Jeux stratégiques de marché dans le modèle à générations imbriquées, le modèle "achat ou vente".

Francis de Morogues*

Università degli Studi di Brescia†

Introduction

Un jeu stratégique de marché à la Shapley-Shubik (1977) est un processus d'échanges qui se caractérise par une institution monétaire et une règle de formation des prix. Dans cette modélisation des échanges, les prix dépendent explicitement des stratégies des agents, ce qui fait de ce modèle un instrument d'analyse de la concurrence imparfaite[1].

L'objet de ce travail est d'étendre l'analyse des jeux stratégiques de marché au modèle à générations imbriquées en considérant essentiellement les aspects stratégiques. On peut noter deux contributions qui associent jeux stratégiques de marchés et générations imbriquées. Forges et Peck (1995) utilisent ce type de modèle pour étudier les relations entre équilibres corrélés et équilibres à tâches solaires. Ils ne traitent pas de problèmes stratégiques car ils considèrent un continuum d'agents à chaque date. Goenka, Kelly et Spear (1998) s'intéressent aux relations entre l'équilibre et l'épaisseur des marchés. Ils considèrent une économie avec un bien, de la monnaie de crédit et des stratégies "achat et vente" : les agents peuvent intervenir, à une

* Je remercie Philippe Michel, Thierry Paul et les membres du groupe de travail "générations imbriquées" du GREQAM pour leurs commentaires. Ce travail bénéficie du support financier de l'Union Européenne : TMR-Marie Curie (contrat N°ERB4001GT975243).

† Dipertimento di Scienze Economiche, Via S. Faustino, 74b - 25 122 Brescia - Italia. dmorogue@ehess.cnrs-mrs.fr

1 L'essentiel de la littérature sur les jeux stratégiques de marché considère une économie statique. Il existe trois types de modèles qui se différencient suivant le statut de la monnaie considérée : bien-monnaie (Shapley-Shubik (1977), Dubey-Shubik (1978), Dubey-Shapley (1984)), monnaie de crédit (Postlewaite-Schmeidler (1978), Peck-Shell-Spear (1992), Sorin (1994)) et le cas où tout bien est une monnaie (Sahi-Yao (1989), Amir-Sahi-Shubik-Yao (1990)). Les analyses portent sur les conditions d'existence d'un équilibre et ses propriétés de convergence vers l'équilibre concurrentiel suivant le type de monnaie considérée.

même date, sur les deux côtés du marché comme acheteur et vendeur. Ils donnent les conditions d'existence d'un équilibre intérieur et analysent les trajectoires d'équilibre. Leur principal résultat est de montrer que "l'apparition de dynamiques complexes dépend de la taille du marché et pas des paramètres des préférences" (p. 99).

Considérer des stratégies "achat et vente" rend possible les ventes excessives. Une vente excessive est une vente qui est accompagnée d'un achat du même bien par le même agent. L'agent se porte simultanément sur les deux côtés du marché. Les ventes excessives accroissent le volume des transactions brutes par rapport aux échanges nets ce qui rend les marchés plus épais, plus liquides et tend à diminuer l'influence des agents sur les prix.

Le modèle "achat ou vente" que nous avons retenu élimine les équilibres avec ventes excessives. Contraindre les agents à n'être que d'un seul côté du marché permet l'analyse des aspects purement stratégiques de l'équilibre. Nous montrons ainsi que l'avantage retiré par un agent de sa participation aux échanges est pondéré par l'avantage stratégique qu'il a à manipuler les prix. Ainsi, un pouvoir de marché trop important, c'est à dire un trop faible nombre d'agents, conduit à l'autarcie alors qu'une même économie avec un nombre supérieur d'agents possède un équilibre avec tous ses marchés actifs[2].

Après avoir décrit le modèle dans la première section, nous étudions les propriétés de l'équilibre dans la deuxième section. La section III donne les conditions d'existence d'un équilibre stationnaire, symétrique et non autarcique suivant le signe de l'épargne agrégée en fonction des fondamentaux de l'économie. La section IV montre que cet équilibre est aussi un équilibre du jeu plus général "achat et vente". La derniére section assimile les dynamiques de l'équilibre non stationnaire avec épargne positive à celles d'une économie concurentielle du type Grandmont(1985).

1 Le modèle

1.1 Les agents

Considérons une économie d'échange avec un bien et des générations imbriquées. Le temps se déroule de moins l'infini à plus l'infini[3]. A chaque date t naît une génération d'agents, d'effectif $N_t \geqslant 2$. Tous les agents vivent deux périodes. Chaque agent reçoit une dotation de bien $\omega_1 \geqslant 0$ en première

[2] Un exemple est donné par Cordella et Gabszewicz(1998).

[3] Dans le cas d'une épargne négative, la présence d'une date initiale pose le problème de la présence d'une dette dans la dotation des agents vieux à la première date. L'horizon de temps choisi permet une étude générale recouvrant la possibilité d'épargne négative.

période de vie et $\omega_2 \geqslant 0$ en seconde période. Ces dotations ne sont pas simultanément nulles. Tous les consommateurs ont la même fonction d'utilité strictement concave et croissante par rapport à ses deux arguments qui sont les consommations des deux périodes du cycle de vie, c et d :

$$U(c, d) : R_+ \times R_+ \to R$$

Un agent i né à la date t prend quatre décisions : $b_t^i, q_t^i, e_{t+1}^i, z_{t+1}^i$ où $q_t^i \in [0, \omega_1]$ est la quantité de bien qu'il offre en période t, $z_{t+1}^i \in [0, \omega_2]$ est la quantité de bien qu'il offre en période $t+1$, $b_t^i \in R_+$ est un signal représentant sa demande en valeur en période t et $e_{t+1}^i \in R_+$ est un signal représentant sa demande en valeur en période $t+1$.

Une *stratégie* de l'agent i né en t est un quadruplé $\sigma_t^i = (b_t^i, q_t^i, e_{t+1}^i, z_{t+1}^i)$. L'ensemble des stratégies de l'agent i né en t est défini par :

$$\begin{aligned} \Sigma_t^i = \{ & \sigma_t^i = (b_t^i, q_t^i, e_{t+1}^i, z_{t+1}^i) \in R_+ \times [0, \omega_1] \times R_+ \times [0, \omega_2] / \\ & b_t^i q_t^i = 0 \text{ et } e_{t+1}^i z_{t+1}^i = 0 \text{ et} \\ & \text{si } (q_t^i, z_{t+1}^i) = (0,0) \text{ alors } (b_t^i, e_{t+1}^i) = (0,0) \} \end{aligned} \tag{1}$$

La première restriction dans l'ensemble des stratégies caractérise les modèles "achat ou vente". Les agents ne peuvent être présents que d'un côté du marché, soit comme vendeur soit comme acheteur. Il ne peut y avoir de ventes excessives. La seconde stipule qu'un agent qui n'offre aucune quantité de bien strictement positive sur les deux périodes ne peut pas faire de demande en valeur positive. C'est une contrainte comparable à une désutilité liée au volume du défaut de paiement dans le cas où l'agent n'offre pas de bien.

Les stratégies des autres agents nés à la même date t sont notées σ_t^{-i}. Le profil des stratégies des agents nés en t est noté

$$\sigma_t = (\sigma_t^i, \sigma_t^{-i}) \in \Sigma_t = \prod_{i=1}^{N_t} \Sigma_t^i$$

Les prix dépendent des décisions de l'agent suivant la règle de formation des prix présentée au paragraphe suivant. Lorsque les deux marchés en t et $t+1$ sont actifs, notion définie ci dessous, la contrainte de budget intertemporelle de l'agent est :

$$P_t q_t^i + P_{t+1} z_{t+1}^i \geqslant b_t^i + e_{t+1}^i \tag{2}$$

Lorsque les prix sont définis et que la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent est vérifiée ses consommations sont :

$$\begin{cases} c_t^i = \omega_1 - q_t^i + \dfrac{b_t^i}{P_t} \\[2ex] d_{t+1}^i = \omega_2 - z_{t+1}^i + \dfrac{e_{t+1}^i}{P_{t+1}} \end{cases} \tag{3}$$

1.2 Fonctionnement du marché et de l'institution

Considérer un jeu stratégique de marché dans le cas du modèle à générations imbriquées soulève une difficulté qui provient de la présence de relations entre les générations. Lorsque tous les échanges s'effectuent à l'intérieur d'une même date, c'est à dire sans transfert de richesse d'une période à l'autre, les agents ne se soucient pas des générations passées et futures. Tous les marchés s'ouvrent et se ferment à l'intérieur d'une même période. L'ensemble des créances et des dettes contractées par les agents est soldé à la fin de chaque période. La contrainte de budget intertemporelle se scinde en deux contraintes distinctes, une pour chaque période. La vérification de chacune de ces contraintes est contemporaine aux échanges. L'équilibre général est alors une suite d'équilibres temporaires statiques.

Dans l'hypothèse inverse, la présence de transactions entre générations nécessite alors une double garantie des échanges : que les contrats établis à une date soient respectés à la date suivante et que les contraintes de budget, devenues intertemporelles, soient bien vérifiées. Dans un modèle avec monnaie de crédit rien n'impose que la monnaie créée par les agents à une date ait bien cours à la date suivante[4]. C'est pourquoi nous introduisons la fiction d'une institution qui est l'unique intermédiaire des échanges entre tous les agents de l'économie.

À chaque date les agents présents échangent avec l'institution. Ils viennent y apporter une quantité de bien qui caractérise leurs offres et transmettent des signaux qui correspondent à leurs demandes en valeur.

Définition 1 *Le marché du bien à la date t est dit actif si et seulement s'il existe simultanément une offre strictement positive de bien et un signal de demande strictement positif. Sinon il est inactif.*

Ainsi, le marché A_t est actif ou non selon les vecteurs de stratégies σ_{t-1} et σ_t des agents nés en $t-1$ et t. Sur un marché A_t actif *le prix* est donné par la règle :

$$P_t = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} b_t^i + \sum_{i=1}^{N_{t-1}} e_t^i}{\sum_{i=1}^{N_t} q_t^i + \sum_{i=1}^{N_{t-1}} z_t^i} = P(\sigma_{t-1}, \sigma_t) \tag{4}$$

La fonction $P(.)$ traduit la règle de formation du prix[5]. Elle est la même pour tous les marchés actifs indépendamment du temps et des agents. Les arguments de cette fonction P montrent l'influence sur le prix que les agents possèdent via leurs offres physiques et les signaux qu'ils adressent au marché, c'est l'aspect concurrence imparfaite des jeux stratégiques de marché.

---

[4] A contrario, cette garantie existe quand les agents utilisent dans l'échange un bien-monnaie. Dans ce cas, la monnaie est un bien durable dont le stock est donné au départ et qui transite ensuite de générations en générations. Nous avons analysé ce cas dans de Morogues ((1999), Annales d'Economie et Statistique.

[5] Dans les vecteurs de stratégies σ_{t-1} et σ_t seules les composantes indicées par t influencent le prix de la date t.

L'*institution* existe sur toute la durée de fonctionnement de l'économie. Elle reçoit les signaux en valeurs et les biens physiques des agents. En retour elle attribue à chaque agent i né en t une allocation de bien physique pour tout i et tout t. Les consommations de l'agent sont alors :

$$\begin{cases} c_t^i = \omega_1 - q_t^i + B_t^i \\ d_{t+1}^i = \omega_2 - z_{t+1}^i + E_{t+1}^i \end{cases}$$

Cette institution a un double rôle, d'une part elle garantit les transferts entre générations, d'autre part elle vérifie la solvabilité des agents qui participent au marché. Sa fonction est de choisir une suite infinie $\left((B_t^i, E_{t+1}^i)_{i\in N_t}\right)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ conformément à la la règle de fonctionnement suivante : si les marchés A_t et A_{t+1} sont actifs et la contrainte de budget intertemporelle de l'agent i vérifiée alors $B_t^i = \frac{b_t^i}{P_t}$, $E_{t+1}^i = \frac{e_{t+1}^i}{P_{t+1}}$. Sinon[6], $B_t^i = 0$, $E_{t+1}^i = 0$. Cette règle est connue de tous les agents[7].

Lorsque les offres et les annonces d'un agent ne respectent pas sa contrainte de budget intertemporelle, il est sanctionné et reçoit le couple $B_t^i = 0$, $E_{t+1}^i = 0$, ce qui revient à confisquer toutes ses offres physiques.

1.3 Fonction de gains

Pour un agent i né en t sa fonction de paiement sera son utilité de cycle de vie $U(c_t^i, d_{t+1}^i)$. Il prend les stratégies des autres agents σ_{t-1}, σ_t^{-i}, σ_{t+1}, comme données. Ses consommations finales sont :

$$\begin{cases} c_t^i = \omega_1 - q_t^i + B_t^i \\ d_{t+1}^i = \omega_2 - z_{t+1}^i + E_{t+1}^i \end{cases}$$

Comme les marchés A_t et A_{t+1} sont actifs ou non en fonction des profils de stratégies σ_{t-1}, σ_t et σ_{t+1} nous avons $B_t^i = B(\sigma_{t-1}, \sigma_t^i, \sigma_t^{-i}, \sigma_{t+1})$ et $E_{t+1}^i = E(\sigma_{t-1}, \sigma_t^i, \sigma_t^{-i}, \sigma_{t+1})$. L'utilité d'un agent s'exprime directement en fonction des stratégies σ_{t-1}, σ_t et σ_{t+1} : $U(c_t^i, d_{t+1}^i) = U(\sigma_{t-1}, \sigma_t^i, \sigma_t^{-i}, \sigma_{t+1})$

[6] c'est à dire si l'un des deux marchés A_t ou A_{t+1} est inactif, ou si A_t et A_{t+1} sont actifs mais la contrainte de budget de l'agent n'est pas vérifiée.

[7] Hors équilibre l'institution ne sera jamais en déficit, mais elle peut être amenée à détruire du bien. En effet, si le marché est actif à la date t, par application de la règle de fonctionnement, l'équation comptable $\sum_{i=1}^{N_t} B_t^i + \sum_{j=1}^{N_{t-1}} E_t^j \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{N_t} b_t^i}{P_t} + \frac{\sum_{j=1}^{N_{t-1}} e_t^j}{P_t}$ sera toujours respectée. Par définition du prix il vient $\frac{\sum_{i=1}^{N_t} b_t^i}{P_t} + \frac{\sum_{j=1}^{N_{t-1}} e_t^j}{P_t} = \sum_{i=1}^{N_t} q_t^i + \sum_{j=1}^{N_{t-1}} z_t^j$ et donc $\sum_{i=1}^{N_t} B_t^i + \sum_{j=1}^{N_{t-1}} E_t^j \leqslant \sum_{i=1}^{N_t} q_t^i + \sum_{j=1}^{N_{t-1}} z_t^j$. Si le marché n'est pas actif la restitution est nulle et l'institution confisque toutes les offres de biens.

Cette relation met en évidence la dépendance des gains des agents nés en t par rapport aux stratégies des agents nés en $t-1$ et des stratégies des agents nés en $t+1$. Ces mêmes agents ont des fonctions de gains qui dépendent des stratégies des agents nés avant et après eux. Il y a donc une interdépendance indirecte de tous les agents de l'économie.

2 L'équilibre de Nash

2.1 Définition de l'équilibre

Le problème d'un agent i né en t est de maximiser son utilité, étant donné les décisions des autres joueurs, sous la contrainte budgétaire, le respect de la règle de fonctionnement de l'institution et de la règle de fixation des prix. Il est utile d'introduire les notations suivantes pour faire la part de la contribution d'un agent i né en t à la fixation des prix en t et $t+1$ lorsqu'il considère comme fixées les offres et signaux des autres joueurs.

$$\begin{cases} P_t = \dfrac{b_t^i + \beta_t^i}{q_t^i + \gamma_t^i} \\ P_{t+1} = \dfrac{e_{t+1}^i + \lambda_{t+1}^i}{z_{t+1}^i + \mu_{t+1}^i} \end{cases} \tag{5}$$

β_t^i est la somme en valeur des signaux de tous les autres joueurs, ceux de sa génération et ceux de la génération précédente, à la date t soit :

$$\beta_t^i = \sum_{j\neq 1}^{N_t} b_t^j + \sum_{i=1}^{N_{t-1}} e_t^i, \beta_t^i = \beta(\sigma_{t-1}, \sigma_t^{-i}),$$

γ_t^i est la contribution totale en bien de tous les autres joueurs, à la date t soit :

$$\gamma_t^i = \sum_{j\neq 1}^{N_t} q_t^j + \sum_{i=1}^{N_{t-1}} z_t^i, \gamma_t^i = \gamma(\sigma_{t-1}, \sigma_t^{-i}),$$

λ_{t+1}^i est la demande en valeur de tous les autres joueurs, à la date $t+1$ soit :

$$\lambda_{t+1}^i = \sum_{j\neq 1}^{N_t} e_{t+1}^j + \sum_{i=1}^{N_{t+1}} b_{t+1}^i, \lambda_{t+1}^i = (\sigma_t^{-i}, \sigma_{t+1})$$

et μ_{t+1}^i est la contribution totale en bien de tous les autres joueurs, à la date $t+1$ soit :

$$\mu_{t+1}^i = \sum_{j\neq 1}^{N_t} Z_{t+1}^j + \sum_{i=1}^{N_{t+1}} q_{t+1}^i, \mu_{t+1}^i = (\sigma_t^{-i}, \sigma_{t+1}).$$

Définition 2 *Une suite de profils de stratégies* $(\sigma_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ *avec* $\sigma_t \in \sum_t$ *est un équilibre de Nash du jeu stratégique de marché si pour tout* t*, tout* i *et toute stratégie* $\tau_t^i \in \sum_t^i$ *on a :*

$$U(\sigma_{t-1}, \sigma_t^i, \sigma_t^{-i}, \sigma_{t+1}) \geqslant U(\sigma_{t-1}, \tau_t^i, \sigma_t^{-i}, \sigma_{t+1})$$

2.2 Propriétés de l'équilibre de Nash

Propriété 1 *Pour un agent* i *né en* t*, si l'un des deux marchés sur lesquels il intervient,* A_t *ou* A_{t+1}*, est inactif à l'équilibre de Nash alors sa stratégie d'équilibre est* $\sigma_t^i = (0,0,0,0)$.

Démonstration

Si A_t ou A_{t+1} est inactif alors, par la règle de fonctionnement de l'institution, nous avons $B_t^i = 0$, $E_{t+1}^i = 0$. Comme la fonction d'utilité est strictement croissante par rapport à ses arguments ceci conduit à des offres de biens nulles : $q_t^i = 0$, $z_{t+1}^i = 0$. Par définition de l'ensemble de stratégie d'un agent si $q_t^i = 0$, $z_{t+1}^i = 0$ alors $b_t^i = 0$, $e_{t+1}^i = 0$.

□

Cette propriété permet de caractériser la stratégie nulle. La démonstration associe la règle de fonctionnement de l'institution et la restriction de l'ensemble de stratégie des agents qui associe à une offre de bien nulle des signaux en valeur nuls.

En l'abscence de cette restriction et comme il n'y a pas de désutilité liée au volume du défaut de paiement, un agent qui n'offre pas de biens pourrait néanmoins offrir de la monnaie sur un marché actif pour un montant quelconque sans changer son utilité. Les équilibres seraient alors paramétrés par ces offres. La restriction dans l'ensemble des stratégies écarte ce cas de figure et permet une caractérisation plus simple des équilibres.

Propriété 2 *Si* A_t *et* A_{t+1} *sont actifs, alors pour tout agent né en* t *la contrainte de budget intertemporelle est vérifiée à l'égalité.*

Démonstration

i) Supposons que la contrainte de budget intertemporelle d'un agent i ne soit pas vérifiée alors par application de la règle de fonctionnement de l'institution nous avons $B_t^i = 0$, $E_{t+1}^i = 0$. Comme la fonction d'utilité est strictement croissante par rapport à ses arguments le programme de maximisation de l'utilité conduit l'agent i à une offre de bien nulle : $q_t^i = 0$, $z_{t+1}^i = 0$. Par définition de l'espace de stratégie de l'agent il vient $b_t^i = 0$, $e_{t+1}^i = 0$. Par conséquent la contrainte de budget intertemporelle est vérifiée à l'égalité.

ii) Supposons que la contrainte ne soit pas saturée : $P_t q_t^i + P_{t+1} z_{t+1}^i > b_t^i + e_{t+1}^i$ alors deux cas sont possibles soit une offre positive de bien en première période avec $P_t q_t^i > e_{t+1}^i$, soit une offre positive de bien en seconde période avec $P_{t+1} z_{t+1}^i > b_t^i$.

Dans le cas où $P_t q_t^i > e_{t+1}^i$ nous avons, par définition de l'ensemble des stratégies, $b_t^i = 0$. Comme les marchés sont actifs et l'agent respecte sa contrainte de budget intertemporelle alors sa consommation de première période est : $c_t^i = \omega_1 - q_t^i$. La fonction d'utilité est strictement croissante par rapport à ses arguments, la variation marginale de l'utilité dépend de l'expression $\frac{\partial c_t^i}{\partial q_t^i} = -1 < 0$. Etant donnée la définition des prix, le revenu $P_t q_t^i$ est une fonction non décroissante de q_t^i. Nous avons montré que l'agent i peut améliorer son utilité en diminuant son offre de bien de première période sans modifier sa consommation de seconde période.

Dans le cas où $P_{t+1} z_{t+1}^i > b_t^i$ le même principe de démonstration peut être employé ce qui nous amène au résultat.

□

Définition 3 *Si le marché A_t est actif, l'épargne réelle d'un agent i né en t est $s_t^i = q_t^i - \frac{b_t^i}{P_t}$. L'épargne agrégée de la période t est $\sum_{i=1}^{N_t} s_t^i = S_t$*

Propriété 3 *Si à l'équilibre le marché A_t est actif et $S_t \neq 0$ alors quel que soit τ, A_τ est actif et $P_\tau S_\tau = P_t S_t =$ constante.*

Démonstration

i) Pour $\tau > t$

Si A_t est actif alors le prix P_t est défini et l'épargne d'un agent i est par définition $s_t^i = q_t^i - \frac{b_t^i}{P_t}$. Si $S_t \neq 0$ alors il existe au moins un agent i né en t tel que $s_t^i \neq 0$. Pour constituer son épargne cet agent a utilisé une stratégie $\sigma_t^i \neq (0,0,0,0)$. En utilisant la contraposé de la propriété 1 ceci implique que A_{t+1} est actif. Par définition de l'épargne agrégée nous avons :

$$P_t S_t = P_t \sum_{i=1}^{N_t} q_t^i - \sum_{i=1}^{N_t} b_t^i$$

la définition du prix donne

$$P_t \sum_{i=1}^{N_t} q_t^i - \sum_{i=1}^{N_t} b_t^i = \sum_{i=1}^{N_{t-1}} e_t^i - P_t \sum_{i=1}^{N_{t-1}} z_t^i$$

La propriété 2 assure qu'à l'équilibre les agents saturent leur contrainte de budget intertemporelle. En sommant ces contraintes sur tous les agents présents en t nous avons :

$$P_t \sum_{i=1}^{N_t} q_t^i - \sum_{i=1}^{N_t} b_t^i = \sum_{i=1}^{N_t} e_{t+1}^i - P_{t+1} \sum_{i=1}^{N_t} z_{t+1}^i$$

Par définition du prix en $t+1$ il vient :

$$P_{t+1} \sum_{i=1}^{N_{t+1}} q_{t+1}^i - \sum_{i=1}^{N_{t+1}} b_{t+1}^i = \sum_{i=1}^{N_t} e_{t+1}^i - P_{t+1} \sum_{i=1}^{N_t} z_{t+1}^i$$

la définition de l'épargne pour la période $t+1$ donne :

$$P_{t+1} \sum_{i=1}^{N_{t+1}} q_t^i - \sum_{i=1}^{N_{t+1}} b_t^i = P_{t+1} S_{t+1}$$

ce qui conduit au résultat :

$$P_t S_t = P_{t+1} S_{t+1}$$

Nous avons montré que A_{t+1} est actif et $S_{t+1} \neq 0$ donc par le même raisonnement il vient A_{t+2} est actif et $P_t S_t = P_{t+1} S_{t+1} = P_{t+2} S_{t+2}$. La récurrence se poursuit pour tout $\tau > t : A_\tau$ est actif et $P_t S_t = P_\tau S_\tau$.

ii) Pour $\tau < t$

Dans le point i) nous avons obtenu

$$\sum_{i=1}^{N_{t-1}} e_t^i - P_t \sum_{i=1}^{N_{t-1}} z_t^i \neq 0$$

donc il existe au moins un agent i né en $t - 1$ tel que :

$$e_t^i - P_t z_t^i \neq 0$$

aussi sa stratégie $\sigma_{t-1}^i \neq (0,0,0,0)$. En utilisant la contraposé de la propriété 1 ceci implique que A_{t-1} est actif. Le même raisonnement que dans le point i) amène au résultat.

□

Il existe toujours un *équilibre autarcique*. Celui où tous les agents ne font ni offre ni demande : $\sigma_t^i = (0,0,0,0)$ pour tout i et tout t, tous les *marchés sont inactifs*.

L'équilibre non autarcique de cette économie est celui où tous les marchés sont actifs et toutes les épargnes agrégées non nulles et égales en valeurs, c'est un *équilibre avec échanges intergénérationels*[8]. Ce sont les conditions d'existence de ces équilibres que nous allons déterminer.

[8] Il faut remarquer que l'équilibre physique des équilibres intergénérationnels est vérifié :

$$\sum_{i=1}^{N_t} c_t^i = N_t \omega_1 - S_t \text{ et } \sum_{i=1}^{N_{t-1}} d_t^i = N_{t-1}\omega_2 + \frac{P_{t-1}}{P_t} S_{t-1}$$

or $P_t S_t = P_{t-1} S_{t-1}$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N_t} c_t^i + \sum_{i=1}^{N_{t-1}} d_t^i = N_t \omega_1 + N_{t-1}\omega_2$$

3 Existence de l'équilibre

3.1 Les stratégies à épargne positive ou négative

Jusqu'à présent nous avons considérés tous les équilibres, que se soit avec épargne positive, négative ou nulle. Pour un équilibre avec épargne positive la stratégie de l'agent i né en t est nécessairement de la forme $\sigma_t^i = (0, q_t^i, c_{t+1}^i, 0)$. Dans le cas d'épargne négative la stratégie est $\sigma_t^i = (b_t^i, 0, 0, z_{t+1}^i)$. Nous allons caractériser ces stratégies suivant l'épargne réelle de première période.

Si les marchés A_t et A_{t+1} sont actifs avec les stratégies $\sigma_{t-1}^i, \sigma_t^i, \sigma_{t+1}^i$ nous pouvons opérer le changement de variable qui introduit l'épargne réelle de l'agent i né en $t : s_t^i = q_t^i - \frac{b_t^i}{P_t}$. En associant cette égalité avec la définition du prix de la date t, à stratégies des autres joueurs données, le calcul donne l'expression du prix en fonction de l'épargne réelle de l'agent :

$$P_t = \frac{\beta_t^i}{\gamma_t^i + s_t^i} \tag{6}$$

La consommation de première période sera :

$$c_t^i = \omega_1 - s_t^i$$

Exprimer la consommation de seconde période réclame quelques calculs préalables. La contrainte de budget devient après le changement de variable

$$P_t s_t^i = e_{t+1}^i - P_{t+1} z_{t+1}^i$$

De l'expression de P_{t+1} en fonction des stratégies des autres agents on obtient :

$$P_t \mu_{t+1}^i = e_{t+1}^i - P_{t+1} z_{t+1}^i + \lambda_{t+1}^i$$

en combinant avec l'égalité précédente il vient,

$$P_{t+1} = \frac{P_t s_t^i + \lambda_{t+1}^i}{\mu_{t+1}^i} \tag{7}$$

soit :

$$P_{t+1} = \frac{\beta_t^i s_t^i + \lambda_{t+1}^i (s_t^i + \gamma_t^i)}{\mu_{t+1}^i (s_t^i + \gamma_t^i)}$$

La consommation de seconde période devient avec les expressions des prix et le changement de variable :

$$d_t^i = \omega_2 + \Psi_{i,t}(s_t^i) \tag{8}$$

avec

$$\Psi_{i,t}(s_t^i) = \frac{P_t}{P_{t+1}} s_t^i = \frac{\beta_t^i \mu_{t+1}^i}{\beta_t^i s_t^i + \lambda_{t+1}^i (s_t^i + \gamma_t^i)} s_t^i \qquad (9)$$

Le seul choix de s_t^i, étant données les stratégies des autres joueurs, détermine les consommations de l'agent i.

Selon la terminologie de Gale (1973), dans le "cas de Samuelson" qui correspond à une épargne positive, il faut considérer les stratégies $\sigma_t^i = \left(0, s_t^i, \frac{\beta_t^i s_t^i}{\gamma_t^i + s_t^i}, 0\right)$. Dans le "cas classique" qui correspond à une épargne négative, c'est à dire une dette contractée durant la jeunesse et gagée sur les recettes futures, il faut considérer les stratégies de la forme :

$$\sigma_t^i = \left(-\frac{\beta_t^i s_t^i}{\gamma_t^i + s_t^i}, 0, 0, \Psi_{i,t}(s_t^i)\right)$$

3.2 Caractérisation des équilibres statiques et dynamiques

Dans la suite de notre propos la population est constante, $N_t = N \geqslant 2$ pour tout t.

Proposition 1 *La fonction de gain d'un agent i né en t, à stratégies des autres joueurs fixées :*

$$V_{i,t}(s) = U\left(\omega_1 - s, \omega_2 + \Psi_{i,t}(s)\right)$$

est une fonction strictement concave de $s \in [-\omega_2, \omega_1]$.

Démonstration : voir Annexe.

Ce résultat permet de caractériser les équilibres à l'aide de la condition du premier ordre dans le cas d'une fonction d'utilité différentiable, ce que nous supposerons. *L'équilibre dynamique* vérifie l'égalité :

$$U'_{c_t}\left(\omega_1 - s_t^i, \omega_2 + \Psi_{i,t}(s_t^i)\right) = \Psi'_{i,t}(s_t^i) U'_{d_{t+1}}\left(\omega_1 - s_t^i, \omega_2 + \Psi_{i,t}(s_t^i)\right) \qquad (10)$$

L'équilibre symétrique et stationnaire est un profil de stratégies $(b, q, e, z) \in \sum_t$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $s^i = s$ pour tout i,
- $s = \Psi(s)$,
- $\begin{cases} \beta = (N-1)b + Ne \\ \gamma = (N-1)q + Nz \\ \lambda = Nb + (N-1)e \\ \mu = Nq + (N-1)z \end{cases}$
- $U'_c(\omega_1 - s, \omega_2 + s) = \Psi'(s) U'_d(\omega_1 - s, \omega_2 + s)$ (11)

Lemme 1 *Les stratégies constantes de tous les agents* $(0, s, e, 0)$, *avec* $s > 0$[9] *et* $e > 0$, *constituent un équilibre symétrique et stationnaire avec épargne positive du jeu stratégique de marché si et seulement si s est solution de l'équation* $U_c'(\omega_1 - s, \omega_2 + s) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 U_d'(\omega_1 - s, \omega_2 + s)$.

Démonstration

( )

Supposons qu'il existe une solution $s > 0$ à l'équation $U_c'(\omega_1 - s, \omega_2 + s) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 U_d'(\omega_1 - s, \omega_2 + s)$. Nous allons montrer que la stratégie $(0, s, e, 0)$, pour tout $e > 0$, jouée par tous les agents vérifie les conditions d'équilibre symétrique et stationnaire du jeu stratégique de marché.

Considérons la stratégie (0,s,e,0) nous avons alors les égalités :

$$\begin{cases} \beta = Ne \\ \gamma = (N - 1)s \\ \lambda = (N - 1)e \\ \mu = Ns \end{cases}$$

À l'équilibre symétrique et stationnaire nous avons $\Psi(s) = \frac{\beta\mu s}{\beta s + \lambda(s+\gamma)}$, un simple calcul donne l'égalité $s = \Psi(s)$. L'expression de $s = \Psi'(s)$, à l'équilibre symétrique et stationnaire, est :

$$\Psi'(s) = \frac{\beta\gamma\lambda\mu}{((\beta+\lambda)s + \lambda\gamma)^2}$$

le calcul donne :

$$\Psi'(s) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \tag{12}$$

))

Il suffit d'utiliser les calculs précédents pour montrer qu'un profil de stratégies constantes $(0, s, e, 0)$, avec $s > 0$ et $e > 0$, qui vérifie toutes les conditions d'un équilibre symétrique et stationnaire vérifie l'équation : $U_c'(\omega_1 - s, \omega_2 + s) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 U_d'(\omega_1 - s, \omega_2 + s)$.

□

Le prix à l'équilibre symétrique et stationnaire est par définition $P = \frac{e}{s}$. Ainsi le seul choix de e détermine le niveau du prix.

Lemme 2 *Les stratégies constantes de tous les agents* $(e, 0, 0, -s)$, *avec* $s < 0$[10] *et* $e > 0$, *constituent un équilibre symétrique et stationnaire avec épargne négative du jeu stratégique de marché si et seulement si s est solution de l'équation* $U_c'(\omega_1 - s, \omega_2 + s) = \left(\frac{N}{N-1}\right)^2 U_d'(\omega_1 - s, \omega_2 + s)$.

Démonstration

9 Une solution $s > 0$ implique que la dotation initiale de première période soit strictement positive.

10 Une solution s<0 implique que la dotation initiale de seconde période soit strictement positive

( ) Nous allons procéder comme dans la démonstration précédente. Supposons qu'il existe une solution $s < 0$ à l'équation $U'_c(\omega_1 - s, \omega_2 + s) = \left(\frac{N}{N-1}\right)^2 U'_d(\omega_1 - s, \omega_2 + s)$. Considérons la stratégie $(e, 0, 0, -s)$ nous avons alors les égalités :

$$\begin{cases} \beta = (N - 1)e \\ \gamma = -Ns \\ \lambda = Ne \\ \mu = -(N - 1)s \end{cases}$$

Un simple calcul montre que cette stratégie vérifie l'égalité $s = \Psi(s)$. L'expression de $\Psi'(s)$ devient :

$$\Psi'(s) = \left(\frac{N}{N - 1}\right)^2 \tag{13}$$

)) Il suffit d'utiliser les calculs précédents pour montrer qu'un profil de stratégies constantes $(e, 0, 0, -s)$, avec $s < 0$ et $e > 0$, qui vérifie toutes les conditions d'un équilibre symétrique et stationnaire vérifie l'équation : $U'_c(\omega_1 - s, \omega_2 + s) = \left(\frac{N}{N-1}\right)^2 U'_d(\omega_1 - s, \omega_2 + s)$.

□

Hypothèse 1 *Le taux marginal de substitution,* $TMS(s) = \frac{U'_c(\omega_1 - s, \omega_2 + s)}{U'_d(\omega_1 - s, \omega_2 + s)}$, *est une fonction de s continue, monotone croissante et surjective de* $]-\omega_2, \omega_1[$ *sur* $]0, +\infty[$.

Le TMS(s) est la quantité de bien de seconde période que l'agent doit obtenir pour la perte d'une unité marginale de bien de première période. C'est une mesure de la préférence pour le présent. Si le TMS(s) est une fonction croissante alors la préférence pour le présent de l'agent croît avec son épargne.

Pour une fonction d'utilité séparable, $U(c, d) = u(c) + v(d)$, cette hypothèse est vérifiée dés lors que les fonctions $u(.)$ et $v(.)$ sont strictement concaves et que $\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$ et $\lim_{d \to 0} v'(d) = +\infty$.

Théorème *Sous l'hypothèse 1, il existe un équilibre symétrique et stationnaire du jeu stratégique de marché aux stratégies "achat ou vente" si et seulement si* $TMS(0) = \frac{U'_c(\omega_1, \omega_2)}{U'_d(\omega_1, \omega_2)} \in \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2, \left(\frac{N}{N-1}\right)^2\right]$. *Sinon il n'existe pas d'autre équilibre symétrique et stationnaire du jeu stratégique de marché aux stratégies "achat ou vente" que l'autarcie. De plus, si* $TMS(0) < \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$ *alors l'équilibre est à épargne positive et si* $TMS(0) > \left(\frac{N}{N-1}\right)^2$ *alors l'équilibre est à épargne négative.*

Démonstration

C'est une application immédiate des lemmes précédents associés à l'hypothèse de croissance du $TMS(s)$. Si le $TMS(0)$ appartient à l'intervalle $\left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2, \left(\frac{N}{N-1}\right)^2\right]$, il n'existe pas d'équilibre symétrique stationnaire du jeu stratégique avec marchés actifs et épargne non nulle. Par défaut l'autarcie est toujours un équilibre.

□

Un graphique, avec l'épargne en abscisse et le taux marginal de substitution en ordonnée, nous permet de synthétiser ces résultats. L'épargne appartient à l'intervalle $]-\omega_2, \omega_1[$ et le taux marginal de substitution à $]0, +\infty[$. La fonction $TMS(s)$ est croissante. Pour avoir un équilibre avec épargne négative, comme le point E_1, il faut une double condition : que le TMS prenne la valeur $\left(\frac{N}{N-1}\right)^2$ et ce en une valeur négative de s. Le point E_2 caractérise un équilibre avec épargne positive. Pour la courbe TMS_a il n'existe pas d'équilibre symétrique stationnaire avec marchés actifs.

Considérons une économie caractérisée par la courbe de $TMS(s)$ en gras sur la figure 1 et faisons varier sa population. Avec une population N_0 il n'y a pas d'équilibre avec marchés actifs, alors que pour une valeur $N_1 > N_0$, il existe un équilibre non autarcique avec épargne négative. Un constat similaire peut être fait pour le cas des équilibres avec épargne positive. Ceci est la conséquence du fonctionnement non concurrentiel des marchés ; un pouvoir de marché trop important conduit à l'autarcie.

Quand le nombre d'agents tend vers l'infini, les conditions obtenues dans les deux cas d'épargne positive et d'épargne négative, ont la même limite : $TMS(s) = 1$. La condition d'existence de l'équilibre concurrentiel étant $TMS(0) \neq 1$.

3.3 Interprétation des résutats de l'équilibre symétrique et stationnaire

Quand un agent i né en t prend sa décision d'épargne, positive ou négative, il considère son influence sur les deux prix en t et $t+1$. Cette double influence se retrouve dans son revenu de seconde période : $\Psi_{i,t}(s) = \frac{P_t}{P_{t+1}} s_t^i$ et dans son revenu marginal en terme de bien de seconde période : $\Psi'_{i,t}(s)$ avec :

$$\Psi'_{i,t}(s) = \frac{P_t}{P_{t+1}} + s_t^i \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)$$

L'équation (9) montre que le rapport $\frac{P_t}{P_{t+1}}$ est une fonction décroissante de l'épargne. À l'équilibre stationnaire nous avons

$$\Psi'(s) = 1 + s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) < 0$$

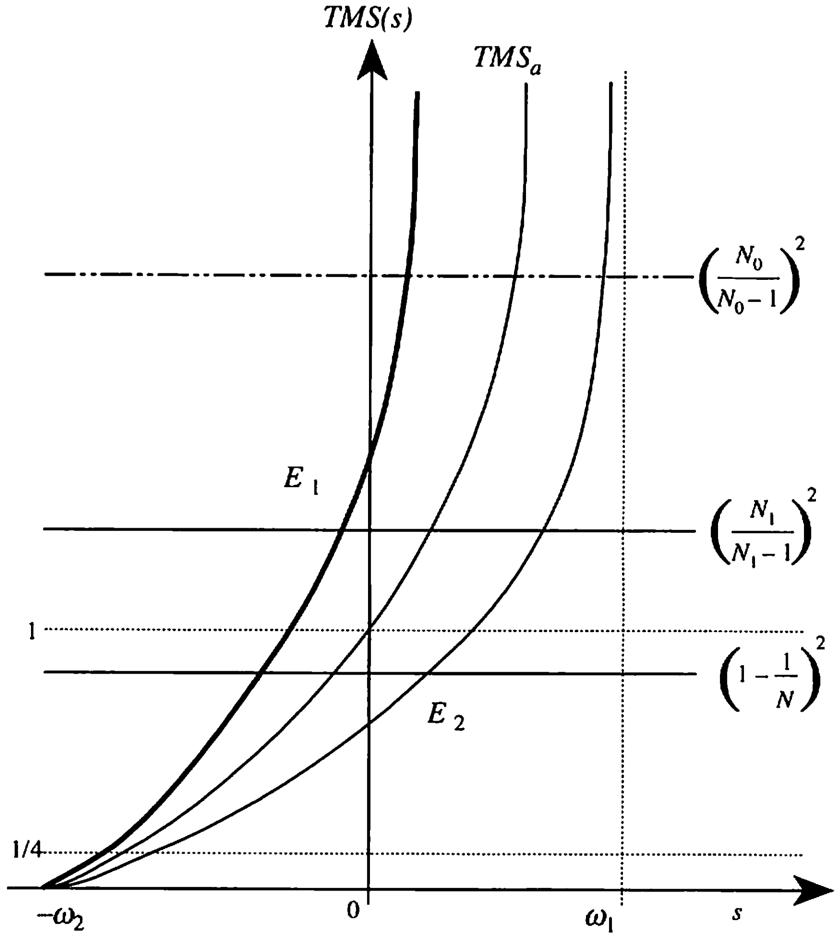

Figure 1 : *Equilibres et épargnes*

Si l'équilibre est à épargne positive alors $\Psi'(s)$ est inférieur à un. Si l'équilibre est à épargne négative alors $\Psi'(s)$ est supérieur à un. Ceci montre que l'avantage retiré par un agent d'une épargne non nulle est pondéré par l'avantage stratégique qu'il a à manipuler les prix.

Considérons un équilibre avec épargne positive. Pour analyser l'effet séparé sur P_t, supposons que P_{t+1} soit fixé, alors $\frac{\partial}{\partial s_t}\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) = \frac{\partial P_t}{\partial s_t}\frac{1}{P_{t+1}}$. De l'équation (6) qui exprime le prix en t nous obtenons $\frac{\partial P_t}{\partial s_t} = -\frac{P_t}{\gamma_t+s_t}$. Compte tenu de l'expression de γ_t nous avons $\frac{\partial P_t}{\partial s_t} = -\frac{P_t}{Ns_t}$, soit, à P_{t+1} fixé, $\Psi_t'(s_t) = \frac{P_t}{P_{t+1}}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$.

De même, supposons que P_t soit fixé alors $\frac{\partial}{\partial s_t}\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \frac{P_t}{(P_{t-1})^2}\frac{\partial P_{t+1}}{\partial s_t}$. De l'égalité (7) nous obtenons $\frac{\partial P_{t+1}}{\partial s_t} = \frac{1}{\mu_{t+1}}\left(\frac{\partial P_t}{\partial s_t}s_t + P_t\right)$. En remplaçant $\frac{\partial P_t}{\partial s_t}$ et μ_{t+1} par les expressions données précédemment et compte tenu de l'égalité $\frac{s_{t+1}}{s_t} = \frac{P_t}{P_{t+1}}$ le calcul donne, à P_t fixé, $\Psi_t'(s_t) = \frac{P_t}{P_{t+1}}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$.

Le facteur $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$ représente donc la combinaison des effets sur les prix. Le carré provient du double effet et le facteur $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ mesure le degré de concurrence sur les marchés.

4 Le modèle "achat et vente"

Dans ce paragraphe nous allons montrer qu'un équilibre dans le jeu "achat ou vente" est un équilibre dans le jeu "achat et vente". Considérons l'ensemble des stratégies de l'agent i né en t défini par :

$$\tilde{\Sigma}_t^i = \{\tilde{\sigma}_t^i = (b_t^i, q_t^i, e_{t+1}^i, z_{t+1}^i) \in R_+ \times [0,\omega_1] \times R_+ \times [0,\omega_2]/ \quad \text{si } (q_t^i, z_{t+1}^i) = (0,0) \text{ alors } (b_t^i, e_{t+1}^i)) = (0,0)\} \tag{14}$$

Si à la date t ou $t+1$ les décisions d'offre physique et de signal en valeur sont toutes deux strictement positives cela signifie que l'agent est à la fois offreur et demandeur du bien. Dans cet ensemble de stratégie un agent peut agir simultanément sur les deux côtés du marché et créer des ventes excessives.

Les stratégies des autres agents nés à la même date t sont notées $\tilde{\sigma}_t^{-i}$. Le profil des stratégies des agents nés en t est noté $\tilde{\sigma}_t = (\tilde{\sigma}_t^i, \tilde{\sigma}_t^{-i}) \in \tilde{\Sigma}_t = \prod_{i=1}^{N_1} \tilde{\Sigma}_t^i$ et $\Sigma_t^i \subset \tilde{\Sigma}_t^i$.

À part cette modification de l'espace des stratégies le jeu est le même. Néanmoins, en opposition avec le modèle "achat ou vente", il existe des équilibres du jeu "achat et vente" dans lesquels les *marchés sont actifs* mais où l'épargne agrégée est nulle, $S_t = 0$ pour tout t, ce sont des *équilibres sans échanges intergénérationnels.*

Lemme 3 *Considérons les stratégies "achat et vente" des agents nés en $t-1$, t et $t+1$: $\tilde{\sigma}_{t-1}, \tilde{\sigma}_t, \tilde{\sigma}_{t+1} \in \tilde{\Sigma}_{t-1} \times \tilde{\Sigma}_t \times \tilde{\Sigma}_{t+1}$ Considérons un agent i né en t. Pour les stratégies des autres agents, $\tilde{\sigma}_{t-1}, \tilde{\sigma}_t^{-i}, \tilde{\sigma}_{t+1}$ fixées, il existe une stratégie "achat ou vente" $\sigma_t^i \in \Sigma_t^i$ au moins aussi bonne en terme d'utilité que la stratégie $\tilde{\sigma}_t^i \in \tilde{\Sigma}_t^i$.*

Démonstration

i) Si le marché A_t ou A_{t+1} n'est pas actif avec les stratégies $\tilde{\sigma}_{t-1}, \tilde{\sigma}_t, \tilde{\sigma}_{t+1}$ alors pour l'agent i né en t la stratégie $\sigma_t^i = (0,0,0,0)$ donne une utilité supérieure ou égale à celle qui résulte de la stratégie $\tilde{\sigma}_t^i$ 2 $\tilde{\Sigma}_t^i$.

ii) Si les marchés A_t et A_{t+1} sont actifs avec les stratégies $\tilde{\sigma}_{t-1}, \tilde{\sigma}_t, \tilde{\sigma}_{t+1}$. Nous pouvons opérer le changement de variable du paragraphe III.1 qui introduit l'épargne réelle de l'agent i né en $t : s_t^i = q_t^i$ ¡ $\frac{b_t^i}{P_t}$ et qui donne une utilité égale.

□

Lemme 4 *Un équilibre dans le jeu stratégique de marché avec les ensembles de stratégies Σ_t est aussi un équilibre dans le jeu stratégique de marché avec les ensembles de stratégies $\tilde{\Sigma}_t$.*

Démonstration

Soit $(\sigma_t^*)_{t=-\infty}^{t=+\infty}, \sigma_t^*$ 2 Σ_t un équilibre dans le jeu de marché "achat ou vente". Par définition il vérifie pour tout t et tout i l'inégalité :

$$U\left(\sigma_{t-1}^*, \sigma_t^{i*}, \sigma_t^{-i*}, \sigma_{t+1}^*\right) \geqslant U\left(\sigma_{t-1}^*, \sigma_t^i, \sigma_t^{-i*}, \sigma_{t+1}^*\right) \qquad \text{pour tout } \sigma_t^i \text{ 2 } \Sigma_t^i$$

En application du lemme 3, pour toute stratégie $\tilde{\sigma}_t^i$ 2 $\tilde{\Sigma}_t^i$, étant données les stratégies des autres joueurs $\left(\sigma_{t-1}^*, \sigma_t^{*-i}, \sigma_{t+1}^*\right)$, il existe une stratégie $\bar{\sigma}_t^i$ 2 Σ_t^i telle que :

$$U\left(\sigma_{t-1}^*, \bar{\sigma}_t^i, \sigma_t^{*-i}, \sigma_{t+1}^*\right) = U\left(\sigma_{t-1}^*, \tilde{\sigma}_t^i, \sigma_t^{*-i}, \sigma_{t+1}^*\right)$$

L'utilité retirée de cette stratégie $\bar{\sigma}_t^i$ 2 Σ_t^i est, par définition, inférieure ou égale à celle de la stratégie de l'équilibre, donc

$$U\left(\sigma_{t-1}^*, \sigma_t^{*i}, \sigma_t^{*-i}, \sigma_{t+1}^*\right) \geqslant U\left(\sigma_{t-1}^*, \tilde{\sigma}_t^i, \sigma_t^{*-i}, \sigma_{t+1}^*\right) \qquad \text{pour tout } \tilde{\sigma}_t^i \text{ 2 } \tilde{\Sigma}_t^i$$

□

5 L'équilibre symétrique non stationnaire avec épargne positive

Considérons un équilibre qui vérifie $s_t^i = s_t > 0$ pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$ et tout i. Ceci va nous permettre de rapprocher les dynamiques de l'équilibre de concurrence imparfaite du jeu de marché de celles de l'équilibre concurrentiel d'une économie différente.

5.1 Caractérisation de l'équilibre dynamique

Proposition 2 *À l'équilibre symétrique avec épargne positive l'offre de monnaie est la même à chaque période et pour chaque agent, $e > 0$ pour tout t et tout i.*

Démonstration

Reprenons la propriété 3 de l'équilibre : l'épargne agrégée à chaque date est égale à une constante M avec $P_t S_t = M$ pour tout t. Pour un équilibre avec épargne positive M sera positif. Considérons un équilibre symétrique nous avons alors $P_t s_t^i = \frac{M}{N}$, pour tout i.

La stratégie d'équilibre avec épargne positive d'un agent i né en t est $(0, s_t^i, e_{t+1}^i, 0)$. Sa contrainte de budget intertemporelle est $P_t s_t^i \geqslant e_{t+1}^i$. La propriété 2 montre qu'à l'équilibre la contrainte de budget des agents est saturée, nous avons donc $P_t s_t^i = e_{t+1}^i$. Nous obtenons ainsi la suite d'égalités $P_t s_t^i = e_{t-1}^i = e = \frac{M}{N}$ pour tout t et tout i.

□

L'équation récurrente qui caractérise la trajectoire d'un équilibre symétrique avec épargne positive porte ainsi sur la seule épargne réelle.

Proposition 3 *À l'équilibre symétrique avec épargne positive, le revenu marginal de seconde période vérifie :*

$$\Psi_t'(s_t) = \frac{s_{t+1}}{s_t}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$$

Démonstration

À l'équilibre symétrique avec épargne positive la stratégie d'un agent né en t est $(0, s_t, e, 0)$, ce qui donne

$$\begin{cases} \beta_t = Ne \\ \gamma_t = (N \text{ ¡ } 1)s_t \\ \lambda_{t+1} = (N \text{ ¡ } 1)e \\ \mu_{t+1} = Ns_{t+1} \end{cases}$$

L'expression du revenu marginal, $\Psi_t'(s_t) = \frac{\beta_t \gamma_t \lambda_{t+1} \mu_{t+1}}{((\beta_t + \lambda_{t+1})s_t + \lambda_{t+1}\gamma_{t+1})^2}$, devient

$$\Psi_t'(s_t) = \frac{s_{t+1}}{s_t}\left(1 \text{ ¡ } \frac{1}{N}\right)^2$$ □

Proposition 4 *Considérons $e > 0$ et une suite $(\sigma_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$, avec $\sigma_t \in]0, \omega_1[$. La suite des stratégies $\left((\sigma_t^i)_{i=1,\dots,N}\right)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ avec $\sigma_t^i = (0, s_t, e, 0)$ pour tout i constitue un équilibre symétrique si et seulement si la suite $(\sigma_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ vérifie pour tout t l'équation :*

$$U_c'(\omega_1 - s_t, \omega_2 + s_{t+1}) = \frac{s_{t+1}}{s_t}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 U_d'(\omega_1 - s_t, \omega_2 + s_{t+1})$$

Démonstration

La stratégie d'équilibre avec une épargne positive d'un agent i né en t est $(0, s_t^i, e_{t+1}^i, 0)$. La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est :

$$U_{c_t}'\left(\omega_1 \text{ ¡ } s_t^i, \omega_2 + \Psi_{i,t}(s_t^i)\right) = \Psi_{i,t}'(s_t^i) U_{d_{t+1}}'\left(\omega_1 \text{ ¡ } s_t^i, \omega_2 + \Psi_{i,t}(s_t^i)\right)$$

avec $\Psi_{i,t}(s_t^i) = \frac{P_t}{P_{t+1}} s_t^i$. Par définition, le prix en t est $P_t = \frac{e}{s_t}$ et en $t+1$, $P_{t+1} = \frac{e}{s_{t+1}}$ nous avons donc $\frac{s_{t+1}}{s_t} = \frac{P_t}{P_{t+1}}$. De cette dernière égalité nous obtenons $\Psi_t(s_t) = s_{t+1}$. Enfin, la proposition 3 nous donne.$\Psi_t'(s_t) = \frac{s_{t+1}}{s_t}\left(1 \;;\; \frac{1}{N}\right)^2$.

□

5.2 Equation de la dynamique de concurrence imparfaite

Considérons le cas séparable, $U(c, d) = u(c) + v(d)$. La condition d'équilibre décrit une suite de $s_t > 0$ qui vérifie l'équation :

$$s_t u'(\omega_1 - s_t) = s_{t+1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v'(\omega_2 - s_{t+1}) \text{ avec } s_t \in [0, \omega_1[\qquad (15)$$

L'équilibre stationnaire de cette économie vérifie l'égalité précédente avec $s_t = s$ soit :

$$u'(\omega_1 - s) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v'(\omega_2 + s) \text{ pour } s \in [0, \omega_1[$$

posons $G(s) = \frac{u'(\omega_1 - s)}{v'(\omega_2 + s)}$. L'équilibre stationnaire symétrique, $\hat{s}$, doit alors vérifier $G(\hat{s}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$. La fonction $G(s)$ est croissante par rapport à s. Pour avoir un équilibre non autarcique il faut vérifier $G(0) < \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$.

Il est possible d'indicer la quantité d'équilibre stationnaire par le nombre d'agents présents dans l'économie : $\hat{s}_N = G^{-1}\left(\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2\right)$ et $\hat{s}_N$ est une fonction croissante de N.

Cela illustre la caractéristique standard de la concurrence imparfaite où le volume des transactions est inférieur au volume concurrentiel. Aussi quand N tend vers l'infini, cet équilibre symétrique stationnaire correspond à l'équilibre concurrentiel.

Pour caractériser les trajectoires des équilibres non stationnaires posons les fonctions F, H_N, H_{CP} telles que :

$$F(s_t) = s_t u'(\omega_1 - s_1)$$

$$H_N(s_{t+1}) = s_{t+1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v'(\omega_2 + s_{t+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 H_{CP}(s_{t+1})$$

La fonction F est une fonction continue et strictement croissante de $[0, \omega_1[\rightarrow [0, \infty[$ et H_N, et H_{CP} sont des fonctions continues de $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. H_{CP} caractérise la concurrence parfaite. La relation (15) devient :

$$s_t = F^{-1} \circ H_N(s_{t+1})$$

On retrouve ici la formulation de la dynamique arrière de prévision parfaite de l'équilibre de concurrence parfaite de Grandmont(1985), où $F^{-1} \circ H_N(s_{t+1}) = \chi_N(s_{t+1})$ est la fonction d'offre des agents, avec un facteur $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$ supplémentaire.

Cette relation d'équilibre peut être aussi obtenue en considérant une économie concurrentielle avec des agents identiques et une fonction d'utilité de la forme : $u(c) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v(d)$, c'est à dire en présence d'une préférence pour le présent supérieure à un. Dans ce cas, comme avec la concurrence imparfaite, l'épargne de première période est moins importante que dans une économie concurrentielle avec préférence pour le présent égale à un.

Conclusion

Le modèle "achat ou vente" que nous avons utilisé focalise l'attention sur les aspects stratégiques de l'équilibre. Nous montrons que l'existence d'un équilibre symétrique, stationnaire et non autarcique dépend du degré de concurrence sur les marchés, et qu'un pouvoir de marché trop important conduit à l'autarcie.

S'il est possible de rapprocher l'étude de la dynamique de l'équilibre de concurrence imparfaite de celle de la concurrence parfaite de Grandmont(1985) il reste à poursuivre ce travail.

Nous avons considéré une économie simple à un bien avec des agents symétriques. Il est possible de prolonger ce travail dans deux directions. D'une part en considérant des agents hétèrogènes, la question est de savoir dans quelle mesure l'argument de manipulation des prix qui conduit à l'inactivité des marchés tient, et d'autre part en considérant plusieurs biens.

Annexe

Démonstration de la proposition 1.

Vérifions que la fonction $\Psi_{i,t}(s)$ est strictement concave. Sa dérivée est :

$$\Psi'_{i,t}(s) = \frac{\beta_t^i \gamma_t^i \lambda_{t+1}^i \mu_{t+1}^i}{\left(\left(\beta_t^i + \lambda_{t+1}^i\right) s + \lambda_{t+1}^i \gamma_{t+1}^i\right)^2} > 0$$

La dérivée seconde est négative : $\Psi''_{i,t} < 0$.

Soit la fonction

$$\begin{aligned} &H_{i,t} : R \rightarrow R^2 \\ &s \rightarrow (\omega_1 - s, \omega_2 + \Psi_{i,t}(s)) = (f(s), g_{i,t}(s)) \end{aligned}$$

alors $V_{i,t}(s) = U \circ H_{i,t} = U\left(f(s), g_{i,t}(s)\right)$.
Soit $\lambda \in]0,1[$, $s_1 \in [-\omega_2, \omega_1]$ et $s_2 \in [-\omega_2, \omega_1]$, $s_1 \neq s_2$ alors

$$\begin{aligned} H_{i,t}\left(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2\right) &= \left(f(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2), g_{i,t}(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)\right) \\ &= \left(\lambda f(s_1) + (1-\lambda)f(s_2), g_{i,t}(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)\right)) \end{aligned}$$

car f est linéaire.

Comme $g_{i,t}$ est une fonction croissante et concave il vient

$$g_{i,t}\left(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2\right) > \lambda g_{i,t}(s_1) + (1-\lambda) g_{i,t}(s_2)$$

La fonction $U(c,d)$ est strictement concave et croissante par rapport à ses deux arguments donc :

$$\begin{aligned} &V_{i,t}\left(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2\right) = \\ &U \circ H_{i,t}\left(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2\right) \geqslant \\ &U\left(\lambda f(s_1) + (1-\lambda)f(s_2), \lambda g_{i,t}(s_1) + (1-\lambda)g_{i,t}(s_2)\right) \end{aligned}$$

Comme U est strictement concave nous avons
$U\left(\lambda f(s_1) + (1-\lambda)f(s_2), \lambda g_{i,t}(s_1) + (1-\lambda)g_{i,t}(s_2)\right) >$
$\lambda U\left(f(s_1), g_{i,t}(s_1)\right) + (1-\lambda)U\left(f(s_2), g_{i,t}(s_2)\right) = \lambda V_{i,t}(s_1) + (1-\lambda)V_{i,t}(s_2)$

□

Références

Amir R., S. Sahi, M. Shubik et S. Yao, (1990) : A strategic market game with complete markets, *Journal of Economic Theory* 51, 126-143.

Cordella T. et J.J. Gabszewicz, (1998) : "Nice" Trivial Equilibria in Strategic Market Games, *Games Economic Behavior*, Vol.22, pp.162-169.

de Morogues F., (1999), Equilibres monétaires du jeu stratégique de marché dans le modèle à générations imbriquées, *Annales d'Economie et Statistique*, n° 54.

Dubey P. et L.S. Shapley, (1994) : Noncooperative general exchange with a continuum of traders : Two models, *Journal of Mathematical Economics*, 23, pp. 253-293.

Dubey P.et M. Shubik, (1978) : The Noncooperative Equilibria of a Closed Trading Economy with Market Supply and Bidding Strategies, *Journal of Economic Theory*, 17, pp. 1-20.

Forges F.et J. Peck, (1995) : Correlated Equilibrium and Sunspot Equilibrium, *Economic Theory*, 5, pp. 33-50.

Goenka A., D. Kelly et S.E. Spear, (1998) : Endogenous Strategic Business Cycles, *Journal of Economic Theory*, 81, pp. 97-125.

Grandmont J.M., (1985) : On endogenous Competitive Business Cycles, *Econometrica*, 53, pp. 995-1045.

Peck J., K. Shell et S.E. Spear, (1992) : The market game : Existence and strucure of equilibrium, *Journal of Mathematical Economics*, pp. 271-299.

Postlewaite A.et D. Schmeidler, (1978) : Approximate efficiency of non-Walras Nash equilibria, *Econometrica*, 46, pp. 127-135.

Sahi L.S.et S. Yao, (1989) : The noncooperative equilibria of a trading economy with complete markets and consistent prices, *Journal of Mathematical Economics*, 18, pp. 325-346.

Shapley L.S.et M. Shubik, (1977) : Trade Using One Commodity as Means of Payment, *Journal of Political Economy*, 85(5), pp. 937-968.

Sorin S., (1996) : Strategic Market Games with Exchange Rates, *Journal of Economic Theory* 69, pp. 431-446.