La consommation de ressources environnementales en incertitude

Alain Ayong Le Kama
Université de Grenoble 2, Commissariat général du Plan et EUREQua, Université de Paris I[*]

Volontairement ou involontairement, les agents font quotidiennement face à des aléas, et notamment des aléas environnementaux, qui rendent incertaines les conséquences de leurs actions. Ces aléas environnementaux peuvent avoir un caractère exogène ou endogène. Ils peuvent être dus soit à une insuffisance de connaissances sur les liens entre les actions des agents et l'environnement, soit encore tout simplement aux incertitudes sur les préférences[1] ou les ressources futures. De toutes manières, quelles que soient leurs caractéristiques ou leurs causes ils ont des conséquences importantes sur la conception économique du concept de soutenabilité.

L'introduction de l'incertitude n'est pas véritablement récente en économie de l'environnement. Déjà Weisbrod (1964), dans une analyse de l'existence de valeurs d'option dans la gestion de patrimoines irréversibles, avait introduit un exemple sur l'économie de l'environnement. Depuis le milieu des années 1970, les économistes se sont largement intéressés à l'analyse de l'incertitude présente sur le niveau des ressources environnementales, cette littérature s'est essentiellement organisée autour de l'analyse de la gestion des ressources *non renouvelables*[2].

La critique la plus fréquemment adressée à ces modèles avec incertitude sur les ressources environnementales (renouvelables ou non), est leur

---

* *Adresse :* EUREQua, Université de Paris I, Maison des Sciences Economiques, 106-112 bd de l'Hôpital 75647 Paris cedex 13. *e-mail :* adayong@univ-paris1.fr
Je remercie A. d'Autume, pour les nombreuses discussions qui ont servi de base à ce travail, ainsi que F. Collard, J.-P. Drugeon, K. Schubert, B. Wignolle et tout particulièrement J.M. Tallon, pour leurs précieux commentaires sur les versions préliminaires de cet article. Je remercie également les deux rapporteurs de cette revue dont les remarques m'ont permis d'améliorer considérablement cet article. Je reste néanmoins seul responsable d'éventuelles erreurs ou omissions.

1 Pour une analyse des problèmes liés à l'incertitude sur les préférences futures, cf. Betratti *et al.* (1998), Ayong Le Kama (2001a) et Ayong Le Kama et Schubert (2003a).

2 Pour une revue exhaustive de la littérature sur la gestion des ressources non renouvelables en incertitude, cf. Epaulard et Pommeret (1998).

incapacité à décrire de manière exhaustive les comportements des agents en présence de ce type d'incertitude. En effet, et souvent pour des raisons techniques, ces modèles se cantonnent pour l'essentiel à une comparaison entre les solutions avec et sans incertitude. Ces modèles aboutissent généralement à des résultats, assez triviaux, qui veulent que l'introduction de l'incertitude provoque, relativement à une situation déterministe, un usage plus précautionneux de la ressource sur laquelle porte l'incertitude. Il est important de noter que si cet article, qui se place dans le cadre général des modèles de cycle de vie, est centré sur les problèmes environnementaux et traite essentiellement de la consommation d'une ressource renouvelable, le cadre d'analyse qu'il présente est en fait beaucoup plus large et porte plutôt sur les décisions de consommation en incertitude avec risque de faillite. Mais nous avons choisi de nous restreindre aux problématiques environnementales, et particulièrement à celles liées à la consommation de ressources renouvelables, car les problèmes d'incertitude s'y posent avec acuité et elles constituent par conséquent un champs d'application privilégié.

Nous introduisons dans cet article une contrainte de survie exogène sur la consommation, qui n'est pas automatiquement satisfaite par le simple besoin qu'a l'agent de préserver la ressource environnementale, c'est-à-dire par la contrainte de disponibilité physique de la ressource à laquelle il fait face, mais suppose de « *durcir* » celle-ci en épargnant de la ressource pour éviter plus tard le risque de ne pas pouvoir consommer suffisamment pour assurer sa survie.

L'*hypothèse de cycle de vie* proposée par Modigliani et Brumberg (1954) et le modèle du *revenu permanent* de Friedman (1957) ont permis d'intégrer, dans la littérature économique, le fait que l'individu planifie sa consommation sur son horizon de vie. Ces deux apports essentiels, actuellement résumés sous la seule dénomination de modèle de cycle de vie ou de revenu permanent, supposent en effet des agents économiques rationnels cherchant à maximiser la satisfaction procurée par le flux intertemporel des consommations globales à chaque période sous la contrainte de budget, imposée par le montant des ressources de cycle de vie. Le message principal de ce modèle est que le patrimoine d'un individu constitue essentiellement une réserve de consommation différée, destinée à lui assurer un flux de consommation régulier en palliant tant les fluctuations accidentelles que les variations systématiques des ressources et des besoins au cours du cycle de vie. À l'origine, ce modèle supposait un environnement parfait et déterministe et envisageait uniquement les décisions en matière de consommation et d'épargne. Des développements théoriques ultérieurs tels que ceux dus à Hall (1978), Flavin (1981), Hansen et Singleton (1983), Zeldes ((1989a) et (1989b)) ou Kimball (1990), ont permis d'élargir la compréhension des comportements de consommation des individus en prenant notamment en compte les effets de l'incertitude, des contraintes de liquidité et autres imperfections des marchés.

Nous reprenons, dans cet article, le modèle de cycle de vie ou de revenu permanent avec incertitude sur les revenus futurs du travail que nous adaptons à l'étude du comportement de consommation de ressources environnementales en incertitude. Ainsi, l'individu va-t-il toujours opérer ses choix de consommation sous une contrainte de ressource stochastique ? Au lieu de posséder un patrimoine financier lui rapportant un rendement certain, l'individu va posséder un patrimoine environnemental constitué d'une ressource ayant un taux de régénération, lui aussi supposé certain, et qui lui sert d'unique bien de consommation. Aussi, à la place des revenus du travail incertains, nous allons introduire le fait que l'individu est confronté à des phénomènes naturels de nature aléatoire (variations climatiques, catastrophes écologiques, etc.), susceptibles d'affecter son patrimoine environnemental.

De par le caractère très spécifique de la ressource environnementale étudiée ici, qui ne fait l'objet d'aucun marché où elle pourrait s'échanger, il n'existe aucune possibilité d'emprunt de la ressource pour le consommateur lorsqu'il est confronté à des phénomènes naturels défavorables. Il est alors contraint, quels que soient ses besoins ou ses désirs, de restreindre sa consommation à chaque période à la quantité de ressource effectivement disponible à cette date. Le consommateur fait ainsi face à une contrainte physique de disponibilité de la ressource qui peut s'apparenter à une contrainte de non endettement. Il sera donc essentiel d'analyser la manière dont la prise en compte explicite de cette contrainte affecte les comportements de consommation de ressources environnementales en incertitude.

En outre, quand il s'agit d'incertitude sur les revenus futurs des agents, il est en général sous-entendu que le support de la variable aléatoire caractérisant ces niveaux de revenu est à valeurs positives; ou, en d'autres termes, il est en général admis que la pire des réalisations possibles de cette variable serait un revenu nul. Cependant, quand l'incertitude porte, comme c'est le cas dans cet article, sur des phénomènes naturels tels que par exemple les conditions climatiques, l'on ne saurait se restreindre à ne considérer que des réalisations positives. Par conséquent, il nous faut intégrer le fait que les phénomènes naturels futurs puissent directement affecter le patrimoine de l'individu. En particulier, il convient d'intégrer le fait qu'une réalisation particulièrement désastreuse de ces phénomènes puisse affecter gravement la quantité de ressource disponible pour la consommation au point de rendre impossible cette dernière. Ceci va nous amener à prendre en compte, en sus de la contrainte de disponibilité de la ressource, la contrainte de solvabilité du programme du consommateur, permettant ainsi de garantir sa survie. Il nous faudra ainsi redéfinir les conditions pour lesquelles ce programme est réalisable avant d'analyser les comportements de consommation.

L'objectif de cet article est donc d'étudier, d'une part, les modifications de comportement de préservation de ressources environnementales des agents face à une incertitude sur les évolutions futures de ces ressources; et, d'autre part, de montrer que l'incertitude *ex ante* peut être analysée comme une contrainte physique supplémentaire *ex post*. La notion de « *soutenabilité physique* », introduite par Daly (1991), prend alors un sens très concret de disponibilité physique de la ressource intégrant l'exclusion de toute possibilité de « *faillite* », c'est-à-dire d'impossibilité de consommer suffisamment de manière à assurer sa survie.

Pour ce faire, après avoir décrit le modèle (section 1), nous allons étudier le modèle non contraint (section 2). Ceci nous permettra de rappeler les résultats du modèle de cycle de vie, adaptés au modèle étudié ici; résultats qui nous servent de référence pour les analyses suivantes. Nous introduisons ensuite la contrainte de disponibilité de la ressource (section 3) – contrainte qui peut s'apparenter à une contrainte de liquidité[3] –, afin d'analyser comment la prise en compte explicite de celle-ci, en modifiant fondamentalement les comportements des agents, nous éloigne des conclusions du modèle du revenu permanent. Enfin, après avoir constaté que l'introduction de cette contrainte de disponibilité ne suffit pas à assurer la solvabilité du programme du consommateur (section 4), nous allons préalablement définir les conditions pour que le problème devienne réalisable. Nous remarquerons que ces conditions reviennent soit à « relâcher » ou à « resserrer » la contrainte physique à laquelle fait face le consommateur, selon que ses anticipations sur les réalisations des chocs futurs sont optimistes ou non. Ceci nous permettra alors de déduire des conditions de soutenabilité physique du programme du consommateur.

Pour ce qui a trait aux comportements de consommation, nous obtenons un résultat, somme toute trivial, qui veut que la prise en compte de l'incertitude sur les ressources futures modifie les comportements des agents en fonction de leurs anticipations des chocs futurs : dans le sens d'une plus grande préservation en cas d'anticipations pessimistes et d'une « accélération » de la consommation en cas d'anticipations optimistes. Par contre, toutes ces modifications ne vérifient plus l'hypothèse de proportionnalité de la consommation par rapport à la valeur actualisée des ressources sur l'horizon de vie, base de la théorie du cycle de vie.

Nous montrons par ailleurs que la prise en compte de la contrainte de disponibilité de la ressource environnementale modifie les arbitrages des agents. Le choix optimal de consommation ne correspond plus à celui qui égalise l'utilité marginale de la consommation courante à la valeur escomptée de l'utilité marginale anticipée de la consommation de la période suivante, comme c'est le cas dans le modèle non contraint. Il est maintenant décrit par l'égalité entre l'utilité marginale de la consommation courante et le maximum de l'utilité marginale procurée par la consommation du stock de ressource effectivement disponible pour la consommation, après réalisation du choc, et de la valeur escomptée de l'utilité marginale anticipée de la consommation de la période suivante.

Nous montrons en outre qu'en dépit de l'introduction de la contrainte de disponibilité, il n'est pas possible de s'assurer que le programme du consommateur soit réalisable compte tenu du type d'incertitude analysé; cette

[3] Pour une présentation exhaustive des effets de la prise en compte des contraintes de liquidité sur les comportements de consommation, cf. Zeldes ((1989a) et (1989b)), Deaton et Laroque (1990), Deaton (1991), Deaton (1992), ou Romer (1996).

contrainte ne garantissant pas nécessairement la survie du consommateur. Nous définissons en conséquence un ensemble de conditions de solvabilité, de survie du consommateur. L'analyse du problème sous contrainte de solvabilité montre que les choix optimaux de consommation sont à peu près identiques à ceux du cas précédent avec contrainte de disponibilité, à la réserve près que la contrainte est beaucoup plus « légère », en cas d'anticipations optimistes – l'individu pourra ainsi « relacher » sa contrainte de survie, mais il reste bien évidemment contraint par la disponibilité physique de la ressource –, et beaucoup plus « sévère » si les anticipations de l'agent sur les chocs à venir sont plutôt pessimistes. En effet, dans ce dernier cas, au lieu de considérer le stock de ressource effectivement disponible pour la consommation de manière brute, la contrainte de solvabilité va imposer que ce stock soit diminué à chaque date d'une quantité donnée, correspondant à l'épargne que l'agent doit se constituer pour s'assurer un niveau de consommation au moins équivalent au minimum qui lui permettrait de survivre la période suivante ou, en d'autres termes, afin d'assurer sa survie, et donc la soutenabilité physique du problème. L'individu va ainsi « resserer » sa contrainte de disponibilité pour assurer sa survie.

1 Le modèle

Nous analysons un modèle dans lequel un agent représentatif, ayant une durée de vie T, consomme une unique ressource environnementale et subit un choc exogène, à chaque date, qui vient affecter l'évolution de la ressource et rend ainsi le stock disponible de cette dernière aléatoire. La dynamique d'accumulation du stock de la ressource environnementale est donnée, en temps discret[4], par l'équation différentielle stochastique suivante, introduite par Baranzini et Bourguignon (1994) :

$$R_{t+1} = (1+\delta)R_t + \varepsilon_t - C_t \tag{1}$$

où R_t est le stock de ressource à la date t. Cette ressource a une capacité de régénération naturelle $\delta > 0$ que l'on suppose, pour simplifier, certaine et constante. Le niveau de consommation à la date t est donné par C_t et la variable aléatoire ε_t symbolise l'existence d'un ensemble de phénomènes environnementaux ou naturels aléatoires susceptibles de provoquer une augmentation ou une baisse instantanée et non anticipée du stock de ressource disponible pour la consommation[5]. On suppose aussi, et sans perte de généralité, que les chocs ε_t surviennent en début de période t, leur réalisation étant donc connue par le consommateur au moment du choix de C_t.

[4] Pour une modélisation en temps continu de l'évolution de la ressource, voir notamment Pindyck (1984) ou Plourde et Yeung (1989).

[5] Pour simplifier, on suppose la population constante, toutes les variables précédemment définies peuvent ainsi être considérées comme des variables par tête.

Il est important de souligner à ce stade que si le choc aléatoire ε_t est fortement défavorable, de telle sorte qu'il supprime totalement le stock de ressource existant, *i.e.* $-(1+\delta)R_t = \varepsilon_t$, l'individu ne pourra plus consommer : $C_t = 0$. Cette situation sera qualifiée de « catastrophe totale ». Il est en effet possible dans la réalité qu'une catastrophe naturelle de grande ampleur puisse anéantir la totalité d'une ressource même abondante. Mais, considérer que le choc est encore d'une plus grande ampleur n'aurait pas grand sens ici. Ceci nous conduit à faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1 : *On suppose que le choc aléatoire peut supprimer tout ou partie du stock de ressource existant :* $\varepsilon_t \geqslant -(1+\delta)R_t$, $\forall t$.

Il nous faut en outre tenir compte du fait que la ressource ne peut pas réapparaître une fois épuisée; autrement dit, le stock de reste définitivement nulle si la catastrophe totale se réalise. D'où le corrollaire suivant.

Corollaire 1 : *Si à une date* τ *la catastrophe totale se réalise, i.e.* $\varepsilon_\tau = -(1+\delta)R_\tau$, *alors* $\varepsilon_t = 0$, $\forall t > \tau$. *La date* τ *est donc definie par :* $\tau = \min\{t > 0 : R_{t+1} = 0\}$.

On impose par ailleurs une contrainte de survie exogène sur la consommation. Ainsi, pour pouvoir survivre, le consommateur doit s'assurer, à chaque date, un niveau de consommation au moins égal à un niveau minimum de subsistance exogène[6], $C_{\min} \geqslant 0$. Soit :

Hypothèse 2 : $C_t \geqslant C_{\min}$ $\forall t$.

Pour éviter tout de même que le consommateur puisse choisir à un instant donné un niveau de consommation inférieur au minimum de subsistance, on va supposer de plus que son utilité devient nulle pour toujours une fois la contrainte de survie violée. D'où :

Corollaire 2 : *Si à une date* τ' *quelconque, l'individu choisit un niveau de consommation tel que :* $C_{\tau'} < C_{\min}$, *alors* $E_t U(C_t) = 0$, $\forall t > \tau'$.

Où E_t représente l'opérateur d'espérance pris à la date t et $U(.)$ la fonction d'utilité de l'individu, que l'on suppose continue, deux fois différentiable et à valeurs positives.

Cette hypothèse et son corollaire nous permettent d'intégrer explicitement le fait que si l'aléa est très défavorable, c'est-à-dire s'il réduit trop fortement le stock de ressource disponible pour la consommation, le consommateur pourrait ne plus pouvoir assurer sa survie. Ils nous permettront aussi de montrer, *ex post*, que l'individu n'a pas intérêt à épuiser le stock de ressource.

Le consommateur maximise ainsi une fonction d'utilité intertemporelle égale à l'espérance, à la date 0, de la valeur actualisée des utilités instantanées procurées par les consommations futures. Le facteur d'escompte est $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ où $\rho > 0$ est le taux de préférence pour le présent[7]. Le pro-

[6] Il est possible de supposer, sans aucune perte de généralité, que $C_{\min} = 0$.

[7] Pour une discussion sur les problèmes liés à l'utilisation d'un taux de préférence pour le présent exogène et positif, cf.Heal (1998), Ayong Le Kama (2001b) et Ayong Le Kama et Schubert (2003b).

blème du consommateur peut alors s'écrire de manière générale, sous sa forme standard, comme suit[8] :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{C_t\}} E_0 \sum\limits_{t=0}^{T} \beta^t U(C_t) \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{l} R_{t+1} = (1+\delta)R_t + \varepsilon_t - C_t \quad t = 0, ..., T \\ R_t, \quad C_t - C_{\min} \geqslant 0, \quad R_0 \text{ donné}, \quad R_{T+1} \geqslant 0 \end{array} \right. \end{cases} \tag{2}$$

$R_{T+1} \geqslant 0$, peut s'apparenter à une contrainte de solvabilité standard en horizon fini et peut être remplacée, dans le cas d'un horizon infini, par une condition de non explosibilité qui permet en général de déterminer de manière unique la trajectoire optimale[9].

Si l'on note I_t, la quantité d'information que détient le consommateur à la date t pour prévoir les niveaux futurs des chocs et donc de la ressource, et que l'on considère qu'elle se réduit aux valeurs présentes et passées des stocks de ressource et des chocs, alors on a : $I_t = \{(R_t, \varepsilon_t), (R_{t-1}, \varepsilon_{t-1}), ..., (R_0, \varepsilon_0)\}$. L'on suppose ainsi *l'absence d'oubli*, soit $I_t \subset I_s$ si $t \leqslant s$. L'état du système à chaque date t peut donc être représenté I_t.

Le problème de l'agent revient ainsi à choisir une suite de règles de décision contingentes, c'est-à-dire une suite de fonctions f_t qui l'amèneront à fixer à chaque période sa consommation en fonction de l'état du système, soit $C_t = f_t(I_t)$. Ces règles de décision déterminent donc, conjointement avec les réalisations du processus du choc, l'évolution du stock de la ressource naturelle.

Le principe de programmation dynamique de Bellman permet de résoudre ce problème par une récursion arrière, en déterminant, à la date t, la commande optimale de cette date, C_t, conditionnellement au fait qu'elle sera choisie par la suite dans toutes les éventualités. Ainsi, si l'on définit la fonction-valeur $V_t(R_t, \varepsilon_t)$ donnant le maximum du problème (2) en fonction de l'état I_t, alors la résolution du problème du consommateur revient à déterminer un ensemble de fonctions $\{V_t\}_{t=1,...,T}$ telles que :

$$V_t(R_t, \varepsilon_t) = \begin{cases} \max\limits_{C_t} \{U(C_t) + \beta E_t V_{t+1}(R_{t+1}, \varepsilon_{t+1})\} \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{l} R_{t+1} = (1+\delta)R_t + \varepsilon_t - C_t \quad t = 0, ..., T \\ R_t, \quad C_t - C_{\min} \geqslant 0, \quad R_0 \text{ donné}, \quad V_{T+1} = 0 \end{array} \right. \end{cases} \tag{3}$$

Cette équation définit la valeur de la ressource à la date t comme étant la valeur maximale que l'agent peut obtenir en échangeant de la consommation courante contre de la consommation future compte tenu de sa

8 Pour une formulation exhaustive du problème du consommateur, cf. d'Autume (1994).

9 Les systèmes étudiés possèdant généralement la propriété de point-selle.

contrainte d'accumulation de la ressource environnementale et de la quantité d'information qu'il détient.

2 Le problème non contraint

2.1 La solution non contrainte

On montre aisément que les conditions d'optimalité, du problème non contraint[10], sont résumées par la condition d'Euler suivante :

$$U'(C_t) = \beta(1+\delta)E_t U'(C_{t+1}) \; ; \; t = 1, \ldots, T-1 \tag{4}$$

Cette relation montre qu'à l'optimum on doit avoir l'égalité entre l'utilité marginale de la consommation courante et la valeur escomptée de l'utilité marginale anticipée de la consommation de la période suivante. Le système dynamique avec anticipations rationnelles[11] est alors formé des deux équations (1) et (4) dont les inconnues sont R_t et C_t.

2.2 Un rappel de l'hypothèse de cycle de vie

Zeldes (1989b) définit des conditions nécessaires pour que la solution de ce problème, sous l'hypothèse de cycle de vie, soit valable en présence d'une incertitude sur les ressources futures. Il faut pour cela que : – la fonction d'utilité instantanée, $U(C_t)$, soit quadratique ; – la consommation puisse varier de $-\infty$ à $+\infty$; – le taux de régénération de la ressource, δ, et le taux de préférence pour le présent, ρ, soient égaux. Si ces trois conditions sont vérifiées, alors l'individu va choisir un niveau de consommation équivalent à celui qui aurait prévalu si les phénomènes naturels futurs étaient égaux de manière certaine à leur moyenne.

Nous pouvons ici constater combien apparaîssent restrictives les conditions de validité de l'hypothèse de cycle de vie. Il est cependant important de rappeler ces résultats car ce sont les seuls susceptibles d'être obtenus analytiquement ; ils pourront à ce titre nous servir de référence dans les analyses et discussions à venir. Considérons pour ce faire la fonction d'utilité quadratique suivante :

$$U(C) = C - \frac{a}{2}C^2 \tag{5}$$

---

[10] Condition d'optimalité si l'on résout le problème (3) en omettant de prendre en compte de manière explicite les contraintes de non négativité de R_t et $(C_t - C_{\min})$.

[11] Il est en général impossible de résoudre analytiquement ce problème, même dans sa forme non contrainte. La difficulté inhérente à ce problème est essentiellement due à la présence de l'incertitude et donc de l'opérateur d'espérance dans l'équation (4).

où $a > 0$, est un paramètre exogène et $\frac{1}{a}$ représente un niveau de saturation supposé grand; ce qui signifie, en d'autres termes, que l'on suppose que le niveau de consommation sera toujours tel que l'utilité marginale est positive.

Avec cette spécification quadratique de la fonction d'utilité, *l'utilité marginale de la consommation est linéaire* et donnée par : $U'(C) = 1 - aC$. Et compte tenu de l'égalité entre le taux de régénération de la ressource, δ, et le taux de préférence pour le présent, ρ, soit $\beta(1+\delta) = 1$, la condition d'Euler (4) devient :

$$C_t = E_t C_{t+1} \quad ; \quad t = 1, ..., T-1 \tag{6}$$

Le consommateur prévoit donc une consommation constante dans le temps et ce quelle que soit l'évolution future de la ressource environnementale qu'il anticipe. Le processus aléatoire suivi par la consommation est une *martingale :* l'espérance aujourd'hui de la consommation demain est égale à la valeur courante de la consommation. L'équation (6) peut aussi se mettre sous la forme :

$$\Delta C_{t+1} = C_{t+1} - C_t = C_{t+1} - E_t C_{t+1} = \omega_{t+1}$$

où ω_{t+1} est une innovation, c'est-à-dire un processus orthogonal à l'espace d'information disponible en t qui caractérise le fait que seules les variations non anticipées, et en aucun cas les variations passées, du stock disponible de ressource renouvelable vont affecter les niveaux présents et futurs de la consommation. En d'autres termes, et c'est ce qu'exprime la propriété de martingale, la meilleure prévision de la consommation future, C_{t+1}, que puisse faire l'agent à la date t est simplement le niveau de consommation courant, C_t.

Ainsi, pour un consommateur non altruiste qui prévoit d'épuiser la ressource exactement à la fin de sa vie (*i.e.* $R_{T+1} = 0$), son plan de consommation entre t et T satisfait la contrainte de ressource intertemporelle suivante :

$$\sum_{s=t}^{T}(1+\delta)^{-(s-t)}C_s = (1+\delta)R_t + \sum_{s=t}^{T}(1+\delta)^{-(s-t)}\varepsilon_s$$

Et donc, en prenant l'anticipation en t, c'est-à-dire l'espérance conditionnelle à l'information disponible en t, et en appliquant la loi des projections itératives au résultat donné par l'équation (6), l'on obtient $E_t C_s = C_t$, $\forall s \geqslant t$, ce qui implique alors que :

$$C_t \sum_{s=t}^{T}(1+\delta)^{-(s-t)} = (1+\delta)R_t + \sum_{s=t}^{T}(1+\delta)^{-(s-t)}E_t\varepsilon_s$$

Par analogie avec la richesse humaine, dans les modèles de revenu permanent, qui représente la valeur actualisée du flux de revenu, nous allons définir la « composante stochastique » de la contrainte de ressource intertemporelle, notée RN_t, qui va représenter la valeur actualisée du flux anticipé des conséquences des phénomènes naturels futurs :

$$RN_t = \sum_{s=t}^{T} (1+\delta)^{-(s-t+1)} E_t \varepsilon_s \tag{7}$$

La contrainte de ressource intertemporelle prend alors la forme simple suivante :

$$C_t \sum_{s=t}^{T} (1+\delta)^{-(s-t)} = (1+\delta)(R_t + RN_t)$$

Nous pouvons aussi définir une « **ressource permanente naturelle** », notée RPN_t, qui représente le flux associé à ce stock et qui correspond au niveau constant de ressource naturelle équivalent, en valeur actualisée, à l'agrégation des conséquences des phénomènes naturels futurs anticipés par l'agent :

$$RPN_t = \frac{RN_t}{\sum_{s=t}^{T} (1+\delta)^{-(s-t+1)}} \tag{8}$$

En introduisant le facteur d'annuité :

$$k_{(T-t+1)} = 1 \Big/ \sum_{s=t}^{T} (1+\delta)^{-(s-t+1)} ,$$

le niveau de consommation choisi par l'agent est alors tout simplement égal à sa « **ressource permanente totale** », notée RPT_t, somme de sa ressource permanente naturelle, RPN_t, et de la ressource permanente effective (valeur actualisée de son stock de ressource sur son horizon de vie : $k_{(T-t+1)} R_t$) :

$$C_t = RPT_t = k_{(T-t+1)} \left[R_t + RN_t \right] = k_{(T-t+1)} R_t + RPN_t \tag{9}$$

Cette solution est communément utilisée dans la littérature sous la dénomination d'hypothèse de cycle de vie ou de revenu permanent[12] (cf. Flavin (1981) ou Hall et Mishkin (1982)).

Remarque 1 :

a) Si $\delta = 0$ ($= \rho$), c'est-à-dire si la ressource environnementale est non renouvelable, alors le facteur d'annuité se simplifie en : $k_{(T-t+1)} =$

[12] Cette hypothèse de proportionnalité, qui est la base même du modèle de cycle de vie ou du revenu permanent, stipule qu'à chaque période la consommation est proportionnelle à la valeur actualisée des ressources sur l'horizon de vie, somme du stock de ressource courant et de la richesse naturelle, avec un facteur de proportionalité, le facteur d'annuité, qui est indépendant des ressources du cycle de vie.

$\frac{1}{T-t+1}$, l'inverse du nombre de périodes restant à vivre. Et le niveau de consommation est :

$$C_t = RPT_t = \frac{R_t + RN_t}{T-t+1} = \frac{R_t}{T-t+1} + RPN_t$$

*b) Lorsque l'horizon de vie est infini ($T \to \infty$), le facteur d'annuité se réduit au taux de régénération de la ressource environnementale, δ. Dans ce cas, le niveau de consommation (ou la ressource permanente totale) correspond au flux de ressource équivalent à la régénération naturelle de ce que l'on peut considérer comme la « **richesse environnementale totale** », notée $RET_t = R_t + RN_t$:*

$$C_t = RPT_t = \delta RET_t = \delta (R_t + RN_t) = \delta R_t + RPN_t$$

Enfin, si nous reprenons cette dernière équation, en horizon infini, et que nous la réécrivons de deux façons différentes, en tenant compte de la définition de la richesse naturelle donnée par l'équation (7) :

– on substitue, dans un premier temps, l'équation d'évolution de la ressource (équation (1)), pour obtenir la relation suivante :

$$C_t = \delta\left((1+\delta)R_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - C_{t-1}\right) + \frac{\delta}{1+\delta}\sum_{s=t}^{\infty}(1+\delta)^{-(s-t)}E_t\varepsilon_s$$

– ensuite, dans un second temps, on réécrit la relation en se situant à la période précédente en réarrangeant l'expression de la richesse naturelle à cette date, l'on obtient :

$$C_{t-1} = \delta R_{t-1} + \frac{\delta}{1+\delta}\left(\varepsilon_{t-1} + \sum_{s=t}^{\infty}(1+\delta)^{-(s-t)}E_{t-1}\varepsilon_s\right)$$

et si l'on soustrait cette dernière équation à l'équation précédente, l'on obtient :

$$\Delta C_t = \frac{\delta}{1+\delta}\sum_{s=t}^{\infty}(1+\delta)^{-(s-t)}\left(E_t - E_{t-1}\right)\varepsilon_s \tag{10}$$

On retrouve ici le fait que la consommation suit un processus de martingale, c'est-à-dire l'idée selon laquelle tout changement de niveau de consommation par l'agent entre $t-1$ et t, qui est bien sûr imprévisible en $t-1$, est intimement lié à la « nouvelle » information sur l'état de la nature (ou sur la réalisation des phénomènes naturels) en t. Cette nouvelle information permet ainsi au consommateur de réviser ses anticipations sur les phénomènes naturels exogènes et aléatoires présents et futurs[13].

[13] Ce résultat ne constitue toute fois qu'une reformulation de l'intuition friedmanienne qui insistait déjà sur le rôle essentiel des révisions d'anticipations dans la dynamique de consommation. Comme le soulignait Hall (1978), qui fut le premier économiste à tester l'imprévisibilité de la dynamique de consommation, les variations de la consommation reflètent essentiellement des surprises sur l'état de la nature. Ces surprises étant par définition imprévisibles, les variations de la consommation le sont également.

3 La contrainte de disponibilité de la ressource

Nous allons essayer, dans cette section, de prendre en compte de manière explicite la contrainte de non négativité de la ressource introduite dans le programme du consommateur décrit par le système d'équation (2)[14].

Etant donné le caractère très spécifique des ressources environnementales qui sont envisagées, elles ne font l'objet d'aucun marché où elles pourraient s'échanger, le consommateur est obligé, quel que soit l'état de la nature et quels que soient ses désirs, de restreindre sa consommation à chaque période à **la quantité de ressource effectivement disponible** (après réalisation du choc) à cette date. Cette quantité représente son « cash in hand » et on la notera en t :

$$\tilde{R}_t = (1+\delta)R_t + \varepsilon_t \tag{11}$$

avec $\tilde{R}_t \geqslant 0$, d'après l'hypothèse 1 et son corollaire[15]. Il s'impose donc au consommateur une contrainte quantitative de disponibilité de la ressource[16]. La contrainte de ressource instantanée peut alors se mettre sous la forme : $R_{t+1} = \tilde{R}_t - C_t \geqslant 0$, $\forall t \in [0,T]$ et pour un stock initial de ressource, $R_0 \geqslant 0$ donné, la contrainte de disponibilité de la ressource, qui peut s'apparenter à une contrainte de non-endettement, prend la forme suivante[17] :

$$C_t \leqslant \tilde{R}_t;\ \forall t \in [0,T] \tag{12}$$

La prise en compte explicite de la contrainte de disponibilité de la ressource va modifier les comportements de consommation de l'agent dans le sens d'une plus grande préservation de celle-ci. En effet, contrairement au consommateur sous l'hypothèse de cycle de vie qui ne se soucie guère des risques d'extinction de la ressource en faisant ses plans, le consommateur qui intègre explicitement la contrainte de disponibilité de la ressource va prendre conscience du fait qu'il n'a accès ni à une assurance extérieure qui puisse le prémunir des catastrophes naturelles futures ni à la possibilité d'emprunter de la ressource s'il se retrouve dans une situation où le choc lui est très défavorable. Il va donc se couvrir lui même des risques de chutes très importantes du stock de ressource disponible en consommant moins, et donc en préservant plus.

En intégrant la définition du stock de ressource effectivement disponible pour la consommation, donnée par l'équation (11), dans la contrainte de

---

14 Nous omettons encore, dans cette section, la contrainte de non négativité de $(C_t - C_{\text{min}})$.

15 L'hypothèse 1 et son corollaire permettent en effet de s'assurer que le stock de ressource effectivement disponible après le choc est positif ou nul. L'inverse n'aurait bien entendu pas eu beaucoup de sens.

16 Puisque nous avons supposé que l'individu connaissait la réalisation de ε_t au moment de faire ses choix de consommation, il en va de même pour la valeur de $\tilde{R}_t$.

17 Pour une analyse plus détaillée des contraintes de non-endettement, cf. Zeldes (1989a) et Deaton (1992), pour un horizon de vie T quelconque, ou Romer (1996), pour une version plus simplifiée qui suppose que l'individu ne vie que trois périodes.

ressource instantanée, équation (1), l'on peut définir l'équation d'évolution du stock de ressource effectivement disponible $\tilde{R}_t$ comme suit :

$$\tilde{R}_{t+1} = (1+\delta)\left(\tilde{R}_t - C_t\right) + \varepsilon_{t+1} \tag{13}$$

Si l'on reprend le problème du consommateur, donné par l'équation (2), en tenant compte de la contrainte de disponibilité de la ressource de l'équation (12), et de l'équation d'évolution du « cash in hand », soit l'équation (13), nous pouvons définir un nouvel ensemble de fonctions valeurs $\{V_t\}_{t=1,\ldots,T}$, conditionnellement à l'information disponible en t, telles qu'à chaque période le consommateur résout le problème suivant :

$$V_t\left(\tilde{R}_t, \varepsilon_t\right) = \begin{cases} \max\limits_{\{C_t\}} \left\{U(C_t) + \beta E_t V_{t+1}\left(\tilde{R}_{t+1}, \varepsilon_{t+1}\right)\right\} \\ sc: \left| \begin{array}{c} \tilde{R}_{t+1} = (1+\delta)\left(\tilde{R}_t - C_t\right) + \varepsilon_{t+1} \\ C_{\min} \leqslant C_t \leqslant \tilde{R}_t \\ \tilde{R}_t \geqslant 0,\ \tilde{R}_0 \text{ donné, } V_{T+1} = 0 \end{array} \right. \end{cases} \tag{14}$$

Cette équation définit la valeur de la quantité de ressource effectivement disponible à la date t comme étant la valeur maximale que l'agent peut obtenir en échangeant de la consommation courante contre de la consommation future, compte tenu de la contrainte de disponibilité de la ressource à laquelle il est confronté et de la quantité d'information qu'il détient à cette date.

Nous allons omettre dans cette section, dans la résolution du programme, les contraintes de survie exogènes sur la consommation ($C_{\min} \leqslant C_t$).

Ainsi, si l'on applique les conditions du premier ordre de Kuhn et Tucker à l'équation de Bellman (14), l'on obtient[18] :

$$V_t\left(\tilde{R}_t, \varepsilon_t\right) =$$

$$\max_{C_t}\left\{U(C_t) + \beta E_t V_{t+1}\left[(1+\delta)\left(\tilde{R}_t - C_t\right) + \varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}\right]\right\} + \lambda_t\left(\tilde{R}_t - C_t\right)$$

Conditions d'optimalité

(i) la maximisation par rapport à C_t implique :

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_t} = 0 \Longrightarrow U'(C_t) - \lambda_t = \beta(1+\delta)E_t\frac{\partial V_{t+1}}{\partial \tilde{R}_{t+1}} \tag{15}$$

où λ_t représente le multiplicateur de Lagrange (connu à la date t) associé à la contrainte de disponibilité de la ressource (12) à la période t. Puisque

[18] Pour plus de précisions sur la méthode de résolution, voir Zeldes (1989a).

l'agent n'est contraint que sur la possibilité d'emprunter et non sur celle d'épargner de la ressource, le signe du multiplicateur sera positif ($\lambda_t \geqslant 0$).

(ii) on trouve ensuite la condition de l'enveloppe :

$$\frac{\partial V_t}{\partial \tilde{R}_t} = \beta(1+\delta)E_t \frac{\partial V_{t+1}}{\partial \tilde{R}_{t+1}} + \lambda_t \tag{16}$$

(iii) de plus, l'on a la relation d'exclusion suivante :

$$\lambda_t \left(\tilde{R}_t - C_t \right) = 0 \tag{17}$$

Si l'on applique l'opérateur $\beta(1 + \delta)E_{t-1}$ aux deux membres de l'équation (16), l'on obtient :

$$\beta(1+\delta)E_{t-1}\frac{\partial V_t}{\partial \tilde{R}_t} = \beta(1+\delta)E_{t-1}\left(\beta(1+\delta)E_t\frac{\partial V_{t+1}}{\partial \tilde{R}_{t+1}}\right) + \beta(1+\delta)E_{t-1}\lambda_t$$

$$\Rightarrow U'\left(C_{t-1}\right) - \lambda_{t-1} = \beta(1+\delta)E_{t-1}U'\left(C_t\right)$$

ce qui nous donne la condition d'Euler suivante :

$$U'\left(C_t\right) = \beta(1+\delta)E_tU'\left(C_{t+1}\right) + \lambda_t \ ; \ t = 1, ..., T-1 \tag{18}$$

Le multiplicateur λ_t est donc égal à l'accroissement de l'utilité espérée du consommateur sur l'horizon de vie, dont il aurait bénéficié si la contrainte de disponibilité courante avait été relâchée d'une unité.

Remarque 2 : *Il ressort des relations (17) et (18) que :*

- *Si $\lambda_t = 0$ (i.e. si la contrainte n'est pas active en $t : C_t \leqslant \tilde{R}_t$), on retrouve l'équation d'Euler non contrainte (4) qui veut qu'à l'optimum l'utilité marginale de la consommation d'une unité de ressource en t soit égale à l'utilité marginale anticipée de la consommation de la valeur escomptée de cette même unité la période suivante. L'utilité marginale étant supposée monotone décroissante, l'on a donc la relation : $U'\left(\tilde{R}_t\right) \leqslant U'\left(C_t\right) = \beta(1+\delta)E_tU'\left(C_{t+1}\right)$, ou en d'autres termes, l'utilité marginale de la consommation du stock total de ressource effectivement disponible en t est inférieure à l'espérance d'utilité marginale future escomptée.*
- *Si $\lambda_t > 0$ (i.e. si la contrainte est active en $t : C_t = \tilde{R}_t$), l'individu consomme tout le stock de ressource effectivement disponible en t. On obtient la relation suivante : $U'\left(\tilde{R}_t\right) = U'\left(C_t\right) > \beta(1+\delta)E_tU'\left(C_{t+1}\right)$, ce qui signifie qu'à l'optimum contraint, l'utilité marginale de la consommation d'une unité supplémentaire de ressource aujourd'hui est toujours supérieure à l'utilité marginale procurée par la consommation de la même unité une période plus tard.*

Compte tenu de cette remarque, les choix optimaux du consommateur, donnés par l'équation (18), peuvent être résumés par la relation d'Euler légèrement modifiée suivante :

$$U'(C_t) = \max\left[U'\left(\tilde{R}_t\right),\ \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1})\right]\ ;\ t = 1, ..., T-1 \quad (19)$$

Cette nouvelle équation d'Euler intègre explicitement le fait que si la contrainte de disponibilité de la ressource est réellement prise en compte, le consommateur ne peut consommer plus que le stock de ressources environnementales dont il dispose effectivement. À l'optimum, elle ne suppose plus seulement l'égalité entre l'utilité marginale de la consommation courante et l'anticipation à la date t de l'utilité marginale future escomptée, mais aussi l'égalité du maximum de cette dernière et de l'utilité marginale du stock de ressource effectivement disponible à la même date. La proposition suivante s'en déduit.

Proposition 1 : *Si l'on tient compte de manière explicite de la contrainte de disponibilité de la ressource à laquelle est confronté le consommateur, tout en omettant la contrainte de survie $C_t \geqslant C_{\min}$, le système dynamique avec anticipations rationnelles est donné par :*

$$\begin{cases} U'(C_t) = \max\left[U'\left(\tilde{R}_t\right),\ \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1})\right] \\ \tilde{R}_{t+1} = (1+\delta)\left(\tilde{R}_t - C_t\right) + \varepsilon_{t+1} \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi constater que la prise en compte de la contrainte de disponibilité de la ressource modifie fondamentalement les choix du consommateur. En effet, quand bien même le consommateur aurait suffisamment de ressources disponibles à la date t pour lui permettre de pouvoir consommer sans se soucier de la contrainte de disponibilité, il intégrerait cette dernière dans ses anticipations de consommations futures. Il sait qu'en fonction de la forme prise par les phénomènes naturels futurs aléatoires il pourra lui arriver de buter sur cette contrainte avant la fin de son horizon de vie, ce qui modifie de toute évidence son comportement.

Une comparaison avec le résultat de l'hypothèse de cycle de vie

Même si l'on suppose, comme dans le cas de l'hypothèse de cycle de vie, que l'utilité marginale est linéaire et que le taux de préférence pour le présent est égal au taux de régénération de la ressource environnementale, la prise en compte de la contrainte de disponibilité de la ressource par le consommateur modifie quand même ses choix. En effet, pour la fonction d'utilité quadratique, donnée en (5) et pour $\rho = \delta$, l'équation (19) devient : $1-aC_t = \max\left[1 - a\tilde{R}_t,\ 1 - aE_tC_{t+1}\right]$. L'équation d'Euler se réduit alors à :

$$C_t = \min\left[\tilde{R}_t,\ E_tC_{t+1}\right]\ ;\ t = 1, ..., T-1 \quad (20)$$

Le consommateur ne prévoit donc plus simplement une consommation constante dans le temps (équation (6)) et équivalente à sa ressource permanente totale RPT_t (équation (9)), comme c'était le cas sous l'hypothèse du cycle de vie. Il intègre parfaitement le fait qu'il ne peut emprunter de la ressource, et donc qu'il est confronté à une contrainte physique. S'il a des anticipations modérées de ses consommations futures alors il pourra maintenir une consommation constante et équivalente à celle obtenue sous l'hypothèse de cycle de vie (équation (9)). Par contre si son espérance de consommation future est très optimiste, il ne pourra aligner sa consommation actuelle sur ses prévisions car il est contraint par la disponibilité de la ressource, auquel cas il acceptera alors de consommer tout le stock de ressource effectivement disponible après le choc.

Un exemple

Pour illustrer notre propos et pour mieux comprendre le comportement du consommateur, nous allons nous situer dans une configuration des plus simples. Nous allons supposer que : – l'horizon de vie est $T = 3$ – la fonction d'utilité est quadratique – et $\delta = \rho = 0 \Rightarrow \beta = 1$.

Compte tenu de la lourdeur des calculs, nous les avons mis en annexe (cf. *Annexe A)*. Nous allons ici résumer les résultats. Il ressort de cet exemple deux constatations importantes :

1. D'une part, nous retrouvons le fait que la contrainte de disponibilité peut effectivement mordre à n'importe quelle période. En outre, il peut arriver qu'elle morde à toutes les périodes : $C_1 = \tilde{R}_1 ; E_1C_2 = E_1\tilde{R}_2$; $E_1C_3 = E_1\tilde{R}_3$.
2. D'autre part, sous les hypothèses 1 et 2 et leur corollaire respectif, l'individu est malgré tout quelquefois obligé de choisir un $C_t < C_{\min}$:
   - Si l'individu choisit une trajectoire de consommation comme celle définie dans le dernier sous cas (de l'*Annexe A*) : $C_1 = \tilde{R}_1 ; E_1C_2 = E_1\varepsilon_2 ; E_1C_3 = E_1\varepsilon_3$, il suffit que l'une des réalisations des chocs futurs soit trop défavorable pour que l'individu soit contraint à se restreindre à une consommation inférieure au niveau minimum de subsistance à la date de ce choc.
   - Ou encore, compte tenu de la structure des chocs, rien n'assure à l'individu qu'il pourra éviter des consommations très faibles. En effet :
     - Dans le premier cas ($E_1C_2 \leqslant E_1\tilde{R}_2$) :
       - Si $C_1 \leqslant \tilde{R}_1$, alors $C_1 = E_1C_2 = E_1C_3 = \frac{1}{3}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3\right)$. Donc si $\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_3 + E_1\varepsilon_2 < 3C_{\min}$, toutes les consommations sont inférieures à $C_{\min}$.
       - Si $C_1 = \tilde{R}_1$, alors $E_1C_2 = E_1C_3 = \frac{1}{2}(E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3)$. Il suffit que $E_1\varepsilon_3 + E_1\varepsilon_2 < 2C_{\min}$ pour que les consommations des périodes 2 et 3 soient elles aussi inférieures à $C_{\min}$.
     - Dans le second cas ($E_1C_2 = E_1\tilde{R}_2$) :

* Si $C_1 \leqslant \tilde{R}_1$, alors $C_1 = E_1C_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2\right)$ et $E_1C_3 = E_1\varepsilon_3 \geqslant 0$. Donc si $\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2 < 2C_{\min}$, les consommations aux périodes 1 et 2 sont inférieures à $C_{\min}$.
* Si $C_1 = \tilde{R}_1$, alors $E_1C_2 = E_1\varepsilon_2$ et $E_1C_3 = E_1\varepsilon_3$. L'individu peut être conduit à choisir une consommation inférieure à son niveau minimum de subsistance à l'une des, ou aux deux, dernières périodes.

Cet exemple nous permet ainsi de mettre en évidence le fait que, sous les hypothèses 1 et 2 et leurs corollaires, la prise en compte de la contrainte de disponibilité de la ressource ne suffit pas à elle seule à assurer que les choix optimaux de consommation de l'individu puissent toujours lui assurer sa survie. Ainsi, même si le niveau minimum de consommation de subsistance était supposé nul, *i.e.* $C_{\min} = 0$, la contrainte de disponibilité de la ressource ne permettrait pas à elle seule à assurer que les choix optimaux du consommateur soient réalisables[19], sa propre survie ne s'en trouve pas garantit. Il nous faut par conséquent introduire de manière explicite la contrainte de survie exogène sur la consommation dans la résolution du programme de l'agent.

4 La contrainte de solvabilité

Nous avons vu dans le cadre de l'hypothèse du cycle de vie que le choix optimal du consommateur, soit l'équation (9), revenait à consommer à chaque date sa ressource permanente totale, RPT_t, somme de sa richesse permanente naturelle, RPN_t, et de la ressource permanente effective (valeur actualisée de son stock de ressource sur son horizon de vie). Mais ceci suppose non seulement que les taux de régénération de la ressource et de préférence pour le présent soient les mêmes et que l'utilité marginale soit linéaire mais aussi et surtout que le niveau de consommation puisse être négatif.

Or l'analyse du problème du consommateur menée ci-dessus suppose implicitement qu'en l'absence de catastrophe totale les consommations que réalisent l'individu sont positives et, plus encore, supérieures à un niveau minimum de subsistance. En outre, rien de ce qui a été présenté jusque là ne garantit *a priori* ce résultat. Les phénomènes naturels qui influencent l'évolution du stock de ressource environnementale sont aléatoires. Donc une réalisation particulièrement désastreuse de ces phénomènes peut réduire de manière significative la quantité de ressource effectivement disponible pour la consommation, ou même l'anéantir, et donc rendre impossible cette dernière ou, du moins, empêcher qu'elle puisse s'établir au dessus du niveau minimum de subsistance. Les choix optimaux du consommateur,

19 Problème déjà souligné par d'Autume et Michel (1993).

sous la seule contrainte de disponibilité de la ressource, peuvent ainsi s'avérer irréalisables (comme l'a montré l'exemple ci-dessus). La contrainte de disponibilité de la ressource ne permet donc pas à elle seule d'assurer la survie du consommateur. Elle ne lui permet par conséquent pas de réaliser des plans qui satisfont au critère de soutenabilité physique (au sens de Daly (1991)).

Ainsi, s'il arrivait que l'agent n'ait plus assez de ressource disponible pour satisfaire ses désirs de consommation, ceci pourrait s'apparenter à une situation de « faillite ». Le programme du consommateur devrait logiquement intégrer cette notion de soutenabilité physique et donc exclure *a priori* toute possibilité de faillite en imposant des conditions minimales sur les consommations dans tous les états de la nature et sur tout l'horizon de vie. Cette possibilité de « faillite » étant souvent passée sous silence dans la littérature, notamment dans le cadre de l'hypothèse de cycle de vie, il est peut-être utile de montrer non seulement qu'elle peut bel et bien se réaliser, mais aussi en quoi elle peut modifier les choix de consommation des agents.

Il nous faut par conséquent tenir compte de manière explicite, dans le programme de l'agent, de sa contrainte de survie énnoncée dans l'hypothèse 2 :

$$C_t \geqslant C_{\min}, \forall t \in [0,T] \tag{21}$$

et du corollaire 2 correspondant.

Avant de rechercher les solutions du problème sous la contrainte de non faillite, il nous faut déjà définir le domaine des consommations admissibles du programme de l'individu. Une trajectoire de consommation sera dite admissible si elle tient à la fois compte de la contrainte de disponibilité de la ressource et si elle assure, en l'absence de catastrophe totale, que les niveaux de consommations choisis par l'individu peuvent être supérieurs au niveau minimum de subsistance quels que soient les états de la nature et ceci sur tout l'horizon de vie.

4.1 Le domaine des consommations admissibles

Nous allons définir une variable Ω_t qui de manière générale représente le niveau maximum de la valeur actualisée, actualisation faite à la date 0, du supplément de consommation[20] en t qui assure qu'il existe effectivement une trajectoire admissible, compte tenu des anticipations de l'individu sur les chocs futurs. Nous montrons en annexe (cf. *Annexe B*), par une procédure de récurrence, que la valeur de Ω_t est déterminée par :

$$\frac{C_t - C_{\min}}{(1+\delta)^t} \leqslant \frac{\left(\tilde{R}_t - C_{\min}\right)}{(1+\delta)^t} + \sum_{s=t+1}^{T} \frac{E_t\varepsilon_s - C_{\min}}{(1+\delta)^s} = \Omega_t \tag{22}$$

[20] Nous entendons par supplément de consommation à une date donnée, le niveau de consommation nette du minimum de subsitance, c'est-à-dire : $C_t - C_{\min}$.

Cette inégalité permet à l'individu de s'assurer à chaque date t que $E_t\Omega_{t+1} \geqslant 0$ ou, en d'autres termes, qu'il pourra choisir en $t+1$ un niveau de consommation $C_{t+1} \geqslant C_{\min}$, étant donné ses anticipations des chocs futurs. Cette relation correspond à la condition de solvabilité du problème du consommateur, car elle est nécessaire[21] pour qu'il puisse s'assurer de pouvoir choisir des niveaux de consommations non inférieurs au niveau minimum de subsistance sur l'ensemble de son horizon de vie, compte tenu de ses propres anticipations des chocs futurs.

Remarque 3 : *Sous les hypothèses 1 et 2, et leurs corollaires, et étant donnée la relation (22), la condition nécessaire de solvabilité du problème du consommateur est alors :*

$$C_t \leqslant (1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min} = \tilde{R}_t + \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s} - C_{\min}}{(1+\delta)^s} \tag{23}$$

Si on compare cette relation à la contrainte de disponibilité de la ressource donnée par l'équation (12), on constate que la prise en compte de la contrainte de de solvabilité du problème du consommateur, sa contrainte de survie, met en lumière le fait que le consommateur ne tient pas uniquement compte du stock de ressource effectivement disponible, pour réaliser ses choix de consommation, mais il intègre aussi ses anticipations sur les réalisations des chocs futurs. Plus précisément, le consommateur, pour réaliser ses choix aujourd'hui, va prendre en compte la valeur actualisée de l'espérance des écarts entre les réalisations des chocs futurs et le niveau minimum de consommation.

On sait par ailleurs que la contrainte de disponibilté physique de la ressource (12) impose au consommateur de limiter sa consommation à chaque date au niveau de ressource effectivement disponible, après réalisation du choc, à cette date *i.e.* $C_t \leqslant \tilde{R}_t$; ceci quelles que soient ses anticipations sur les chocs futurs. En prenant en compte explicitement cette contrainte physique de disponibilité de la ressource, la condition nécessaire de solvabilité du problème du consommateur (23) devient alors :

$$C_t \leqslant \min\left[(1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min}, \tilde{R}_t\right] = \min\left[\tilde{R}_t + \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s} - C_{\min}}{(1+\delta)^s}, \tilde{R}_t\right] \tag{24}$$

Ainsi, si le consommateur anticipe qu'en moyenne les chocs futurs lui seront favorables, du moins que ceux-ci lui garantiront en moyenne un niveau de ressource supplémentaire supérieur à ce dont il a besoin pour survivre, *i.e.* $\sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s} - C_{\min}}{(1+\delta)^s} \geqslant 0$, il pourra, au mieux, saturer sa

[21] Cette relation ne peut être considérée comme une condition suffisante car la capacité réelle de l'individu à consommer en $t+1$ dépendra de la réalisation effective du choc à cette date.

contrainte de disponibilité aujourd'hui et choisir donc de consommer tout le stock de ressource effectivement disponible. Mais il ne pourra bien entendu pas pouvoir choisir des niveaux de consommations plus importants que ceux que lui imposent cette contrainte de disponibilité physique de la ressource.

Par contre, si son anticipation des chocs futurs est plutôt pessimiste, c'est-à-dire s'il anticipe que les chocs futurs lui seront en moyenne défavorables, *i.e.* $\sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s}-C_{\min}}{(1+\delta)^s} < 0$, il sera obligé de « resserrer » sa contrainte physique de disponibilité; celle-ci ne parmettant plus à elle seule de garantir sa survie. Il devra en conséquence se constituer une épargne supplémentaire, égale à : $-\sum_{s=1}^{T-t} \dfrac{E_t\varepsilon_{t+s} - C_{\min}}{(1+\delta)^s} \geqslant 0$, à chaque date t, pour se prémunir contre les risques de faillite, pour garantir sa survie. La condition nécessaire de solvabilité se résume alors dans ce cas à : $C_t - \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s}-C_{\min}}{(1+\delta)^s} \leqslant \tilde{R}_t$.

Nous pouvons, compléter l'analyse de ce cas d'anticipations pessimistes par la remarque suivante.

Remarque 4 : *Sous les hypothèses 1 et 2, et leurs corollaires, et compte tenu de la remarque 3, si l'individu a des anticipations pessimistes sur les réalisations futures des chocs aléatoires, i.e. si* $\sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s}-C_{\min}}{(1+\delta)^s} < 0$, *alors toute trajectoire de consommation qui satisfait la contrainte de solvabilité (23) va nécessairement satisfaire la condition de disponibilité de la ressource (12)*[22]. *Ainsi, tout consommateur désirant se couvrir contre les risques de « faillite », c'est-à-dire dont les choix optimaux sont soutenables physiquement, va indirectement et nécessairement préserver l'environnement.*

Il ressort par conséquent de cette remarque que, dans ce type de modèles avec incertitude sur des ressources environnementales, si la condition de solvabilité du problème du consommateur est réellement prise en compte, le problème de préservation de la ressource peut, en cas d'anticipations pessimistes des agents, ne plus se poser. En outre, le fait de ne pas tenir compte de manière explicite de la contrainte de solvabilité de la consommation dans ces modèles peut parfois mener à des conclusions erronées.

Il est maintenant possible de donner une définition formelle du domaine des consommations admissibles, qui nous permettra de caractériser les trajectoires optimales de consommation.

Définition 1 : *Sous les hypothèses 1 et 2, et leurs corollaires, la relation (22) permet d'obtenir le domaine des consommations admissibles, qui est donc donné par :*

$$\overline{C} = \left\{ C_t : 0 \leqslant \frac{C_t - C_{\min}}{(1+\delta)^t} \leqslant \Omega_t \quad ; \quad t = 0, ..., T \right\} \tag{25}$$

[22] Ceci même si l'on considère que $C_{\min} = 0$.

4.2 Consommations optimales

Pour obtenir les trajectoires optimales de consommation, nous allons commencer par transformer légèrement le problème du consommateur donné par l'équation (2) afin de le définir en fonction du niveau maximum de la valeur actualisée du supplément de consommation, Ω_t, obtenu précédemment.

Tout d'abord, on sait d'après la relation (22) que :

$$\Omega_{t+1} = \frac{\left(\tilde{R}_{t+1} - C_{\min}\right)}{(1+\delta)^{t+1}} + \sum_{s=t+2}^{T} \frac{E_{t+1}\varepsilon_s - C_{\min}}{(1+\delta)^s}$$

Si nous calculons la différence entre deux seuils successifs de suppléments de consommation actualisés, nous obtenons :

$$\Omega_{t+1} - \Omega_t = -\frac{C_t - C_{\min}}{(1+\delta)^t} + \sum_{s=t+1}^{T} \frac{E_{t+1}\varepsilon_s - E_t\varepsilon_s}{(1+\delta)^s} \tag{26}$$

Nous constatons logiquement que cette différence décroît sur l'effet des choix de consommation et croît sur l'effet des anticipations des chocs.

Si l'on reprend maintenant l'énoncé du problème du consommateur, soit l'équation (2), en intégrant de plus la contrainte de solvabilité, nous pouvons définir un nouvel ensemble de fonctions valeurs $\{V_t\}_{t=1,\ldots,T}$, conditionnellement à l'information disponible en t, telles que :

$$V_t(\Omega_t, \varepsilon_t) = \begin{cases} \max\limits_{C_t \in \bar{C}} \{U(C_t) + \beta E_t V_{t+1}(\Omega_{t+1}, \varepsilon_{t+1})\} \\ sc: \left| \begin{array}{c} \Omega_{t+1} = \Omega_t - \frac{C_t - C_{\min}}{(1+\delta)^t} + \sum_{s=t+1}^{T} \frac{E_{t+1}\varepsilon_s - E_t\varepsilon_s}{(1+\delta)^s} \\ 0 \leqslant C_t - C_{\min} \leqslant (1+\delta)^t \Omega_t \ ; \ t = 1, \ldots, T \\ \Omega_0 \text{ donné} \ ; \ V_{T+1} = 0 \end{array} \right. \end{cases} \tag{27}$$

Si l'on applique les conditions du premier ordre de Kuhn et Tucker à l'équation de Bellman (27), l'on obtient :

$$V_t(\Omega_t, \varepsilon_t) = \begin{cases} \max\limits_{C_t \in \bar{C}} \{U(C_t) + \beta E_t V_{t+1}[\Omega_{t+1}, \varepsilon_{t+1}] + \mu_t [(1+\delta)^t \Omega_t - (C_t - C_{\min})]\} \\ sc: \ \Omega_{t+1} = \Omega_t - \frac{C_t - C_{\min}}{(1+\delta)^t} + \sum\limits_{s=t+1}^{T} \frac{E_{t+1}\varepsilon_s - E_t\varepsilon_s}{(1+\delta)^s} \ ; \ V_{T+1} = 0 \end{cases}$$

où $\mu_t \geqslant 0$ représente le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de solvabilité (22) à la période t.

4.2.1 Conditions d'optimalité

L'approche étant exactement la même que celle des paragraphes précédents, nous n'allons pas la reprendre dans les détails. Les conditions d'optimalité sont résumées par l'équation d'Euler suivante :

$$U'(C_t) = \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1}) + \mu_t \tag{28}$$

L'on retrouve le même type d'équation d'Euler que dans le cas de la contrainte de disponibilité de la ressource, à la différence que le multiplicateur μ_t permet d'intégrer totalement la contrainte de solvabilité du consommateur. Le multiplicateur μ_t est ainsi égal à l'accroissement de l'utilité espérée sur son horizon de vie dont le consommateur aurait bénéficié si la contrainte de solvabilité avait été relâchée d'une unité.

Remarque 5 : *Les conclusions suivantes peuvent être tirées de cette équation d'Euler (28) :*

- *Si $\mu_t = 0$, i.e. si la contrainte de solvabilité de l'agent n'est pas active en t, on a d'après (24) : $C_t \leqslant \min\left[(1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min}, \tilde{R}_t\right]$. On retrouve alors l'équation d'Euler non contrainte (4). L'utilité marginale étant par ailleurs supposée monotone décroissante, l'on obtient la relation suivante : $U'\left(\min\left[(1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min}, \tilde{R}_t\right]\right) \leqslant U'(C_t) = \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1})$.*
- *Si $\mu_t > 0$ (i.e. $C_t = \min\left[(1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min}, \tilde{R}_t\right]$). L'individu consomme la quantité maximale de ressource admissible, le seuil solvable, qui dépend de ses anticipations sur les réalisations des chocs futurs. L'on obtient : $U'\left(\min\left[(1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min}, \tilde{R}_t\right]\right) = U'(C_t) > \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1})$. Ce qui signifie qu'à l'optimum contraint, l'utilité marginale de la consommation d'une unité supplémentaire de ressource aujourd'hui est toujours supérieure à l'espérance d'utilité marginale procurée par la consommation de la même unité une période plus tard.*

Compte tenu de cette remarque, les choix optimaux du consommateur, donnés par l'équation (28), peuvent être résumés par la relation d'Euler suivante :

$$U'(C_t) = \max\left[U'\left(\min\left[(1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min}, \tilde{R}_t\right]\right),\ \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1})\right] \tag{29}$$

Cette équation d'Euler intègre explicitement la contrainte de solvabilité du programme du consommateur. L'utilité marginale de la consommation courante est égale au maximum de l'utilité marginale procurée par la consommation du seuil solvable et de celle de l'espérance de consommation future escomptée.

Proposition 2 : *Sous les hypothèses 1 et 2, et leurs corollaires, si l'on prend en compte de manière explicite, dans la résolution du problème du* *consommateur, l'ensemble des contraintes auxquelles il est confronté, le système dynamique avec anticipations rationnelles est donné par :*

$$\begin{cases} U'(C_t) = \max\left[U'\left(\min\left[(1+\delta)^t\Omega_t + C_{\min}, \tilde{R}_t\right]\right),\ \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1})\right] \\ \Omega_{t+1} = \Omega_t - \dfrac{C_t - C_{\min}}{(1+\delta)^t} + \displaystyle\sum_{s=t+1}^{T} \dfrac{E_{t+1}\varepsilon_s - E_t\varepsilon_s}{(1+\delta)^s} \end{cases}$$

où les inconnues sont Ω_t et $C_t \in \bar{C}$.

On peut souligner pour finir qu'en utilisant la seconde formulation de la contrainte de solvabilité donnée en (24), la relation d'Euler (29) est équivalente à :

$$U'(C_t) = \max\left[U'\left(\min\left[\tilde{R}_t + \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s} - C_{\min}}{(1+\delta)^s}, \tilde{R}_t\right]\right),\ \beta(1+\delta)E_tU'(C_{t+1})\right] \tag{30}$$

Cette formulation permet de mettre plus en évidence l'importance des anticipations de l'individu sur les chocs futurs. Ses anticipations vont en effet tout autant déterminer son espérance de disponibilité de la ressource demain, donc le maximum de ressource qu'il peut se permettre de consommer aujourd'hui (le seuil solvable), que son espérance de consommation demain. Il va donc choisir celle qui lui procure l'utilité marginale la plus élevée.

4.2.2 Une comparaison avec le résultat de l'hypothèse de cycle de vie

Même si l'on suppose, comme dans le cas de l'hypothèse de cycle de vie, qu'en plus de l'utilité marginale linéaire, que le taux de préférence pour le présent est égal au taux de régénération de la ressource environnementale, la prise en compte explicite de la contrainte de solvabilité modifie encore significativement les choix de l'individu.

En effet, pour la fonction d'utilité quadratique, donnée en (5) et pour $\rho = \delta$, l'équation d'Euler (30) se réduit à :

$$C_t = \min\left[\min\left(\tilde{R}_t + \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\varepsilon_{t+s} - C_{\min}}{(1+\delta)^s}, \tilde{R}_t\right),\ E_tC_{t+1}\right] \tag{31}$$

Contrairement au consommateur sous l'hypothèse de cycle de vie qui consomme sa ressource permanente totale RPT_t (équation (9)), ce dernier va intégrer le risque de faillite qu'il encourt. S'il a des anticipations pessimistes de ses consommations futures alors il consommera moins aujourd'hui et pourra ainsi maintenir une consommation constante et équivalente à celle de l'hypothèse de cycle de vie. Par contre si son espérance de consommation future est très optimiste, il choisira de saturer temporairement sa contrainte de solvabilité; sa consommation aujourd'hui sera alors d'autant plus grande que ses anticipations sur les réalisations de l'ensemble des chocs à venir seront optimistes.

Conclusion

Nous espérons que les analyses faites dans cet article permettent de mieux comprendre les comportements de consommations de ressources renouvelables en incertitude. En effet, quand on suppose *ex ante* qu'il existe des phénomènes environnementaux aléatoires susceptibles d'affecter le patrimoine de l'agent, ceci revient à considérer *ex post* que l'agent est confronté à des contraintes physiques supplémentaires. Ces contraintes peuvent le conduire à la faillite et il doit en tenir compte s'il veut assurer sa survie ou, en d'autres termes, la soutenabilité physique de son programme.

La littérature portant sur l'analyse des modèles économiques intégrant à la fois les phénomènes environnementaux et l'incertitude a très souvent omis ou négligé ces risques de faillite. La non-prise en compte explicite de ces risques peut, comme nous l'avons montré, mener à des conclusions erronées ou insuffisantes.

L'introduction d'une incertitude sur les valeurs futures du stock de ressources renouvelables, qui servent d'unique bien de consommation à l'individu, affecte de manière notable les comportements de consommation de ce dernier. Mais l'admissibilité du programme dépend de la manière dont on intègre les différentes contraintes auxquelles est confronté l'individu.

En effet, comme nous l'avons montré, la non prise en compte ou l'omission de ces contraintes réduit totalement la capacité à appréhender correctement les comportements du consommateur. Ses choix optimaux se limitent alors à égaliser l'utilité marginale de la consommation courante à la valeur escomptée de l'utilité marginale anticipée de la consommation de la période suivante. Bien que ce résultat non contraint soit déjà plus riche que l'hypothèse de proportionnalité de la consommation à la valeur actualisée des ressources sur l'horizon, base du modèle de revenu permanent, il demeure néanmoins très insuffisant pour comprendre les comportements effectifs des agents.

La prise en compte de la contrainte physique de disponibilité de la ressource, quoiqu'insuffisante pour traiter le problème de manière exhaustive, permet déjà de prendre en compte le fait que le consommateur, supposé rationnel, va intégrer dans ses choix le fait qu'il ne peut consommer de manière indéfinie. L'arbitrage de l'individu va ainsi consister, à chaque date, à l'égalisation de l'utilité marginale de sa consommation courante, soit à l'utilité marginale que lui procure la consommation du stock de ressource effectivement disponible (son "cash in hand"), s'il butte sur la contrainte de disponibilité de la ressource, soit à la valeur escomptée de celle qu'il anticipe de sa consommation de la période suivante, si la contrainte n'est pas active.

Par souci d'exhaustivité dans la description du comportement de l'individu en fonction de ses anticipations des chocs futurs, nous avons préalablement défini des conditions de solvabilité. Il nous a fallu, pour cela, commencer par caractériser le domaine des consommations admissibles. L'étude du problème du consommateur dans ce domaine des admissibles nous a permis de mettre en évidence le fait que la seule prise en compte de la contrainte de disponibilité de la ressource ne suffisait pas à assurer la soutenabilité physique, au sens de Daly (1991), des choix de l'individu; elle ne garantit pas nécessairement à l'individu sa capacité à survivre. Nous avons ainsi montré d'une part que si l'individu avait des anticipations optimistes sur les réalisations futures des chocs, son comportement consistera naturellement à « saturer » sa contrainte de disponibilité. D'autre part, nous montrons que dans le cas contraire, c'est-à-dire en cas d'anticipations pessimistes, pour que les choix de consommation de l'individu soient effectivement soutenables physiquement, il va « resserrer » sa contrainte physique de disponibilité de la ressource; en y intégrant la nécessité de se constituer une épargne de survie supplémentaire qui lui permet alors d'exclure toute possibilité de faillite.

Annexe A : Démonstration des résultats de l'exemple à 3 périodes dans le cas de la contrainte de disponibilité de la ressource

Nous savons que, sous la contrainte de disponibilité, à la période 3 la consommation est telle que : $C_3 = \tilde{R}_3$.

- À la période 2 :

L'utilité anticipée de l'individu sur les 2 dernières périodes de sa vie en fonction de C_2 est :

$$U_2 = U(C_2) + E_2 U(C_3) = U(C_2) + E_2 U\left(\tilde{R}_3\right)$$

Or, d'après (13), l'on a : $\tilde{R}_3 = \tilde{R}_2 - C_2 + \varepsilon_3$. D'où :

$$U_2 = U(C_2) + E_2 U\left(\tilde{R}_2 - C_2 + \varepsilon_3\right)$$

La dérivée de U_2 par rapport à C_2 est donnée par :

$$\frac{\partial U_2}{\partial C_2} = U'(C_2) - U'\left(\tilde{R}_2 - C_2 + E_2\varepsilon_3\right)$$

Cette expression est positive si : $C_2 < \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_2 + E_2\varepsilon_3\right)$. Donc,

* si $C_2 \leqslant \tilde{R}_2$, *i.e.* si la contrainte est inactive à la période 2, l'individu peut choisir : $C_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_2 + E_2\varepsilon_3\right) \Rightarrow E_2C_3 = C_2$;
* si $C_2 = \tilde{R}_2$, *i.e.* si la contrainte est active à la période 2, il fixe sa consommation au niveau maximum qu'il peut atteindre et $E_2C_3 = E_2\varepsilon_3$.

Les choix de l'individu à cette période peuvent ainsi être résumés par :

$$C_2 = \min\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{R}_2 + E_2\varepsilon_3\right), \tilde{R}_2\right]$$

On a donc effectivement $C_2 \leqslant \tilde{R}_2$ et la contrainte de disponibilité est vérifiée.

- À la période 1 :

L'utilité anticipée de l'individu sur son horizon de vie en fonction du niveau de consommation de la première période est :

$$\begin{aligned} U_1 &= U(C_1) + E_1U(C_2) + E_1U(C_3) = U(C_1) + E_1U(C_2) + E_1U\left(\tilde{R}_3\right) \\ &= U(C_1) + E_1U(C_2) + E_1U\left(\tilde{R}_2 - C_2 + \varepsilon_3\right) \end{aligned}$$

D'après (13), l'on a : $\tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 - C_1 + \varepsilon_2$. Par conséquent,

$$U_1 = U(C_1) + E_1U(C_2) + E_1U\left(\tilde{R}_1 - C_1 - C_2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)$$

Le choix de C_1 va dépendre des anticipations que fait l'individu des chocs futurs et de son niveau de consommation de la période suivante. La dérivée de U_1 par rapport à C_1 est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial C_1} =& U'(C_1) + E_1\left[U'(C_2)\frac{\partial C_2}{\partial C_1}\right] \\ &- E_1\left[\left(1 + \frac{\partial C_2}{\partial C_1}\right)U'\left(\tilde{R}_1 - C_1 - C_2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)\right] \end{aligned}$$

Nous allons donc caractériser les choix optimaux de l'individu à la période 1 en fonction des anticipations de C_2.

1er cas : L'individu anticipe que sa contrainte de disponibilité ne sera pas active à la période 2 :

Dans ce cas, l'on a :

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_2 + E_2\varepsilon_3\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 - C_1 + \varepsilon_2 + E_2\varepsilon_3\right)$$

L'utilité marginale anticipée peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial C_1} =& U'(C_1) - \frac{1}{2}U'\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 - C_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1(E_2\varepsilon_3)\right)\right] \\ & - \frac{1}{2}U'\left[\tilde{R}_1 - C_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3 - \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 - C_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1(E_2\varepsilon_3)\right)\right]\end{aligned}$$

On utilise la loi des projections itératives qui implique que : $E_1(E_2\varepsilon_3) = E_1\varepsilon_3$. Ceci nous permet d'obtenir :

$$\frac{\partial U_1}{\partial C_1} = U'(C_1) - U'\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 - C_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3\right)\right]$$

Cette expression est positive si : $C_1 < \frac{1}{3}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3\right)$. Ainsi,

* si $C_1 \leqslant \tilde{R}_1$, *i.e.* si la contrainte est aussi inactive à la période 1, l'individu peut choisir : $C_1 = \frac{1}{3}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3\right); E_1C_2 = C_1;$ $E_1C_3 = C_1$;
* si $C_1 = \tilde{R}_1$, *i.e.* si par contre la contrainte est active à la période 1, il fixe sa consommation au niveau maximum qu'il peut atteindre à cette date et $E_1C_2 = E_1C_3 = \frac{1}{2}(E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3)$.

Les choix de l'individu à cette période peuvent ainsi être résumés par :

$$C_1 = \min\left[\frac{1}{3}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2 + E_1\varepsilon_3\right), \tilde{R}_1\right]$$

On vérifie qu'on a bien $C_1 \leqslant \tilde{R}_1$, la contrainte de disponibilité est vérifiée dans ce cas.

<u>$2^{ème}$ cas</u> : L'individu anticipe que sa contrainte de disponibilité sera saturée à la période suivante :

Dans ce cas, l'on a :

$$C_2 = \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 - C_1 + \varepsilon_2$$

L'utilité marginale anticipée devient donc :

$$\frac{\partial U_1}{\partial C_1} = U'(C_1) - U'\left(\tilde{R}_1 - C_1 + E_1\varepsilon_2\right)$$

Elle ne dépend plus de l'anticipation du choc de la dernière période. Elle est positive si : $C_1 < \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2\right)$. Par conséquent,

* si $C_1 \leqslant \tilde{R}_1$, *i.e.* si la contrainte est par contre inactive à la période 1, l'individu va choisir : $C_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2\right); E_1C_2 = C_1; E_1C_3 = E_1\varepsilon_3$;

* si $C_1 = \tilde{R}_1$, *i.e.* si la contrainte est aussi active à la période 1, il fixe sa consommation au niveau maximum qu'il peut atteindre à cette date et $E_1C_2 = E_1\varepsilon_2 = E_1\tilde{R}_2; E_1C_3 = E_1\varepsilon_3 = E_1\tilde{R}_3$.

Les choix de l'individu à cette période peuvent ainsi être résumés par :

$$C_1 = \min\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{R}_1 + E_1\varepsilon_2\right), \tilde{R}_1\right]$$

On a aussi : $C_1 \leqslant \tilde{R}_1$ dans ce cas.

Annexe B : Calcul du niveau maximum de la valeur actualisée du supplément de consommation en t

Nous allons définir la variable Ω_t correspondant la valeur actualisée, actualisation faite à la date 0, du supplément de consommation en t, $(C_t - C_{\min})$, qui assure qu'il existe effectivement une trajectoire admissible quels que soient les chocs. Pour déterminer la valeur de Ω_t, nous allons procéder par récurrence :

– À la date T :

Pour un consommateur non altruiste qui prévoit d'épuiser la ressource exactement à la fin de sa vie (*i.e.* $R_{T+1} = 0$), sa contrainte de ressource instantanée (1) prise à la dernière période T nous permet d'obtenir une relation simple entre le niveau de consommation et le stock de ressource effectivement disponible à cette date :

$$C_T = \tilde{R}_T = (1+\delta)R_T + \varepsilon_T$$

Nous pouvons alors déduire la valeur de la variable Ω_T qui à la date T se ramène à la valeur actualisée du supplément de consommation :

$$\frac{C_T - C_{\min}}{(1+\delta)^T} = \frac{\tilde{R}_T - C_{\min}}{(1+\delta)^T} = \Omega_T$$

– À la date $T-1$:

L'équation d'évolution du "cash in hand" (13) prise en $T-1$ nous donne :

$$\tilde{R}_T = (1+\delta)\left(\tilde{R}_{T-1} - C_{T-1}\right) + \varepsilon_T$$

Ainsi, pour que le choix d'un niveau de consommation $C_T \geqslant C_{\min}$ puisse faire partie des consommations admissibles à la date T, il faut que les choix de consommation de l'individu à la date $T-1$, étant donné son anticipation en $T-1$ du choc en T, lui permettent de préserver un niveau de ressource tel que :

$$E_{T-1}\tilde{R}_T \geqslant C_{\min} \Longleftrightarrow E_{T-1}\Omega_T \geqslant 0 \quad ;$$

avec E_{T-1} qui est l'opérateur d'espérance pris à la date $T-1$ et, en remplaçant $E_{T-1}\tilde{R}_T$ par sa valeur, on obtient :

$$C_{T-1} - C_{\min} \leqslant \tilde{R}_{T-1} + \frac{E_{T-1}\varepsilon_T}{(1+\delta)} - C_{\min}\left(1 + \frac{1}{(1+\delta)}\right)$$

En considérant maintenant Ω_{T-1} comme la valeur maximale que peut atteindre la valeur actualisée du supplément de consommation en $T-1$, de manière à être sûr que, étant donné l'anticipation du choc, le choix d'un niveau de consommation $C_T \geqslant C_{\min}$ fasse partie des consommations admissibles de l'individu à la date T, cette contrainte prend la forme :

$$\frac{C_{T-1} - C_{\min}}{(1+\delta)^{T-1}} \leqslant \frac{\left(\tilde{R}_{T-1} - C_{\min}\right)}{(1+\delta)^{T-1}} + \frac{E_{T-1}\varepsilon_T - C_{\min}}{(1+\delta)^T} = \Omega_{T-1} \qquad (B.1)$$

cette condition est donc nécessaire pour que le consommateur puisse espérer satisfaire sa contrainte de survie en T.

– **À la date $T-2$:**

Pour que le choix par l'individu d'un niveau de consommation $C_{T-1} \geqslant C_{\min}$ puisse faire partie de ses consommations admissibles à la date $T-1$, il faut *a priori* que ses anticipations lui permettent de s'assurer que : $E_{T-2}\Omega_{T-1} \geqslant 0$. Or d'après la contrainte[23] (B.1), $E_{T-2}\Omega_{T-1} \geqslant 0 \Rightarrow E_{T-2}\tilde{R}_{T-1} \geqslant C_{\min} - \dfrac{E_{T-2}\varepsilon_T - C_{\min}}{(1+\delta)^T}$. Il faut pour cela que les choix de consommation en $T-2$ soient, d'après la relation (13) prise en $T-2$, tels que :

$$E_{T-2}\tilde{R}_{T-1} = (1+\delta)\left(\tilde{R}_{T-2} - C_{T-2}\right) + E_{T-2}\varepsilon_{T-1} \geqslant C_{\min} - \frac{E_{T-2}\varepsilon_T - C_{\min}}{(1+\delta)^T}$$

$$\Longleftrightarrow C_{T-2} - C_{\min} \leqslant \tilde{R}_{T-2} - C_{\min} + \frac{E_{T-2}\varepsilon_{T-1} - C_{\min}}{(1+\delta)} + \frac{E_{T-2}\varepsilon_T - C_{\min}}{(1+\delta)^2}$$

et en considérant Ω_{T-2} comme la valeur maximale que peut atteindre la valeur actualisée du supplément de consommation en $T-2$ afin que $E_{T-2}\Omega_{T-1} \geqslant 0$, cette contrainte devient :

$$\frac{C_{T-2} - C_{\min}}{(1+\delta)^{T-2}} \leqslant \frac{\left(\tilde{R}_{T-2} - C_{\min}\right)}{(1+\delta)^{T-2}} + \frac{E_{T-2}\varepsilon_{T-1} - C_{\min}}{(1+\delta)^{T-1}} + \frac{E_{T-2}\varepsilon_T - C_{\min}}{(1+\delta)^T} = \Omega_{T-2} \qquad (B.2)$$

[23] On utilise ici la loi des projections itératives qui implique que : $E_{T-2}\left(E_{T-1}\varepsilon_T\right) = E_{T-2}\varepsilon_T$.

– **À une date t quelconque :**

On déduit des relations (B.1) et (B.2) ci-dessus l'expression de Ω_t, on obtient alors :

$$\frac{C_t - C_{\min}}{(1+\delta)^t} \leqslant \frac{\left(\tilde{R}_t - C_{\min}\right)}{(1+\delta)^t} + \sum_{s=t+1}^{T} \frac{E_t \varepsilon_s - C_{\min}}{(1+\delta)^s} = \Omega_t$$

et ceci permet à l'individu de s'assurer que $E_t \Omega_{t+1} \geqslant 0$.

References

Ayong Le kama, A. (2001a), "Preservation and Exogenous Uncertain Future Preferences", *Econmic Theory*, 18, pp. 745-752.

Ayong Le kama, A. (2001b), "Sustainable Growth, Renewable Resources and Pollution", *Journal of Economics Dynamics and Control*, 25, pp. 1911-1918.

Ayong Le kama, A. et K. Schubert (2003a), "Growth, Environment and Uncertain Future Preferences, Environmental and Resources Economics", Vol. 28, 1, pp. 31-53.

Ayong Le kama, A. et K. Schubert (2003b), "The Consequences of an Endogenous Discounting depending on Environmental Quality", Working paper, EUREQua - Université de Paris I, Paris.

Baranzini, A. et F. Bourguignon (1994), "Is Sustainable Growth Optimal ?", Nota di Lavoro 60.94, Fondazione ENI Enrico Mattei, Milan.

Beltratti, A., G. Chichilnisky et G. Heal (1998), "Uncertain Future Preferences and Conservation", in G. Chichilnisky, G. Heal et A. Vercelli (eds.), *Sustainability : Dynamics and Uncertainty*, Kluwer Academic Publisher, Fondazione ENI Enrico Mattei, Milan.

Daly, H. (1991), *Steady State Economics*, 2nd edition, Island Press, Washington DC.

d'Autume, A. (1994), "Le comportement de consommation", manuscript, MAD - Université de Paris I, Paris.

d'Autume, A. et P. Michel (1993), "Endogenous growth in Arrow's Learning by Doing model", *European Economic Review*, 37, pp. 1175-1184.

Deaton, A. (1991), "Saving and Liquidity Contraints", *Econometrica*, 59, pp. 1221-1248.

Deaton, A. (1992), *Understanding Consumption*, Clarendon Press, Princeton.

Deaton, A. et F. Laroque (1990), "On the behavior of Commodity Prices", NBER Working Paper.

Epaulard, A. et A. Pommeret (1998), « Gestion et valorisation des ressources non renouvelables en incertitude », in K. Schubert et P. Zagamé (éds.), *L'environnement : une nouvelle dimension de l'analyse économique*, Vuibert, pp. 269-314.

Flaving, M. (1981), "The Adjustment of Consumption to Changing Expetations about Future Income", *Journal of Political Economy*, 89, pp. 974-1009.

Friedman, M. (1957), *A Theory of the Consumption Function*, Princeton University Press, Princeton.

Hall, R. (1978), "Stochastic Implications of Life Cycle - Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence", *Journal of Political Economy*, 86, pp. 971-987.

Hall, R. et F. Mishkin (1992), "The sensitivity of consumption to transitory income : estimates from panel data on households", *Econometrica*, 50, pp. 461-481.

Hansen, L. et K. Singleton (1983), "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns", *Journal of Political Economy*, 91, pp. 249-265.

Heal, G. (1998), *Valuing the Future : Economic Theory and Sustainability*, Columbia University Press.

Kimball, M. (1990), "Precautionary Saving in the Small and in the Large", *Econometrica*, 58, pp. 53-73.

Modigliani, F. et R. Brumberg (1954), "Utility Analysis and the Consumption Function : an Interpretation of Cross-section Data", K. Kurihara (edn), Rutgers University Press, pp. 388-436.

Pindyck, R. (1984), "Uncertainty in the theory of renewable resources markets", *Review of Economic Studies*, 51, pp. 289-303.

Plourde, C. et D. Yeung (1989), "A model of industrial pollution in a stochastic environment", *Journal of Environmental Economics and Management*, 16, pp. 97-105.

Romer, D. (1996), *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, University of California, Berkeley.

Weisbrod, B. (1964), "Collective Consumption Services of Individualized Consumption Goods", *Quaterly Journal of Economics*, 78, pp. 471-477.

Zeldes, S. (1989a), "Consumption and Liquidity Contraints : An Empirical Investigation", *Journal of Political Economy*, 97, pp. 305-346.

Zeldes, S. (1989b), "Optimal Cosumption with Stochastic Income : Deviation from the Certainty Equivalence", *Quaterly Journal of Economics*, 104, pp. 275-298.