptuelle des propriétés de la solution d'équilibre et 2/ une approche algorithmique du protocole et des étapes calculatoires.

1 Introduction

Dans ce travail, on présente une implémentation algorithmique et une approche conceptuelle en théorie des jeux à partir de la théorie des mécanismes. Alors que la théorie des jeux concentre la majeure partie des travaux de recherche sur les concepts relatifs aux équilibres de jeux non coopératifs, les solutions des jeux coopératifs, la théorie des mécanismes et les équilibres compétitifs, Cozic (2004) montre que ces avancées sont relativement indépendantes des algorithmes permettant de déterminer, effectivement, un équilibre ou une solution spécifique. Il prend l'exemple de la détermination de l'existence d'un équilibre de Nash (1951) à n joueurs dont la démonstration est essentiellement axée sur le théorème des points fixes de Kakutani (Glicksberg (1952)). Il en est de même pour la théorie de l'équilibre général de Arrow-Debreu (1954) dont la démonstration du théorème d'existence est élaborée à partir du théorème de Brouwer lequel est un cas particulier du théorème de Kakutani. Cozic (2004) expose, donc, différentes approches algorithmiques de la détermination d'un équilibre de Nash[1]. Une approche algorithmique en théorie des jeux nécessite

*Ce travail est une partie de ma thèse sous la direction du Professeur Christian Montet. Je remercie mon directeur de thèse, Mabel Tidball, Charles Figuières et Raphaële Préget pour le temps passé sur ce travail.

[1]On peut citer l'algorithme de Lemke-Howson (1964) en exemple pour la détermination d'un équilibre de Nash à 2 joueurs.

un point de référence. Cette référence peut être : *1/* le *modélisateur* qui fixe les règles du jeu et calcule les solutions envisageables en termes d'équilibres *2/* le *joueur* qui agit selon son comportement , ses préférences, ses croyances et les alternatives dont il dispose *3/* le *régulateur* du jeu qui fixe les objectifs et élabore les règles du jeu à l'aide de contraintes incitatives tenant compte des choix possibles des joueurs. On adopte une approche décisionnelle permettant l'implémentation d'un mécanisme incitatif (Myerson (1979), (1991) et Jackson (2000)) à la manière d'un régulateur. On traite plus particulièrement de la théorie des mécanismes Bayésiens en tentant de mêler les problèmes de détermination d'une solution Pareto efficiente avec la complexité d'implémentation d'un mécanisme de maintien de la rationnalité et de la robustesse (du point de vue des jeux à somme nulle) de l'équilibre. L'objectif est de déterminer un équilibre de Nash comme une valeur de *maxmin* qui converge vers une solution efficiente sur l'enveloppe convexe[2] de l'ensemble des réalisables incitatifs en conservant ses propriétés. Pour cela, on utilise une approche par l'implémentation volontaire (Ma, Moore and Turnbull (1988), Maskin and Moore (1999) et Jackson and Palfrey (2001)). L'implémentation volontaire pose le problème de générer une solution qui n'est pas nécessairement Pareto efficiente au sens de Myerson (1979) même si elle est robuste. De plus, rien ne garantie que le protocole de communication issu du mécanisme soit robuste à toute manipulation stratégique de l'information privée (free riding). On s'interroge, donc, sur la réalisation d'un tel mécanisme en comparant la matrice des signaux avec l'information issue du système de corrélation. Le problème posé est : *dans quelle mesure la robustesse du protocole d'un mécanisme Bayésien d'implémentation volontaire peut imiter la structure d'information d'un système de corrélation ?* A la suite d'un survol des différentes propriétés conceptuelles de jeux non coopératifs, des algorithmes relatifs aux mécanismes et systèmes de corrélation, on illustre les problèmes d'efficiences, de rationnalité Bayésienne et de robustesse de la structure d'information. Ces problèmes sont à la base du problème d'implémentation d'un tel mécanisme. On en déduit que le régulateur doit permettre l'implémentation volontaire d'une solution au problème de maintien de la rationnalité Bayésienne qui converge vers l'enveloppe convexe de l'ensemble des réalisables incitatifs. La structure d'information (Gossner (2000)) issue de l'implémentation volontaire Bayésienne doit simuler un processus de corrélation au sens de Gossner (1996, 1997, 1998, 1999) et Lehrer and Sorin (1997).

2 Approche conceptuelle

Dans l'approche conceptuelle des équilibres de Nash des jeux non coopératifs, on peut différencier les jeux non coopératifs en deux grandes familles de jeux : les jeux *"coordonnés"* et les jeux *"antagonistes"* (Beaud (1999 et 2002)).

[2]Notée $Conv\,(.)$ *cf.* annexe. Pour plus de détail sur l'analyse convexe, des éléments de Topologie et le théorème des points fixes de Kakutani se référer à Glicksberg (1952), Rockafellar (1970) et Montet and Serra (2003) pour une Appendix résumant les concepts topologiques de base relatifs à ce théorème.

2.1 Notations

$N = \{1, 2\}$ est l'ensemble des joueurs. On désigne par S_i l'ensemble des stratégies du joueur i. u_i est la fonction de gain du joueur i de sorte que : $u_i : S = S_i \times S_j \to \mathbb{R}, \forall i, j \in N$, pour $i \neq j$.

2.2 Jeux à deux joueurs à somme nulle

La première classe de jeux à deux joueurs est celle des jeux à somme nulle. Un jeu à deux joueurs à somme nulle se représente par les paiements des joueurs $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que : $u_1 + u_2 = 0$. Dans cette représentation, u_1 et u_2 sont diamétralement opposés. Théoriquement le joueur 2 cède $u(a)$ au joueur 1 lorsque l'on résume les paiements des deux joueurs à u et leurs actions à $a \in A$.

2.2.1 Définitions

Comme le précise Beaud (1999 and 2002), l'issue d'un jeu de ce type réside dans le comportement des joueurs rivalisant pour l'appropriation d'un gain le plus élevé possible : les joueurs cherchent à maximiser leurs gains. De ce point de vue, lorsque le joueur 2 cède un certain montant de gains au joueur 1, alors le joueur 1 agit de façon à obtenir un gain au moins supérieur à $\max\limits_{a_1 \in A_1} \min\limits_{a_2 \in A_2} u(a_1, a_2)$ alors que son rival, le joueur 2, agit pour céder un gain au plus inférieur à $\min\limits_{a_2 \in A_2} \max\limits_{a_1 \in A_1} u(a_1, a_2)$ au joueur 1. On parle de stratégies de sécurité respectivement de *maxmin* et *minmax* du jeu à deux joueurs à somme nulle.

Définition [Jeux à deux joueurs à somme nulle] *: (in Montet and Serra(2003)).Un jeu à deux joueurs à somme nulle sous forme stratégique peut être décrit par le triplet (A_1, A_2, u) avec u la fonction de paiement que le joueur 1 tente de maximiser et que le joueur 2 tente de minimiser lorsque leurs préférences sont diamétralement opposées.*

Cette première définition entraîne le résultat selon lequel le maxmin et le minmax peuvent avoir une unique valeur commune notée $v_1 = v_2 = v$ pour $v_1 = \max\limits_{a_1 \in A_1} \min\limits_{a_2 \in A_2} u(a_1, a_2)$ et $v_2 = \min\limits_{a_2 \in A_2} \max\limits_{a_1 \in A_1} u(a_1, a_2)$. Il n'existe pas nécessairement une valeur commune pour tous les jeux à deux joueurs à somme nulle. Les jeux disposant d'une valeur commune sont dits *"inessentiels"*. Le résultat du jeu est, alors, caractérisé par un couple de stratégies de sécurité optimale noté (a_1^*, a_2^*) solution du problème d'optimisation : $\max\limits_{a_1 \in A_1} u(a_1, a_2^*)$ et $\min\limits_{a_2 \in A_2} u(a_1^*, a_2)$. L'impossibilité[3] de déterminer une valeur unique commune pour les jeux à deux joueurs à somme nulle, lorsque l'on évolue avec des stratégies pures, implique l'introduction d'actions mixtes caractérisées par une *distribution de probabilité* assignée de façon aléatoire aux actions des joueurs. Considérant S_i comme l'ensemble des actions mixtes pour le joueur i, $\forall i \in N$, la fonction de gain u est résumée par la relation : $u(s_1, s_2) = \sum\limits_{a_1 \in A_1} \sum\limits_{a_2 \in A_2} s_1(a_1) s_2(a_2) u(a_1, a_2)$, $\forall s_1 \in S_1$ et $\forall s_2 \in S_2$. Le résultat,

[3]Lorsque le jeu n'a pas de valeur, il est dit non convergeant en terme d'espérances pour les joueurs et les stratégies de sécurité ne sont plus optimales. Le joueur 1 et le joueur 2 peuvent interagir de sorte que les gains respectifs se profilent de la façon suivante : $\max\limits_{a_1 \in A_1} u(a_1, a_2^*) \geq v_1$ et $\min\limits_{a_2 \in A_2} u(a_1^*, a_2) \leq v_2$ et ne convergent jamais (Moulin (1975 et 1986)).

alors, historique du théorème du minmax de von Neumann (1928) s'exprime en ces termes :

Théorème [unicité de l'équilibre] : *Un jeu à deux joueurs à somme nulle dispose d'un unique équilibre si et seulement si il dispose d'une valeur unique. L'équilibre* (a_1^*, a_2^*) *est calculé en tant que point selle de la fonction de gain :* $\forall a_1 \in A_1$ *et* $\forall a_2 \in A_2$ *:* $u(a_1, a_2^*) \leq u(a_1^*, a_2^*) \leq u(a_1^*, a_2)$. *(in Montet and Serra (2003)).*

Théorème [von Neumann (1928)] : *Pour* g *un jeu fini à deux joueurs à somme nulle, on a un jeu* G *possédant au moins une valeur d'équilibre en stratégies mixtes représentant la paire des stratégies optimales de sécurité par des points selles de la fonction bi-linéaire, pour* $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, u, -u\right)$ *la représentation mixte de* $g = \left(N, (A_i)_{i \in N}, u, -u\right)$.

On peut définir une stratégie optimale dans le jeu $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ pour le joueur i, $\forall i, j \in N$ et $i \neq j$ telle que : $u_i(s_i^*, s_j) \geq \max_{s_i \in S_i} \min_{s_j \in S_j} u_i(s_i, s_j)$.

Définition : *Une stratégie optimale pour* i *lui assure un gain au moins aussi important que le maxmin du jeu à deux joueurs à somme nulle* G, $\forall i, j \in N$, *et* $\forall i \neq j$.

2.2.2 Propriétés

L'ensemble des équilibres de Nash du jeu est noté $N(G)$ et l'ensemble des gains d'équilibre est noté $NP(G)$. Partant de ce principe, Beaud (1999) établit les propriétés suivantes :

Propriétés : *Lorsque l'on suppose* $G = \left(N, (S_i)_{\forall i \in N}, u, -u\right)$ *un jeu à deux joueurs à somme nulle, alors :*

i- $NP(G) = \{v\}$

ii- $N(G)$ *est convexe lorsque* S_1 *et* S_2 *sont convexes et pour chaque* $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ *; de ce fait,* u *est quasi-concave en* s_1 *et quasi-convexe en* s_2

iii- *Les équilibres sont interchangeables en ce sens que, lorsque* (s_1, s_2) *et* (s_1', s_2') *sont des équilibres, alors,* (s_1, s_2') *et* (s_1', s_2) *sont, également, des équilibres*

2.2.3 Exemples

Soient le jeu du pile ou face **(a)** (Matching pennies game) et le jeu Pierre, Papier, Ciseaux **(b)** (Rock, Paper, Scisor). Cette classe illustre souvent un problème d'inexistence des équilibres de Nash en stratégies pures. Cependant, il est possible de déterminer un équilibre en stratégies mixtes, respectivement, de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a_2 & A_2 & A_2' \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \\ A_1' \end{array} & \begin{bmatrix} 0,0 & -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 & 0,0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) **(b)**

En ce qui concerne les jeux à somme constante : $u_1 + u_2$ =constante, il est souvent admis que ce type de jeu possède par extension certaines propriétés des jeux à deux joueurs à somme nulle (Friedman (1989), Owen (1995), Beaud (1999 et 2002) et Montet and Serra (2003)), mais cela ne constitue pas une règle. En effet, si certains jeux à deux joueurs à somme non nulle possèdent ces propriétés, il en existe, également, qui ne possèdent pas de telles propriétés : les jeux coordonnés.

2.3 Jeux coordonnés

Parmi les jeux *"coordonnés"*, on peut citer le jeu de la bataille des sexes **(c)** (Battle of the sex) qui traduit une forme de coordination entre les joueurs avec une différenciation possible du type[4]. Il existe deux équilibres de Nash du jeu (a_1, a_2) et (A_1, A_2). L'issue de désaccord qui est une valeur de sécurité est l'issue (a_1, A_2). Le jeu de l'assurance **(d)** (Assurance game) dispose de deux équilibres de Nash (a_1, a_2) et (A_1, A_2) [5]. Ces deux issues sont deux équilibres de Nash mais seule l'issue (A_1, A_2) est une valeur de sécurité. De plus, l'incitation à la déviation unilatérale est trop faible pour constituer une menace. Enfin, le jeu de la poule mouillée **(e)** (Chicken game) qui est une variante du jeu colombe-faucon (Hawke-dove game) est, également, un jeu coordonné[6]. Les deux équilibres de Nash du jeu sont (A_1, a_2) et (a_1, A_2) alors que l'issue de sécurité est (A_1, A_2).

$$\begin{array}{cc} & a_2 \quad A_2 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 2,1 & \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 0,0 & 1,2 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(c)} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & a_2 \quad A_2 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 2,2 & 0,1 \\ 1,0 & \frac{1}{2},\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ & \textbf{(d)} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & a_2 \quad A_2 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 2,2 & 1,4 \\ 4,1 & 0,0 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(e)} \end{array}$$

Ces exemples de jeux coordonnés montrent que la correspondance entre équilibre de Nash et valeur de sécurité n'est pas systématique et même lorsque cette correspondance existe, l'incitation à la déviation est trop faible pour que l'issue de sécurité soit un unique équilibre de Nash (1951). *Quelles sont les classes de jeux vérifiant les propriétés affaiblies des jeux à somme nulle ?*

2.4 Jeux antagonistes

2.4.1 Classes de jeux

On parlera de jeux de type **A** pour les jeux strictement compétitifs, de type **B** pour les jeux unilatéralement compétitifs et de type **C** pour les jeux faiblement unilatéralement compétitifs en référence à Beaud (2002). La classe des jeux de type **A** est la première classe de jeux à deux joueurs à somme non nulle introduite par Friedman (1983) pour généraliser les jeux à deux joueurs à somme nulle. Cette classe était déjà connue, comme le précise Beaud (1999 et 2002), notamment dans les travaux de Moulin (1976).

Définition [type A] : *Le jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ *est un jeu strictement compétitif si* $\forall s, s' \in S$, *on a :*

$$u_1(s) \geq u_1(s') \iff u_2(s) \leq u_2(s')$$

[4]Ce jeu peut refléter une situation de coopération sur des salaires ou sur le développement de technologies entre deux firmes.

[5]Ce jeu peut illustrer une course à l'armement entre deux pays sachant que ces deux pays préfèrent ne pas s'engager dans la course (a_1, a_2) mais, néanmoins, ont une faible incitation à s'engager s'ils supposent que le rival en fait autant (A_1, A_2).

[6]Pouvant illustrer des situations de coopération basées sur des concessions entre les joueurs.

Ce jeu implique que lorsque le joueur 1 préfère le couple de stratégies s au couple s' alors le joueur 2 préfère le couple de stratégies s' au couple s. De cette première définition, on déduit qu'un jeu à deux joueurs à somme nulle est de type **A**, mais la réciproque n'est pas vérifiée. Kats and Thisse (1992) ont généralisé la notion de jeux strictement compétitifs par les classes de jeux de type **B** et **C**, en ne considérant que les changements unilatéraux de stratégies. La classe de jeux de type **C** traduit, en plus, un relâchement des conditions en ce sens que si un changement unilatéral de stratégies entraine un gain stricte pour le joueur i, alors ce changement entraine une faible perte pour le joueur j.

Définition [type B] : *Le jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *est un jeu unilatéralement compétitif si* $\forall i \neq j$ *et* $\forall s_i, s_i', s_j \in S$*, on a :*

$$u_i(s_i, s_j) \geq u_i(s_i', s_j) \iff u_j(s_i, s_j) \leq u_j(s_i', s_j)$$

Définition [type C] : *Le jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *est un jeu faiblement unilatéralement compétitif si* $\forall i \neq j$ *et* $\forall s_i, s_i', s_j \in S$*, on a :*

$$u_i(s_i, s_j) > u_i(s_i', s_j) \implies u_j(s_i, s_j) \leq u_j(s_i', s_j)$$

et

$$u_i(s_i, s_j) = u_i(s_i', s_j) \implies u_j(s_i, s_j) = u_j(s_i', s_j)$$

Par définition tout jeu de type **A** est un jeu de type **B** et tout jeu de type **B** est un jeu de type **C** mais la réciproque n'est pas vérifiée. Il existe d'autres déclinaisons des jeux antagonistes présentées dans Aumann (1961), De Wolf (1999) et Beaud (1999 et 2002) comme les jeux presque strictement compétitifs (type I), les jeux presque faiblement strictement compétitifs (type II), les jeux de type III et les jeux de type IV. Les jeux antagonistes développés par Friedman (1983) et Kats and Thisse (1992) se caractérisent par un affaiblissement du conflit d'intérêts entre les joueurs observable directement à partir des couples de gains dans les matrices de jeux. Les classes de jeux proposées par Aumann (1961) caractérisent l'affaiblissement du conflit d'intérêts entre les joueurs à partir du concept d'équilibre croisé. Un équilibre croisé traduit l'objectif de minimisation des gains du joueur rival. Le jeu $\overline{G} = \left(N, (S_i)_{i\in N}, -u_2, -u_1\right)$ ou jeu croisé propose au joueur i le même ensemble de stratégies que le jeu $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, u_1, u_2\right)$[7].

Définition : [Aumann (1961)] $\overline{s} \in S$ *est un équilibre croisé du jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, u_1, u_2\right)$ *si* $\overline{s}$ *est un équilibre de Nash du jeu croisé* $\overline{G} = \left(N, (S_i)_{i\in N}, -u_2, -u_1\right)$

Définition : *Soit un point selle* $(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2)$ *de* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, u_1, u_2\right)$ *avec* $S(G)$ *l'ensemble de ces points selles et* $SP(G)$ *l'ensemble des gains de ces points selles, alors ce point selle vérifie* $\forall s_1, s_2 \in S_1 \times S_2$, $u_1(s_1, \widetilde{s}_2) \leq u_1(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) \leq u_1(\widetilde{s}_1, s_2)$ *et* $u_2(s_1, \widetilde{s}_2) \geq u_2(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) \geq u_2(\widetilde{s}_1, s_2)$.

Le gain du joueur i dans $\overline{G}$ est l'opposé de celui du joueur j dans G. On note $T(G)$ l'ensemble des équilibres croisés du jeu G et $TP(G)$ l'ensemble des gains d'équilibres croisés du jeu G.

Définition [type I] : *Le jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *est un jeu de type* I *si,* $\forall s_1, s_2 \in S_1 \times S_2$*, la solution remplit les conditions suivantes :*

[7]Selon les explications et analysent on parle de jeu à deux joueur $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ ou $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, u_1, u_2\right)$, mais la définition est la même.

1- $N(G) \cap T(G) \neq \emptyset$
2- $NP(G) = TP(G)$

La classe des jeux de type II est, également, axée sur la notion d'équilibre croisé et représente une classe de jeux illustrant un relâchement de la condition 2 dans les jeux de type I. La classe des jeux de type III est issue des deux classes de jeux précédentes et plus particulièrement se caractérise par l'abandon de la condition $2'$. La classe des jeux de type IV est, également, issue des deux classes de jeux précédentes que sont les jeux de type I et les jeux de type II. Elle se caractérise par un abandon de la condition 1.

Définition [type II] : *Le jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *est un jeu de type* II *si,* $\forall s_1, s_2 \in S_1 \times S_2$, *la solution remplit les conditions suivantes :*
1- $N(G) \cap T(G) \neq \emptyset$
$2'$- $NP(G) \subset TP(G)$

Définition [type III] : *Le jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *est un jeu de type* III *si,* $\forall s_1, s_2 \in S_1 \times S_2$, *la solution remplit la condition* 1 *suivante :*
1- $N(G) \cap T(G) \neq \emptyset$

Définition [type IV] : *Le jeu* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *est un jeu de type* IV *si,* $\forall s_1, s_2 \in S_1 \times S_2$, *la solution remplit la condition* $2'$ *suivante :*
$2'$- $NP(G) \subset TP(G)$

Tout jeu de type I est un jeu de type II, tout jeu de type II est un jeu de type III et de type IV mais la réciproque n'est pas vérifiée. On peut remarquer que les conditions 1 et $2'$ sont indépendantes et l'aspect conflictuel antagoniste de ce type de jeux peut être vérifié en prenant les actions indépendamment les unes des autres. Par contre, pour les jeux induits par Friedman (1983) et Kats and Thisse (1992), l'ensemble des profils d'action sont comparés. Les jeux de type I sont à l'origine non coopératifs, néanmoins, ce type de jeux permet quelques applications aux modèles de jeux coopératifs à deux joueurs.

2.4.2 Propriétés

La présentation des différentes classes de jeux antagonistes précédentes est issue de Beaud (1999 et 2002)) et permet de présenter les résultats portant sur l'ensemble des propriétés de ces jeux.

Propriétés : *Pour tout jeu* G *on a :*
i- $S(G) = N(G) \cap T(G)$
ii- *Pour* $NP(G) \cap TP(G) \neq \emptyset$, *alors* $NP(G) \cap TP(G) = \{v\} = \{v_i\}_{\forall i=1,2}$ *et lorsque* $S(G) \neq \emptyset$, *alors*[8] $v_i = \inf_{s_j} \sup_{s_i} u_i(s_i, s_j) = \sup_{s_i} \inf_{s_j} u_i(s_i, s_j)$ *pour* $i \in N$ *et* $j \in N$, $\forall i \neq j$.

Par conséquent, on peut dire que $S(G) \neq \emptyset$.

[8]Dans l'éventualité où les ensembles de stratégies pures ne sont pas finis, on considère plutôt les *suprema* (sup) ou bornes supérieures et *infima* (inf) ou bornes inférieures que les *maxima* (max) et *minima* (min). Le *supremum* d'un ensemble est son plus petit majorant. L'intervalle ouvert $]0, 1[$, n'admet pas de *maximum* (lequel devrait être 1 s'il était fermé) mais des majorants tels que 2 car tous les éléments de cet ensemble sont inférieur à 2. Par conséquent, le plus petit majorant ou *supremum* est 1.

Définition [Robustesse] : *Le couple de stratégies $s = (s_i, s_j)$ est dit robuste et appartient à l'ensemble des stratégies robustes $R(G)$ au sein du jeu $G, \forall i, j \in N$, pour $i \neq j$ lorsqu'il existe $w \in \mathbb{R}^2$ tel que lorsque le joueur i joue s_i, alors quoique joue le joueur j, il reçoit au moins w_i et le joueur j reçoit au plus w_j.*

De cette définition, on détermine les propriétés suivantes dont les démonstrations sont proposées dans Beaud (1999 et 2002).

Propriété : *Pour tout jeu G on a :*
iii- $S(G) = R(G)$ *: chaque couple de stratégies robustes est un point selle et réciproquement chaque point selle est robuste.*
iv- *Les points selles sont interchangeables.*

Prenant en compte la condition $2'$ ainsi que la condition **ii**, on peut établir les propriétés suivantes dont les démonstrations sont présentés dans Beaud (1999 et 2002).

Propriété : *Pour tout jeu G de type IV, il existe un unique équilibre de Nash égal à $\{v_i\}_{\forall i \in N}$ tel que : $NP(G) = \{v\} = \{v_i\}_{\forall i \in N}$.*

Cette propriété ne se vérifie pas pour les jeux de type III. Les propriétés suivantes montrent que chaque jeu de type **C** dispose d'un ensemble d'équilibres de Nash correspondant à l'ensemble des points selles du jeu G.

Propriété : *Pour tout jeu G de type **C**, on a :*
v- $S(G) = N(G)$
vi- *Les équilibres de Nash sont interchangeables.*
vii- *Tout jeu de type **C** est un jeu de type II.*

Beaud (1999 et 2002) montre, également, que la réciproque n'est pas vérifiée pour le **vii** de cette propriété. Les propriétés suivantes permettent de déterminer la convexité de l'ensemble des équilibres de Nash compte tenu du fait que l'ensemble des points selles est convexe.

Propriété : *Pour tout jeu G, lorsque S_i est convexe, u_i est quasi-concave en s_i et quasi-convexe en s_j, alors $S(G)$ est convexe.*

De cette propriété et de la condition **v**, Beaud (1999 et 2002) conclut à la convexité de $N(G)$ pour un jeu de type **C**.

Propriété : *Pour tout jeu G de type* **C**, *lorsque S_i est convexe, u_i est quasi-concave en s_i et quasi-convexe en s_j, alors $N(G)$ est convexe.*

Beaud (1999 et 2002) montre que tout jeu de type **B** est de type I et tout jeu de type **C** est de type II. La réciproque n'est pas vérifiée. Par conséquent, si un jeu de type IV disposent d'un unique équilibre de Nash du jeu G, chaque jeu de type **C** possède un unique équilibre de Nash.

2.4.3 Exemples

On propose, dans ce qui suit, un certain nombre d'exemples de jeux des différentes classes présentées précédemment.

♠ **jeux de type A :** Le jeu **(f)**, ci-dessous, est de type **A** et possède un équilibre de Nash noté : (a_1, A_2).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 5,0 & 2,2 \\ 1,4 & 0,3 \end{bmatrix} \end{array}$$

(f)

On voit bien que lorsque le joueur 1 préfère jouer a, alors le joueur 2 préfère A.

♠ **jeux de type B :** Le jeu **(g)**, ci-dessous, est de type **B** et possède un équilibre de Nash noté : (A_1, A_2).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 2,2 & 0,3 \\ 3,0 & \frac{1}{2},\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

(g)

Le *dilemme du prisonnier* est un cas de jeu de type **B** avec un équilibre de Nash (A_1, A_2) dans la mesure où les joueurs ont une incitation pure à dévier. Les joueurs préfèrent toucher (a_1, a_2) à (A_1, A_2), malheureusement, le joueur 1 est plus incité à jouer (A_1, a_2) que (a_1, a_2) et le joueur 2 à jouer (a_1, A_2) que (a_1, a_2).

♠ **jeux de type C :** Le jeu **(h)**, ci-dessous, est de type **C** et possède un équilibre de Nash noté : (a_1, a_2).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} & \frac{1}{2},0 \\ 0,\frac{1}{2} & 0,0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(h)

On voit clairement que lorsque le joueur 1 a une préférence dans l'obtention du couple (a_1, A_2) par rapport à (A_1, A_2) alors le joueur 2 reste indifférent : $u_1(a_1, A_2) > u_1(A_1, A_2)$ et $u_2(a_1, A_2) = u_2(A_1, A_2)$.

♠ **jeux de type I :** Le jeu **(i)**, ci-dessous, est de type I et possède un équilibre de Nash noté : (a_1, a_2).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 3,3 & 4,2 \\ 2,4 & 3,0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} -3,-3 & -2,-4 \\ -4,-2 & 0,-3 \end{bmatrix} \end{array}$$

(i) **(j)**

Le jeu croisé **(j)** du jeu **(i)** ci-dessus possède, également, un équilibre de Nash noté : (a_1, a_2). On a, donc, le gain d'équilibre de Nash du jeu de type I $(NP(G))$ qui correspond au gain d'équilibre croisé du même jeu $(TP(G))$. Les conditions 1 et 2 sont remplies. De plus, l'équilibre de Nash du jeu est un équilibre en point selle.

Remarque : *Le dilemme du prisonnier est un jeu de type **B**, mais est, également, un jeu de type I.*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 2,2 & 0,3 \\ 3,0 & 1,1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} -2,-2 & -3,0 \\ 0,-3 & -1,-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dilemme du prisonnier — *Matrice Croisée du Dilemme du prisonnier*

$(1,1)$ *est l'unique équilibre de Nash* (A_1, A_2) *du jeu et de sa matrice croisée. C'est, également, un point selle. Cet équilibre est, en fait, un équilibre en stratégie dominante, ce qui constitue un critère encore plus fort que celui des équilibres de Nash car quoique fasse le joueur* 2*, le joueur* 1 *jouera sa stratégie de sécurité.*

♠ **jeux de type II :** Soit un jeu de type **C** avec un équilibre de Nash (a_1, a_2) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 2,2 & 2,1 \\ 1,2 & 1,1 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(k)} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} -2,-2 & -1,-2 \\ -2,-1 & -1,-1 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(l)} \end{array}$$

Tout jeu de type **C** est un jeu de type II. Par conséquent, le jeu **(k)** est un exemple de jeu de type II. La matrice de jeu croisé **(l)** expose quatre équilibres de Nash du jeu croisé, donc la condition $2'$ est bien remplie.

♠ **jeux de type III :** La matrice de jeu de type III ci-dessous en **(m)** possède deux équilibres de Nash : (a_1, a_2) et (A_1, A_2). La matrice de jeu croisé **(n)** correspondante expose deux équilibres de Nash du jeu croisé : (A_1, a_2) et (a_1, A_2).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 3,3 & 0,0 \\ 0,0 & 2,2 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(m)} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} -3,-3 & 0,0 \\ 0,0 & -2,-2 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(n)} \end{array}$$

Ainsi, lorsque l'on compare les ensembles d'équilibres de Nash $N(G)$ avec les ensembles d'équilibres $T(G)$, on a l'ensemble des points selles $S(G)$ qui vérifient la condition 1 telle que : $S(G) = N(G) \cap T(G) \neq \emptyset$. En effet, le jeu **(m)** possède quatre points selles issus de l'intersection de la condition 1. La condition $2'$, par contre, n'est pas vérifiée : $NP(G) \nsubseteq TP(G)$.

♠ **jeux de type IV :** Il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures dans la matrice de jeu de type IV, **(o)**, ci- dessous. Par contre, cette matrice possède deux équilibres de Nash en stratégies mixtes notés : $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. En effet, le joueur 1 peut espérer un gain de : $\frac{2}{3}(1+0)$ lorsqu'il joue a_1 et $\frac{1}{3}(0+2)$ lorsqu'il joue A_1. Le joueur 2 peut espérer un gain de : $\frac{1}{2}(0+2)$ lorsqu'il joue a_2 et $\frac{1}{2}(2+0)$ lorsqu'il joue A_2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1,0 & 0,2 \\ 0,2 & 2,0 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(o)} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_2 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,-1 & -2,0 \\ -2,0 & 0,-2 \end{bmatrix} \\ & \textbf{(p)} \end{array}$$

Maintenant considérant la matrice croisée de type IV **(p)** on a deux équilibres de Nash du jeu croisé notés : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. En effet, le joueur 1 peut espérer un gain de : $\frac{1}{2}(0-2)$ lorsqu'il joue a_1 et $\frac{1}{2}(-2+0)$ lorsqu'il joue A_1. Le joueur 2 peut espérer un gain de : $\frac{2}{3}(-1+0)$ lorsqu'il joue a_2 et $\frac{1}{3}(0-2)$ lorsqu'il joue A_2. Par l'intermédiaire des stratégies mixtes, l'ensemble des équilibres de Nash $N(G)$ est l'ensemble des équilibres croisés $T(G)$. La valeur commune du jeu est, donc, $v = \left(\frac{2}{3}, 1\right) = NP(G) = TP(G)$ de sorte que $NP(G) \subset TP(G)$. Par contre, la condition 1 n'est pas vérifiée : $S(G) = N(G) \cap T(G) = \emptyset$. ▲

3 Mécanismes et protocoles algorithmiques

On peut, par une simple *communication indirecte* ainsi que des *contraintes incitatives,* tenant compte des réalités comportementales rationnelles, améliorer conséquement le résultat de l'équilibre de Nash (1951). Dans cette section, on met en avant les *contrainte incitatives* dans un mécanisme élargissant l'ensemble des réalisables incitatifs dans un protocole algorithmique.

3.1 Notations

$(\Theta_i)_{i \in N}$ est l'ensemble fini des types du joueur i avec $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$. g est la probabilité contingente à l'ensemble des types Θ. $S = S_i \times S_j, \forall i, j \in N$ pour $i \neq j$ est l'ensemble des stratégies telles que $s_i : \Theta_i \to A_i$ est une stratégie du joueur i paramétrée par son type θ_i. u_i est la fonction de gain du joueur i tel que $u_i : \Theta \times A \to \mathbb{R}$. Un jeu Bayésien $G = \left(N, (\Theta_i)_{i \in N}, g, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ est un jeu dans lequel un type $\theta \in \Theta$ est choisi comme étant le véritable vecteur de type avec une probabilité $g(\theta)$ puis le joueur i choisit une stratégie $s_i \in S$ et obtient un gain $u_i(s, \theta_i)$. Sachant que les joueurs disposent d'un ensemble de messages $M = \left\{(M_i)_{i \in N}\right\}$, avec m_i le message envoyé par le joueur i, la contrainte d'incitation à la compatibilité implique $\Theta_i = M_i$. De ce point de vue, les joueurs communiquent par l'intermédiaire du mécanisme. Sachant le message, le mécanisme sélectionne un signal c avec une probabilité $\pi(c \mid m)$. Soit un espace probabilisé $\Gamma = (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et λ_i une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Ω est l'ensemble des états du monde avec $\omega \in \Omega$ un état particulier de Ω. A est l'ensemble des actions associées à Ω et $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités issues de ces évènements. λ_i est issue d'un ensemble fini de signaux du joueur i et $\gamma = \left((\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}), (\lambda_i)_{i \in N}\right)$ est un "système de corrélation" avec $\gamma \in \Gamma$.

3.2 Jeux Bayésiens

On présente l'approche Bayésienne axée sur les croyances subjectives que les joueurs ont concernant les préférences de leurs rivaux. *Comment se définit un jeu Bayésien (Harsanyi (1967-68)) ?* On peut établir les définitions suivantes dans un premier temps selon Mertens and Zamir (1985), Fudenberg and Tirole (1991), Montet and Serra (2003) et Zamir (2008). pour un jeu Bayésien.

Définition :

[Jeu Bayésien sous forme normale] : *La représentation sous forme normale d'un jeu Bayésien spécifie les actions des joueurs A_i, leurs types Θ_i, leurs croyances g_i et leurs fonctions de paiements $u_i(s, \theta_i)$.*

[Equilibre Bayésien] : *Dans un jeu Bayésien, le résultat s^* est un équilibre Bayésien si aucun joueur n'a d'incitation à dévier de sa stratégie s_i^* sachant son type θ_i si le joueur rival ne dévie pas de sa stratégie s_j^*. C'est à dire : si $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ est un équilibre Bayésien $\forall i \in N$ et $\forall \theta_i \in \Theta_i$, alors s_i^* est la solution du problème :* $\max\limits_{s_i \in S_i} \sum\limits_{\theta_i \in \Theta_j} g_i(\theta_j \mid \theta_i)\, u_i(s, \theta_i)$

3.3 Théorie des mécanismes Bayésiens

Myerson (1979) implémente un mécanisme Bayésien d'incitation à la compatibilité (CIC) et à l'efficience (CIE) permettant de déterminer une solution Pareto efficiente à partir du produit généralisé de Nash (1950) revisité par Harsanyi and Selten (1972). Il montre que le résultat vérifie le *principe de révélation*. Le nouveau jeu Bayésien auquel on a assimilé un mécanisme π se note G^{π}. Le mécanisme est public.

3.3.1 Définition

On établit les définitions suivantes selon Forges and Minelli (1997 et 1998) et Beaud (2002). Une stratégie pure du joueur i se décompose en deux étapes. La première consiste à choisir son message en fonction de son type et la seconde consiste à choisir sa stratégie selon son type et compte tenu du message envoyé au mécanisme ainsi que du signal reçu. Le mécanisme est dit *auto-réalisateur* lorsqu'il ne transmet aucune information non pertinente aux joueurs.

Définition : *Un mécanisme est une fonction de transition π de Θ dans l'ensemble des probabilités de C.*
Définition : *Un mécanisme est dit auto-réalisateur si les stratégies suivantes constituent un équilibre de Nash du jeu G^{π} : le report de son vrai type au mécanisme dans un premier temps puis le choix de la stratégie correspondante au signal reçu dans un second temps (s_i si le signal est $c \in C$).*

3.3.2 Procédure algorithmique

On présente l'algorithme d'un mécanisme Bayésien[9] :

Algorithme d'un mécanisme Bayésien

i/ $\theta \in \Theta$ est choisi avec une probabilité $g(\theta)$.

ii/ Le joueur i envoie un message $m_i \in \Theta_i$ au mécanisme.

iii/ Le mécanisme sélectionne un signal c avec une probabilité $\pi(c \mid m)$.
Le signal c devient connaissance commune.

iv/ Compte tenu du mécanisme π, les joueurs choisissent c sachant un ensemble de stratégies $s(\theta) \in S$ (avec $s(\theta) = m$) et obtiennent un gain $u_i(\pi, \theta_i \mid \theta_i)$.

Algorithme 1 : Mécanisme Bayésien

3.4 Systèmes de Corrélation et Equilibres corrélés

Aumann (1974 et 1987) traite du problème d'inefficience des équilibres de Nash par l'implémentation de systèmes de corrélation entre les joueurs. Ces systèmes de corrélation sont mis en place à partir de l'*observation conjointe des joueurs d'un évènement aléatoire auto-contrôlé* lorsque cela est possible. Les équilibres corrélés sont immunisés contre les déviations unilatérales mais ne conservent pas les propriétés même affaiblies des jeux à somme nulle. Lorsque l'on applique le système

[9] $u_i(s, \theta)$ est le gain obtenu dans le jeu Bayésien en l'absence de mécanisme. Par contre, $u_i(\pi, \theta_i \mid \theta_i)$ est le gain obtenu par le joueur i une fois l'annonce publique faite par le mécanisme.

γ à G, on obtient le jeu $G_\gamma = \left(N, \mathcal{P}, (\Gamma_i)_{i\in N}, (\Sigma_i)_{i\in N}, (\phi_i(\sigma))_{i\in N}\right)$ avec Σ_i l'ensemble des stratégies σ_i de i et $\phi_i(\sigma)$ le gain du joueur i, $\forall i \in N$. $\Delta^{S_i} \times \Delta^{S_j}$ est le produit cartésien de l'ensemble des extensions mixtes du jeu G.

3.4.1 Définitions

On définit, préalablement, quelques concepts et définitions relatifs aux équilibres corrélés. La littérature relative à ces concepts est, entre autres, prise dans Aumann (1974), Aumann (1976), Aumann (1987), Sorin (1997) et Beaud (2002).

Définitions [Aumann (1974)] : *Un équilibre de Nash du jeu G_γ est un équilibre corrélé du jeu G.*

Définitions [Aumann (1987)] : *Un équilibre corrélé de G est une stratégie corrélée σ_i pour i tel que : $\phi_i(\sigma) \geq \phi_i(\sigma_i', \sigma_j)$.*

Définitions [Aumann (1987)] : *Une distribution Q est une distribution d'équilibres corrélés si et seulement si $\sum\limits_{s_j\in S_j} Q(s_j \mid s_i)\, u_i(s_i, s_j) \geq \sum\limits_{s_j\in S_j} Q(s_j \mid s_i)\, u_i(s_i', s_j)$ avec $Q \in \Delta^{S_i} \times \Delta^{S_j}, \forall i \in N$ et $\forall s_i, s_i' \in S_i$.*

Définitions [Système de corrélation canonique] : *i/ Un système de corrélation canonique est un système de corrélation tel que : $\Omega = S_i \times S_j, \lambda_i(\omega) = s_i$. ii/ Un équilibre corrélé canonique est un équilibre corrélé tel que le système de corrélation est canonique et tel que la stratégie d'équilibre de chaque joueur consiste à jouer le signal qu'il reçoit.*

Définitions [CPA (Aumann (1976))] : *Tous les antécédents h_i sont les mêmes ; c'est à dire qu'il existe une probabilité h sur Ω telle que : $h_i = h_j = h$.*

Définitions [Rationnalité Bayésienne (Aumann (1987))] : *Dans G, tout joueur i, $\forall i \in N$, est rationnellement Bayésien tel que : $\phi_i(s(\omega)) \geq \phi_i(s_i'(\omega), s_j(\omega))$.*

Définitions [(Aumann (1987))] : *La distribution des stratégies $s(\omega)$ à chaque état ω est une distribution d'équilibres corrélés.*

Théorèmes :

1/ *L'ensemble des distributions d'équilibres corrélés coïncide avec l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés canoniques.*

2/ *Si chaque joueur est rationnellement Bayésien à chaque état du monde $\omega \in \Omega$, alors la distribution du vecteur de stratégies $s(\omega)$ est une distribution d'équilibres corrélés.*

Equilibres corrélés L'ensemble des gains d'équilibres corrélés du jeu G est $CP(G)$. Ces gains sont obtenus lorsque varie le mécanisme γ tel que : $CP(G) = \cup_\gamma NP(G_\gamma)$. On définit $\mu_{\sigma(\omega)}(s) = \sigma_i(\omega)(s_i)\,\sigma_j(\omega)(s_j)$ comme la probabilité liée au couple $s = (s_i, s_j)$ lorsque $\sigma(\omega) = (\sigma_i(\omega), \sigma_j(\omega))$ est jouée et on définit une distribution $Q_\sigma(s) = \int_\Omega \mu_{\sigma(\omega)}(s)\,\mathcal{P}(d\omega)$ selon Beaud (2002). L'ensemble des distributions d'équilibres corrélés du jeu G est noté $CD(G)$. C'est l'ensemble des distributions Q induites par l'équilibre du jeu G_γ. La notion d'équilibres corrélés canoniques définit le fait que $\Omega = S$, l'ensemble des stratégies disponibles pour les joueurs i et j, sont identiques aux évènements pouvant survenir de façon aléatoire. De fait, la fonction d'annonce $\lambda_i(\omega)$ du joueur i relative à l'évènement observable ω par les deux joueurs traduit directement la stratégie que doit entreprendre chacun d'entre eux. Lorsque le joueur i reçoit le signal $\lambda_i(\omega) = s_i$, alors la distribution Q peut être induite par un équilibre canonique.

Rationnalité Bayésienne Aumann (1987) définit certaines propriétés des équilibres corrélés relatives à la rationnalité Bayésienne des joueurs. Les concepts et théorèmes retenus sont issus de Aumann (1974), Aumann (1976) et Aumann (1987). Le premier concept est l'hypothèse d'antécédents communs ou *a priori commun* (**C***ommon* **P***rior* **A***ssumption*). On définit h_i comme une mesure de probabilité du joueur i sur l'état Ω. h_i peut être vu comme une probabilité marginale *a priori* traduisant les croyances que les autres joueurs j ont sur i. Cette hypothèse n'exprime pas le fait que les joueurs aient la même probabilité subjective, elle exprime le fait que les différences dans l'estimation des probabilités d'individus distincts doivent être exprimées par des différences dans l'information et l'expérience. En fait, toutes les croyances que formulent les individus à propos d'un autre sont identiques. Si l'espérance de gain du joueur i se note $\phi_i(s(\omega)) = E(u_i(s(\omega)) \mid \mathcal{P})$ alors, tout joueur i est rationnellement Bayésien si $\phi_i(s(\omega)) \geq \phi_i(s'_i(\omega), s_j(\omega))$; c'est à dire s'il n'a aucune incitation à dévier pour une stratégie $s'_i(\omega)$ sachant l'information $\mathcal{P}$ mise à sa disposition.

3.4.2 Procédure algorithmique

L'algorithme d'un système de corrélation est le suivant :

Algorithme d'un système de corrélation

i/ En première étape de jeu, $\omega \in \Omega$ est choisi selon une probabilité $\mathcal{P}$

ii/ En conséquence, $\lambda_i(\omega)$ est annoncé au joueur i.

iii/ Le gain du joueur i dans G_γ est
$\phi_i(\sigma) = \int_\Omega u_i(\sigma(\omega))\mathcal{P}(d\omega) = E(u_i(\sigma(\omega)))$.

Algorithme 2 : Système de Corrélation

Il existe une unique distribution d'équilibres corrélés issue de cet algorithme équivalente à l'extension mixte de type **C** du jeu (De Wolf (1997) et Beaud (2002)). Le problème est que l'utilisation d'un système de corrélation ne permet pas de maintenir les propriétés affaiblies des jeux à somme nulle (Aumann (1974)).

3.5 Application : mécanismes d'enchères

On propose une application du problème incitatif posé précédemment par l'intermédiaire d'une famille d'enchères à valeurs privées indépendantes[10] $\mathtt{E}$ ou $\mathcal{E}$ vérifiant le *principe de révélation* (Myerson (1979), Myerson (1981) et Myerson and Satterthwaite (1983)). Les joueurs communiquent par l'intermédiaire d'un mécanisme direct révélateur $\mathcal{E}$ et proposent des offres leur permettant d'obtenir l'objet à un niveau optimal. La théorie des mécanismes d'enchères s'interroge sur les problèmes d'allocation auxquels fait face un régulateur. Pour cela, le régulateur ne peut s'appuyer que sur certaines informations que les agents peuvent lui transmettre sans pour autant, *a priori*, être capable de juger de leur véracité.

3.5.1 Définitions

Le régulateur désire maximiser les valorisations que les joueurs accordent au bien et définit une règle d'allocation (celui qui a la plus grande valorisation ac-

[10]Vickrey (1961), Riley and Samuelson (1981) et Mc Afee and Mc Millan (1987) entre autres.

quiert l'objet). L'objectif du régulateur est appelé : *fonction de choix social*. Il utilise une *règle de tarification* pour élaborer cette fonction. Si on considère un ensemble d'issues C regroupant les paiements et les types des agents, sachant la rationnalité de ces agents (ils veulent maximiser leur utilité), alors le régulateur doit en tenir compte pour déterminer la fonction de choix social. Il établit, par conséquent, un mécanisme réalisable incitatif afin que les agents agissent dans leurs propres intérêts, certes, mais que ces intérêts servent l'objectif du régulateur.

Définitions :

- [Fonction de choix social] : *Une fonction de choix social* $\mathtt{F}\colon \Theta \twoheadrightarrow C$ *associe une issue à chaque type.*

- [Fonction de résultat] : *Une fonction de résultat (ou de conséquence) détermine les liens entre l'ensemble d'actions* S_i *et les issues* C *telle que* $k : S \to C$.

- [Mécanisme direct révélateur] : *Un mécanisme est direct révélateur lorsque,* $\forall i \in N, S_i = \Theta_i$.

Dans un mécanisme $\mathtt{E}(V, (\mathtt{q}\,(s\,(\theta))\,, \mathtt{p}\,(s\,(\theta))))$, le régulateur maximise la somme des transferts des joueurs (ou des offres de transfert $s\,(\theta)$)[11]. Dans le cas d'un mécanisme réalisable direct révélateur $\mathcal{E}$ vérifiant CIC, la *fonction de conséquence* est confondue avec la *fonction de choix social* du médiateur dans un univers Bayésien. Le gain de l'individu i est donc du type $u_i\,(p_i\,(\theta)\,,\theta_i) \underset{(S_i=\Theta_i)}{=} u_i\,(\mathtt{p}_i\,(s\,(\theta))\,,\theta_i)$. Une hypothèse souvent retenue dans les mécanismes d'enchères est la *quasi-linéarité* des espérances de gains des joueurs avec : $u_i\,(p_i\,(v)\,,\theta_i) = F_i^{n-1}\,(q\,(v)\,,\theta_i)\, v_i\,(\theta_i) - p_i\,(v_i\,(\theta_i))$ pour $q_i\,(v)$ la probabilité que i obtienne l'objet sachant le vecteur des valorisations $v = \theta$, $\mathcal{E}\,(q\,(v)\,,p\,(v))$ un *mécanisme de choix direct révélateur* et $p_i\,(v_i\,(\theta_i))$ le *paiement* du joueur i. On prend $f\,(.)$ la densité de probabilité et $F\,(.)$ la fonction de répartition (ou densité marginale) associée[12].

3.5.2 Algorithme d'enchères

Le mécanisme induit par le régulateur spécifie principalement une offre d'actions et d'issues liées par une fonction de conséquence $(\mathtt{q}\,(.)\,,\mathtt{p}\,(.))$ tel que

Algorithme d'un mécanisme d'enchère

i/ L'individu i dispose d'un type $\theta_i = v_i$.

ii/ Le régulateur demande à chaque participant d'annoncer son $b\,(v_i)\,, \forall i \in N$.

iii/ Le bien est attribué selon $\mathtt{p}(.)$ par le mécanisme $\mathtt{E}(V, (\mathtt{q}\,(s\,(\theta))\,, \mathtt{p}\,(s\,(\theta))))$ (ou $p\,(v)$ par $\mathcal{E}\,(q\,(v)\,,p\,(v))$ direct révélateur).

iv/ L'individu i propose le transfert $\mathtt{p}_i\,(s_i\,(\theta))$ pour le bien. L'espérance de gain de i est : $u_i\,(\mathtt{p}_i\,(s\,(\theta))\,,\theta_i)$ (ou $u_i\,(p_i\,(v)\,,\theta_i)$).

Algorithme 3 : Mécanisme d'enchère

Compte tenu du principe de révélation, le théorème d'équivalence revenu (Riley and Samuelson (1981) et Mc Afee and Mc Millan (1987)) est vérifié.

[11] Dans une enchère au second prix, c'est la seconde meilleure offre qui constitue la règle en matière de tarification.

[12] $F_i^{n-1}\,(q\,(v)\,,\theta_i)$ est la densité marginale conditionnelle au fait que $v_i > (v_1 \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n)$.

4 Rationnalité Bayésienne

On s'intérresse particulièrement au dilemme du prisonnier pour sa capacité à mettre en valeur le problème d'inefficience des équilibres de Nash (1951).

4.1 Problème Incitatif et Rationnalité Bayésienne

Le dilemme du prisonnier est un exemple d'application trés intéressant car il contient en sa structure l'équilibre de Nash (A_1, A_2) comme valeur de sécurité mais également l'issue Pareto efficiente (a_1, a_2) résultant d'une possible coopération. Néanmoins, l'observation de la structure du jeu montre que les comportements de déviation des joueurs ne peuvent pas permettre naturellement une coopération ni aboutir à cette issue coopérative par une simple communication ou entente (sauf si les joueurs s'engage dans un accord obligatoire, ferme et définitif). De fait, on propose d'explorer la notion de sécurité comme moyen d'incitation à la participation. On propose de mettre en avant le problème de robustesse traduisant le *sentiment d'injustice* auquels les joueurs font face dans le mécanisme de Myerson (1979).

4.2 Illustration (Myerson)

Supposons un mécanisme de partage de coût entre les joueurs pour investir dans un projet public. On suppose qu'il existe une équivalence formelle entre le partage de coût préconisé par la médiation et une distribution de probabilité. On pose $C = \{c_0, c_1, c_2\}$, $|\Theta_i| = 2$ et $|\Theta_j| = 1$. Les croyances du mécanisme π et du joueur j sur les probabilités marginales *a priori* du joueur i lorsque le joueur i est de type θ_i (resp. θ_i') sont traduites par $h(\theta_i)$ (resp. $h(\theta_i')$), $\forall i \in N$, $\forall j \in N$ pour $i \neq j$. On prend $h_1(\theta_1) = 0.9$, $h_1(\theta_1') = 0.1$ et $h_2(\theta_2) = 1$. De fait, on a $g(\theta_1, \theta_2) = h_1(\theta_1) h_2(\theta_2) = 0.9$ et $g(\theta_1', \theta_2) = 0.1$. Dans un univers de jeux à information incomplète, on pose la matrice des gains des joueurs en fonctions de leurs types. Le joueur 1 choisit les lignes et le joueur 2 les colonnes :

$$
\begin{array}{ccc}
 & & (z_2 = \theta_2) \\
 & & \begin{array}{cc} b_2 & B_2 \end{array} \\
(z_1 = \theta_1) & \begin{array}{c} b_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{bmatrix} (40,40) & -10,90 \\ 90,-10 & 0,0 \end{bmatrix} \\
 & & \begin{array}{cc} b_2 & B_2 \end{array} \\
(z_1 = \theta_1') & \begin{array}{c} b_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{bmatrix} (15,40) & -70,90 \\ 30,-10 & 0,0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Les valeurs $(.,.)$ sont facultatives pour la suite de l'exemple et totalement arbitraire. On suppose que le joueur 1 dispose des types $\theta_1 = 1.0$ et $\theta_1' = 1.1$ et le joueur 2 du type $\theta_2 = 2$. On abrège le mécanisme $\pi(c_2 \mid m = 1.0, 2)$ de la façon suivante : π_2^0. Sans plus de généralités, on traduit la contrainte CIC pour le joueur 1 par :

$$90\pi_2^0 - 10\pi_1^0 + \pi_0^0 0 \geq 90\pi_2^1 - 10\pi_1^1 + \pi_0^1 0$$

$$30\pi_2^0 - 70\pi_1^0 + \pi_0^0 0 \leq 30\pi_2^1 - 70\pi_1^1 + \pi_0^1 0$$

avec $\pi_2^0 + \pi_1^0 + \pi_0^0 = 1$, $\pi_2^1 + \pi_1^1 + \pi_0^1 = 1$ et pour tout $\pi_{A,a}^{\theta',\theta} \geq 0$. La première (resp. seconde) inégalité de cette contrainte précise que le joueur 1 ne revendique pas être de type θ_1' (resp. θ_1) s'il est, effectivement de type θ_1 (resp. θ_1'). L'ensemble des réalisables $Conv\left(N\left(G^{\pi}\right)\right)$ représentant l'enveloppe convexe de l'ensemble $N\left(G^{\pi}\right)$ est déterminé à partir des vecteurs estimés par le mécanisme π :

$$\widehat{u}_1\left(\theta_1\right) = 90\pi_2^0 - 10\pi_1^0 + \pi_0^0 0$$
$$\widehat{u}_1\left(\theta_1'\right) = 30\pi_2^1 - 70\pi_1^1 + \pi_0^1 0$$

$$\begin{aligned}\widehat{u}_2\left(\theta_2\right) &= 0.9\left(-10\pi_2^0 + 90\pi_1^0 + \pi_0^0 0\right)\\ &\quad +0.1\left(-10\pi_2^1 + 90\pi_1^1 + \pi_0^1 0\right)\end{aligned}$$

avec π vérifiant les contraintes CIC. On a les vecteurs $\left(\widehat{u}_1\left(\theta_1\right), \widehat{u}_1\left(\theta_1'\right), \widehat{u}_2\left(\theta_2\right)\right) = (0,0,0)$ pour[13] $\pi_0^0 = \pi_0^1 = 1$, $(-10,-70,90)$ pour $\pi_1^0 = \pi_1^1 = 1$, $(90,30,-10)$ pour $\pi_2^0 = \pi_2^1 = 1$. Ce système permet d'implémenter les valeurs $\left(\widehat{u}_1\left(\theta_1\right), \widehat{u}_1\left(\theta_1'\right), \widehat{u}_2\left(\theta_2\right)\right) \in Conv\left(N\left(G^{\pi}\right)\right) \quad s/t \quad CIC$. La solution efficiente maximale est obtenue par :

$$\begin{aligned}&\max_{c\in C, \theta_i \in \Theta_i} \left(\widehat{u}_1\left(\theta_1\right)\right)^{0.9}\left(\widehat{u}_1\left(\theta_1'\right)\right)^{0.1}\left(\widehat{u}_2\left(\theta_2\right)\right)\\ &s/t \quad \left(\widehat{u}_1\left(\theta_1\right), \widehat{u}_1\left(\theta_1'\right), \widehat{u}_2\left(\theta_2\right)\right) \geq (0,0,0)\\ &\qquad CIE\\ &\qquad CIC\end{aligned}$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker permettent de résoudre ce programme et de déterminer les demandes optimales $\left(\widehat{u}_1^*\left(\theta_1\right), \widehat{u}_1^*\left(\theta_1'\right), \widehat{u}_2^*\left(\theta_2\right)\right) = (39.5, 13.2, 36)$ pour les paramètres $\pi_1^0 = 0.505$, $\pi_2^0 = 0.495$, $\pi_0^1 = 0.561$ et $\pi_2^1 = 0.439$. Le problème mis en avant par Myerson dans le résultat de la médiation est que même si celle-ci est optimale et efficiente, le joueur 2 risque de payer la totalité du projet s'il est entrepris lorsque son rival est de type θ_1'. Le joueur 2 peut donc légitimement se sentir laisé dans l'investissement au projet, mais le fait d'avoir passé un accord *ex ante* ne lui laisse pas le choix de dévier des recommandations. Il existe donc un problème de maintien de la rationnalité Bayésienne une fois que les joueurs connaissent leur type.

5 Implementation volontaire Bayésienne

5.1 Reversion et Problème d'efficience

Dans un univers Bayésien dans lequel les préférences des joueurs se caractérisent par des types, on propose de traiter le problème posé du point de vue de la théorie de l'*implémentation volontaire* (Ma, Moore and Turnbull (1988), Maskin and Moore (1999) et Jackson and Palfrey (2001)). On explore la notion de robustesse des équilibres de Nash comme élément de réponse au problème de maintien de la rationnalité Bayésienne (intermédiaire)[14] (Jackson (2000)). Par ailleurs, l'implémentation volontaire pose le problème de générer un gain d'équilibre qui ne se situe pas nécessairement sur l'*enveloppe convexe des réalisables incitatifs* (sauf si elle est linéaire). Ces résultats sont donc potentiellement *inefficients*[15].

[13]Signal intégralement orienté vers le *statu quo*.

[14]La rationnalité intermédiaire (IRI) : signifie qu'aucun joueur n'est incité à s'extraire du mécanisme au moins au niveau du point où il connaît son propre type. Il n'a que des espérances sur les types et stratégies des rivaux.

[15]On considère que Maskin and Moore (1999) fournissent une réponse aux problèmes de crédibilité des menaces et de "preference reversal".

5.2 Exemple (Maskin and Moore)

Les problèmes relatifs à la Réversion implique que lorsque les joueurs ont les préférences décrites dans le tableau ci-dessous, alors la fonction de réversibilité (ou renégociation) ne permet pas d'implémenter $\text{F}(.)$. Le joueur 1 dispose des mêmes préférences en θ et θ'. Les préférences s'expriment : c_1 préféré à c_2 qui est préféré à c_0, $\forall\theta, \theta' \in \Theta$ pour 1.

Préférences de J_1		Préférences de J_2	
θ	θ'	θ	θ'
c_1	c_1	c_2	c_0
c_2	c_2	c_1	c_1
c_0	c_0	c_0	c_2

Si le médiateur implémente $\text{F}(\theta) = c_1$, alors si 2 choisi c_0 en θ et si 2 renégocie pour c_1, il n'y a pas de problème quelque soit le choix de 2. Par contre, si 2 renégocie pour c_2, il n'existe aucun mécanisme susceptible d'implémenter $\text{F}(.)$.

6 Protocoles Robustes

Lorsque le problème de maintien de la rationnalité Bayésienne est résolu, il est nécessaire de mesurer le niveau de convergence du gain d'équilibre vers la solution située sur l'enveloppe convexe de l'ensemble des réalisables incitatifs. Les protocoles de communication robustes (Gossner (1996)) et de "Mediated-talk" (Lehrer (1996) et Lehrer and Sorin (1997)) permettent de répondre à ce problème en garantissant la non manipulabilité des informations échangées avec ou sans mécanisme[16]. Ces protocoles permettent de simuler une distribution d'équilibre corrélé générant de fait une espérance de gain à l'équilibre au moins à hauteur d'un gain d'équilibre corrélé. Le problème est que les mécanismes de "Mediated-talk" *ne disposent pas des propriétés même affaiblies des jeux à somme nulle* malgré le fait qu'ils soient immunisé contre les déviations. Les exemples et contre-exemples sont pris dans Gossner (1997).

6.1 Exemple : Cheap-talk à deux joueurs

Soit un jeu coordonné comme en **(c)**. Si on observe un *évènement aléatoire exogène auto-contrôlé conjointement par les joueurs* tel qu'une pièce de monnaie. Les joueurs peuvent se coordonner pour sélectionner un équilibre parmi les deux équilibres de Nash ((a_1, a_2) et (A_1, A_2)) en choisissant (a_1, a_2) si c'est "pile" qui sort et (A_1, A_2) sinon. Le jet de la pièce de monnaie peut faire apparaître "pile ou face" avec une equiprobabilité $\frac{1}{2}$. La pièce constitue une structure d'information (un système de corrélation) et les joueurs reçoivent une annonce public : "pile ou face". Lorsque les joueurs ne peuvent pas se coordonner via un système, une médiation par l'intermédiaire d'un mécanisme peut leur permettre de simuler cette coordination. Supposons qu'ils disposent de signaux binaires (ou messages) à échanger (resp.

[16]Urbano and Vila (1997, 1998 et 1999) proposent des protocoles basés sur la cryptographie moderne à un univers de jeu dans lequel les individus peuvent communiquer en l'absence d'un médiateur ("Cheap-talk" Rabin (1981), Farrell and Rabin (1996), Amitai (1996) et Aumann and Hart (2003) entre autres). Gossner (1997, 1998, 1999) propose un protocole de communication basé sur la cryptographie moderne avec médiation ("Mécanismes" Forges(1990), Barany (1992) entre autres).

envoyer) simultanément entre eux (resp. au mécanisme) et de types 0 ou 1 avec une équiprobabilité $\frac{1}{2}$. Alors le décodage par les joueurs du résultat (resp. de l'annonce du mécanisme) selon une règle (pile est décodé si la somme des signaux est paire, face sinon) implique la simulation de la structure d'information de la pièce (du système). Aucun des joueurs n'est incité à dévier car ils ne peuvent pas changer la probabilité d'apparition de "pile ou face". Le protocole (resp. le mécanisme) est robuste (i.e non manipulable) selon Gossner (1997).

6.2 Contre-exemple

Par contre, dans le cas du mécanisme, lorsque le joueur 1 ne peut envoyer de message, alors il est optimal pour le joueur 2 de toujours envoyer le même type : 1 si c'est "face" qu'il préfère. Ce mécanisme simule la distribution d'une pièce de monnaie mais ce n'est pas un équilibre de Nash car le joueur 2 a une forte incitation à dévier du protocole (en jouant toujours "face").

6.3 Simulation (Gossner)

Un exemple plus complexe : Les ensembles de messages sont $\{1, 2, 3\}$ pour les joueurs 1 et 2 (J_1 et J_2).

$$\begin{array}{cc} & J_2 \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ J_1 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_0 \\ c_1 & c_0 & c_0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les messages mixtes sont $\frac{1}{3}$ pour chaque profil de message. $C = \{c_0, c_1, c_2\}$ est l'annonce publique et $s_i^1(.,.)$ est la fonction de décodage de $i, \forall i \in N$ avec

$$s_1^1 : \left| \begin{array}{l} (1, c_1) \\ (2, c_2) \\ (3, c_0) \end{array} \right. \longrightarrow b_1 \qquad \left| \begin{array}{l} (1, c_2) \\ (2, c_0) \\ (3, c_1) \end{array} \right. \longrightarrow B_1$$

$$s_2^1 : \left| \begin{array}{l} (1, c_1) \\ (2, c_2) \\ (3, c_0) \end{array} \right. \longrightarrow b_2 \qquad \left| \begin{array}{l} (1, c_2) \\ (2, c_0) \\ (3, c_1) \end{array} \right. \longrightarrow B_2$$

La structure d'information issue de la distribution d'équilibre corrélé Q et simulée par $s_i^1(.,.)$ est

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} b_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La propriété de permutation circulaire entend justifier l'indépendance des signaux respectifs des joueurs sur l'information dont ils disposent lors du décodage. Donc, ni la probabilité des signaux traduits de 2, ni l'information dont dispose 1 sur la probabilité des signaux traduits de 2 ne dépendent du message de 1 (Gossner (1997)). Le même raisonnement s'applique à 2. Le mécanisme est robuste.

7 Remarques finales

En se plaçant du point de vue d'une approche non coopérative, de futurs travaux auront, donc, pour objectif de vérifier que les propriétés de l'ensemble des réalisables issus du mécanisme Bayésien avec contraintes CIC et CIE permettent la convergence vers une issue Pareto efficiente au sens de Myerson (1979). Donc, même si l'implémentation reste *algorithmique*, les démonstrations relèvent du *conceptuel* dans l'approche préconisée. De plus, lorsque l'on relâche la contrainte CIC, on se situe dans l'univers d'analyse d'un mécanisme de *Mediated-talk* public au sens de Lehrer and Sorin (1997). A ce titre, ce mécanisme peut directement simuler une distribution d'équilibres corrélés. On va, donc, au-delà de la capacité des joueurs à simplement se coordonner à l'aide d'un système de corrélation rajouté au mécanisme. On montre que si l'implémentation du mécanisme avec relâchement des contraintes CIC et CIE permet d'éviter toute coordination ou coopération entre les joueurs, elle peut offrir un résultat au moins équivalent à ce que permet d'obtenir un équilibre corrélé. Cette dernière observation fournit un élément de réponse au problème de maintien de la Rationnalité Bayésienne tout en améliorant l'ensemble des gains espérés des joueurs. La matérialisation du mécanisme Bayésien incitatif par une procédure d'enchères permet une implémentation empirique du problème.

8 Annexe 1 : Eléments de convexité : figures

La notion d'ensemble convexe exige quelques précisions :

8.1 Sur les combinaisons convexes :

Supposant deux scalaires a et b et deux vecteurs x et y avec $(a, b) \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Une combinaison *linéaire* z est définie ainsi : $ax + by = z$. Lorsque $a + b = 1$, la combinaison linéaire z est dite *affine* (la droite passant par x et y en **(1)**) avec $ax + (1 - a)\, y = z$ et lorsque $a + b = 1$ pour $a, b \geq 0$, alors la combinaison affine z est dite *convexe* (le segment de droite joignant x et y en **(2)**). Toute combinaison convexe est affine et toute combinaison affine est linéaire, la réciproque n'est pas vérifiée. Considérant un vecteur $\overrightarrow{v} = x - y$ de norme $\|v\|$, **(3)**

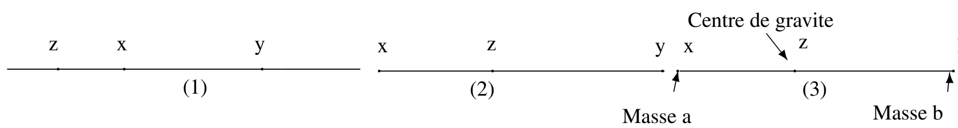

FIG. 1 – Centre de Gravité

montre le *centre de gravité* z situé à une distance de $b\,\|v\|$ de x et $a\,\|v\|$ de y.

8.2 Sur les ensembles convexes :

Tout ensemble C est dit convexe si toute combinaison convexe de deux points contenu dans C est, également, comprise dans C. En d'autres termes, C est un *ensemble convexe* si $\forall x, y \in C$ et $(a, b) \in \mathbb{R}$ on a $ax + by \in C$. **(4)** et **(5)** montrent

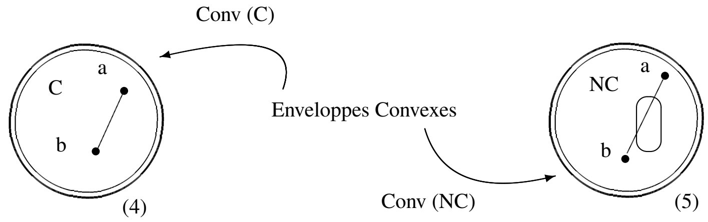

FIG. 2 – Enveloppes Convexes

respectivement un exemple d'ensemble convexe C et non convexe NC. Le segment de droite représenté sur chacune des figures contient l'ensemble des combinaisons convexes entre les extrêmes du segment. *L'enveloppe convexe* de l'ensemble convexe C est notée $conv\,(C)$. Par ailleurs, **(4)** et **(5)** montrent respectivement $conv\,(C)$ et $conv\,(NC)$. L'enveloppe convexe est le plus petit ensemble convexe contenant C en **(4)** et NC en **(5)**. Elle est le résultat de l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des ensembles convexes C et non convexes NC.

8.3 Droites support :

Une droite d qui sépare le plan $\mathbb{R}^2$ en *semi-espaces* en **(6)** peut être considérée comme une *droite support* de l'ensemble convexe C dés lors qu'elle passe par un point Q situé sur $conv\,(C)$ (figure **(7)**). L'ensemble C se situe, donc, dans un semi-

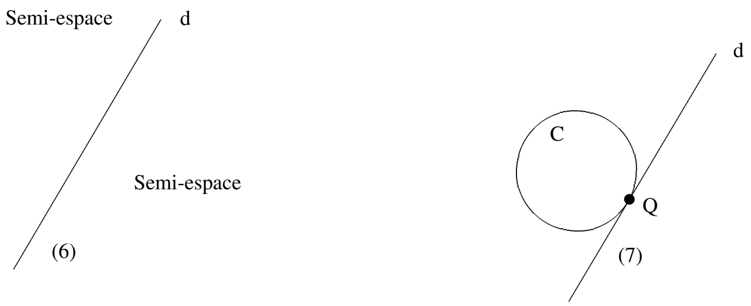

FIG. 3 – Droites support

espace.

9 Annexe 2 : Modèle probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Quelques éléments de présentation heuristique du modèle probabiliste à partir de la simulation du jet "au hasard" d'un dé cubique numéroté de 1 à 6.

9.1 Espaces fondamentaux Ω

Le premier élément descriptif du modèle aléatoire est l'ensemble des états du monde pouvant survenir dans cette simulation. On parle de réalisations décrites par l'ensemble $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$: l'espace (l'ensemble) fondamental (univers, référentiel, ...). Un élément de Ω est appelé une éventualité (un possible, ...).

9.2 Evènements et Tribus $\mathcal{A}$

On peut s'intéresser à l'évènement (susceptible de se produire) "tirer un chiffre paire" (resp. "tirer un chiffre ≥ 2") ce qui donne le sous-ensemble suivant $A = \{2, 4, 6\}$ (resp. $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$) dans Ω. De fait, on peut représenter l'ensemble des évènements de Ω par une famille $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est une tribu des parties de Ω. La réalisation de A implique B équivaut à $A \subset B$.

Définition A1 : *Soit Ω un ensemble non vide. Une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est appelée tribu de parties de Ω si elle vérifie les propriétés :*

i/ *Ω appartient à $\mathcal{A}$.*

ii/ *$\mathcal{A}$ est stable pour la complémentation*

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A} \textit{ avec } \overline{A} = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\} \textit{ complémentaire de } A.$$

iii/ *$\mathcal{A}$ est stable pour l'union dénombrable*

$$\forall k \in \mathbb{N}, A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

iv/ *$\mathcal{A}$ est stable pour l'intersection dénombrable*

$$\forall k \in \mathbb{N}, A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Tout couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est dit `espace probabilisable`.

9.3 Probabilités $\mathcal{P}$

La quantification de "quelle chance a-t-on d'obtenir A ?" est envisageable en attribuant une masse $\mathcal{P}(A)$ la probabilité de réalisation de A. La fonction réelle $\mathcal{P}(.)$ est définie sur $\mathcal{A}$

Définition A2 : *Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathcal{P}(.)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :*

i/ $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ *et* $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

ii/ $\mathcal{P}(.)$ *est* $\sigma - additive$

$$I\ dénombrable; A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in I; A_i \cap A_j = \emptyset, si\ i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathcal{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est dit `espace probabilisé`.

Références

[1] M. Amitai "Cheap talk with Incomplete Information on Both Sides" *Center for Rationality and Interactive Decision Theory*, The Hebrew University of Jerusalem, DP #90, 1996

[2] K J Arrow and G Debreu "The Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy" *Econometrica*, 22 : 265-290, 1954.

[3] R.J. Aumann "Almost Strictly Competitive Games" *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, 9 : 544-550, 1961.

[4] R.J. Aumann "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies" *Journal of the Mathematical Economics*, 1 : 67-96, 1974.

[5] R.J. Aumann "Agreeing to Disagree" *Annals of Statistics*, 4 : 1236-1239, 1976.

[6] R.J. Aumann "Survey of Repeated Games" in *Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, (Mannheim, Wien and Zurich : Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut), 1981.

[7] R.J. Aumann "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality" *Econometrica*, 55 : 1-18, 1987.

[8] R. J. Aumann and S. Hart "Long Cheap-talk" *Econometrica* 71 : 1619-1660, 2003.

[9] I. Barany "Fair Distribution Protocols or How The Players Replace Fortune" *Mathematics of Operations Research*, 17 : 327-340, 1992.

[10] J.P. Beaud "Antagonistic Games" *Cahiers du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique*, 495, 1999.

[11] J.P. Beaud *Contribution à la Théorie des Jeux : Jeux Antagonistes et Modèles de Jeux Répétés*, PhD thesis, University Paris VI, 2002.

[12] M. Cozic *Approches Computationnelles (Algorithmiques) de la Théorie des Jeux*, Mémoire de DEA, Université Paris II et LRI, Orsay, 2004.

[13] O. De Wolf "Optimal Strategies in n-person Unilaterally Competitive Games" *C.O.R.E*, DP 9949, 1999.

[14] J. Farrell and M. Rabin "Cheap-talk" *Journal of Economic Perspectives*, 10 : 103-118, 1996.

[15] F. Forges "Universal Mechanisms" *Econometrica*, 58 : 1341-1364, 1990.

[16] F. Forges and E. Minelli "A Property of Nash Equilibria in Repeated Games with Incomplete Information" *Games and Economic Behaviour*, 18 : 159-175, 1997.

[17] F. Forges and E. Minelli "Self-fulfilling Mechanisms in Bayesian Games" *Games and Economic Behaviour*, 25 : 292-310, 1998.

[18] J. Friedman "On Characterizing Equilibrium Points in Two-person Strictly Competitive Games" *International Journal of Game Theory*, 12 : 245-247, 1983.

[19] I.L. Glicksberg "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to N.E. Points" *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3 : 170-174, 1952.

[20] O. Gossner *Jeux Répétés et Mécanismes de Communication*, PhD thesis, University Paris VI, 1996.

[21] O. Gossner "Protocoles de Communication Robustes" *Revue Economique*, 48 : 685-695, 1997.

[22] O. Gossner "Secure Protocols or How Communication Generates Correlation" *Journal of Economic Theory*, 83 : 69-89, 1998.

[23] O. Gossner "Repeated Games Played by Cryptographically Sophisticated Players" *Université de Cergy Pontoise, THEMA*, DP 9907, 1999.

[24] O. Gossner "Comparison of information structures" *Games and Economic Behavior*, 30 : 44-63, 2000.

[25] J. C. Harsanyi "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players" *Management Science*, 14 : 159-182 Part I, 320-334 Part II, 486-502 Part III, 1967-68.

[26] J. C. Harsanyi and R. Selten "A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information" *Management Science*, 18 : 80-106, 1972.

[27] M. O. Jackson "Mechanism Theory" in *The Encyclopedia of Life Support Systems.* EOLSS Publishers, 2000.

[28] A. Kats and J. Thisse "Unilaterally Competitive Games" *International Journal of Game Theory*, 21 : 291-299, 1992.

[29] E. Lehrer and S. Sorin "One-shot Public Mediated Talk" *Games and Economic Behavior*, 20 : 131-148, 1997.

[30] C. Lemke and J. Howson "Equilibrium Points of Bimatrix Games" *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, 12 : 413-423, 1964.

[31] P. R. Mc Afee and J. Mc Millan "Auctions and Bidding" *Journal of Economic Literature*, 25 : 699-738, 1987.

[32] J.F Mertens and S. Zamir "Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information" *International Journal of Game Theory*, 14 : 1-29, 1985.

[33] P. Milgrom and R. Weber "A Theory of Auctions and Competitive Bidding" *Econometrica*, 50 : 1089-1122, 1982.

[34] C. Montet and D. Serra *Game Theory and Economics* (London : Palgrave-Macmillan), 2003.

[35] H. Moulin *Prolongements des Jeux à Deux Joueurs de Somme Nulle : Une Théorie Abstraite des Duels*, PhD thesis, University Paris IX, 1975.

[36] H. Moulin "Cooperation in Mixed Equilibrium" *Mathematics of Operations Research*, 1 : 273-286, 1976.

[37] H. Moulin *Games Theory for Social Sciences*, 2nd rev. edn (New York : New York University Press), 1986.

[38] R. B. Myerson "Incentive Compatibility and the Bargaining Problem" *Econometrica*, 47 : 61-73, 1979.

[39] R. B. Myerson "Optimal Auction Design" *Mathematics of Operations Research*, 6 : 58-73, 1981.

[40] R. B. Myerson *Game Theory : Analysis of Conflict* (Harvard University Press), 1991.

[41] J. Nash "The Bargainig Problem" *Econometrica*, 18 : 155-162, 1950.

[42] J. Nash "Non-Cooperative Games" *Annals of Mathematics*, 57 : 289-293, 1951.

[43] J. Nash "Two Person Cooperative games" *Econometrica*, 21 : 128-140, 1953.

[44] G. Owen *Game Theory*, 3rd edn (San Diego : Academic Press), Chapter 9, 1995.

[45] M. Rabin "Exchange of Secrets" *Department of Applied Physics, Harvard University, Cambridge, Mass.*, 1981.

[46] J. Riley and W. Samuelson "Optimal Auctions" *American Economic Review*, 71 : 381-392, 1981.

[47] R. T. Rockafellar *Convex Analysis*, (Princeton : Princeton University Press), 1970.

[48] W. Vickrey "Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders" *Journal of Finance*, 16 : 8-37, 1961.

[49] J. von Neumann "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" *Mathematische Annalen*, 100 : 295-320, 1928.

[50] J. von Neumann and O. Morgenstern *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 1944.

[51] S. Zamir "Bayesian Games : Games with Incomplete Information" in *The Encyclopedia of Complexity and System Science.* Bob Meyers ed. Springer, 2008.

Documents de Recherche parus en 2008[1]

DR n°2008 - 01 : Geoffroy ENJOLRAS, Robert KAST
« Using Participating and Financial Contracts to Insure Catastrophe Risk : Implications for Crop Risk Management »

DR n°2008 - 02 : Cédric WANKO
« Mécanismes Bayésiens incitatifs et Stricte Compétitivité »

DR n°2008 - 03 : Cédric WANKO
« Approche Conceptuelle et Algorithmique des Equilibres de Nash Robustes Incitatifs »

.

[1] La liste intégrale des Documents de Travail du LAMETA parus depuis 1997 est disponible sur le site internet : http://www.lameta.univ-montp1.fr

Contact :

Stéphane MUSSARD : mussard@lameta.univ-montp1.fr