NOTES D'ÉTUDES

ET DE RECHERCHE

ANALYSE CONJONCTURELLE DE DONNÉES BRUTES ET ESTIMATION DE CYCLES

PARTIE 1 : ESTIMATION ET TESTS

Renaud Lacroix

Avril 2008

NER - R # 209

BANQUE DE FRANCE
EUROSYSTÈME

DIRECTION GÉNÉRALE DES ÉTUDES ET DES RELATIONS INTERNATIONALES

DIRECTION GÉNÉRALE DES ÉTUDES ET DES RELATIONS INTERNATIONALES
DIRECTION DE LA RECHERCHE

ANALYSE CONJONCTURELLE DE DONNÉES BRUTES ET ESTIMATION DE CYCLES

PARTIE 1 : ESTIMATION ET TESTS

Renaud Lacroix

Avril 2008

NER - R # 209

Analyse conjoncturelle de données brutes et estimation de cycles

Partie 1 : estimation et tests

Renaud Lacroix*

Banque de France

Avril 2008

*Banque de France, 47-1416 DGEI-DESM-SICOS, 75049 Paris Cedex 01. E-mail : renaud.lacroix@banque-france.fr. Je remercie le rapporteur, J. Matheron (Banque de France, Direction de la Recherche) pour ses remarques.

Résumé :

L'analyse conjoncturelle est le plus souvent effectuée à partir de données désaisonnalisées et recquiert généralement une étape de filtrage supplémentaire de façon à extraire la composante cyclique. Cette approche en deux temps peut présenter des incohérences dans la mesure où les hypothèses sous-jacentes aux deux méthodes de filtrage ne sont pas forcément cohérentes entre elles. Ce travail propose une approche unifiée de la décomposition d'une série temporelle reposant sur des décompositions de Beveridge et Nelson généralisées obtenues à la suite d'une identification précise des racines unitaires saisonnières présentes dans la série. La série filtrée des composantes non-stationnaires ainsi identifiée fait ensuite l'objet d'une modélisation paramétrique ou semi-paramétrique, avec un soin particulier apporté à l'identification des composantes déterministes. On évite ainsi de modéliser explicitement chaque composante comme c'est le cas dans les méthodes par extraction du signal ou à composantes inobservables. La composante cyclique est définie comme le résidu stationnaire de la décomposition. D'autres propriétés de la décomposition sont discutées dans le papier.

Mots clés : décomposition de Beveridge Nelson, racines unitaires saisonnières, désaisonnalisation, cycle.

Abstract :

Short-term analysis is generally performed with seasonally adjusted data from which further estimation of the business cycle is performed through well-known filters (HP, Baxter-King). However, the whole procedure is not fully consistent, because seasonal adjustment and trend-cycle estimation do not share the same methodological framework, a fact which could potentially entail spurious interpretations. We study this topic from an unified perspective through an extension of Beveridge Nelson decompositions. We show that estimation of the various components of a given time series is feasible once the location of unit roots which drive the persistence of the series have been determined. The precise identification of seasonal unit roots is performed in a preliminary step. Then we derive estimates for each component from a modelization of the raw series which may be parametric (ARMA) or semi parametric, with special attention paid to deterministic components which play a prominent role in the decomposition. Thus, we avoid explicit modelization of each component as required by signal extraction methods or unobserved components analysis. The cycle is simply defined as the stationary stochastic residual of the decomposition. Further properties of this decomposition are investigated in the last part of the paper.

Keywords : Beveridge Nelson decomposition, seasonal unit roots, seasonal adjustment, cycle.

JEL classifications : C14, C22, E32

Résumé non-technique :

Ce travail propose une méthode d'estimation des différentes composantes d'une série temporelle univariée dans un cadre unifié. La pratique courante consiste à produire d'abord des données désaisonnalisées (CVS), puis, dans un second temps, une estimation de la tendance et du cycle à partir des séries CVS. Les deux opérations de filtrage (la désaisonnalisation, l'extraction du cycle) sont souvent conduites de manière indépendantes, car elles obéissent à des logiques de production et d'analyse différentes. Il est clair que les modélisations adoptées dans chacune de ces deux phases ont peu de chances d'être cohérentes entre elles. La méthodologie développée dans ce papier vise justement à assurer cette cohérence, et à identifier clairement les degrés de liberté appelant des choix de la part de l'utilisateur : le but est de favoriser au maximum la transparence de la procédure.

La décomposition est obtenue à partir de décompositions de Beveridge Nelson généralisées, et suppose au préalable une identification précise de la dynamique non-stationnaire de la série. Plus précisément, des tests de racine unitaire saisonnière sont mis en œuvre pour déterminer la composante stochastique non-stationnaire, et des tests standards complémentaires sont ensuite effectués pour estimer la tendance déterministe usuelle et saisonnière. Une première décomposition permet d'isoler chacune des sources de non-stationnarité dans la série. Elle est ensuite raffinée de manière à réduire la persistance de chaque composante, ce qui permet de définir la composante cyclique comme le résidu stationnaire d'espérance nulle de la décomposition. Celle-ci vérifie des propriétés intéressantes en termes d'identifiabilité des paramètres et de conservation des relations de cointégration lorsque la décomposition est effectuée séparément sur plusieurs variables. On propose ensuite une méthode d'estimation des composantes fondée sur une modélisation paramétrique ou semi-paramétrique obtenue à partir d'une forme AR dont l'ordre croît avec la taille de l'échantillon. On montre comment l'usage successif de prévisions permet d'estimer chaque composante stochastique ou déterministe.

Non-technical summary :

Seasonal adjustment (SA) and trend-cycle decomposition are commonly used for short-term analysis purposes. However, these two operations are generally performed in different processes along distinct methodological frameworks, thus resulting in potential inconsistencies: as it is well-known, forecasts are needed at the end of the sample in order to estimate unknown values of the raw series which are in another step plugged into bilateral filters specially designed for the estimation of each desired component. In a parametric set-up, the specification of the model is a rather important issue: using different models for seasonal adjustment and cycle extraction appears to be inconsistent, both theoretically and empirically. Besides, some important features of the model, such as seasonal unit roots and deterministic components are generally not properly taken into account. Concerning unit roots, seasonal adjustment packages propose default options, such as annual differencing in order to remove all unit roots. This is in sharp contrast with the state of the art of econometric modelling where unit root tests are routinely used in nearly all empirical work involving time series.

This paper deals with the simultaneous estimation of the various components of a time series (trend, cycle, seasonal components) in a single framework. The main tool is provided by extended Beveridge Nelson (BN) decompositions, with a crucial preliminary identification of non-stationarities in the dynamic of the series. The proposed decomposition depends heavily on the estimation of both deterministic components and seasonal unit roots. Once these meta-parameters have been fixed, BN methodology allows us to isolate each unit root in a particular non-stationary component. Then the persistence of the stationnary part of these components is reduced, leading to white noise or simple MA(1) processes and a new stationary stochastic component. Then, we identify trend and seasonal factors through the corresponding unit roots in non-stationary components but also by taking into account deterministic variables. The cycle is simply identified with the stationary part of the decomposition : this definition allows for transitory seasonal effects in the cycle, a feature which may appear a bit puzzled at first glance, but which is fully consistent with the implicit definition of seasonality we have in mind, that is a pattern persistent over time but subject to permanent changes.

Some properties of the decomposition are investigated. We show that the components are estimated from an unilateral rather than bilateral filter applied to raw data. Thus, there is no need to forecast future values at this stage. The price to pay for this convenient feature is a probable desynchronisation between SA and raw data : the extent to which this gap is really problematic will be examined in another work. Otherwise, although the procedure is purely univariate, we show that cointegrating relations at a given frequency within a set of variables apply to the corresponding components of the decomposition. Lastly, we show how to estimate these components in a parametric or semi-parametric set-up with, in the latter, autoregressive models whose order goes to infinity with the size of the sample.

1 Introduction

L'analyse conjoncturelle nécessite de disposer rapidement d'indicateurs fiables sur les évolutions de court-terme des agrégats macroéconomiques. Pour rendre lisible ces évolutions, il est nécessaire de traiter les données brutes qui constituent la matière première des séries disponibles. Le premier de ces traitements est le plus souvent la désaisonnalisation, et conduit à la publication de données corrigée des variations saisonnières (CVS), et, éventuellement, des effets calendaires (CJO). Par cette opération, la variablité apparente des phénomènes saisonniers est retirée, rendant la lecture de la série CVS plus aisée. Malheureusement, celle-ci peut s'avérer encore relativement erratique si les phénomènes irréguliers représentent une part significative de la volatilité de la série. Il est alors nécessaire de construire à partir de la série CVS de nouveaux indicateurs. Parmi les méthodes les plus courantes, on peut citer les décompositions tendance/cycle, les modèles à changement de régime, les modèles à facteurs inobservables. Les deux premières méthodes reposent sur des traitements univariés ou multivariés, la dernière est exclusivement multivariée. Les résultats de ces procédures permettent en principe une lecture plus aisée des évolutions cycliques (voir Doz *et alii* (1995) pour une comparaison de certaines de ces méthodes).

On se limite dans ce travail à l'approche "historique" consistant à extraire le cycle de la série traitée. Dans ce cadre, les deux étapes importantes de traitement des données (désaisonnalisaton et construction d'indicateur) sont en général effectuées par des procédures distinctes, à l'exception toutefois des logiciels SEATS (Gomez et Maravall (1996)) et STAMP (Koopman *et alii* (1995)). Pour le premier, il existe une procédure interne d'identification et d'estimation d'une composante cyclique, pour le second, le cycle doit être modélisé explicitement préalablement à l'usage de la procédure. À l'inverse, la procédure X12 (Findley *et alii* (1998)) ne fournit pas d'estimation de la composante cyclique. Il est alors recommandé d'appliquer à la série CVS un filtre d'extraction de la tendance, de type Hodrick-Prescott (HP), ou Baxter-King (Baxter et King, (1999)).

La multiplicité des procédures disponibles et l'absence de définition précise des objets à estimer compliquent singulièrement le choix d'une méthode parmi d'autres (voir Canova (1998) pour une comparaison des méthodes d'extraction du cycle sur données CVS). En outre, parmi les difficultés d'ordre méthodologiques, il y en a trois qui nous paraissent particulièrement importantes :

- La volatilité des estimations les plus récentes : ceci est lié à l'usage de filtres symétriques pour construire les composantes (Burman (1980), Hillmer et Tiao (1982), Maravall (1995)). Il est donc nécessaire d'utiliser des prévisions pour estimer les données manquantes à la fin de la série. Deux effets jouent alors en sens inverse. D'une part, l'absence de déphasage entre la série brute et la série filtrée liée à la symétrie du filtre assure, en théorie, la synchronisation des points de retournement entre série brute et série CVS ; d'autre part, les erreurs de prévision, et les révisions qu'elles entrainent entâchent d'incertitudes le profil des composantes estimées.

- L'impossibilité de décomposer certains modèles SARIMA en composantes inobservables (Planas et Fiorentini (2001)), ou sous forme espace-état (logiciel STAMP), la raison étant que ces décompositions introduisent des contraintes complexes sur la structure de la série brute. Cette critique est évidemment sans objet pour les procédures reposant sur un filtre théorique fixe, comme le logiciel X12 et le filtre HP.

- L'absence de généralisation au cadre multivarié : les procédures d'extraction de tendance couplées à la désaisonnalisation reposent sur le traitement univarié des séries. Parallèlement, l'étude des composantes tendancielles s'effectue souvent dans un cadre multivarié. Clairement, il est souhaitable, pour l'analyse d'un nombre réduit de variables, d'effectuer un traitement cohérent de la saisonnalité et de la tendance. De plus, dans la mesure où l'analyse conjoncturelle porte sur plusieurs séries simultanément, la prise en compte des interactions entre variables ne peut qu'enrichir les résultats, et assure la cohérence d'ensemble des interprérations effectuées (Geweke (1977)).

Ce travail propose une méthode simple d'estimation des composantes d'une série temporelle dans le cadre d'une unique procédure. La décomposition fournit le cycle, la tendance et les facteurs saisonniers, ainsi que les diverses sous-composantes de ces deux dernières séries. Il prolonge les papiers de Breitung (1994) ou Breitung et Gomez (1999) en mettant l'accent sur l'identification la plus précise possible des composantes non-stationnaires, de façon à définir la composante cyclique comme la partie purement stationnaire de la série. Cette définition du cycle conduit à caractériser les composantes élémentaires non-stationnaires sous la forme de processus à mémoire courte, c'est à dire ARMA(p,q) avec $p \leq 2$ et $q \leq 1$. Le cycle est défini de manière statistique, et il convient de l'interpréter comme la partie peu persistente de la série étudiée. Aucune modélisation spécifique du cycle n'est requise ici ; en particulier, la période associée à ces fluctuations peut être estimée directement à partir des données.

La mise en œuvre de cette décomposition repose largement sur les outils présentés par Gregoir et Laroque (1998). Elle est présentée dans un cadre univarié, et repose sur l'emploi successif de décompositions de type "Beveridge-Nelson" (Beveridge et Nelson (1981), Newbold et Vougas (1996)). L'avantage de cette décomposition par rapport aux méthodes traditionnelles d'extraction du signal est d'être relativement robuste en termes de révision des estimations produites, car elle repose sur des filtres asymétriques. Cette propriété s'avère en effet très importante pour une analyse fiable des observations les plus récentes. En contrepartie, les composantes estimées vérifient certaines propriétés en termes de corrélation caractéristiques de la décomposition obtenue.

Dans l'esprit, la méthode s'étend sans problèmes au cas multivarié, mais des complications techniques apparaissent alors : en effet, l'estimation des composantes non-stationnaires nécessite l'identification précise des tendances communes associées aux différentes fréquences pertinentes pour l'étude des séries brutes. Cette identification s'effectue à l'aide de techniques spécifiques de cointégration (cointégration stationnaire et multicointégration) et pourra être envisagé lors de recherches ultérieures.

Ce papier expose le matériau technique de la méthode. Le plan est le suivant : le modèle et les notations sont introduits section 2, la décomposition théorique de la série suivant ses composantes est présentée section 3, et ses premières propriétés section 4. L'estimation effective de ces composantes est décrite section 5, et la cinématique d'ensemble de la procédure est présentée section 6, en distinguant les approches paramétriques et non-paramétriques.

Un autre papier (Lacroix (2008)) est dévolu aux propriétés de la décomposition présentée, ainsi qu'aux applications empiriques.

2 Cadre d'analyse

2.1 Hypothèses

On suppose que le processus aléatoire $y_t \in \mathbb{R}$ admet la représentation suivante :

$$\varphi(\mathbf{B})(y_t - \xi_t) = d_t + u_t \text{ pour } t \geq 1 \tag{1}$$

avec (u_t) vérifiant :

$$\begin{array}{c} \forall t \geq 1,\ u_t = u_t^* \\ \forall t < 1,\ u_t = 0 \end{array} \tag{2}$$

$(u_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus stationnaire, d'espérance nulle, strictement non-déterministe, admettant la représentation de Wold[1] :

$$u_t^* = \Psi(\mathbf{B})\,\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \tag{3}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. Le fait que $\Psi(\mathbf{B})$ soit le développement de Wold entraîne la propriété bien connue:

$$\Psi(z) \neq 0 \text{ si } |z| < 1 \tag{4}$$

On suppose également :

$$\mathbf{H}_q : \sum_{k=0}^{\infty} k^q |a_k| < \infty \text{ pour } q \geq 2$$

Notons f_u la densité spectrale de (u_t^*). Il résulte de $\mathbf{H}_q$ que f_u est de classe C^q. Nous supposerons en outre:

$$\mathbf{H}_f : \inf f_u > 0$$

$\mathbf{H}_f$ et $\mathbf{H}_q$ impliquent l'existence de la représentation AR(∞):

$$\varepsilon_t = \Psi^{-1}(\mathbf{B})\, u_t^* = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u_{t-k}^* \tag{5}$$

et $\mathbf{H}_q$ est vérifiée pour cette représentation, c'est à dire (Brillinger (1981)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^q |b_k| < \infty \tag{6}$$

[1] La représentation de Wold générale s'écrit $u_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} + S_t$, avec S_t processus (stochastique) déterministe. Si les a_j ne sont pas tous nuls, (u_t) est purement non-déterministe. Si en outre $S_t \equiv 0$, alors (u_t) est strictement non-déterministe.

On note $\|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$ et $\mathrm{sp}\{u_1, \ldots u_t\}$ l'espace engendré par les variables $(u_j)_{1\leq j\leq t}$.

Ces hypothèses font de $(u_t)_{t\geq 1}$ la trace sur $\mathbb{N}$ d'un processus stationnaire:

$$\|u_t\|_2 = C^{ste} \text{ pour } t \geq 1$$

Ensuite,

$$\varphi(\mathbf{B}) = \prod_{\omega_j \in \Theta_1} \left[\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\right]^{d_{\omega_j}}$$

et d_t décrit une superposition de signaux périodiques déterministes d'usage classique en modélisation (Miron (1996)):

$$d_t = \sum_{\omega_j \in \Theta_2} \left[a_{1j} \cos(\omega_j t) + a_{2j} \sin(\omega_j t)\right]$$

avec $\Theta_1, \Theta_2 \subset \Theta$ et $\Theta = \{\omega_j\}_{1\leq j\leq J} \subset [0, \pi]$ ensemble fini de fréquences. De plus, on suppose $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset$. Comme on le verra plus loin, ceci permet d'exclure la présence <u>simultanée</u> de racine unitaire et de tendance déterministe à une fréquence donnée ; (a_{1j}) et (a_{2j}) sont des paramètres fixés. Par convention, $a_{2j} = 0$ si $\omega_j = 0$ ou π. On peut avoir $\Theta_2 = \varnothing$, auquel cas $d_t \equiv 0$.

Typiquement, pour des données mensuelles, Θ comprend la fréquence tendancielle et les six fréquences saisonnières :

$$\Theta = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\} \tag{7}$$

tandis que pour des données trimestrielles, seules deux fréquences saisonnières sont observables :

$$\Theta = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\} \tag{8}$$

$\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})$ est l'opérateur de différentiation saisonnière :

$$\begin{aligned}\Delta_\omega(\mathbf{B}) &= 1 - 2\cos\omega\mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \text{ si } \omega \in]0, \pi[\\ &= 1 - \cos\omega\mathbf{B} \text{ si } \omega = 0 \text{ ou } \pi\end{aligned}$$

On note que pour tout $\omega \in]0, \pi[$:

$$\Delta_\omega(\mathbf{B}) = \left(1 - e^{i\omega}\mathbf{B}\right)\left(1 - e^{-i\omega}\mathbf{B}\right)$$

On suppose également:

$$\mathbf{H}_\omega : \Psi\left(e^{i\omega_j}\right) \neq 0 \text{ pour } \omega_j \in \Theta_1 \tag{9}$$

Les paramètres d_{ω_j} décrivent les degrés d'intégration de (y_t) aux fréquences ω_j. Nous considérerons dans ce travail deux cas particuliers :

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}_d^1 : d_{\omega_j} = 1 \text{ pour tout } \omega_j \in \Theta_1\\ &\mathbf{H}_d^2 : 0 \in \Theta_1, d_0 = 2,\ d_{\omega_j} = 1 \text{ pour tout } \omega_j \in \Theta_1 \backslash\{0\}\end{aligned}$$

ξ_t dédigne un terme déterministe prenant en compte des effets déterministes identifiées dans la série y_t : effets calendaires, point aberrant, rupture de tendance, etc. Ces effets sont supposés être estimés préalablement aux estimations menées ici[2], aussi supposerons nous pour l'instant que $\xi_t = 0$.

Notons d le degré du polynôme $\varphi(\mathbf{B})$; si $\Theta_1^* = \Theta_1 \backslash \{0\}$, on note que:

$$d = 2 \times \text{card}(\Theta_1^*) + d_0 \times \text{card}(\Theta_1 \cap \{0\})$$

Le modèle (7) permet de définir y_t pour tout $t \geq 1$ en fonction de d_t et des $(u_k)_{1 \leq k \leq t}$ dès que l'on dispose du vecteur des d valeurs initiales $\mathbf{Y}_0 = (y_0, y_{-1}, \ldots, y_{-d+1})'$. On suppose ces valeurs initiales fixées (non aléatoires) : on verra qu'elles jouent un rôle important dans la détermination du profil (saisonnier) de (y_t) .

$\mathbf{H}_d^1$ implique que (y_t) est non-stationnaire, et intégré d'ordre 1 à toutes les fréquences. On notera en particulier que $\mathbf{H}_\omega$ assure que $\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})$ ne peut être factorisé dans $\Psi(\mathbf{B})$, et donc que ω_j est bien un pôle du (pseudo)-spectre de y_t.

$\mathbf{H}_d^2$ suppose explicitement que $0 \in \Theta_1$, et que (y_t) est I(2) à cette fréquence. Ces deux hypothèses couvrent l'ensemble des modèles classiques de non-stationnarité de type SARIMA utilisés dans les travaux empiriques utilisant des données macroéconomiques.

Exemple 1 *On vérifie facilement que, dans le cas de données mensuelles, le modèle ci-dessous admet une "forme réduite" de la forme (7):*

$$y_t = \sum_{j=1}^{12} l_{j,t} D_{j,t} + v_t$$

(v_t) *est un processus stationnaire d'espérance nulle, et les variables "dummies" saisonnières sont définies classiquement selon* $D_{j,t} = 1$ *si* t *est un mois de type "j",* 0 *sinon. Enfin:*

$$l_{j,t} = l_{j,t-1} + \varepsilon_{j,t} \text{ pour } t \geq 1, \text{ et } l_{j,0} = C^{ste}$$

Les $(\varepsilon_{j,t})$ *sont des bruits blancs indépendants entre eux, de variance respective* σ_j^2. *Lorsque* $\sigma_j^2 = 0$, *le coefficient du mois* j *est constant, sinon, il évolue comme une marche aléatoire au cours du temps (saisonnalité évolutive). Le cas* $\sigma_j^2 = 0\ \forall j$ *décrit un phénomène saisonnier rigoureusement déterministe, faiblement bruité par le résidu* (v_t) .

Pour simplifier l'écriture des développements qui suivent, on pose :

$$d_{j,t}[\underline{a}] = a_{1j} \cos(\omega_j t) + a_{2j} \sin(\omega_j t)$$

Lorsque les coefficients a_{1j} et a_{2j} sont remplacés par des variables aléatoires, soit $A_{1,}$ et $A_{2,j}$ dépendant seulement des conditions initiales $\mathbf{Y}_0$ de y_t, on notera le terme obtenu $d_{j,t}[\underline{\mathbf{A}}]$. Lorsque ces coefficients

[2] L'identification conjointe de ruptures et de racines unitaires n'est pas envisagée dans ce travail. On suppose seulement qu'une première estimation de ξ_t est disponible. Il est toujours possible de revenir ensuite sur cette estimation préliminaire, une fois que la structure du modèle (racines unitaires et "dummies" saisonnières) a été élucidée.

dépendent des valeurs initiales de l'innovation (ε_t), c'est à dire de termes ε_k pour $k \leq 0$, on écrira $d_{j,t}\left[\underline{\mathbf{E}}\right]$. Les lettres minuscules dans l'argument de $d_{j,t}$ identifient donc un terme rigoureusement déterministe.

Il est parfois avantageux d'écrire $d_{j,t}\left[\underline{a}\right]$ sous forme complexe:

$$d_{j,t}\left[\underline{c}\right] = c_{1j}e^{i\omega_j t} + c_{2j}e^{-i\omega_j t},\ c_{2,j} = \overline{c_{1,j}} \tag{10}$$

On introduit de même les trends déterministes saisonniers :

$$Td_{j,t}\left[\underline{c}\right] = c_{1j}te^{i\omega_j t} + c_{2j}te^{-i\omega_j t},\ c_{2,j} = \overline{c_{1,j}} \tag{11}$$

Pour désigner un terme de la forme d_t dans (7), c'est à dire une combinaison linéaire de de variables $d_{j,t}$ on adopte la notation symbolique:

$$\sum_{k=1}^{r} d_{j_k,t}\left[\underline{a}\right] = \left[d_{j_1}|d_{j_2}|\ldots|d_{j_r}\right]\left[\underline{\mathbf{a}}\right] \tag{12}$$

De même :

$$\sum_{k=1}^{r} Td_{j_k,t}\left[\underline{a}\right] = \left[Td_{j_1}|Td_{j_2}|\ldots|Td_{j_r}\right]\left[\underline{\mathbf{a}}\right] \tag{13}$$

Enfin, il est commode d'écrire le modèle (1) pour tout $t \in \mathbb{Z}$: il suffit de poser:

$$\begin{cases} \forall t \leq -d : y_t = d_t = 0 \\ \forall t \leq 0 : \xi_t = 0 \\ \text{Pour } t = -d+1, \ldots, 0 : d_t = \varphi\left(\mathbf{B}\right) y_t \end{cases}$$

Dans la suite, ce prolongement sera utilisé. Rappelons que l'on suppose également $\xi_t = 0$ pour tout t.

2.2 Opérateur d'intégration

Pour obtenir une représentation explicite de (y_t), nous devons introduire l'opérateur "inverse" de la différentiation, l'opérateur d'intégration selon la terminologie de Gregoir (1994). Appliqué à $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, cet opérateur définit la série de terme d'indice $t \in \mathbb{Z}$ donnée par :

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{S}_\omega\left\{y\right\}\right]_t &= \textstyle\sum_{k=1}^{t} y_k \frac{\sin\omega[t+1-k]}{\sin\omega} \text{ si } \omega \in \left]0,\pi\right[\text{ et } t \geq 1 \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{t} y_k e^{-i\omega[t-k]} \text{ si } \omega \in \{0,\pi\} \text{ et } t \geq 1 \\ &= -\textstyle\sum_{k=t+1}^{0} y_k \frac{\sin\omega[t+2-k]}{\sin\omega} \text{ si } \omega \in \left]0,\pi\right[\text{ et } t \leq -1 \\ &= -\textstyle\sum_{k=t+1}^{0} y_k e^{-i\omega[t+1-k]} \text{ si } \omega \in \{0,\pi\} \text{ et } t \leq -1 \\ &= 0 \text{ si } t = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Cet opérateur est seulement un inverse à gauche de $\Delta_\omega\left(\mathbf{B}\right)$ puisque :

$$\begin{aligned} &\Delta_\omega\left(\mathbf{B}\right)\mathbf{S}_\omega = \mathbf{Id} \\ &\left[\mathbf{S}_\omega\left\{\Delta_\omega\left(\mathbf{B}\right)y\right\}\right]_t = y_t - y_0\tfrac{\sin\omega[t+1]}{\sin\omega} + y_{-1}\tfrac{\sin\omega t}{\sin\omega} \text{si } \omega \in \left]0,\pi\right[\\ &\left[\mathbf{S}_\omega\left\{\Delta_\omega\left(\mathbf{B}\right)y\right\}\right]_t = y_t - y_0 e^{-i\omega t} \text{ si } \omega \in \{0,\pi\} \end{aligned} \tag{15}$$

Pour les séries définies de façon unilatérale, on a cependant la propriété suivante:

Lemme 2 *Pour les séries $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant $y_t = 0$ pour $t \leq 0$, et pour tout polynôme $\Delta\left(\mathbf{B}\right) = \sum_{k=0}^{q} a_k\mathbf{B}^k$:*

a) $\Delta\left(\mathbf{B}\right)\mathbf{S}_\omega\left\{y\right\} = \mathbf{S}_\omega\left\{\Delta\left(\mathbf{B}\right)y\right\}$

b) $\mathbf{S}_\omega\left\{\Delta_\omega\left(\mathbf{B}\right)y\right\} = y.$

Preuve : Il suffit de considérer le cas $\Delta(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$.

Pour $t \geq 2$:

Si $\omega \in]0, \pi[$:

$$[\mathbf{S}_\omega \{\mathbf{B}y\}]_t = \sum_{k=1}^{t} y_{k-1} \frac{\sin\omega\,[t+1-k]}{\sin\omega} = \sum_{l=0}^{t-1} y_l \frac{\sin\omega\,[t-l]}{\sin\omega} = \mathbf{B}\,[\mathbf{S}_\omega \{y\}]_t + y_0 \frac{\sin\omega t}{\sin\omega} = \mathbf{B}\,[\mathbf{S}_\omega \{y\}]_t$$

Si $\omega = 0$ ou π :

$$[\mathbf{S}_\omega \{\mathbf{B}y\}]_t = \sum_{k=1}^{t} y_{k-1} e^{-i\omega[t-k]} = \sum_{l=0}^{t-1} y_l e^{-i\omega[t-l-1]} = \mathbf{B}\,[\mathbf{S}_\omega \{y\}]_t + y_0 e^{-i\omega[t-1]} = \mathbf{B}\,[\mathbf{S}_\omega \{y\}]_t$$

Si $t = 1$: $[\mathbf{S}_\omega \{\mathbf{B}y\}]_1 = 0 = \mathbf{B}\,[\mathbf{S}_\omega \{y\}]_1 = \mathbf{B}y_1 = y_0$ d'où le résultat a); b) est évident.

■

Avec la notation (10), on peut écrire :

$$\mathbf{S}_{\omega_j} \Delta_{\omega_j} = \mathbf{Id} - d_{j,.}\,\underline{[C]} \text{ pour tout } \omega_j \in \Theta \tag{16}$$

On définit ainsi une famille d'opérateurs $\{\mathbf{S}_\omega\}_{0 \leq \omega \leq \pi}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

Lemme 3 $\forall (\omega_1, \omega_2) \in [0, \pi]^2$ *et pour tout polynôme* $\Delta(\mathbf{B}) = \sum_{k=0}^{q} a_k \mathbf{B}^k$:

a) $(\mathbf{S}_{\omega_1} \mathbf{S}_{\omega_2}) \mathbf{S}_{\omega_3} = \mathbf{S}_{\omega_1} (\mathbf{S}_{\omega_2} \mathbf{S}_{\omega_3})$

b) $\mathbf{S}_{\omega_1} \mathbf{S}_{\omega_2} = \mathbf{S}_{\omega_2} \mathbf{S}_{\omega_1}$

c) $(\Delta(\mathbf{B}) \mathbf{S}_{\omega_1}) \mathbf{S}_{\omega_2} = \Delta(\mathbf{B}) (\mathbf{S}_{\omega_1} \mathbf{S}_{\omega_2})$

Preuve : pour a) et b), voir Gregoir (1994). Pour c), il suffit là encore de considérer $\Delta(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$. Le résultat s'obtient directement à partir de la définition de $\mathbf{S}_\omega$, les détails sont omis.

■

Plus généralement, décrivons en extension les ensembles disjoints Θ_1 et Θ_2:

$$\Theta_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}, \ \Theta_2 = \{\omega_{r+1}, \ldots, \omega_L\}.$$

Considérons la décomposition en éléments simples de $\varphi^{-1}(z)$:

$$\begin{aligned} &\text{Sous } \mathbf{H}_d^1 : \varphi^{-1}(z) = \textstyle\sum_{j=1}^{r} \frac{a_j(z)}{\Delta_{\omega_j}(z)} \\ &\text{Sous } \mathbf{H}_d^2 : \varphi^{-1}(z) = \frac{\mu_1}{(1-z)^2} + \textstyle\sum_{j=1}^{r} \frac{\widetilde{a}_j(z)}{\Delta_{\omega_j}(z)} \end{aligned} \tag{17}$$

$\deg a_j = \deg \widetilde{a}_j \leq 1$ si $\omega_j \notin \{0, \pi\}$, $\deg a_j = \deg \widetilde{a}_j = 0$ sinon.

Cette décomposition peut se transcrire en termes d'opérateurs:

Lemme 4

$$\textit{Sous } \mathbf{H}_d^1 : \textstyle\prod_{j=1}^{r} \mathbf{S}_{\omega_j} = \sum_{j=1}^{r} a_j(\mathbf{B})\, \mathbf{S}_{\omega_j}$$

$$\textit{Sous } \mathbf{H}_d^2 : \mathbf{S}_0^2 \textstyle\prod_{j=2}^{r} \mathbf{S}_{\omega_j} = \mu_1 \mathbf{S}_0^2 + \sum_{j=1}^{r} \widetilde{a}_j(\mathbf{B})\, \mathbf{S}_{\omega_j}$$

Preuve : Plaçons nous sous $\mathbf{H}_d^1$, et introduisons pour $j=1,\ldots,r$ le polynôme:

$$\varphi_j(z)=\prod_{m\neq j,m=1}^{r}\Delta_{\omega_m}(z) \tag{18}$$

(17) se réécrit :

$$1=\sum_{j=1}^{r}a_j(z)\,\varphi_j(z) \tag{19}$$

Il en résulte, en terme d'opérateurs:

$$\mathbf{Id}=\sum_{j=1}^{r}a_j(\mathbf{B})\,\varphi_j(\mathbf{B})$$

On multiplie à droite cette égalité par $\prod_{j=1}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}$:

$$\prod_{j=1}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}=\sum_{j=1}^{r}a_j(\mathbf{B})\,\varphi_j(\mathbf{B})\left\{\prod_{j=1}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}\right\}$$

En utilisant le lemme 3, et la propriété $\Delta_\omega(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_\omega=\mathbf{Id}$, il vient:

$$\begin{aligned}\varphi_j(\mathbf{B})\left\{\textstyle\prod_{j=1}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}\right\}&=\Delta_{\omega_1}(\mathbf{B})\cdots\Delta_{\omega_{j-1}}(\mathbf{B})\,\Delta_{\omega_{j+1}}(\mathbf{B})\cdots\Delta_{\omega_r}(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{\omega_r}\mathbf{S}_{\omega_{r-1}}\cdots\mathbf{S}_{\omega_1}\\&=\Delta_{\omega_1}(\mathbf{B})\cdots\Delta_{\omega_{j-1}}(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{\omega_j}\mathbf{S}_{\omega_{j-1}}\cdots\mathbf{S}_{\omega_1}\\&=\Delta_{\omega_1}(\mathbf{B})\cdots\Delta_{\omega_{j-1}}(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{\omega_{j-1}}\cdots\mathbf{S}_{\omega_1}\mathbf{S}_{\omega_j}\\&=\mathbf{Id}\circ\mathbf{S}_{\omega_j}=\mathbf{S}_{\omega_j}\end{aligned}$$

Le résultat annoncé en découle. On remarque en outre que, pour $z=e^{\pm i\omega_j}$:

$$a_j\left(e^{\pm i\omega_j}\right)=\varphi_j\left(e^{\pm i\omega_j}\right)^{-1} \tag{20}$$

Ces deux relations (une seule si $\omega=0,\pi$) déterminent les coefficients de a_j : il suffit de dériver l'égalité:

$$\varphi_j(z)\,\Delta_{\omega_j}(z)=\varphi(z)$$

On obtient:

$$\varphi_j\left(e^{\pm i\omega_j}\right)=\frac{\varphi'\left(e^{\pm i\omega_j}\right)}{\Delta'_{\omega_j}\left(e^{\pm i\omega_j}\right)} \tag{21}$$

avec

$$\Delta'_{\omega_j}\left(e^{\pm i\omega_j}\right)=2i\sin(\pm\omega_j)\ \text{ si } \omega_j\notin\{0,\pi\}\,,\ -\cos(\omega_j)\ \text{ sinon}$$

Dans le cas particulier $\Theta=\Theta_1$ donné par (7), $\varphi(z)=1-z^{12}$, et l'on obtient après calculs:

$$\begin{aligned}a_j(\mathbf{B})&=\tfrac{1}{6}-\tfrac{\cos\omega_j}{6}\mathbf{B}\text{ si }\omega_j\notin\{0,\pi\}\\&=\tfrac{1}{12}\text{ si }\omega_j\in\{0,\pi\}\end{aligned} \tag{22}$$

En général, on aura:

$$a_j(\mathbf{B})=-\frac{\operatorname{Im}\left[\varphi_j^{-1}\left(e^{i\omega_j}\right)e^{-i\omega_j}\right]}{\sin\omega_j}+\frac{\operatorname{Im}\left[\varphi_j^{-1}\left(e^{i\omega_j}\right)\right]}{\sin\omega_j}\mathbf{B} \tag{23}$$

Dans certains cas, ce monôme devient trivial : en effet, partant de l'expression littérale de $\varphi_j\left(e^{i\omega}\right)$:

$$\varphi_j\left(e^{i\omega}\right)=\prod_{\substack{m\neq j,m=1\\ \omega_m\notin\{0,\pi\}}}^{r}\left(1-e^{i(\omega+\omega_m)}\right)\left(1-e^{i(\omega-\omega_m)}\right)\prod_{\substack{m\neq j,m=1\\ \omega_m\in\{0,\pi\}}}^{r}\left(1-e^{i(\omega-\omega_m)}\right)$$

$$=\prod_{\substack{m\neq j,m=1\\ \omega_m\notin\{0,\pi\}}}^{r}\left(-4e^{i\omega}\right)\sin\left(\tfrac{\omega+\omega_m}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\omega-\omega_m}{2}\right)\prod_{\substack{m\neq j,m=1\\ \omega_m\in\{0,\pi\}}}^{r}\left(-2i\sin\left(\tfrac{\omega-\omega_m}{2}\right)e^{i\left(\frac{\omega-\omega_m}{2}\right)}\right)$$

On obtient les résultats suivants, qui précisent notamment dans quel cas le degré de $a_j(\mathbf{B})$ est nul:

- **Si $\{0,\pi\}\subsetneq\Theta_1$, alors pour** $\omega_j\in\Theta_1\backslash\{0,\pi\}$:

$$\begin{array}{l} a_j(\mathbf{B})=C^{ste}\iff(r-2)\,\omega_j=\pm\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\\ a_j(0)=0\iff(r-1)\,\omega_j=\pm\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{array}$$

- **Si $\{0,\pi\}\cap\Theta_1=\emptyset$, alors pour** $\omega_j\in\Theta_1$:

$$\begin{array}{l} a_j(\mathbf{B})=C^{ste}\iff(r-1)\,\omega_j=0\quad[\pi]\\ a_j(0)=0\iff r\omega_j=0\quad[\pi]\end{array}$$

Remarque 5 *Dans tous les cas, l'éventuelle racine de l'équation $a_j(z)=0$ n'est pas de module égal à un. En revanche, lorsqu'elle est non-nulle, elle peut être aussi bien de module inférieur que supérieur à un, ce qui signifie que $a_j(\mathbf{B})$ n'est pas en représentation causale, au sens de la modélisation ARMA. Il suffit de considérer l'exemple:*

$$\varphi(z)=\left(1-z^2\right)\left(1-\sqrt{3}z+z^2\right)$$

pour lequel $\Theta_1=\left\{0,\frac{\pi}{6},\pi\right\}$ et:

$$a_2(\mathbf{B})=-1+\sqrt{3}\mathbf{B}$$

Les calculs sous $\mathbf{H}_d^2$ sont similaires avec cette fois:

$$\begin{cases}\widetilde{\varphi}_j(z)=\Delta_0^2(z)\prod_{m\neq j,m=1}^{r}\Delta_{\omega_m}(z)\ \text{ si } j>1\\ \widetilde{\varphi}_1(z)=\prod_{m=1}^{r}\Delta_{\omega_m}(z)\\ \widetilde{\varphi}_0(z)=\prod_{m=2}^{r}\Delta_{\omega_m}(z)\end{cases}$$

On obtient:

$$1=\mu_1\varphi_0(z)+\sum_{j=1}^{r}\widetilde{a}_j(z)\,\varphi_j(z)\tag{24}$$

$$\mathbf{S}_0^2\prod_{j=2}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}=\sum_{j=1}^{r}\widetilde{a}_j(\mathbf{B})\,\widetilde{\varphi}_j(\mathbf{B})\left\{\mathbf{S}_0^2\prod_{j=2}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}\right\}+\mu_1\widetilde{\varphi}_0(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_0^2\prod_{j=2}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}$$

Comme $\Delta_0^2(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_0^2=\mathbf{Id}$, et :

$$\widetilde{\varphi}_1(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_0\prod_{j=2}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}=\widetilde{\varphi}_0(\mathbf{B})\prod_{j=2}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}=\mathbf{Id}$$

On obtient finalement:

$$\mathbf{S}_0^2\prod_{j=2}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}=\sum_{j=1}^{r}\widetilde{a}_j(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{\omega_j}+\mu_1\mathbf{S}_0^2$$

Ensuite, (24) donne:

- Pour $z = e^{\pm i\omega_j}$:

$$a_j\left(e^{\pm i\omega_j}\right) = \widetilde{\varphi}_j\left(e^{\pm i\omega_j}\right)^{-1} \text{ si } j > 1 \tag{25}$$

$$\mu_1 = \widetilde{\varphi}_0(1)^{-1} \tag{26}$$

- Pour $z = 0$:

$$1 = \mu_1 + \sum_{j=1}^{r} \widetilde{a}_j(0) \tag{27}$$

(25) permet de déterminer les coefficients des polynômes $\widetilde{a}_j(\mathbf{B})$ pour $j > 1$; (26) et (27) déterminent les deux coefficients μ_1 et $\widetilde{a}_1(\mathbf{B}) \equiv \widetilde{a}_1$.

■

Remarque 6 *Le lemme permet de retrouver les résultats de Gregoir (1994): pour* $(\omega_1, \omega_2) \in]0,\pi[^2$ *:*

$$\begin{array}{l} \mathbf{S}_{\omega_1}\mathbf{S}_{\omega_2} = \frac{2\cos\omega_1 - \mathbf{B}}{2[\cos\omega_1 - \cos\omega_2]}\mathbf{S}_{\omega_1} + \frac{2\cos\omega_2 - \mathbf{B}}{2[\cos\omega_2 - \cos\omega_1]}\mathbf{S}_{\omega_2} \ \textit{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \mathbf{S}_0\mathbf{S}_{\omega_2} = \frac{1}{2[1-\cos\omega_2]}\mathbf{S}_0 + \frac{1-2\cos\omega_2+\mathbf{B}}{2[1-\cos\omega_2]}\mathbf{S}_{\omega_2} \ \textit{si } \omega_2 \neq 0 \\ \mathbf{S}_\pi\mathbf{S}_{\omega_2} = \frac{1}{2[1+\cos\omega_2]}\mathbf{S}_\pi + \frac{1+2\cos\omega_2-\mathbf{B}}{2[1+\cos\omega_2]}\mathbf{S}_{\omega_2} \ \textit{si } \omega_2 \neq \pi \\ \mathbf{S}_0\mathbf{S}_\pi = \frac{1}{2}\mathbf{S}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{S}_\pi \end{array} \tag{28}$$

Nous considérons maintenant l'application des opérateurs S_ω et Δ_ω aux termes $d_{j,t}$.

Lemme 7 *a)* $\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\, d_{j,t} = 0$

b) Si $j \neq k : \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\, d_{k,t}[\underline{a}] = d_{k,t}[\underline{\widetilde{a}}]$

c) Si $j \neq k : \mathbf{S}_{\omega_j}(d_k) = [d_j | d_k]$

d) $\mathbf{S}_{\omega_j}(d_j) = T d_{j,t}[\underline{\widetilde{a}}_1] + d_{j,t}[\underline{\widetilde{a}}_2]$

Preuve : pour a) et b) :

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\, d_{k,t}[\underline{a}] &= \left(1 - e^{i\omega_j}\mathbf{B}\right)\left(1 - e^{-i\omega_j}\mathbf{B}\right)\left(a_{1k}e^{i\omega_k t} + a_{2k}e^{-i\omega_k t}\right) \\ &= \left(1 - e^{i\omega_j}\mathbf{B}\right)\left\{\left(a_{1k} - a_{1k}e^{-i[\omega_j+\omega_k]}\right)e^{i\omega_k t}\right. \\ &\quad \left. + \left(a_{2k} - a_{2k}e^{-i[\omega_j-\omega_k]}\right)e^{-i\omega_k t}\right\} \\ &= \widetilde{a}_{1k}e^{i\omega_k t} + \widetilde{a}_{2k}e^{-i\omega_k t} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{array}{l} \widetilde{a}_{1k} = a_{1k}\left(1 - e^{-i[\omega_j+\omega_k]}\right)\left(1 - e^{i[\omega_j-\omega_k]}\right) \\ \widetilde{a}_{2k} = a_{2k}\left(1 - e^{-i[\omega_j-\omega_k]}\right)\left(1 - e^{i[\omega_j+\omega_k]}\right) \end{array} \tag{29}$$

Pour les point c) et d), introduisons pour tout ω l'opérateur $\mathbf{U}_\omega$ défini par:

$$[\mathbf{U}_\omega(y)] = \sum_{k=1}^{t} y_k e^{-i\omega[t-k]} \tag{30}$$

Pour $\omega = 0, \pi$, $\mathbf{S}_\omega = U_\omega$, et on vérifie facilement que pour $\omega \in]0,\pi[$:

$$\mathbf{S}_\omega = \mathbf{U}_\omega\mathbf{U}_{-\omega} = \frac{1}{1-e^{2i\omega}}\mathbf{U}_\omega + \frac{1}{1-e^{-2i\omega}}\mathbf{U}_{-\omega} \tag{31}$$

- Si $\omega_j \in]0,\pi[$ et $j \neq k$, par hypothèse, $\omega_k \pm \omega_j \neq 0$ $[2\pi]$:

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{U}_{\omega_j}(d_k)\right]_t &= a_{1k}e^{-i\omega_j t}\sum_{l=1}^{t} e^{i(\omega_j-\omega_k)l} + a_{2k}e^{-i\omega_j t}\sum_{l=1}^{t} e^{i(\omega_j+\omega_k)l} \\ &= [d_j|d_k]\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{U}_{-\omega_j}(d_k)\right]_t &= a_{1k}e^{i\omega_j t}\sum_{l=1}^{t} e^{-i(\omega_j+\omega_k)l} + a_{2k}e^{i\omega_j t}\sum_{l=1}^{t} e^{i(\omega_k-\omega_j)l} \\ &= [d_j|d_k]\end{aligned}$$

et (31) donne le résultat.

- Si $\omega_j \in]0,\pi[$ et $j = k$: $2\omega_j \neq 0$ $[2\pi]$, et :

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{U}_{\omega_j}(d_j)\right]_t &= a_{1j}te^{-i\omega_j t} + a_{2j}e^{-i\omega_j t}\sum_{l=1}^{t} e^{i2\omega_j l} \\ \left[\mathbf{U}_{-\omega_j}(d_j)\right]_t &= a_{1j}te^{i\omega_j t} + a_{2j}e^{i\omega_j t}\sum_{l=1}^{t} e^{-i\omega_j l}\end{aligned}$$

le résultat annoncé en découle.

Le cas $\omega_j \in \{0,\pi\}$ se traite de façon similaire.

■

3 Représentation de Beveridge-Nelson généralisée

On étend dans cette section les résultats obtenus dans un cas particulier par Newbold et Vougas (1996), ainsi que Breitung et Franses (1998).

3.1 Modèle $\mathbf{H}_d^1$

En réécrivant (1) sous la forme:

$$\prod_{j=1}^{r}\left[\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\right] y_t = [d_{r+1}|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}] + u_t \tag{32}$$

et en appliquant l'opérateur $\mathbf{S}_{\omega_1}$, on obtient successivement :

$$\mathbf{S}_{\omega_1}\left\{\Delta_{\omega_1}(\mathbf{B})\prod_{j=2}^{r}\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\,y\right\} = \mathbf{S}_{\omega_1}\left(\sum_{k=r+1}^{L} d_{k,t}\,[\underline{a}]\right) + \mathbf{S}_{\omega_1}(u)$$

D'après le lemme 7 et (16), ceci se réécrit :

$$\left(\prod_{j=2}^{r}\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\right) y = d_1\,[\underline{C}] + [d_1|d_{r+1}|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}] + \mathbf{S}_{\omega_1}(u) \tag{33}$$

En appliquant l'opérateur $\mathbf{S}_{\omega_2}$ à (33), on obtient pareillement:

$$\left(\prod_{j=3}^{r}\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\right) y = [d_1|d_2]\,[\underline{\mathbf{A}}] + [d_1|d_2|d_{r+1}|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}] + \mathbf{S}_{\omega_1}\mathbf{S}_{\omega_2}(u) \tag{34}$$

d'où, par itération:

$$y = [d_1|d_2|\ldots|d_r]\,[\underline{\mathbf{A}}] + [d_1|d_2|\ldots|d_r|d_{r+1}|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}] + \left(\prod_{j=1}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}\right)(u) \tag{35}$$

L'expression (35) montre que pour $t \geq 1$, y_t s'écrit comme la superposition de deux termes :

- Une combinaison de signaux périodiques déterministes, dont certains ont une amplitude fixée par les conditions initiales $\mathbf{Y}_0$, tandis que d'autres dépendent de paramètres inconnus.
- Un terme purement aléatoire, non-stationnaire, défini pour $t \geq 1$ par :

$$Z_t = \left[\left(\prod_{j=1}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}\right)\{u\}\right]_t \tag{36}$$

Clairement, $\mathbb{E}(Z_t) = 0$, et (Z_t) peut être explicité par la relations de récurrence et les conditions initiales:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{B})\,Z_t = u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_t = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \tag{37}$$

La dynamique de (Z_t) fait intervenir conjointement l'ensemble des racines unitaires de (y_t). On isole maitenant chacune de ces racines, en utilisant le lemme 4:

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \left(\prod_{j=1}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}\right)(u)_t = \left(\sum_{j=1}^{r} a_j(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{\omega_j}\right)(u)_t \tag{38}$$

On utilise le lemme 2 b) pour écrire:

$$\left(a_j(\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{\omega_j}\right)(u) = \mathbf{S}_{\omega_j}\{a_j(\mathbf{B})\,u\}$$

Il en résulte finalement:

$$y = [d_1|d_2|\ldots|d_r]\,[\underline{\mathbf{A}}] + [d_1|d_2|\ldots|d_r|d_{r+1}|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}] + \sum_{j=1}^{r} Z_{j,t} \tag{39}$$

avec $Z_{j,t}$ défini par :

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\,Z_{j,t} = a_j(\mathbf{B})\,u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{j,t} = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \tag{40}$$

On note que l'on a donc pour $t \geq 1$:

$$Z_{j,t} \in \operatorname{sp}\{u_1, \ldots u_t\}$$

Mais pour $k \geq 1$, $u_k \in \operatorname{sp}\{Z_1, \ldots Z_k\}$. Il en résulte:

$$\forall t \geq 1, \; Z_{j,t} \in \operatorname{sp}\{Z_1, \ldots Z_t\} \tag{41}$$

3.2 Modèle $\mathbf{H}_d^2$

Il suffit d'intégrer une nouvelle fois (35), avec $(1-\mathbf{B})\,y$ à la place de y :

$$\begin{aligned} y &= Td_1\left[\underline{\mathbf{A}}\right] + Td_1\left[\underline{\mathbf{a}}\right] + \left[d_1|d_2|\ldots|d_r\right]\left[\underline{\mathbf{A}}\right] + \left[d_1|d_2|\ldots|d_L\right]\left[\underline{\mathbf{a}}\right] \\ &+ \left(\mathbf{S}_0^2 \textstyle\prod_{j=2}^{r} \mathbf{S}_{\omega_j}\right)(u) \end{aligned} \tag{42}$$

Par rapport à (35), (42) comporte une tendance déterministe, et le processus Z_t est défini par :

$$Z_t = \left[\left(\mathbf{S}_0^2 \prod_{j=2}^{r} \mathbf{S}_{\omega_j}\right)\{u\}\right]_t \tag{43}$$

(37) demeure valide pour construire (Z_t). On poursuit ensuite la décomposition comme précédemment, avec le lemme 4:

$$Z_t = \mu_1\left[\mathbf{S}_0^2\{u\}\right]_t + \sum_{j=1}^{r} \widetilde{a}_j(\mathbf{B})\left[\mathbf{S}_{\omega_j}\{u\}\right]_t$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} y &= Td_1\left[\underline{\mathbf{A}}\right] + Td_1\left[\underline{a}\right] \\ &+ \left[d_1|d_2|\ldots|d_r\right]\left[\underline{\mathbf{A}}\right] + \left[d_1|d_2|\ldots|d_L\right]\left[\underline{\mathbf{a}}\right] \\ &+ Z_{1,t}^1 + Z_{1,t}^2 + \textstyle\sum_{j=2}^{r} Z_{j,t} \end{aligned} \tag{44}$$

avec en vertu du lemme 2 b), $Z_{1,t}^1, Z_{1,t}^2$ définis selon:

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_1}^2(\mathbf{B})\, Z_{1,t}^1 = \mu_1 u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{1,t}^1 = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_1}(\mathbf{B})\, Z_{1,t}^2 = \widetilde{a}_1 u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{1,t}^2 = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \tag{46}$$

et pour $j \geq 2$, $Z_{j,t}$ donné par :

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\, Z_{j,t} = \widetilde{a}_j(\mathbf{B})\, u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{j,t} = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \tag{47}$$

Il est clair que (41) est vérifié pour $Z_{1,t}^2, Z_{1,t}^2$ et chacun des $Z_{j,t}$.

Sous chacune des hypothèses $\mathbf{H}_d$, il suffit donc de connaître $a_j(\mathbf{B})$ (ou $\widetilde{a}_j(\mathbf{B})$ et μ_1) pour déterminer $(Z_{j,t})_{t\geq 1}$ à partir de $(u_t)_{t\geq 1}$.

3.3 La composante transitoire

La décomposition (39) ou (44) peut être poursuivie de manière à faire apparaître la composante stationnaire de la série. Celle-ci recense les effets transitoires affectant la série, et dans certains cas, pourra être interprétée comme un cycle. On supposera d'abord que $\Psi(z)$ n'est pas une moyenne mobile d'ordre 1, soit l'hypothèse $\mathbf{H}_i$:

$$\mathbf{H}_i : \exists k > 1, a_k \neq 0$$

On note que $\mathbf{H}_q$ implique l'existence d'une fonction $\Psi_j(z)$ définie sur le disque unité (complexe) vérifiant, pour $\omega_j \in]0, \pi[$:

$$\Psi(z) = \Psi\left(e^{i\omega_j}\right) \frac{e^{-i\omega_j} - z}{e^{-i\omega_j} - e^{i\omega_j}} + \Psi\left(e^{-i\omega_j}\right) \frac{e^{i\omega_j} - z}{e^{i\omega_j} - e^{-i\omega_j}} + \Delta_{\omega_j}\Psi_j(z) \tag{48}$$

et

$$\Psi_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| < +\infty$$

Notez que $\Psi_j(z)$ est constant si $a_k = 0$ pour $k > 2$.

- Pour $\omega_j \in]0, \pi[$: il résulte alors de (40), (47), pour $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) Z_{j,t} = &\left(\Psi\left(e^{i\omega_j}\right) \tfrac{e^{-i\omega_j} - \mathbf{B}}{e^{-i\omega_j} - e^{i\omega_j}} + \Psi\left(e^{-i\omega_j}\right) \tfrac{e^{i\omega_j} - \mathbf{B}}{e^{i\omega_j} - e^{-i\omega_j}}\right) a_j(\mathbf{B}) \varepsilon_t \\ &+ \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) \Psi_j(\mathbf{B}) a_j(\mathbf{B}) \varepsilon_t\end{aligned} \tag{49}$$

Définissons $\widetilde{\Psi}_j(\mathbf{B}) = \Psi_j(\mathbf{B}) a_j(\mathbf{B})$, et :

$$\begin{cases} \lambda_{1,j} = \mathrm{Im}\left[\frac{\Psi\left(e^{-i\omega_j}\right) e^{i\omega_j}}{\sin \omega_j}\right] = \cot \omega_j \,\mathrm{Im}\left[\Psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right] + \mathrm{Re}\left[\Psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right] \\ \lambda_{2,j} = -\sin^{-1} \omega_j \,\mathrm{Im}\left[\Psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right] \\ \lambda_j(\mathbf{B}) = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}\mathbf{B} \end{cases} \tag{50}$$

On note que:

$$\lambda_j\left(e^{i\omega_j}\right) = \Psi\left(e^{i\omega_j}\right) \neq 0 \text{ par l'hypothèse } \mathbf{H}_f \tag{51}$$

Remarque 8 *On peut avoir $\lambda_{2,j} = 0$ ou $\lambda_{1,j} = 0$: il suffit de considérer par exemple $\omega_j = \pi/2$ et:*

$$\begin{array}{c} \Psi(z) = 1 + z^2 + \theta z^3 : \lambda_j(\mathbf{B}) = \theta B \\ \Psi(z) = 1 + \theta z^2 : \lambda_j(\mathbf{B}) = 1 - \theta \end{array}$$

Enfin, $\lambda_j(z)$ peut s'annuler sur le disque unité, comme le montre le cas particulier:

$$\Psi(z) = 1 - \frac{1}{2}(1 + \delta) z + \frac{1}{2} z^2$$

Si δ est assez petit, alors les racines (complexes conjuguées) de $\Psi(z)$ sont à l'extérieur du disque unité, conformément à la contrainte (4). Ensuite, on obtient, toujours pour $\omega_j = \pi/2$:

$$\lambda_j(z) = \frac{1}{2}\{1 - (1 + \delta) z\}$$

$\lambda_j(z)$ s'annule à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du disque unité lorsque $\delta > 0$ (resp. $\delta < 0$), et sur le cercle unité lorsque $\delta = 0$.

(49) s'écrit donc:

$$\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) Z_{j,t} = \lambda_j(\mathbf{B}) a_j(\mathbf{B}) \varepsilon_t + \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) \widetilde{\Psi}_j(\mathbf{B}) \varepsilon_t \tag{52}$$

On intègre la relation (52) en utilisant $Z_{j,0} = Z_{j,-1} = 0$:

$$Z_{j,t} = \mathbf{S}_{\omega_j} \{\lambda_j(\mathbf{B}) a_j(\mathbf{B}) \varepsilon\}_t + d_{j,t}(\underline{\mathbf{E}}) + \widetilde{\Psi}_j(\mathbf{B}) \varepsilon_t \tag{53}$$

- Pour $\omega_j = \pi$ ou $\omega_j = 0$ et $d_0 = 1$: on obtient de façon similaire:

$$\Psi(z) = \Psi\left(e^{i\omega_j}\right) + \left(1 - e^{-i\omega_j} z\right) \Psi_j(z)$$

$$Z_{j,t} = \mathbf{S}_{\omega_j} \{\lambda_j a_j \varepsilon\}_t + d_{j,t}(\underline{\mathbf{E}}) + \widetilde{\Psi}_j(\mathbf{B}) \varepsilon_t \tag{54}$$

  où l'on a posé $\lambda_j = \lambda_{1,j} = \Psi\left(e^{i\omega_j}\right)$.

- Pour $\omega_1 = 0$ et $d_0 = 2$: on a d'abord :

$$Z_{1,t}^2 = \mathbf{S}_{\omega_1} \{\lambda_{1,1} \widetilde{a}_1 \varepsilon\}_t + d_{1,t}(\underline{\mathbf{E}}) + \Psi_1^*(\mathbf{B}) \varepsilon_t \tag{55}$$

en posant $\Psi_1^*(\mathbf{B}) = \widetilde{a}_1 \Psi_1(\mathbf{B})$, $\lambda_{1,1} = \Psi(1)$.

En développant $\Psi(z)$ à l'ordre 2:

$$\Psi(z) = \Psi(1) - (1-z)\Psi'(1) + (1-z)^2 \Psi_{11}(z) \tag{56}$$

d'après (45), on obtient ensuite:

$$\Delta_0^2(\mathbf{B}) Z_{1,t}^1 = \mu_1 \left\{\Psi(1)\varepsilon_t - \Psi'(1)\Delta_0(\mathbf{B})\varepsilon_t + \Delta_0^2(\mathbf{B})\Psi_{11}(\mathbf{B})\varepsilon_t\right\}$$

On intègre cette relation deux fois, avec $Z_{1,0}^1 = Z_{1,-1}^1 = 0$:

$$Z_{1,t}^1 = \mu_1 \left\{\Psi(1)\mathbf{S}_{\omega_1}^2(\varepsilon)_t - \Psi'(1)\mathbf{S}_{\omega_j}(\varepsilon)_t + \Psi_{11}(\mathbf{B})\varepsilon_t\right\} + d_{1,t}(\underline{\mathbf{E}}) + T d_{1,t}(\underline{\mathbf{E}})$$

Soit finalement:

$$Z_{1,t}^1 = \mu_1 \Psi(1)\left(\mathbf{S}_{\omega_1}^2(\varepsilon)_t\right) - \mu_1 \Psi'(1)\left(\mathbf{S}_{\omega_1}(\varepsilon)_t\right) + d_{1,t}(\underline{\mathbf{E}}) + T d_{1,t}(\underline{\mathbf{E}}) + \mu_1 \Psi_{11}(\mathbf{B})\varepsilon_t \tag{57}$$

Sous $\mathbf{H}_d^1$, (39), (53) et (54) fournissent la décomposition finale de la série :

$$\left[\begin{array}{l} y = [d_1|d_2|\ldots|d_r][\underline{\mathbf{A}}] + [d_1|d_2|\ldots|d_r][\underline{\mathbf{E}}] + [d_1|d_2|\ldots|d_L][\underline{\mathbf{a}}] \\ \quad + \sum_{j=1}^{r} \mathbf{S}_{\omega_j}\{\lambda_j(\mathbf{B}) a_j(\mathbf{B})\varepsilon\} \\ \quad + \Gamma(\mathbf{B})\varepsilon \end{array}\right. \tag{58}$$

$\Gamma(\mathbf{B})$ est la moyenne mobile infinie définie par :

$$\Gamma(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{r} \widetilde{\Psi}_j(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\mathbf{B}) \Psi_j(\mathbf{B}) \tag{59}$$

Sous $\mathbf{H}_d^2$, (44), (53), (54), (55), (57) donnent :

$$\left[\begin{array}{l} y=[d_1][\underline{\mathbf{A}}]+[d_1][\underline{\mathbf{E}}]+[d_1][\underline{\mathbf{a}}]+Td_1[\underline{\mathbf{A}}]+Td_1[\underline{\mathbf{E}}]+Td_1[\underline{\mathbf{a}}] \\ \quad +[d_2|\ldots|d_r][\underline{\mathbf{A}}]+[d_2|\ldots|d_L][\underline{\mathbf{a}}] \\ \\ \quad +\mathbf{S}_{\omega_1}\{\eta_{1,1}\varepsilon\}+\mathbf{S}_{\omega_1}^2\{\eta_{1,2}\varepsilon\} \\ \quad +\sum_{j=2}^{r}\mathbf{S}_{\omega_j}\{\lambda_j(\mathbf{B})\widetilde{a}_j(\mathbf{B})\varepsilon\} \\ \\ \quad +\Gamma(\mathbf{B})\varepsilon \end{array}\right. \tag{60}$$

avec :

$$\begin{array}{l} \eta_{1,1}=\widetilde{a}_1\Psi(1)-\mu_1\Psi'(1) \\ \eta_{1,2}=\mu_1\Psi(1) \end{array} \tag{61}$$

$\Gamma(\mathbf{B})$ est la moyenne mobile infinie définie par :

$$\Gamma(\mathbf{B})=\Psi_1^*(\mathbf{B})+\mu_1\Psi_{11}(\mathbf{B})+\sum_{j=2}^{r}\widetilde{\Psi}_j(\mathbf{B}) \tag{62}$$

On remarque maintenant que lorsque $\mathbf{H}_i$ n'est pas vérifiée:

$$\Psi'(z)=C^{ste},\Psi_j(z)=0 \text{ pour } \omega_j\notin\{0,\pi\}$$

On a directement les expressions (58), (60), avec:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_j(\mathbf{B})=\Psi(\mathbf{B}) \text{ pour } \omega_j\notin\{0,\pi\} \\ \lambda_j(\mathbf{B})=\Psi\left(e^{i\omega_j}\right) \text{ pour } \omega_j\in\{0,\pi\} \\ C_t=\left[a_1\times\mathbf{1}_{\{0\in\Theta_1\}}-a_r\times\mathbf{1}_{\{\pi\in\Theta_1\}}\right]\Psi'\varepsilon_t \end{array}\right.$$

On note en particulier que (50) est toujours vérifiée, et que l'on peut avoir $C_t\equiv 0$ dans certains cas particuliers. Dans le cas contraire, il est facile de vérifier que C_t est strictement non-déterministe, c'est à dire que sa représentation de Wold se réduit à la composante $\mathbf{MA}(\infty)$. Ceci découle de la propriété ci-dessous que nous rappelons, étant donné qu'elle semble rarement citée dans la littérature.

Lemme 9 *Soit $X_t=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\varepsilon_{t-k}$ avec (ε_k) bruit-blanc et $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|^2<\infty$. Si les a_k ne sont pas tous nuls, alors (X_t) est strictement non déterministe. Si $C(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$ ne s'annule pas pour $|z|<1$, alors (ε_t) est l'innovation de (X_t)*

Preuve : elle découle d'un résultat d'analyse complexe; d'abord, si les a_k ne sont pas tous nuls, on peut toujours supposer $a_0>0$, quitte à ré-indicer le bruit-blanc (ε_t) et à le multiplier par -1. La fonction $C(z)$ appartient à l'espace de Hardy $\mathbf{H}^2$ puisque $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|^2<\infty$. Il en résulte que la fonction $C\left(e^{i\omega}\right)$ qui est bien définie grâce à l'hypothèse $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|^2<\infty$, est égale à $\lim_{r\to1^-}C\left(re^{i\omega}\right)$ pour presque tout ω. En outre, Si C n'est pas identiquement nulle, $\log\left|C\left(e^{i\omega}\right)\right|$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$.

Par ailleurs, (X_t) est stationnaire et sa mesure spectrale s'écrit:

$$dF(\omega)=f(\omega)d\omega=\left|C\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\times\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}d\omega \tag{63}$$

$f(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| C\left(e^{i\omega}\right) \right|^2$ est la densité spectrale de (X_t) ; $\log f$ est donc intégrable. Il en résulte que (X_t) est purement non-déterministe. Mais alors, la décomposition de la mesure spectrale (63) implique que la partie singulière de cette mesure est nulle, ce qui signifie précisément que (X_t) est strictement non-déterministe. Le fait que (ε_t) soit l'innovation de (X_t) provient de l'unicité du développement $\mathbf{MA}(\infty)$ de Wold sous la condition:

$$C(0) = 1 \text{ et } C(z) \neq 0 \text{ si } |z| < 1$$

■

Remarque 10 *Le résultat est faux si l'on suppose seulement une forme* $\mathbf{MA}(\infty)$ *bilatérale* $X_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varepsilon_{t-k}$: *en effet, dans ce cas,* (X_t) *peut être déterministe. Il suffit de considérer* (a_k) *définie par* $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}$. *La densité spectrale de* X_t *s'annule sur* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, *donc* $\log f$ *n'est pas intégrable, et* (X_t) *est déterministe.*

Les expressions (58) et (60) isolent, en fonction de leur variabilité, les trois composantes de la série y_t. Ainsi, sous $\mathbf{H}_d^1$, on obtient:

- La composante déterministe modélisant le niveau moyen de la série. :

$$\begin{aligned} y_{1,t} &= [d_1|d_2|\ldots|d_r]\,[\underline{\mathbf{A}}] + [d_1|d_2|\ldots|d_r]\,[\underline{\mathbf{E}}] + [d_1|d_2|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}] \\ &= \mathbb{E}\left(y_t \,|\mathbf{Y}_0, \varepsilon_k, k \leq 0\right) \end{aligned}$$

  Le qualificatif déterministe désigne aussi bien le terme non stochastique (dépendant de $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{A}}$), que stochastique (terme dépendant de $\underline{\mathbf{E}}$).

- La composante non-stationnaire pure, d'espérance nulle, décomposée sur chaque fréquence :

$$y_{2,t} = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{S}_{\omega_j} \left\{\lambda_j(\mathbf{B})\, a_j(\mathbf{B})\, \varepsilon\right\}_t$$

  Chacune des composantes de $y_{2,t}$ est une marche aléatoire saisonnière construite à partir du processus MA(2) $\theta_t = \lambda_j(\mathbf{B})\, a_j(\mathbf{B})\, \varepsilon_t$ pour $\omega_j \notin \{0, \pi\}$, ou du bruit-blanc ε_t lorsque $\omega_j \in \{0, \pi\}$.

- La composante stationnaire ;

$$y_{3,t} = \Gamma(\mathbf{B})\, \varepsilon_t$$

On a vu que cette composante est un bruit-blanc lorsque $\mathbf{H}_i$ n'est pas vérifiée.

On suppose maintenant que Θ est de la forme (7) ou (8) avec $0 = \omega_1 \in \Theta_1$.

On peut alors interpréter ce qui précède sous l'angle de la décomposition traditionnelle d'une série temporelle suivant les composantes usuelles. Par exemple, sous $\mathbf{H}_d^1$:

- **Tendance** :

$$T_t = d_1\,[\underline{\mathbf{A}}] + d_1\,[\underline{\mathbf{E}}] + d_1\,[\underline{\mathbf{a}}] + \mathbf{S}_0 \left\{(\lambda_{1,1} a_1)\, \varepsilon\right\}_t \tag{64}$$

  La tendance stochastique non-déterministe de cette composante a pour innovation (ε_t), à un facteur multiplicatif près.

- **Composante saisonnière** :

$$\begin{aligned} S_t = & [d_2| \ldots |d_r] [\underline{\mathbf{A}}] + [d_2| \ldots |d_r] [\underline{\mathbf{E}}] + [d_2| \ldots |d_L] [\underline{\mathbf{a}}] \\ & + \textstyle\sum_{j=2}^{r} \mathbf{S}_{\omega_j} \{\lambda_j (\mathbf{B}) a_j (\mathbf{B}) \varepsilon\}_t \end{aligned} \tag{65}$$

On note que cette composante s'écrit directement comme l'agrégation des harmoniques associées aux fréquences saisonnières. Lorsque $\omega_j \neq \pi$, (ε_t) n'est pas en général l'innovation de (S_t) : ceci résulte de la présence du terme $\lambda_j (\mathbf{B}) a_j (\mathbf{B})$ et des remarques (5) et (8).

On note que, même si $\Theta_2 = \emptyset$, la saisonnalité inclut des termes déterministes dont les coefficients sont fonctions des valeurs initiales $\mathbf{Y}_0$ du processus : ces valeurs initiales ont donc une influence forte sur le profil saisonnier de la série, notamment pour les premiers points. Par la suite, la composante stochastique non-stationaire permet à ce profil d'évoluer avec le temps.

- **Composante transitoire** :

$$C_t = y_{3,t}$$

Les phénomènes irréguliers sont incorporés dans cette composante, que l'on nommera plus simplement "cycle". Le terme "cycle" signifie précisément "oscillations stationnaires", sans qu'il n'y ait a priori de régularités assimilables à un cycle dans y_3. Si c'était le cas, ces régularités "cycliques" seraient par construction peu persistentes (une forte persistence étant synonyme de non-stationnarité). De même, $y_{3,t}$ peut présenter des inflexions saisonnières, mais celles-ci sont nécessairement transitoires : une modification temporaire du comportement saisonnier qui n'aurait pas été préalablement modélisée à l'aide de variables d'interventions[3] adéquates pourrait produire une telle dynamique. On note enfin que, comme précédemment, (ε_t) n'est pas en général (à un facteur multiplicatif près) l'innovation de $(y_{3,t})$. Il suffit de considérer la décomposition "tendance-cycle" réalisée sur la variable particulière (y_t) suivante, avec $\lambda > 0$:

$$(1 - \mathbf{B}) y_t = u_t = C(\mathbf{B}) \varepsilon_t = \left(1 + \lambda \mathbf{B} - 2\lambda \mathbf{B}^2\right) \varepsilon_t$$

$C(z)$ admet pour racines $\frac{1 \pm \sqrt{1+8/\lambda}}{4}$; pour λ assez petit, ces deux racines sont de module >1, et (ε_t) est bien l'innovation de (y_t). On effectue ensuite la décomposition BN:

$$\begin{aligned} y_t = & \quad y_0 + C(1) \textstyle\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j + \lambda \sum_{j=1}^{t} (1 - \mathbf{B})(1 + 2\mathbf{B}) \varepsilon_t \\ & = y_0 + \lambda (1 + 2\mathbf{B}) \varepsilon_0 + C(1) \textstyle\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j + \lambda (1 + 2\mathbf{B}) \varepsilon_t \end{aligned}$$

Le cycle C_t est donc :

$$C_t = \lambda (1 + 2\mathbf{B}) \varepsilon_t$$

et (ε_t) n'est clairement pas l'innovation de (ε_t)

[3] Par exemple, un point aberrant avec amortissement saisonnier.

Sous $\mathbf{H}_d^2$, seule l'expression de T_t diffère:

$$\begin{aligned} T_t = & Td_1 [\underline{\mathbf{A}}] + Td_1 [\underline{\mathbf{a}}] + d_1 [\underline{\mathbf{A}}] + d_1 [\underline{\mathbf{a}}] \\ & + Td_1 [\underline{\mathbf{E}}] + d_1 [\underline{\mathbf{E}}] \\ & + \mathbf{S}_{\omega_1} \left\{ \eta_{1,1} \varepsilon \right\}_t + \mathbf{S}_{\omega_1}^2 \left\{ \eta_{1,2} \varepsilon \right\}_t \end{aligned} \tag{66}$$

La tendance stochastique se décompose alors en une composante "lisse", I(2), et une composante plus heurtée, I(1). Les degrés de persistence de ces composantes résultent de $\eta_{1,1}$ et $\eta_{1,2}$. Dans ce cas, (ε_t) n'est pas en général (à un facteur multiplicatif près) l'innovation de T_t, mais demeure l'innovation de chacune des deux composantes I(1) et I(2).

Par rapport à la première décomposition obtenue, il n'est pas vrai en général que:

$$\begin{cases} \text{var} \left\{ \Delta_{\omega_j} Z_{j,t} \right\} \geq \text{var} \left\{ \lambda_j (\mathbf{B}) a_j (\mathbf{B}) \varepsilon_t \right\} \ \text{ pour } \omega_j \in]0, \pi] \\ \text{var} \left\{ \Delta_0 Z_{1,t}^2 \right\} \geq \text{var} \left\{ \lambda_{1,1} \widetilde{a}_1 \varepsilon_t \right\} \\ \text{var} \left\{ \Delta_0^2 Z_{1,t}^1 \right\} \geq \text{var} \left\{ \mu_1 \Psi (1) \varepsilon_t \right\} \end{cases}$$

Cela signifie que la composante saisonnière pour la fréquence ω_j n'est pas plus "lisse" après l'extraction de C_t, alors que les méthodes de désaisonnalisation par extraction du signal imposent au contraire cette contrainte à des fins d'identification, avec pour conséquence que la composante irrégulière est de variance maximale.

Notre décomposition possède en revanche la propriété suivante :

L'extraction de C_t conduit à des composantes de mémoire courte (après différenciation appropriée), pour la tendance et la saisonnalité stochastique.

En effet, une fois différenciées, ces composantes sont des bruits-blancs ou des moyenne mobiles d'ordre un. On note que cette propriété n'est pas vraie en général pour les décompositions usuelles.

4 Propriétés de la décomposition

4.1 Le filtre théorique

Nous nous plaçons pour simplifier sous l'hypothèse $\mathbf{H}_d^1$. En omettant les termes déterministes, la tendance stochastique est:

$$T_t = \mathbf{S}_0 \left\{ (\lambda_1 a_1) \varepsilon \right\}_t$$

La composante saisonnière stochastique de fréquence ω_j est:

$$S_{j,t} = \mathbf{S}_{\omega_j} \left\{ \lambda_j (\mathbf{B}) a_j (\mathbf{B}) \varepsilon \right\}_t$$

La propriété suivante est immédiate, compte tenu de $\mathbf{H}_f$ et des développements précédents.

Lemme 11 *Les processus stationnaire $(\Delta_0 T_t)$ et $(\Delta_\pi S_{r,t})$ lorsque $\pi \in \Theta_1$ ont une densité spectrale strictement positive en tout point $\omega \in [0, \pi]$*

On sait que la propriété n'est pas vraie en général pour $\left(\Delta_{\omega_j} S_{j,t}\right)$ lorsque $\omega_j \neq \pi$, car $a_j (z)$ peut s'annuler au point $z = \pm 1$. Mais il s'agit de cas isolés correspondant à des spécifications particulières de la dynamique de u_t^*. On a un résultat similaire pour la composante cyclique: à l'exception de cas particuliers, la densité spectrale de (C_t) est non-nulle. Nous donnons maintenant un exemple d'un tel cas particulier dans lequel le spectre de (C_t) s'annule.

Exemple 12

$$(1-\mathbf{B})\, y_t = u_t \textit{ pour } t \geq 1$$
$$\forall t \in \mathbb{Z} : u_t^* = \left(1+\theta \mathbf{B}^2\right) \varepsilon_t, \quad |\theta| \leq 1$$

On obtient immédiatement, pour $t \geq 1$:

$$y_t = y_0 + (1+\theta) \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j - \theta\,(1+\mathbf{B})\,\varepsilon_t + \theta\,(1+\mathbf{B})\,\varepsilon_0$$

Donc

$$T_t = y_0 + \theta\,(1+\mathbf{B})\,\varepsilon_0 + (1+\theta) \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$$

et

$$C_t = -\theta\,(1+\mathbf{B})\,\varepsilon_t$$

Le spectre de C_t s'annule en $\omega = \pi$.

Ce résultat est à rapprocher du phénomène de surdifférentiation rencontrée dans les procédures de filtrage associées aux modèles à composantes inobservables ou au filtre non-paramétrique résultant de la procédure X12 (Maravall (1995)). La surdifférentiation introduit des racines unitaires en moyenne mobile pour les estimateurs optimaux théoriques des composantes, et a des conséquences sur la spécification des modèles admissibles pour ces séries. Le point important est que ces racines sont une conséquence directe des racines unitaires non-stationnaires associées à chaque composante. À l'inverse, l'usage de décompositions de Beveridge-Nelson permet d'éviter ces effets indésirables.

Nous souhaitons maintenant interpréter ces composantes comme résultant d'une opération de filtrage de la série brute y_t. Intuitivement, si $\varphi_1(\mathbf{B})$ est défini par (18), et $y_t^* = y_t - d_t$:

$$\begin{aligned} T_t &\simeq \lambda_1 a_1 \mathbf{S}_0 \left\{\varphi(\mathbf{B})\, \Psi^{-1}(\mathbf{B})\, y^*\right\}_t \\ &\simeq \lambda_1 a_1 \varphi_1(\mathbf{B})\, \Psi^{-1}(\mathbf{B})\, y_t^* \end{aligned}$$

Introduisons le filtre unilatéral:

$$\Xi_1(\mathbf{B}) = \lambda_1 a_1 \varphi_1(\mathbf{B})\, \Psi^{-1}(\mathbf{B}) \tag{67}$$

On obtient alors:

$$T_t \simeq \Xi_1(\mathbf{B})\, y_t^* \tag{68}$$

et par la même dérivation heuristique:

$$S_{j,t} \simeq \Xi_j(\mathbf{B})\, y_t \tag{69}$$

avec

$$\Xi_j(\mathbf{B}) = \lambda_j(\mathbf{B})\, a_j(\mathbf{B})\, \varphi_j(\mathbf{B})\, \Psi^{-1}(\mathbf{B}) \tag{70}$$

Enfin, le cycle s'obtient par:

$$y_{3,t} \simeq \Gamma(\mathbf{B})\, \varphi(\mathbf{B})\, \Psi^{-1}(\mathbf{B})\, y_t^* \tag{71}$$

Ces écritures ne sont que des approximations car le processus y_t n'est défini que pour $t \geq -d+1$ (voir Bell (1984) pour des considérations similaires). On donne maintenant un résultat plus précis (rappelons que $\Psi^{-1}(\mathbf{B}) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \mathbf{B}^k$).

Lemme 13 $T_t = \lambda_1 a_1 \sum_{k=0}^{t-1} b_k \{\varphi_1(\mathbf{B})\, y^*\}_{t-k} + O_p(1)$

Preuve : on a directement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u_{n-k} + \sum_{k \geq n} b_k u_{n-k}$$

Pour $n \geq 1$, $\varphi_1(\mathbf{B})\left(y_n^* - y_{n-1}^*\right) = u_n$ donc:

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_1(\mathbf{B})\, y_{n-k}^* - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_1(\mathbf{B})\, y_{n-k-1}^* + \sum_{k \geq n} b_k u_{n-k}$$

Pour $n \geq 2$:

$$\varepsilon_n = V_n - V_{n-1} - b_{n-1} \varphi_1(\mathbf{B})\, y_0^* + \sum_{k \geq n} b_k u_{n-k}$$

avec

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_1(\mathbf{B})\, y_{n-k}^*$$

et

$$\varepsilon_1 = V_1 + \varphi_1(\mathbf{B})\, y_{-1}^* + \sum_{k \geq 1} b_k u_{1-k}$$

Il en résulte, pour $t \geq 1$, et en omettant le facteur constant $\lambda_1 a_1$:

$$\begin{aligned} T_t &= \textstyle\sum_{n=1}^{t} \varepsilon_n \\ &= V_t + \varphi_1(\mathbf{B})\, y_{-1}^* - \left(\textstyle\sum_{n=1}^{t} b_{n-1}\right) y_0^* + \textstyle\sum_{n=1}^{t} \sum_{k \geq n} b_k \psi u_{n-k} \end{aligned} \tag{72}$$

Mais $\left\| \sum_{k \geq n} b_k u_{n-k} \right\|_2 \leq C \sum_{k \geq n} |b_k| = O\left(n^{-2}\right)$ d'après (6), donc :

$$\left\| \sum_{n=1}^{t} \sum_{k \geq n} b_k u_{n-k} \right\|_2 = O(1)$$

$\sum_{n=1}^{t} b_{n-1}$ converge, donc le troisième terme de (72) est aussi un $O_p(1)$. Enfin, $\varphi_1(\mathbf{B})\, y_{-1}^* = O_p(1)$.

■

Le terme dominant de T_t, V_t est $O_p\left(\sqrt{t}\right)$. Il s'écrit, en posant $\{\varphi_1(\mathbf{B})\, y^*\}_t = 0$ pour $t \leq 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \{\varphi_1(\mathbf{B})\, y^*\}_{t-k} = \Xi_1(\mathbf{B})\, y_t^*$$

Il est donc légitime d'étudier $\Xi_1(\mathbf{B})$ pour décrire de manière synthétique le lien entre les composantes non-stationnaires de y_t et de T_t, au moins pour t assez grand. On a bien entendu un résultat similaire pour les fréquences saisonnières.

Nous pouvons énoncer maintenant le résultat suivant, conséquence directe de (20), (51) et de la définition de $\Xi_j(\mathbf{B})$:

Lemme 14 *a)Pour tout* j, $\Xi_j\left(e^{i\omega_j}\right) = 1$
b) Pour tout j, k *si* $j \neq k : \Xi_j\left(e^{i\omega_k}\right) = 0$

Les filtres associés à la tendance et aux composantes saisonnières "conservent" donc le signal associé à ces fréquences : la fonction de gain est égale à un en ces points, et il n'y a pas de déphasage à ces fréquences[4]. Les autres fréquences non-stationnaires sont éliminées.

4.2 Paramètres identifiables

Il est bien connu qu'il existe une infinité de décompositions d'une série temporelle entre tendance et cycle. Plus précisément, les variances des innovations de chaque composante ne sont pas identifiables. En particulier, la volatilité de la tendance (après différentiation) peut être ajustée à un niveau désiré a priori (Quah (1989)). Pour dépasser ce problème d'identification, il est nécessaire de rajouter des contraintes sur la décomposition, ce qui se traduit en général par l'adjonction de conditions d'orthogonalité entre les composantes : c'est le cas notamment pour les procédures d'extraction du signal (SEATS) et dans les modèles de type "espaces-état". Dans notre modèle, les composantes sont naturellement corrélées entre elles. Nous vérifions maintenant que la caractéristique de mémoire courte des composantes non-stationnaires vue plus haut permet de caractériser certains paramètres de la décomposition.

Sous l'hypothèse $\mathbf{H}_d^2$, et en omettant les termes déterministes, la décomposition BN comprend :

- La tendance stochastique, globalement I(2):

$$T_t^{BN} = q_1 \mathbf{S}_0 \{\varepsilon\}_t + q_2 \mathbf{S}_0^2 \{\varepsilon\}_t$$

  avec q_1, q_2 paramètres >0.

- La composante saisonnière stochastique de fréquence ω_j:

$$S_{j,t}^{BN} = \mathbf{S}_{\omega_j} \{\lambda_j(\mathbf{B})\, a_j(\mathbf{B})\, \varepsilon\}_t$$

[4] Il convient toutefois être prudent pour l'interprétation de cette dernière grandeur, dans la mesure où elle n'est correctement définie que pour des variables stationnaires.

Considérons une décomposition de y_t semblable à la décomposition BN, c'est à dire de la forme:

$$y_t = T_t + \sum_{j=1}^{r} S_{j,t} + C_t$$

avec :

$$\begin{bmatrix} T_t = \widetilde{q}_1 \mathbf{S}_0 \{\varepsilon\}_t + \widetilde{q}_2 \mathbf{S}_0^2 \{\varepsilon\}_t \\ S_{j,t} = \mathbf{S}_{\omega_j} \left\{ \widetilde{\theta}_j (\mathbf{B}) \varepsilon \right\}_t, \ \widetilde{\theta}_j (\mathbf{B}) \text{ polynôme de degré 2, } \widetilde{\theta}_j (0) \neq 1 \text{ a priori} \\ (C_t) \text{ stationnaire, strictement non déterministe, } \mathbb{E}(C_t) = 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Nous supposons pour simplifier que tous les $\omega_j \in]0, \pi[$. Par hypothèse, on a, pour tout $t \geq 1$:

$$\left(T_t - T_t^{BN}\right) + \sum_{j=1}^{r} \left(S_{j,t} - S_{j,t}^{BN}\right) = C_t^{BN} - C_t$$

La variable $C_t^{BN} - C_t$ est stationnaire. Les variables apparaissant dans le membre de gauche sont a priori non-stationnaires aux fréquences $\omega = 0$ et $\omega = \omega_j$ respectivement, leur somme ne peut être stationnaire que si elles sont elles mêmes de variance bornée (c'est à dire cointégrées faiblement, puisque la stationnarité n'est pas requise). Nous avons donc:

$$\sup_t \operatorname{var}\left(T_t - T_t^{BN}\right) < +\infty \text{ et } \sup_t \operatorname{var}\left(S_{j,t} - S_{j,t}^{BN}\right) < +\infty$$

Ceci est vrai pour n'importe quelle décomposition concurrente, c'est à dire sans que (73) soit nécessairement vérifiée. Pour aller plus loin, on remarque maintenant que:

$$\begin{aligned} u_t = {} & q_1 \Delta_0(\mathbf{B}) \left(\prod_{j=1}^{r} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) \right) \varepsilon_t + q_2 \left(\prod_{j=1}^{r} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) \right) \varepsilon_t \\ & + \textstyle\sum_{j=1}^{r} \Delta_0^2(\mathbf{B}) \left(\displaystyle\prod_{k \neq j} \Delta_{\omega_k}(\mathbf{B}) \right) \theta_j(\mathbf{B}) \varepsilon_t + \Delta_0^2(\mathbf{B}) \prod_{j=1}^{r} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) C_t \end{aligned} \quad (74)$$

Cette relation et $\mathbf{H}_q$ impliquent l'existence de $F\left(e^{-i\omega}\right)$ de classe C^2 vérifiant $F(0) = 1$ et $q_c > 0$ tels que:

$$\Delta_0^2(\mathbf{B}) \prod_{j=1}^{r} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) C_t = q_C F(\mathbf{B}) \varepsilon_t$$

C_t étant stationnaire, $F(\mathbf{B})$ peut être factorisé[5] par les polynômes racine unitaires du membre de gauche, donc:

$$\Delta_0^2(\mathbf{B}) \prod_{j=1}^{r} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) \left\{ C_t - q_C \widetilde{D}(\mathbf{B}) \varepsilon_t \right\} = 0$$

On note que (C_t) est supposé strictement non-déterministe d'espérance nulle, il en résulte:

$$C_t = q_C \widetilde{D}(\mathbf{B}) \varepsilon_t = q_C \times \sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{d}_k \varepsilon_{t-k} \text{ avec } d_0 = 1$$

[5] L'argument précis utilise la densité spectrale de C_t et la régularité de cette fonction au voisinage des points ω_j.

Notez que ce résultat n'implique pas que $(q_C \varepsilon_t)$ soit l'innovation de (C_t).

Puisque (74) peut être écrit également pour la représentation BN, on obtient, en vertu de l'unicité de la représentation spectrale de u_t, et avec $C_t^{BN} = D(\mathbf{B})\,\varepsilon_t$:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & (q_1 - \widetilde{q}_1)\,\Delta_0\left(e^{-i\omega}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}\Delta_{\omega_j}\left(e^{-i\omega}\right)\right) + (q_2 - \widetilde{q}_2)\left(\prod_{j=1}^{r}\Delta_{\omega_j}\left(e^{-i\omega}\right)\right) \\
& + \Delta_0^2\left(e^{-i\omega}\right)\textstyle\sum_{j=1}^{r}\left(\displaystyle\prod_{k\neq j}\Delta_{\omega_k}\left(e^{-i\omega}\right)\right)\left\{\theta_j\left(e^{-i\omega}\right) - \widetilde{\theta}_j\left(e^{-i\omega}\right)\right\} \\
& + \Delta_0^2\left(e^{-i\omega}\right)\prod_{j=1}^{r}\Delta_{\omega_j}\left(e^{-i\omega}\right)\left\{D\left(e^{-i\omega}\right) - \widetilde{D}\left(e^{-i\omega}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Par ailleurs, le calcul de la densité spectrale de (u_t) à partir de (74) indique que la densité spectrale de $\Delta^2 T_t$ en 0 vaut:

$$
\frac{f_u(0)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{r}\left|\Delta_{\omega_j}(1)\right|^2}
\tag{76}
$$

Mais $\Delta^2 T_t = q_1 \Delta\varepsilon_t + q_2\varepsilon_t$, donc:

$$
f_{\Delta^2 T}(\omega) = \left|q_1 + q_2 - q_1 e^{-i\omega}\right| \times \frac{\sigma^2}{2\pi}
$$

d'où pour $\omega = 0$:

$$
q_2^2 = \frac{2\pi f_u(0)}{\sigma^2\displaystyle\prod_{j=1}^{r}\left|\Delta_{\omega_j}(1)\right|^2}
$$

Il en résulte que q_2 est identifiable, et $q_2 = \widetilde{q}_2$

On peut simplifier alors (75) par le facteur $\Delta_0\left(e^{-i\omega}\right)$; en $\omega = 0$, on obtient immédiatement par continuité $q_1 = \widetilde{q}_1$, d'où $T_t = T_t^{BN}$. Ensuite:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \textstyle\sum_{j=1}^{r}\left(\displaystyle\prod_{k\neq j}\Delta_{\omega_k}\left(e^{-i\omega}\right)\right)\left\{\theta_j\left(e^{-i\omega}\right) - \widetilde{\theta}_j\left(e^{-i\omega}\right)\right\} \\
& + \prod_{j=1}^{r}\Delta_{\omega_j}\left(e^{-i\omega}\right)\left\{D\left(e^{-i\omega}\right) - \widetilde{D}\left(e^{-i\omega}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Considérons par exemple $j = 1$ (le cas $j > 1$ est identique). En divisant (77) par $\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\Delta_{\omega_k}\left(e^{-i\omega}\right)$, on obtient pour $\omega \neq \omega_k$, $k \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \tfrac{\theta_1\left(e^{-i\omega}\right) - \widetilde{\theta}_1\left(e^{-i\omega}\right)}{\Delta_{\omega_1}\left(e^{-i\omega}\right)} + \textstyle\sum_{j=2}^{r}\tfrac{\left\{\theta_j\left(e^{-i\omega}\right) - \widetilde{\theta}_j\left(e^{-i\omega}\right)\right\}}{\Delta_{\omega_j}\left(e^{-i\omega}\right)} \\
& + D\left(e^{-i\omega}\right) - \widetilde{D}\left(e^{-i\omega}\right)
\end{aligned}
$$

La continuité de la fonction $D\left(e^{-i\omega}\right)-\widetilde{D}\left(e^{-i\omega}\right)$ en $\pm\omega_1$ indique que $\frac{\theta_1\left(e^{-i\omega}\right)-\widetilde{\theta}_1\left(e^{-i\omega}\right)}{\Delta_{\omega_1}\left(e^{-i\omega}\right)}$ admet un prolongement par continuité en $\omega=\pm\omega_1$. Comme le numérateur est un polynôme de degré 2 en $e^{-i\omega}$, il en résulte l'écriture:

$$\theta_1\left(e^{-i\omega}\right)-\widetilde{\theta}_1\left(e^{-i\omega}\right)=\zeta_1\Delta_{\omega_1}\left(e^{-i\omega}\right)$$

Donc, $\theta_1-\widetilde{\theta}_1\equiv\zeta_1\Delta_{\omega_1}$. Il en résulte alors:

$$S_{1,t}^{BN}=S_{1,t}+\zeta_1\mathbf{S}_{\omega_1}\left\{\Delta_{\omega_1}\varepsilon_t\right\}$$

puis:

$$\begin{aligned} C_t^{BN} &= C_t-\textstyle\sum_{j=1}^{r}\zeta_j\mathbf{S}_{\omega_j}\left\{\Delta_{\omega_j}\varepsilon_t\right\} \\ &= C_t-\textstyle\sum_{j=1}^{r}\zeta_j\left\{\varepsilon_t-\varepsilon_0\frac{\sin\omega_j[t+1]}{\sin\omega_j}+\varepsilon_{-1}\frac{\sin\omega_j t}{\sin\omega_j}\right\} \end{aligned} \tag{78}$$

Par hypothèse, $\left(C_t^{BN}-C_t\right)$ est de forme $\mathbf{MA}(\infty)$ en ε_t, les coefficients de cette décomposition étant (au moins) de carré sommable. Il résulte du lemme 9 que si $\left(C_t^{BN}-C_t\right)$ n'est pas identiquement nul, alors il est strictement non-déterministe. Le membre de droite de (78) comportant des termes déterministes, on aboutit à une contradiction. Donc $C_t=C_t^{BN}$, tous les ζ_j sont nuls, et $S_{j,t}=S_{j,t}^{BN}$.

Remarque 15 *Si l'on ne fait pas d'hypothèse sur le degré de la moyenne mobile $\widetilde{\theta}_j$, on obtient seulement, en considérant la densité spectrale de $\Delta_{\omega_j}S_{j,t}$ en ω_j, la contrainte:*

$$\left|\widetilde{\theta}_j\left(e^{-i\omega_j}\right)\right|^2=\frac{2\pi f_u\left(\omega_j\right)}{\sigma^2\prod_{k\neq j}\left|\Delta_{\omega_k}\left(e^{-i\omega_j}\right)\right|^2\times\left|\Delta_0\left(e^{-i\omega_j}\right)\right|^2}$$

Il semble difficile d'obtenir l'identification de $\widetilde{\theta}_j$ sous des conditions plus faibles que (73).

4.3 Les relations entre variables

Nous nous plaçons dans le cadre d'estimations de relations économétriques entre plusieurs variables résultat d'opérations de filtrage comme envisagé par exemple par Sims (1974). On se limite dans ce travail à l'étude des relations de cointégration entre plusieurs variables, en particulier la façon dont ces relations sont affectées par le passage de la série brute à ses diverses composantes.

Sous $\mathbf{H}_d^1$, lorsque $\Theta_1=\{0\}$, Li (1998) montre que l'usage de données préalablement filtrées permet d'améliorer les propriétés à distance finie des estimateurs de ces relations. Le filtrage agit en effet en réduisant les fluctuations associées au bruit entachant le signal tendanciel étudié. Nous étendons maintenant ce résultat dans notre cadre d'analyse, en vérifiant que que les relations de cointégration sont identiques pour les séries filtrés et les séries d'origine.

Supposons que l'on dispose de m séries $y_t^{(k)}$ vérifiant chacune $\mathbf{H}_d^1$, avec un ensemble de racines unitaires spécifiques $\Theta_1^{(k)}$, et un polynôme associé $\varphi^{(k)}(\mathbf{B})$.

Soit $\mathbf{y}_t = \left(y_t^{(1)}, \ldots, y_t^{(m)}\right)'$, φ le polynôme PPCM des $\varphi^{(k)}$ et $\Theta_1 = \cup_{k=1}^{m} \Theta_1^{(k)}$; $\varphi(\mathbf{B})\mathbf{y}_t$ est un vecteur de variance bornée. On suppose en outre qu'il est stationnaire, autour d'un terme déterministe d_t obtenu en empilant les termes $d_t^{(k)}$ associés à $\Theta_2^{(k)}$, et éventuellement filtré lors de l'application de $\varphi(\mathbf{B})$:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{B})\mathbf{y}_t = \mathbf{d}_t + \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_t = C(\mathbf{B})\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_t) \text{ bruit blanc multivarié de variance } \boldsymbol{\Sigma} \end{cases}$$

Soit $\theta_j \in \Theta_1$ fixé. On suppose:

$$\operatorname{rk} C\left(e^{-i\theta_j}\right) = m - r_{\theta_j} \text{ avec } 0 < r_{\theta_j} < m \tag{79}$$

Pour simplifier les développements, on suppose également que les valeurs initiales des variables, ainsi que les composantes déterministes sont toute nulles::

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{Y}_0^{(k)} = \mathbf{0} \tag{80}$$

D'après Gregoir (1994), il existe alors r_θ relations de cointégration indépendantes à la fréquence θ, c'est à dire des matrices α_i de dimension $r_\theta \times m$ satisfaisant:

$$\begin{array}{l} (\alpha_1 + \alpha_2\mathbf{B})\left(\mathbf{S}_{\theta_j}\varphi(\mathbf{B})\mathbf{y}\right)_t \sim \mathbf{I}(0) \text{ si } \theta_j \in \left]0, \pi\right[\\ \alpha\left(\mathbf{S}_{\theta_j}\varphi(\mathbf{B})\mathbf{y}\right)_t \sim \mathbf{I}(0) \text{ si } \theta_j \in \{0, \pi\} \end{array} \tag{81}$$

et la condition de rang:

$$\begin{array}{l} \operatorname{rk}\left(\alpha_1 + e^{i\theta_j}\alpha_2\right) = r_{\theta_j} \text{ si } \theta_j \in \left]0, \pi\right[\\ \operatorname{rk}(\alpha_1) = r_{\theta_j} \text{ si } \theta_j \in \{0, \pi\} \end{array} \tag{82}$$

Les relations de cointégration sont de type polynômiale lorsque $\theta_j \in \left]0, \pi\right[$. De plus, (79) implique (Gregoir (1994)), sous certaines hypothèses de régularité relatives à $C(z)$ qu'il existe $v(z)$ avec $v\left(e^{i\theta_j}\right) \neq 0$ et d_{θ_j} entier $\geq r_{\theta_j}$ tel que:

$$\det C(z) = \left[\Delta_{\theta_j}(z)\right]^{d_{\theta_j}} \times v(z)$$

Gregoir (1994) montre alors que si $r_{\theta_j} = d_{\theta_j}$, (82) décrit complètement l'espace de cointégration associé à la fréquence θ_j, i.e, il n'y a pas de relations de cointégration polynômiale supplémentaire entre les $y_t^{(k)}$.

On effectue la décomposition de Beveridge Nelson séparément sur chaque variable $y_t^{(k)}$. Il en résulte:

$$\begin{cases} S_{j,t}^{(k)} = \Xi_j^{(k)}(\mathbf{B})\, y_t^{(k)} \text{ si } \theta_j \in \Theta_1^{(k)}, 0 \text{ sinon} \\ \\ \mathbf{S}_{j,t} = \left(S_{j,t}^{(1)}, \ldots, S_{j,t}^{(m)}\right)' \end{cases}$$

Proposition 16 *Les relations de cointégration sont conservées pour les séries filtrées:*
a) $(\alpha_1 + \alpha_2\mathbf{B})\mathbf{S}_{j,t} \sim \mathbf{I}(0)$ *si* $\theta_j \in \left]0, \pi\right[$
b) $\alpha\mathbf{S}_{j,t} \sim \mathbf{I}(0)$ *si* $\theta_j \in \{0, \pi\}$

Preuve : Supposons $\theta_j \in \left]0, \pi\right[$ .Lorsque $\theta_j \in \Theta_1^{(k)}$, on écrit (70) sous la forme:

$$\Xi_j^{(k)}(\mathbf{B}) = \varphi_j^{(k)}(\mathbf{B})\, v_j^{(k)}(\mathbf{B})$$

avec la factorisation:

$$\varphi(\mathbf{B}) = \varphi_j^{(k)}(\mathbf{B})\,\varsigma_j^{(k)}(\mathbf{B})\,\Delta_j(\mathbf{B}) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \varphi_j(\mathbf{B})\,\Delta_j(\mathbf{B})$$

$\varsigma_j^{(k)}(\mathbf{B})$ contient les racines appartenant à $\Theta_1 \backslash \Theta_1^{(k)}$. Il en résulte, avec (80):

$$\mathbf{S}_{\theta_j}\varphi(\mathbf{B})\,y_t^{(k)} = \varphi_j(\mathbf{B})\,y_t^{(k)}$$

D'après le lemme 14 et (48), on obtient:

$$\Xi_j^{(k)}(z) = 1 + \Delta_j(z)\,\widetilde{\Xi}_j^{(k)}(z)$$

Donc:

$$\varphi_j(\mathbf{B})\,S_{j,t}^{(k)} = \varphi_j(\mathbf{B})\,y_t^{(k)} + \widetilde{\Xi}_j^{(k)}(\mathbf{B})\,\varphi(\mathbf{B})\,y_t^{(k)}$$

Lorsque $\theta_j \notin \Theta_1^{(k)}$, $\varphi_j(\mathbf{B})\,y_t^{(k)}$ est stationnaire, et l'on écrit:

$$0 = \varphi_j(\mathbf{B})\,S_{j,t}^{(k)} = \varphi_j(\mathbf{B})\,y_t^{(k)} - \varphi_j(\mathbf{B})\,y_t^{(k)}$$

Dans les deux cas:

$$\varphi_j(\mathbf{B})\,S_{j,t}^{(k)} = \varphi_j(\mathbf{B})\,y_t^{(k)} + \varepsilon_{j,t}^{(k)}$$

Le vecteur $\mathbf{u}_{j,t}$ défini par:

$$\mathbf{u}_{j,t} = \left(\varepsilon_{j,t}^{(1)}, \ldots, \varepsilon_{j,t}^{(m)}\right)'$$

stationnaire d'espérance nulle. Il résulte alors de (81):

$$\varphi_j(\mathbf{B})\{(\alpha_1 + \alpha_2\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{j,t}\} \sim \mathbf{I}(0) \tag{83}$$

Soit f_S la matrice de pseudo-densité spectrale du processus d'espérance nulle $(\alpha_1 + \alpha_2\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{j,t}$, et f_I celle du processus $\mathbf{I}(0)$ défini par (83). Comme $\varphi_j\left(e^{-i\theta_j}\right) \neq 0$ et

$$\left|\varphi_j\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_s(\omega) = f_I(\omega)$$

f_s est donc bien définie et continue en $\omega = \theta_j$. Par ailleurs, on sait que $f_s(\omega)$ est continue en tout point $\omega \neq \theta_j$ d'après la définition même de $S_{j,t}^{(k)}$. Donc, $f_s(\omega)$ est continue en tout point de $[0,\pi]$, donc intégrable. Il en résulte que $(\alpha_1 + \alpha_2\mathbf{B})\,\mathbf{S}_{j,t}$ est stationnaire. La preuve pour $\theta_j \in \{0,\pi\}$ est similaire.

■

5 Estimation théorique des composantes

5.1 Composantes déterministes non-stochastiques

Il s'agit d'estimer $y_{1,t}^d$ donné par:

$$y_{1,t}^d = [d_1|d_2|\ldots|d_r]\,[\underline{\mathbf{A}}] + [d_1|d_2|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}]$$

Le terme $y^s_{1,t} = [d_1|d_2|\ldots|d_r]\,[\underline{\mathbf{E}}]$ n'est pas traité dans cette section. Supposons connu $\varphi(\mathbf{B})$. On construit alors la suite $\overline{y}_t$ définie par la récurrence:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{B})\,\overline{y}_t = d_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \\ \overline{y}_t = y_t \text{ pour } t = 0, \ldots, -d+1 \end{cases} \tag{84}$$

Il est clair que $y^d_{1,t} = \overline{y}_t$ pour $t \geq -d+1$. Il reste alors à isoler les composantes associées à chaque fréquence ω_j. Notons c_j (resp. s_j) le coefficient de $\cos(\omega_j t)$ (resp. $\sin(\omega_j t)$) dans $d_j\,[\underline{\mathbf{A}}] + d_j\,[\underline{\mathbf{a}}]$. On sait que:

$$\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\overline{y}_t\cos(\omega_j t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c_j \text{ et } \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\overline{y}_t\sin(\omega_j t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s_j \text{ si } \omega_j \notin \{0,\pi\} \tag{85}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\overline{y}_t\cos(\omega_j t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c_j \text{ si } \omega_j \in \{0,\pi\} \tag{86}$$

On peut également isoler la composante $[d_1|d_2|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}]$: il suffit d'effectuer le calcul (84) avec les valeurs initiales $\underline{y}_t = 0$ pour $t = 0, \ldots, -d+1$. La série résultante $\underline{y}_{1,t}$ vérifie:

$$\forall t \geq 1,\ \underline{y}_{1,t} = [d_1|d_2|\ldots|d_L]\,[\underline{\mathbf{a}}]$$

On obtient ensuite de la même façon que dans (85) les coefficients définissant $[d_j]\,[\underline{\mathbf{a}}]$ pour tout j. De cette façon, l'impact des conditions initiales sur la dynamique de la série est clairement mesuré.

5.2 Composantes stochastiques

Nous distinguons deux modes opératoires pour l'estimation des composantes stochastiques. Dans le premier, les calculs s'effectuent directement à partir des innovations estimées $\widehat{\varepsilon}_t$, ce qui autorise un traitement aussi bien paramétrique que non-paramétrique de (u_t). Dans le second, on développe l'approche historique de Beveridge-Nelson : on se place alors dans l'approche paramétrique, et les composantes seront alors obtenues à partir des prévisions de processus filtrés construits à partir de y_t. Bien entendu, les deux approches sont équivalentes. Leur usage simultané peut être effectué à des fins de validation.

5.2.1 Calcul direct : approche paramétrique

1. Modélisation de (u_t) sous forme ARMA.

2. Calcul direct pour $t \geq 1$ des composantes stochastiques non déterministes de T_t et S_t, notés T^{ND}_t et S^{ND}_t en utilisant (64) et (65) et les coefficients estimés du modèle ARMA de (u_t).

2. Estimation pour $1 \leq t \leq T$ de la composante cyclique augmentée des termes stochastiques déterministes $d_{j,t}\,[\underline{\mathbf{E}}]$:

$$\widetilde{C}_t = y_t - T^{ND}_t - S^{ND}_t - T^D_t - S^D_t$$

3. Estimation de la régression de $\widetilde{C}_t$ sur les variables déterministes $\{\cos(\omega_j t), \sin(\omega_j t)\}_{1\leq j\leq r}$. On utilise une correction semi-paramétrique du résidu pour tenir compte de la structure de corrélation de (C_t) :

celui-ci est modélisé sous la forme d'un AR(12) pour des données mensuelles, avec réduction de l'ordre autorégressif par test de significativité. L'estimation finale de la composante cyclique C_t est obtenue par le résidu de cette régression; la part expliquée par le modèle permet par ailleurs d'estimer des termes déterministes $d_{j,t}$ [**E**]

4. Estimation finale de T_t et S_t à partir de 1] et des $d_{j,t}$ [**E**] obtenus en 4].

5.2.2 Calcul direct : aproche semi-paramétrique

Plutôt que de spécifier complètement le modèle suivi par (u_t), on se contente d'approximer la représentation $AR(\infty)$ (5) par un modèle $AR(p)$ dans l'étape 1] précédente. Le choix de l'ordre p s'effectue par critère d'information (AIC ou SBC, par exemple). Techniquement, les valeurs possibles de p appartiennent à un intervalle $[p_m, p_M]$ vérifiant:

$$p_m \to +\infty, \ \frac{p_M}{T} \to 0$$

Le choix de p est crucial, puisqu'il détermine le compromis entre variance et biais de l'approximation autorégressive (Bühlmann (1996), Kreiss (1988)). Une fois cette étape effectuée, le modèle autorégressif est fixé, et la procédure décrite au § précédent s'applique à l'identique.

5.2.3 Calcul direct : approche non-paramétrique

Aucune hypothèse n'est imposée sur la structure de corrélation de (u_t). Seule l'étape 1] précédente doit être modifiée. On lui substitue l'enchaînement suivant:

1b. Il s'agit de construire $\widehat{\varepsilon}_t$ et les coefficients estimés $\widehat{a}_j$ de la représentation de Wold de (u_t^*). On sait que:

$$u_t^* = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \text{ et } \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{b}_j u_{t-j}^* \tag{87}$$

Introduisons les coefficients de Fourier de $\log f_u$ (rappelons que f_u est la densité spectrale de (u_t^*)):

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_u(\omega) e^{ik\omega} d\omega$$

$\Psi(z)$ peut s'écrire (Brillinger, (1981)):

$$\Psi(z) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \right]$$

Les coefficients des représentations (87) s'obtiennent alors selon:

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi\left(e^{-i\omega}\right) e^{ij\omega} d\omega \\ b_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^{-1}\left(e^{-i\omega}\right) e^{ij\omega} d\omega \end{cases}$$

Partant d'un estimateur uniformément convergent de $f_u, \widehat{f}_u$ construit à partir des $(\widehat{u}_t)$ (voir Brillinger, 1981)), on définit, avec $\omega_l = \frac{\pi j}{T}$ $(l = 1 \text{ à } T)$ les estimateurs classiques:

$$\widehat{c}_k = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{T} \log \widehat{f}_u(\omega_l) \cos k\omega_l \text{ pour } k = 1, \ldots, T \tag{88}$$

$$\widehat{\Psi}(\omega_l) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{T} \widehat{c}_k e^{-ik\omega_l}\right\}$$

Et finalement, pour $j = 1, \ldots, T$:

$$\begin{aligned} \widehat{a}_j &= \tfrac{1}{T} \textstyle\sum_{l=-T}^{T} \widehat{\Psi}(\omega_l)\, e^{ij\omega_l} \\ \widehat{b}_j &= \tfrac{1}{T} \textstyle\sum_{l=-T}^{T} \widehat{\Psi}^{-1}(\omega_l)\, e^{ij\omega_l} \end{aligned} \tag{89}$$

Il en résulte:

$$\widehat{\varepsilon}_t = \sum_{j=0}^{t-1} \widehat{b}_j \widehat{u}_{t-j} \tag{90}$$

Remarque 17 *Il est possible de définir par récurrence les estimateurs $\widehat{a}_n, \widehat{\mathbf{b}}_n$ à partir de (88). En effet, comme $\Psi'(z) = \Psi(z) \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} k d_k z^{k-1}\right)$ on obtient par identification, pour $n \geq 1$ ($a_0 = 1$):*

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k c_k a_{n-k} \tag{91}$$

soit, $a_1 = c_1, a_2 = c_2 + \frac{c_1^2}{2!}, a_3 = c_3 + c_1 c_2 + \frac{c_1^3}{3!}$ etc. De même, pour $n \geq 1$ ($b_0 = 1$):

$$b_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k c_k b_{n-k} \tag{92}$$

Remarque 18 *Dans le cadre du modèle ARMA (107) pour (u_t), les calculs sont simplifiés par la relation:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|1 - a e^{i\omega}\right| e^{ik\omega} d\omega = -\pi \frac{a^k}{k} \quad si\ k > 0\ \ et\ \ |a| \leq 1$$

En notant a_i les racines du polynôme $\phi\left(z^{-1}\right)$, et b_j celles de $\varkappa\left(z^{-1}\right)$, on obtient:

$$c_k = \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i^k}{k} - \sum_{j=1}^{q} \frac{b_j^k}{k}$$

L'estimation paramétrique du modèle fournit alors immédiatement tous les $\widehat{c}_k$, puis les $\widehat{a}_n$.

1c. Calcul pour $j = 1, \ldots, r$ de l'estimateur:

$$\widehat{\Psi}\left(e^{-i\omega_j}\right) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{T} \widehat{c}_k e^{-ik\omega_j}\right\}$$

Il en résulte un estimateur de $\lambda_j(\mathbf{B})$ par (50).

5.2.4 Calcul par prévisions

Ce calcul n'est intéressant que dans l'approche paramétrique ou semi-paramétrique de (u_t). On déduit en effet simplement de l'estimation du modèle ARMA (ou AR) les prévisions à long-terme des $Z_{j,t}$. Ces prévisions permettent ensuite de construire les estimations des composantes. Cette approche semble plus simple que la procédure proposée par Breitung et Gomez (1998) qui repose sur l'usage d'un modèle espace-état.

Cas $\omega \in \left]0,\pi\right[$ Posons $\xi_{j,t} = a_j(\mathbf{B})\varepsilon_t$. Lorsque $a_j(0) \neq 0$, le processus stationnaire ainsi défini est en général une moyenne mobile d'ordre 1, dont nous écrirons la représentation sous la forme :

$$\xi_{j,t} = \varepsilon_{j,t} + \theta_j \varepsilon_{j,t-1}$$

Le bruit blanc $(\varepsilon_{j,t})$ est l'innovation de $\left(\xi_{j,t}\right)$ et $|\theta_j| \leq 1$. Le cas $a_j(\mathbf{B}) = a_j = C^{ste}$ correspond au paramétrage :

$$\theta_j = 0, \varepsilon_{j,t} = a_j \varepsilon_t$$

Lorsque cas $a_j(0) = 0$, $\xi_{j,t}$ est un bruit blanc (égal à sa propre innovation), et l'on a simplement:

$$\xi_{j,t} = \varepsilon_{j,t} = a_j(1)\varepsilon_{t-1}$$

On définit les sous-espaces fermés $\underline{Z}_t = \text{sp}\{Z_{t-k}, k = 0,\ldots,t-1\}$ et[6] $\underline{Z}_t^{\varepsilon} = \underline{Z}_t \cup \overline{\text{sp}\{\varepsilon_{-k}, k \geq 0\}}$.

D'après (41), pour $t \geq 1$, $Z_{j,t} \in \underline{Z}_t$ et d'après (40) :

$$\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) Z_{j,t} = \Psi(\mathbf{B})\xi_{j,t}$$

Le processus stationnaire $[\theta_t]_{t\in\mathbb{Z}} = \left[\Psi(\mathbf{B})\xi_{j,t}\right]_{t\in\mathbb{Z}}$ admet $(\varepsilon_{j,t})$ comme processus d'innovation, donc pour $t \geq 1$:

$$\varepsilon_{j,t} \in \overline{\text{sp}\{\theta_{t-k}, k \geq 0\}}$$

Mais, on a successivement:

$$\begin{aligned}
\overline{\text{sp}\{\theta_{t-k}, k \geq 0\}} &\subset \overline{\text{sp}\{Z_{j,t-k}, 0 \leq k \leq t-1, \theta_k, k \leq 0\}} \\
&\subset \overline{\text{sp}\{Z_{j,t-k}, 0 \leq k \leq t-1, \varepsilon_{j,k}, k \leq 0\}} \text{ car } \varepsilon_{j,t} \text{ est l'innovation de } \theta_t \\
&\subset \overline{\text{sp}\left\{Z_{j,t-k}, 0 \leq k \leq t-1, \xi_{j,k}, k \leq 0\right\}} \text{car } \varepsilon_{j,t} \text{ est l'innovation de } \xi_{j,t} \\
&\subset \overline{\text{sp}\{Z_{j,t-k}, 0 \leq k \leq t-1, \varepsilon_k, k \leq 0\}} \text{ par définition de } \xi_{j,t}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\varepsilon_{j,t} \in \underline{Z}_t^{\varepsilon} \tag{93}$$

De même, (37) se réécrit:

$$\varphi(\mathbf{B}) Z_t = u_t = \Psi(\mathbf{B})\varepsilon_t \text{ pour } t \geq 1$$

Puisque (ε_t) est l'innovation de (u_t) :

$$\varepsilon_t \in \underline{Z}_t^{\varepsilon} \tag{94}$$

On définit pour $h \in \mathbb{Z}$, $\widehat{Z}_{j,t+h|t}$ (resp.$\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t}$) comme la meilleure prévision au sens de l'erreur quadratique moyenne de $Z_{j,t+h}$ sachant $\underline{Z}_t$ (resp.$\underline{Z}_t^{\varepsilon}$). Pour t suffisamment grand, ces deux prévisions sont proches.

[6] La barre verticale désigne l'adhérence au sens de la norme L^2.

Si $h < 0$, $\widehat{Z}_{j,t+h|t} = \widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t} = Z_{j,t}$. Sinon, pour évaluer cette projection, on filtre $Z_{j,t}$ par l'opérateur de différentiation complexe $\left(1 - e^{i\omega_j}\mathbf{B}\right)$, dont l'opérateur d'intégration associé est $\mathbf{U}_{-\omega_j}$ (cf preuve du lemme 7).

Puisque $\mathbf{S}_{\omega_j} = \mathbf{U}_{\omega_j}\mathbf{U}_{-\omega_j} = \mathbf{U}_{-\omega_j}\mathbf{U}_{\omega_j}$, et les propriétés ci-dessous similaires à celles valables pour $\mathbf{S}_\omega$:

$$\left(1 - e^{-i\omega_j}\mathbf{B}\right)\mathbf{U}_{\omega_j} = \mathbf{Id}$$

$$\left\{\mathbf{U}_{\omega_j}\left(1 - e^{-i\omega_j}\mathbf{B}\right)y\right\}_t = y_t - y_0 e^{-i\omega t}$$

Posons :

$$\gamma_{j,t} = \left(1 - e^{i\omega_j}\mathbf{B}\right)\Psi_j\left(\mathbf{B}\right)\xi_{j,t}$$

On obtient par (52) et $Z_{j,t} = 0$ pour $t \leq 0$:

$$\left(1 - e^{i\omega_j}\mathbf{B}\right)Z_{j,t} = \mathbf{U}_{\omega_j}\left\{\lambda_j\left(\mathbf{B}\right)a_j\left(\mathbf{B}\right)\varepsilon\right\}_t + \gamma_{j,t} - \gamma_{j,0}e^{-i\omega_j t} \tag{95}$$

Considérons la prévision

$$\widehat{\gamma}_{j,t+h|t} = \mathbb{E}\left[\gamma_{j,t+h} \mid \underline{Z}^{\varepsilon}_t\right]$$

Pour $k \geq 2$, $\varepsilon_{j,t+k} \perp \underline{Z}^{\varepsilon}_t$, et d'après (93) on obtient par un calcul classique:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\widehat{\gamma}_{j,t+h|t}\right]^2 &= O\left(\textstyle\sum_{k=h}^{+\infty} a_k^2\right) \\ &= O\left(h^{-2q+1}\right) \text{ par } \mathbf{H}_q \end{aligned} \tag{96}$$

Il en résulte:

$$\widehat{\gamma}_{j,t+h|t} = O_p\left(h^{-q+1/2}\right)$$

Posons:

$$\lambda_j\left(\mathbf{B}\right)a_j\left(\mathbf{B}\right) = \delta_{0,j} + \delta_{1,j}\mathbf{B} + \delta_{2,j}\mathbf{B}^2$$

D'après (94), en remarquant que :

- $\varepsilon_{t+k} \perp \underline{Z}^{\varepsilon}_t$ pour $k \geq 1$
- $\gamma_{j,0} \in \underline{Z}^{\varepsilon}_t$

On obtient pour $t \geq 1$, avec la notation $\mathbf{B}\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t} = \widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h-1|t}$:

$$\begin{aligned} \left(1 - e^{i\omega_j}\mathbf{B}\right)\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t} &= \textstyle\sum_{k=1}^{t}\left[\lambda_j\left(\mathbf{B}\right)a_j\left(\mathbf{B}\right)\varepsilon_k\right]e^{-i\omega_j[t+h-k]} \\ &+ \left(\delta_{1,j}\varepsilon_t + \delta_{2,j}\varepsilon_{t-1}\right)e^{-i\omega_j[h-1]} + \delta_{2,j}\varepsilon_t e^{-i\omega_j[h-2]} \\ &- \gamma_{j,0}e^{-i\omega_j(t+h)} + O_p\left(h^{-q+1/2\,1}\right) \end{aligned}$$

Soit encore:

$$\begin{aligned} e^{i\omega_j h}\left(1 - e^{i\omega_j}\mathbf{B}\right)\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t} &= \mathbf{U}_{\omega_j}\left\{\lambda_j\left(\mathbf{B}\right)a_j\left(\mathbf{B}\right)\varepsilon\right\}_t - \gamma_{j,0}e^{-i\omega_j t} \\ &+ \left(\delta_{1,j}\varepsilon_t + \delta_{2,j}\varepsilon_{t-1}\right)e^{i\omega_j} + \delta_{2,j}\varepsilon_t e^{2i\omega_j} + O_p\left(h^{-q+1/2}\right) \end{aligned} \tag{97}$$

De même, on a la relation conjuguée:

$$e^{-i\omega_j h}\left(1-e^{-i\omega_j}\mathbf{B}\right)\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t}=\mathbf{U}_{-\omega_j}\left\{\lambda_j\left(\mathbf{B}\right)a_j\left(\mathbf{B}\right)\varepsilon\right\}_t-\overline{\gamma_{j,0}}e^{i\omega_j t} \\ +\left(\delta_{1,j}\varepsilon_t+\delta_{2,j}\varepsilon_{t-1}\right)e^{-i\omega_j}+\delta_{2,j}\varepsilon_t e^{-2i\omega_j}+O_p\left(h^{-q+1/2}\right) \tag{98}$$

D'après (31), il résulte de (97) et (98), après réduction :

$$\left\{-\tfrac{\sin[(h-1)\omega_j]}{\sin\omega_j}+\tfrac{\sin[h\omega_j]}{\sin\omega_j}\mathbf{B}\right\}\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t}+\delta_{2,j}\varepsilon_t=\mathbf{S}_{\omega_j}\left\{\lambda_j\left(\mathbf{B}\right)a_j\left(\mathbf{B}\right)\varepsilon\right\}_t+d_{j,t}\left[\underline{\mathbf{E}}\right] \\ +O_p\left(h^{-q+1/2}\right) \tag{99}$$

$\delta_{2,j}$ peut être évalué à partir de (23), (21) et (50) par:

$$\delta_{2,j}=-2\times\frac{\operatorname{Im}\left[\Psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right]\times\operatorname{Re}\left\{\left[\varphi'\left(e^{i\omega_j}\right)\right]^{-1}\right\}}{\sin\omega_j} \tag{100}$$

On vérifie ensuite aisément que le terme $d_{j,t}\left[\underline{\mathbf{E}}\right]$ figurant dans (99) est identique au terme $d_{j,t}\left[\underline{\mathbf{E}}\right]$ de (58).

Cas $\omega=\pi$ ou $\omega=0$ sous $\mathbf{H}_d^1$ (40) s'écrit, puisque $a_j\left(\mathbf{B}\right)=a_j$:

$$\begin{cases}\Delta_{\omega_j}\left(\mathbf{B}\right)Z_{j,t}=a_j u_t \text{ pour } t\geq 1\\ \text{et}\\ Z_{j,0}=0\end{cases}$$

L'innovation de $\left[\Delta_{\omega_j}\left(\mathbf{B}\right)Z_{j,t}\right]$ est le bruit-blanc $\left(a_j\lambda_j\varepsilon_t\right)$ et:

$$\mathbf{S}_{\omega_j}\left\{\varepsilon\right\}_{t+h}=\cos\left(\omega_j h\right)\mathbf{S}_{\omega_j}\left\{\varepsilon\right\}_t+\sum_{k=t+1}^{t+h}\varepsilon_k\cos\left\{\omega_j\left(t+h-k\right)\right\}$$

d'où, par (54) (les détails sont omis):

$$\cos\left(\omega_j h\right)\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t}=\mathbf{S}_{\omega_j}\left\{\lambda_j a_j\varepsilon\right\}_t+d_{j,t}\left[\mathbf{E}\right]+O_p\left(h^{-q+1/2}\right) \tag{101}$$

Cas $\omega=0$ sous $\mathbf{H}_d^2$ La composante $\mathbf{I}\left(1\right)$, Z^2_{1t} est traitée comme dans la section 5.2.4. Pour Z^1_{1t}, on a en vertu de (57):

$$Z^1_{1,t}=\mu_1\Psi\left(1\right)\left(\mathbf{S}_0^2\left(\varepsilon\right)_t\right)-\mu_1\Psi'(1)\left\{\mathbf{S}_0\left(\varepsilon\right)_t\right\}+d_{1,t}\left(\underline{\mathbf{E}}\right)+Td_{1,t}\left(\underline{\mathbf{E}}\right)+\mu_1\Psi_{11}\left(\mathbf{B}\right)\varepsilon_t$$

On notera ici plus simplement :

$$d_{1,t}\left(\underline{\mathbf{E}}\right)+Td_{1,t}\left(\underline{\mathbf{E}}\right)=\lambda_0+\lambda_1 t$$

avec λ_0,λ_1 variables aléatoires dépendant de $\left\{\varepsilon_k,k\leq 0\right\}$.

$\left(a_1\varepsilon_t\right)$ est l'innovation du processus $\left(\mu_1\Psi_{11}\left(\mathbf{B}\right)\varepsilon_t\right)$. On obtient:

$$\widehat{Z}^{1\varepsilon}_{1,t+h|t}=\mu_1\Psi\left(1\right)\left\{\mathbf{S}_0^2\left(\varepsilon\right)_t+h\mathbf{S}_0\left(\varepsilon\right)_t\right\}-\mu_1\Psi'(1)\left\{\mathbf{S}_0\left(\varepsilon\right)_t\right\}+\lambda_0+\lambda_1\left(t+h\right)+O_p\left(h^{-q+1/2}\right) \tag{102}$$

puis:

$$\widehat{\Delta_0 Z}^{1\varepsilon}_{1,t+h|t}=\mu_1\Psi\left(1\right)\left\{\mathbf{S}_0\left(\varepsilon\right)_t\right\}+\lambda_1+O_p\left(h^{-q+1/2}\right) \tag{103}$$

Notons:

$$\xi_{t,h} = \widehat{Z}^{1\varepsilon}_{1,t+h|t} - h\widehat{\Delta_0 Z}^{1\varepsilon}_{1,t+h|t}$$

Il résulte de (102) et (103):

$$\xi_{t,h} = \mu_1 \Psi(1) \left\{ \mathbf{S}_0^2 (\varepsilon)_t \right\} - \mu_1 \Psi'(1) \left\{ \mathbf{S}_0 (\varepsilon)_t \right\} + \lambda_0 + \lambda_1 t + O_p \left(h^{-q+1/2} \right) \tag{104}$$

Ensuite, considérons pour $t \geq 1$ la série temporelle $\rho_t^{(h)} = \widehat{\Delta_0 Z}^{1\varepsilon}_{1,\ t+h|\ t}$ on remarque que:

$$\xi_{t,h}^{(2)} = \mathbf{S}_0 \left[\rho^{(h)} \right]_t = \mu_1 \Psi(1) \left\{ \mathbf{S}_0^2 (\varepsilon)_t \right\} + \lambda_1 t + O_p \left(h^{-q+1/2} \right) \tag{105}$$

On obtient alors une estimation de la composante stochastique $\mathbf{I}(2)$ et du trend. De (104) et (105) résulte ensuite une estimation pour $t \geq 1$ de la composante $\mathbf{I}(1)$ et du terme constant, donnée par :

$$\xi_{t,h}^{(1)} = \xi_{t,h} - \xi_{t,h}^{(2)} \tag{106}$$

Remarque 19 *Les développements précédents ne sont utilisables en pratique que pour t assez grand, de façon à pouvoir calculer les prévisions $\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t}$. Nous choisissons ainsi $t \geq t_m = 24$.*

6 Mise en œuvre

On dispose d'un échantillon $(y_t)_{-d+1 \leq t \leq T}$. Il faut alors enchaîner les étapes ci-dessous.

6.1 Identification de $\varphi(\mathbf{B})$

Θ étant défini par (7) ou (8), il s'agit d'identifier les racines unitaires présentes dans (y_t), étape cruciale pour le calcul ultérieur des composantes de la série. Nous supposerons que le choix entre les hypothèses $\mathbf{H}_d^1$ et $\mathbf{H}_d^2$ a déjà été effectué, c'est à dire que l'on sait déjà si la série est au moins intégrée d'ordre 1 à la fréquence $\omega = 0$. Typiquement, cette hypothèse sera supposée vérifiée, comme souvent dans la littérature pour les données macroéconomiques nominales : les tests de racine unitaire seront donc effectués sur la variable en différence première. Pour les données réelles, on travaillera en revanche sur le niveau de la variable, et l'hypothèse $\mathbf{H}_d^1$ sera privilégiée[7].

Conformément aux recommandations de Hylleberg (1995), nous utiliserons conjointement le test proposé par Hylleberg, Engle, Granger et Yoo (1990), dénommé " HEGY", et le test de Canova-Hansen (1993), dénommé "CH". Chacun de ces tests permet d'identifier la présence de composantes stochastiques non-stationnaires parmi un ensemble de fréquences ω_j fixé. Les statistiques de test associées à chaque fréquence sont de plus asymptotiquement indépendantes entre elles. Les différences majeures entre les deux tests résident dans le choix de l'hypothèse nulle (non-stationnaire en ω_j pour HEGY, stationnaire en ω_j pour CH), et le traitement du résidu du modèle (paramétrique, par introduction de retards pour HEGY, non-paramétrique, par estimation de la variance de long-terme pour CH).

[7] Rappelons que le point central de ce travail est l'identification précise de la dynamique saisonnière.

Pour le test HEGY, les douze "constantes" saisonnières $d_{j,t}\left[\underline{a}\right]$ sont incluses dans la régression, et le nombre de retards est sélectionné par minimisation du critère de Schwartz (BIC), le nombre maximum de retards autorisé étant $p_{\max} = 15$. Pour le test CH, la matrice de long-terme, proportionnelle à la densité spectrale en zéro, est estimée avec un noyau de Bartlett. Partant de Θ donné par (7) ou (8), selon la périodicité de la série, et $\Theta_2 = \Theta \setminus \Theta_1$, la méthodologie choisie est la suivante :

1. Effectuer le test HEGY et identifier les racines unitaires, c'est à dire Θ_1^{HEGY}
2. Effectuer le test CH et identifier les racines unitaires, c'est à dire Θ_1^{CH}
3. Les fréquences $\omega_j \in \widetilde{\Theta}_1 = \Theta_1^{HEGY} \cap \Theta_1^{CH}$ sont affectées à Θ_1.
4. Pour les fréquences $\omega_j \in \Theta$ pour lesquelles les résultats des deux tests sont discordants : la volatilité et l'instabilité des séries étudiées nous conduit à privilégier l'hypothèse de non-stationnarité comme une représentation parcimonieuse des ruptures de toute nature (tendance, comportement saisonnier). A ce titre, nous privilégions le test HEGY construit sur l'hypothèse nulle de racine unitaire. Il en résulte la démarche suivante :

- Effectuer le test HEGY avec le modèle différencié selon les racines unitaires figurant dans $\Theta_1^{HEGY} \cap \Theta_1^{CH}$, en testant les racines unitaires détectées seulement par l"un des deux tests, c'est à dire $\widetilde{\Theta}_1^*$ défini par:

  $$\omega_j \in \Theta_1^{CH}, \omega_j \notin \Theta_1^{HEGY} \text{ ou } \omega_j \notin \Theta_1^{CH}, \omega_j \in \Theta_1^{HEGY}$$

  Par rapport au test HEGY usuel effectué lors de l'étape 1, l'analyse consiste maintenant à créer la variable:

  $$\widetilde{y}_t = \prod_{\omega_j \in \widetilde{\Theta}_1 \cup \widetilde{\Theta}_1^*} \left[\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\right] y_t$$

  puis à effectuer la régression:

  $$\begin{aligned} \widetilde{y}_t = & \textstyle\sum_{k=1}^{p} c_k \widetilde{y}_{t-k} + \sum_{\omega_j \in \widetilde{\Theta}_1^* \setminus \{0,\pi\}} \left\{ \alpha_j \left[\mathbf{S}_{\omega_j}\{\widetilde{y}\}\right]_{t-1} + \beta_j \left[\mathbf{S}_{\omega_j}\{\widetilde{y}\}\right]_{t-2} \right\} \\ & + \textstyle\sum_{\omega_j \in \widetilde{\Theta}_1^* \cap \{0,\pi\}} \alpha_j \left[\mathbf{S}_{\omega_j}\{\widetilde{y}\}\right]_{t-1} \\ & + \textstyle\sum_{\omega_j \in \widetilde{\Theta}_1^*} d_{j,t}\left[\underline{a}\right] + \widetilde{\varepsilon}_t \end{aligned}$$

  On utilise la statistique de Fisher pour l'hypothèse $\mathbf{H}_j : \alpha_j = \beta_j = 0$ lorsque $\omega_j \notin \{0, \pi\}$, et la statistique de Student associée à α_j lorsque $\omega_j \in \{0, \pi\}$.
  Cette étape détermine Θ_1 et Θ_2, terminant ainsi l'analyse des racines unitaires.

- Tester par test de Student la significativité des composantes déterministes associée à Θ_2 dans le modèle différencié selon les racines unitaires figurant dans Θ_1 : cette étape termine l'analyse des composantes déterministes du modèle. On utilise donc la variable:

  $$\widetilde{y}_t = \prod_{\omega_j \in \Theta} \left[\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\right] y_t$$

et la régression :

$$\widetilde{y}_t = \sum_{k=1}^{p} c_k \widetilde{y}_{t-k} + \sum_{\omega_j \in \Theta_2} d_{j,t} \left[\underline{a}\right] + \widetilde{\varepsilon}_t$$

Là encore, p est déterminé sur la base du critère BIC.

L'introduction de racines unitaires permet une modélisation parcimonieuse des ruptures subies par la série : changement de régime, saisonnalité évolutive. On s'attend donc à ce que le nombre de racines unitaires pris en compte augmente avec la taille de l'échantillon traité, dans la mesure où les ruptures de toute sorte sont très probables sur longue période. Pour des périodes plus courtes, les tests seront nécessairement fragiles. Une amélioration de cette procédure consisterait à effectuer un exercice de bootstrap, au moins pour le test HEGY, suivant en cela les préconisations de Burridge et Taylor (2004). Nous proposons ici de compléter le diagnostic économétrique par un outil graphique simple : il s'agit de représenter la trajectoire des statistiques de test pour tous les sous-échantillons $(y_t)_{t=1,\ldots,L}$ avec $L \in \left\{\left[\frac{T}{2}\right], \left[\frac{T}{2}\right]+1, \ldots, T\right\}$. Cet examen visuel permet de vérifier si le résultat obtenu pour $L = T$ (c'est à dire, la statistique sur l'échantillon complet) est accidentel, ou est confirmé par le comportement récent de la série. Rappelons qu'en l'absence de racine unitaire, la statistique correspondante diverge vers $+\infty$: une relative stabilité de la statistique de test en fonction de L pourrait ainsi donner plus de poids à l'acceptation de l'hypothèse nulle.

6.2 Estimation des composantes

On se place sous $\mathbf{H}_d^1$. Le traitement de $\mathbf{H}_d^2$ recquiert l'opération supplémentaire décrite au § 5.2.4.

1a <u>Approche paramétrique (ou semi paramétrique)</u> :

a) Estimation du modèle (7) en imposant une structure paramétrique <u>stationnaire</u> de type SARMA (ou AR), <u>sans terme constant</u> pour la variable (u_t) :

$$\phi(\mathbf{B})\, u_t = \varkappa(\mathbf{B})\, \varepsilon_t \tag{107}$$

Le modèle, estimé par maximum de vraisemblance, s'écrit symboliquement:

$$y_t = \frac{[d_{r+1}|\ldots|d_L]\left[\underline{\mathbf{a}_0}\right]}{\varphi(\mathbf{B})} + \frac{\varkappa(\mathbf{B})}{\varphi(\mathbf{B})\,\phi(\mathbf{B})}\varepsilon_t \tag{108}$$

b) Calcul de $\widehat{u}_t = \varphi(\mathbf{B})\, y_t - [d_{r+1}|\ldots|d_L]\left[\underline{\widehat{\mathbf{a}_0}}\right]$ pour $t = 1, \ldots T$, avec $\underline{\widehat{\mathbf{a}_0}}$ le vecteur des coefficients estimés figurant dans d_t.

c) Calcul de $\widehat{Z}_{j,t}$ pour $t = 1, \ldots T$ à partir des $\widehat{u}_t$

d)Il est possible d'inclure les effets déterministes non-saisonniers ξ_t lors de cette phase d'estimation. En supposant que ces effets sont linéraires, fonction de K variables explicatives formant le vecteur κ_t :

$$\xi_t = \kappa_t' \beta$$

le modèle s'écrit symboliquement:

$$y_t = \kappa_t' \beta + \frac{[d_{r+1}|\ldots|d_L]\left[\underline{\mathbf{a}_0}\right]}{\varphi(\mathbf{B})} + \frac{\varkappa(\mathbf{B})}{\varphi(\mathbf{B})\,\phi(\mathbf{B})}\varepsilon_t \tag{109}$$

et peut être estimé par maximum de vraisemblance.

Il en résulte ensuite:

$$\widehat{u}_t = \varphi(\mathbf{B})\, y_t - \varphi(\mathbf{B})\, \kappa_t \widehat{\beta} - [d_{r+1}|\ldots|d_L]\, \left[\underline{\widehat{\mathbf{a}}_0}\right] \tag{110}$$

1b. <u>Approche non-paramétrique</u> :

Par rapport à 1a], l'estimation du modèle (7) s'effectue en effectuant les corrections non-paramétriques d'usage pour tenir compte de la structure de corrélation de (u_t). Il en résulte:

$$\widehat{u}_t = \varphi(\mathbf{B})\, y_t - [d_{r+1}|\ldots|d_L]\, \left[\underline{\widehat{\mathbf{a}}_0}\right] \tag{111}$$

La prise en compte des effets déterministes ξ_t n'est pas envisagée ici.

2. Estimation des composantes déterministes non-stochastiques en appliquant les résultats du § 5.1 avec $\widehat{d}_t = [d_{r+1}|\ldots|d_L]\, \left[\underline{\widehat{\mathbf{a}}_0}\right]$: on obtient T_t^D et S_t^D pour $t = 1, \ldots, T$.

On détaille maintenant l'approche par prévision (5.2.4), l'estimation selon (5.2.3) ne nécessitant pas de précisions supplémentaires.

3. Etant donné $h = h_*$ fixé assez grand, et $t \geq t_m$: pour chaque $t \geq t_m$: calcul à partir de $(\widehat{u}_t)_{t\geq 1}$ de la prévision (estimée) $\widehat{u}^{\varepsilon}_{j,t+h_*|t}$ en imposant les coefficients estimés $\widehat{\phi}(\mathbf{B})$ et $\widehat{\varkappa}(\mathbf{B})$ de l'étape 1].

4. Pour chaque composante $Z_{j,t}$: calcul pour chaque valeur de $t \geq 1$ des prévisions $\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t}$ par la relation de récurrence (pour $h = 0, 1, \ldots, h_*$):

$$\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})\, \widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t} = a_j(\mathbf{B})\, \widehat{u}^{\varepsilon}_{j,t+h|t}$$

On utilise les conditions "initiales":

$$\widehat{Z}^{\varepsilon}_{j,t+h|t} = \widehat{Z}_{j,t+h} \text{ et } \widehat{u}^{\varepsilon}_{j,t+h|t} = \widehat{u}_{j,t+h} \text{ si } h \leq 0$$

5. Estimation de $\Psi\left(e^{-i\omega_j}\right)$ puis $\delta_{2,j}$ à partir de 1] pour $j = 2, \ldots, r$.

6. Estimation pour $t_m \leq t \leq T$ de la composante stochastique de S_t par (99), (101) avec $h = h_*$ pour $j = 2, \ldots, r$, en utilisant le résidu estimé $\widehat{\varepsilon}_t$ obtenu en 1].

7. Estimation pour $t_m \leq t \leq T$ de la composante stochastique de T_t par (101) avec $h = h_*$ pour $j = 1$.

8. Estimation pour $1 \leq t \leq t_m - 1$ des composantes stochastiquesde S_t et T_t directement à partir des $\widehat{Z}_{j,t}$, ce qui revient à supposer que $C_t = 0$ pour ces dates.

9. Estimation finale de T_t et S_t à partir de 3], 7] et 8].

10. Estimation pour $1 \leq t \leq T$ de la composante cyclique (purement stochastique):

$$C_t = y_t - T_t - S_t$$

7 Conclusion

Ce papier propose une méthode simple et cohérente de décomposition d'une série temporelle brute suivant les composantes traditionnelles, en identifiant le plus précisément possible la nature de la saisonnalité (stochastique ou déterministe) présente dans la série. L'usage de la méthodologie inspiré de Beveridge et Nelson présente l'avantage de réduire, en régime permanent, les révisions des composantes obtenues aux seules révisions des données brutes, et, d'un point de vue économétrique, évite la propagation des racines unitaires depuis la partie autorégressive, vers la moyenne mobile des composantes estimées.

Ce travail admet deux prolongements distincts. D'une part, il s'agirait d'examiner la pertinence des indicateurs obtenus du point de vue de l'analyse économique : le papier de Lacroix (2008) poursuit cet objectif en étudiant les propriétés de la décomposition proposée, puis en proposant une première étude de cas sur deux indicateurs macroéconomiques.

D'autre part, il serait naturel de travailler dans un cadre multivarié plutôt qu'univarié. Ce deuxième objectif peut être atteint de deux façons :

- en effectuant au préalable la décomposition séparément pour plusieurs séries, puis en analysant conjointement certaines composantes. L'étude des composantes transitoires permet alors l'analyse de la synchronisation des cycles entre variables. Dans un autre registre, les composantes stochastiques non-stationnaires sont intéressantes dans l'optique de tests de cointégration dans la mesure où elles concentrent toute la variabilité de la série à la fréquence concernée. L'estimation du nombre de relations de cointégration, ainsi que des coefficients associées pourrait s'avérer alors particulièrement efficiente.

- en se plaçant d'emblée dans le cadre multivarié pour effectuer la décomposition entre composantes non-stationnaires saisonnières et non-saisonnières, et composantes transitoires stationnaires. Il s'agit alors d'identifier les tendances communes pour chaque fréquence traitée. Cette analyse recquiert l'identificaton précise des espaces de cointégration associés, en utilisant par exemple les résultats de Johansen et Schaumburg (1999).

References

[1] **BAXTER M., KING R.G.**, (1999), Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series, *The Review of Economic and Statistics*, 91(4), 575-593

[2] **BELL W.R** (1984), Signal Extraction for Nonstationary Time Series, *Annals of Statistics*, 12, 646-664.

[3] **BEVERIDGE D., NELSON C.R.** (1981) , A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Component with Partyicular Attention to Measurement of the 'Business Cycle'*, Journal of Monetary Economics, 7*, 151-174

[4] **BREITUNG J.** (1994) , A Model Based Seasonal Adjustment Method Using the Beveridge-Nelson Decomposition*, Allgemeines Statistisches Archiv, 78*, 365-385

[5] **BREITUNG J., FRANSES P.H.** (1998) , On Phillips-Perron-Type Tests for Seasonal Unit Roots*, Econometric Theory*, *14,* 200-221.

[6] **BREITUNG J., GOMEZ V.** (1999) , The Beveridge-Nelson Decomposition : a Different Perspective with New Results*, Journal of Time Series Analysis*, *20,* 527-536.

[7] **BÜHLMANN P.** (1996) , Confidence Regions for Trends in Time Series : A Simultaneous Approach with a Sieve Bootstrap. *Tech. Report, Dept. of Statistics, Univ of California, Berkeley*

[8] **BURMAN J.P.** (1980) , Seasonal Adjustment by Signal Extraction*, Journal of the Royal Statistical Society A, 143*, 321-337

[9] **BURRIDGE P., TAYLOR A.M.** (2004) , Bootstrapping the HEGY Seasonal Unit Root Tests*, Journal of Econometrics, 123,* 67-87

[10] **CANOVA F.** (1998) , Detrending and Business Cycle Facts*, Journal of Monetary Economics, 41*, 475-512

[11] **CANOVA F., HANSEN B.E.** (1995) , Are Seasonal Patterns Constant Over Time? A Test of Seasonal Stability*, Journal of Business and Economic Statistics, 13*, 237-252

[12] **DOZ C., RABAULT G., SOBCZAK N.** (1995) , Décomposition Tendance-Cycle : Estimation par des Méthodes Statistiques Univariées*, Economie et Prévision, 120,* 73-95

[13] **ENGLE R., GRANGER C.W.J., HYLLEBERG S., YOO B.S.** (1990) , Seasonal Integration and Cointegration*, Journal of Econometrics, 44,* 215-238

[14] **FINDLEY D.F., MONSELL B.C., BELL W.R., OTTO M.C., CHEN B.C**., (1998), New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program, *Journal of Business and Economics Statistics*, 16, 127-157.

[15] **GEWEKE J.**, (1977), The Temporal and Sectoral Aggregation of Seasonally Adjusted Tilme Series, *in 'Seasonal Analysis of Economic Times Series', Ed. A. Zellner, Washington D.C., U.S. Bureau of Census*

[16] **GHYSELS E., GRANGER C.W.J., SIKLOS P.L.**, (1996), Is Seasonal Adjustment a linear or

non-linear Data-Filtering Process ?, *Journal of Business and Economics Statistics*, 14, 374-386

[17] **GOMEZ V., MARAVALL.A.** (1996) , Programs TRAMO and SEATS; Instructions for the User*, WP 9628, Banque d'Espagne*

[18] **GREGOIR S.** (1994) , Multivariate Time Series With Various Hidden Unit Roots. Part 1: Integral Operator Algebra and Representation Theorem, *Econometric Theory, 15,4,* 435-468

[19] **GREGOIR S., LAROQUE G.** (1998) , Seasonal Adjustment: The Point of View of Economists and of Policy Makers, *Working paper presented at SASM workshop (EUROSTAT)*

[20] **HARVEY A.C., PETERS S**., (1990), Estimation procedures for structural time series models, *Journal of Forecasting*, 9, 89-108.

[21] **HILLMER S.C., TIAO G.C.** (1982) , An Arima-Model Based Approach to Seasonal Adjustment*, Journal of the American Statistical Association, 77*, 63-70

[22] **HYLLEBERG S.** (1995) , Tests for Seasonal Unit Roots : General to Specific ot Specific to General ?*, Journal of Econometrics, 69,* 5-25

[23] **HYLLEBERG S., ENGLE R.F., GRANGER C.W.J., YOO B.S.** (1990) , Seasonal Integration and Cointegration ?*, Journal of Econometrics, 44,* 215-238

[24] **JOHANSEN S.** , **SCHAUMBURG E.** (1999) Likelihood analysis of seasonal cointegration*, Journal of Econometrics, 88*, 301-339

[25] **KOOPMAN S.J, HARVEY A.C., DOORNIK J.A., SHEPARD N.**, (1995), STAMP 5.0 - Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor, *Chapman and Hall.*

[26] **KREISS J-P.,** (1988) , Asymptotic Properties of Residual Boorstrap for Autoregressions, *Working Paper, Institut für Mathematische Stokastik Technische, Universität Braunschweig*

[27] **LACROIX R.,** (2008) , Analyse Conjoncturelle de Données Brutes et Estimation de Cycles. Partie II : mise en œuvre, *Working Paper, Banque de France, NER-R # xxx*

[28] **LI Y.** (1998) , Low-pass Filtered Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors*, Journal of Econometrics, 85,* 289-316

[29] **MARAVALL A.** (1995) , Unobserved Components in Economic Time Series, *Handbook of Applied Econometrics, vol 1, Oxford: Basil Blackwell*

[30] **MIRON J.A.** (1996) , The Economics of Seasonal Cycles, *MIT Press*

[31] **NEWBOLD P., VOUGAS D.** (1996) , Beveridge-Nelson-Type Trends for I(2) and Some Seasonals Models*, Journal of Times Series Analysis, 17*, 151-170

[32] **PLANAS F., FIORENTINI G.** (2001) ,): Overcoming Non-Admissibility in ARIMA Model Based Signal Extraction, *Journal of Business and Economics Statistics*, *19*, 455-464.

[33] **QUAH D.** (1989) , The Relative Importance of Permanent and Transitory Components : Identification and Some Theorical Bounds*, Econometrica, 60*, 107-148

[34] **ROBINSON P.M.** (1991) , Automatic Frequency Domain Inference on Semiparametric and Nonpara-

metric Models, *Econometrica, 59*, 1329-1363

[35] **SIMS C.A.** (1974) , Seasonality in Regression, *Journal of the American Statistical Association, 69,* 618-626

Notes d'Études et de Recherche

183. J. Coffinet and S. Gouteron, “Euro Area Market Reactions to the Monetary Developments Press Release,” October 2007.

184. C. Poilly, “Does Money Matter for the Identification of Monetary Policy Shocks: A DSGE Perspective,” October 2007.

185. E. Dhyne, C. Fuss, H. Pesaran and P. Sevestre, “Lumpy Price Adjustments: a Microeconometric Analysis,” October 2007.

186. R. Cooper, H. Kempf and D. Peled, “Regional Debt in Monetary Unions: Is it Inflationary?,” November 2007.

187. M. Adanero-Donderis, O. Darné and L. Ferrara, « Deux indicateurs probabilistes de retournement cyclique pour l’économie française », Novembre 2007.

188. H. Bertholon, A. Monfort and F. Pegoraro, “Pricing and Inference with Mixtures of Conditionally Normal Processes,” November 2007.

189. A. Monfort and F. Pegoraro, “Multi-Lag Term Structure Models with Stochastic Risk Premia,” November 2007.

190. F. Collard, P. Fève and J. Matheron, “The Dynamic Effects of Disinflation Policies,” November 2007.

191. A. Monfort and F. Pegoraro, “Switching VARMA Term Structure Models - Extended Version,” December 2007.

192. V. Chauvin and A. Devulder, “An Inflation Forecasting Model For The Euro Area,” January 2008.

193. J. Coffinet, « La prévision des taux d’intérêt à partir de contrats futures : l’apport de variables économiques et financières », Janvier 2008.

194. A. Barbier de la Serre, S. Frappa, J. Montornès et M. Murez, « La transmission des taux de marché aux taux bancaires : une estimation sur données individuelles françaises », Janvier 2008.

195. S. Guilloux and E. Kharroubi, “Some Preliminary Evidence on the Globalization-Inflation nexus,” January 2008.

196. H. Kempf and L. von Thadden, “On policy interactions among nations: when do cooperation and commitment matter?,” January 2008.

197. P. Askenazy, C. Cahn and D. Irac “On “Competition, R&D, and the Cost of Innovation, February 2008.

198. P. Aghion, P. Askenazy, N. Berman, G. Cette and L. Eymard, “Credit Constraints and the Cyclicality of R&D Investment: Evidence from France,” February 2008.

199. C. Poilly and J.-G. Sahuc, “Welfare Implications of Heterogeneous Labor Markets in a Currency Area,” February 2008.

200. P. Fève, J. Matheron et J.-G. Sahuc, « Chocs d’offre et optimalité de la politique monétaire dans la zone euro », Février 2008.

201. N. Million, « Test simultané de la non-stationnarité et de la non-linéarité : une application au taux d'intérêt réel américain », Février 2008.

202. V. Hajivassiliou and F. Savignac, "Financing Constraints and a Firm's Decision and Ability to Innovate: Establishing Direct and Reverse Effects," February 2008.

203. O. de Bandt, C. Bruneau and W. El Amri, "Stress Testing and Corporate Finance," March 2008.

204. D. Irac, "Access to New Imported Varieties and Total Factor Productivity: Firm level Evidence From France," April 2008.

205. D. Irac, "Total Factor Productivity and the Decision to Serve Foreign Markets: Firm Level Evidence From France," April 2008.

206. R. Lacroix, "Assessing the shape of the distribution of interest rates: lessons from French individual data," April 2008.

207. R. Lacroix et Laurent Maurin, « Désaisonnalisation des agrégats monétaires : Mise en place d'une chaîne rénovée », Avril 2008.

208. T. Heckel, H. Le Bihan and J. Montornès, "Sticky Wages. Evidence from Quarterly Microeconomic Data," April 2008.

209. R. Lacroix, « Analyse conjoncturelle de données brutes et estimation de cycles. Partie 1 : estimation de tests », Avril 2008.

Pour accéder à la liste complète des Notes d'Études et de Recherche publiées par la Banque de France veuillez consulter le site : http://www.banque-france.fr/fr/publications/ner/ner.htm

For a complete list of Working Papers published by the Banque de France, please visit the website: http://www.banque-france.fr/gb/publications/ner/ner.htm

Pour tous commentaires ou demandes sur les Notes d'Études et de Recherche, contacter la bibliothèque de la direction de la recherche à l'adresse suivante :

For any comment or enquiries on the Working Papers, contact the library of the Research Directorate at the following address :

BANQUE DE FRANCE
41- 1404 Labolog
75049 Paris Cedex 01
tél : 0033 (0)1 42 92 49 55 ou 62 65
fax :0033 (0)1 42 92 62 92
email : thierry.demoulin@banque-france.fr
jeannine.agoutin@banque-france.fr