Les marchés à tranches

Lionel Thomas*
*Crese et Théma-Cnrs, Université de Franche-Comté***

1 Introduction

Depuis une vingtaine d'années, la théorie des enchères s'est largement développée et de nombreux domaines ont ainsi pu être abordés. À ce titre, les marchés publics constituent l'un des champs d'application particulièrement privilégiée. Généralement, les modèles théoriques considèrent que l'acheteur organise une procédure afin de réaliser une opération donnée dans son ensemble (voir Mougeot et Naegelen (1993) pour une large étude des marchés publics).

Pourtant, dans la pratique de nombreux projets, en dépit d'une parfaite évaluation des prestations à satisfaire, sont très souvent découpés en plusieurs travaux qui doivent être réalisés successivement, les uns après les autres. Ces travaux constituent ce que les maîtres d'ouvrage des marchés publics appellent des tranches. Plus précisément, pour garantir l'exécution cohérente d'un projet, la première tranche (qualifiée de ferme) doit être effectuée juste après l'attribution du marché, tandis que l'affermissement (la réalisation) des suivantes (dénommées conditionnelles) est soumis à la réalisation de certaines conditions prévues par le contrat.

* L'auteur remercie deux rapporteurs anonymes de la revue pour leurs remarques sur la version initiale et reste seul responsable d'erreurs.

** UFR des Sciences, Techniques et Gestion de l'Industrie
Rue Roussel, BP 790
90020 Belfort cedex
Tél. : 03 81 66 67 17
Mel : thomas@ufr-stgi.univ-fcomte.fr

En ce sens, cette procédure se distingue de celle étudiée par Branco (1996) dans la mesure où le marché à tranches comprend une mise en concurrence unique portant sur l'ensemble des tranches à réaliser et non une mise en concurrence sur chacune d'elles[1].

La caractéristique principale de ces marchés est donc que l'affermissement des tranches suivant la première est conditionnée à la réalisation d'un événement qui est spécifié explicitement dans le contrat liant l'acheteur au titulaire du marché. Il peut s'agir de l'octroi futur d'une subvention par l'Etat ou par l'Union Européenne à une collectivité territoriale ou bien la satisfaction des électeurs face à la mise à disposition d'un nouveau service...

En fait, ce type d'incertitude concerne plus particulièrement les marchés portant sur des travaux neufs de génie civil et de bâtiment ou sur des quantités importantes. En effet, ces procédures ont l'avantage d'une part de permettre à l'acheteur de connaître l'enveloppe globale nécessaire à l'exécution du marché et d'autre part de faciliter la continuité des travaux. Par conséquent, cette forme de marché revêt un intérêt certain pour l'acheteur pour diverses raisons qui peuvent être de nature financières, techniques ou économiques. C'est le cas si, lors de l'organisation de la mise en concurrence, il n'est pas encore en mesure de financer la totalité du projet avec le budget dont il dispose. Ou bien, il peut d'ores et déjà prévoir la poursuite d'un projet en conditionnant les tranches à venir à la réussite technique ou économique de la tranche initiale.

En France, le Code des marchés publics répertorie ces procédures dans les articles 76 et 273 sous la dénomination marchés à tranches conditionnelles : « *Le marché à tranches conditionnelles comporte une tranche ferme et une ou plusieurs tranches conditionnelles. Le marché définit la consistance, le prix et les modalités d'exécution des prestations de chaque tranche.* [...] *L'exécution de chaque tranche conditionnelle est subordonnée à une décision de la personne responsable du marché, notifiée au titulaire dans les conditions fixées au marché* »[2]. En 1992 (voir Brémont (1993) et Huyn (1993)) ces marchés représentaient 12,5% du total des appels d'offres (et notamment 65% pour les régions) ainsi que 28% des dépenses (75% pour les OPHLM, 50% pour l'Etat)[3].

Il semble donc intéressant d'analyser ce type de marchés à l'aune de la théorie des enchères et plus précisément d'étudier l'influence de l'incertitude qui pèse sur la réalisation de la totalité de l'opération. Pour cela, nous supposons que la réalisation des conditions préalables à l'affermissement d'une tranche est connue en probabilité lors de l'organisation de la mise en concurrence. Cette probabilité est connaissance commune. Par ailleurs, l'acheteur

---

1 En terme de marché publics, le mécanisme analysé par cet auteur correspond à une procédure d'allotissement.

2 L'article précise aussi que « *Lorsqu'une tranche conditionnelle* [...] *n'est pas affermie, le titulaire peut bénéficier si le marché le prévoit et dans les conditions qu'il définit,* [...] *d'une indemnité de dédit.* »

3 Bien que nous ne citions que les textes régissant les marchés publics français, cette procédure est également utilisée par tous les membres de l'Union européenne (cf. : Brunelli (1995)).

est en situation d'information asymétrique par rapport aux fournisseurs sur les coûts de production de chaque tranche[4].

L'objet de cet article est de déterminer dans un premier temps les règles d'approvisionnement optimales lorsque le marché comporte deux tranches, la première étant ferme, la seconde étant conditionnelle. Dans un deuxième temps, nous évaluons le coût pour l'acheteur lié à l'incertitude du marché.

Nous montrons que l'acheteur attribue le marché à tranches à la firme la plus efficace ex-ante, c'est à dire possédant la somme espérée des coûts la plus faible. En effet, l'aspect conditionnel de la seconde tranche fait que l'acheteur n'est pas certain de verser un transfert monétaire pour sa réalisation, contrairement à la première tranche. Il doit donc anticiper le coût espéré de cette tranche et non le coût certain.

Il se trouve alors que l'allocation ex-post, c'est à dire la réalisation effective ou non de la tranche conditionnelle, peut être inefficace car la firme sélectionnée initialement ne se révèle pas nécessairement être la plus efficace a posteriori pour réaliser le marché. L'incertitude du marché à tranches se traduit donc par un coût pour l'acheteur car il peut sélectionner ex-ante un entreprise qui ex-post n'est pas la plus efficace. Toutefois, contrairement à Myerson ((1981), pp. 67-68), l'inefficacité ex-post de cette procédure n'est pas due à des croyances non symétriques sur les offreurs qui poussent l'acheteur à pratiquer une discrimination à l'encontre des entreprises les plus efficaces a priori. Dans un marché à tranches, l'inefficacité ex-post découle simplement de l'incertitude pesant sur la réalisation totale du projet, chaque entreprise étant traitée de façon équivalente et non discriminatoire.

Dès lors, nous mesurons le coût lié à cette inefficacité par la probabilité que le titulaire du marché ne soit pas le plus efficace ex-post alors qu'il l'est ex-ante. Nous démontrons que l'acheteur peut tour à tour préférer des situations où l'incertitude sur la réalisation de la seconde tranche est plus forte malgré la volonté initiale de réaliser tout le projet présenté dans le contrat.

Après avoir présenté le modèle servant de base à l'étude (section 2), la section qui suit étudie les propriétés du mécanisme optimal. Enfin nous concluons ce travail dans la section 4.

2 Le modèle

L'acheteur est incertain de la réalisation complète d'une opération. Il décide alors d'organiser un marché qu'il scinde en deux tranches[5].

---

[4] Dans ce travail, nous ne nous intéressons qu'aux procédures d'adjudications pour lesquelles seuls les prix comptent dans l'attribution du marché. Voir Che (1993), Naegelen (1990) et Manelli et Vincent (1995) lorsque la qualité est un paramètre d'attribution du marché.

[5] L'analyse se généralise sans difficultés à un nombre de tranches supérieur à deux.

Pour réaliser ce projet, il existe n firmes neutres au risque. La firme i, $i = 1, ..., n$ réalise la tranche k, $k = 1, 2$, au coût[6] :

$$\theta_i^k$$

Lors de la mise en concurrence, on suppose que i connaît de façon privée les coûts respectifs de chaque tranche. Par contre, il est connaissance commune qu'ils sont la réalisation d'une variable aléatoire indépendante à deux dimensions de densité de probabilité $g(.)$, strictement positive et définie sur le compact $[\underline{\theta}^1, \bar{\theta}^1] \times [\underline{\theta}^2, \bar{\theta}^2]$.

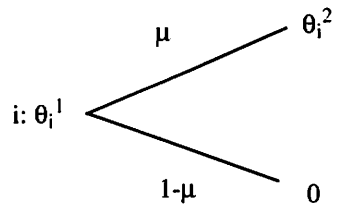
On suppose que l'acheteur, noté A, est neutre au risque. Si la tranche k, $k = 1, 2$, est réalisée par la firme i, il lui verse le paiement :

$$t_i^k$$

Pour traduire l'incertitude qui caractérise cette procédure, on suppose que l'acheteur n'affermit la seconde tranche que si l'événement E auquel elle est conditionnée se réalise. Plus précisément, cet événement n'est pas lié à la réalisation de la première tranche mais aux conséquences de cette réalisation. Notamment, si la seconde tranche dépend de la réussite de la première, son succès ne se mesure pas par la façon dont elle a été réalisée mais par l'évaluation de la mission qu'elle est censée remplir auprès de ses utilisateurs. Ce constat s'opère également si l'acheteur doit bénéficier d'une subvention pour assurer la fin du marché. Il s'ensuit qu'au début de la procédure, la probabilité, connaissance commune, d'occurrence de E est exogène. On la note μ, avec :

$$0 < \mu < 1$$

Dès lors, les coûts supportés par la firme i remportant le marché peuvent se schématiser de la façon suivante :



L'entreprise i est donc certaine de subir le coût lié à la réalisation de la première tranche, tandis qu'elle ne l'est plus pour le coût de la seconde. Ainsi, lors de la mise en concurrence liée à l'organisation d'un marché à tranche conditionnelle, le coût pertinent pour l'acheteur est un coût espéré

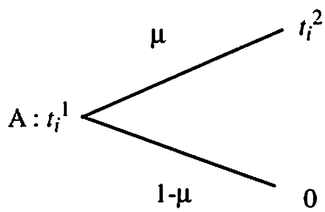
6 Nous supposons donc implicitement que chaque tranche constitue un ensemble indivisible. L'étude peut se généraliser à des tranches portant sur un bien divisible (cf. : Dasgupta et Spulber (1990)).

en raison de l'incertitude qui pèse sur la réalisation de la seconde tranche. On le note :

$$\theta_i^\mu = \theta_i^1 + \mu\theta_i^2 \text{ [7]}$$

Ce coût est la réalisation indépendante de la variable aléatoire de fonction de répartition $F^\mu(.)$ et de densité $f^\mu(.) > 0$ sur l'intervalle $[\underline{\theta}^\mu, \bar{\theta}^\mu]$ avec $\underline{\theta}^\mu = \underline{\theta}^1 + \mu\underline{\theta}^2$ et $\bar{\theta}^\mu = \bar{\theta}^1 + \mu\bar{\theta}^2$[8]. Nous faisons l'hypothèse de régularité : la fonction $\phi^\mu(.) = F^\mu(.)/f^\mu(.)$ est monotone croissante en θ_i^μ. Par ailleurs, on note $\Theta^\mu = \times_i [\underline{\theta}^\mu, \bar{\theta}^\mu]$ et $\Theta_{-i}^\mu = \times_{j \neq i} [\underline{\theta}^\mu, \bar{\theta}^\mu]$.

Quant à l'acheteur, l'arbre de ses dépenses est :



Ainsi, si l'on note le paiement espéré de la procédure versé à la firme i :

$$t_i = [t_i^1 + \mu t_i^2],$$

le coût d'acquisition total devient :

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

On suppose que l'objectif de l'acheteur est de minimiser T. Face au caractère privatif de l'information, les croyances de l'acheteur sont données par la fonction :

$$f^\mu(\theta^\mu) = \times_i f^\mu(\theta_i^\mu)$$

La procédure mise en place est la suivante :

- l'acheteur présente le contrat précisant les règles d'attribution du marché et de transfert monétaire,
- les firmes acceptant de participer annoncent leurs coûts espérés respectifs,
- le titulaire du marché réalise la tranche ferme selon les termes du contrat,
- si l'événement E se réalise, l'acheteur fait effectuer la seconde tranche; sinon la relation prend fin.

---

[7] Conformément à la législation, si la réalisation de la première tranche entraîne des dépenses relatives à la seconde tranche (par exemple, lorsque le financement des coûts fixes est amorti sur l'ensemble des tranches), l'acheteur doit prévoir le versement d'une indemnité de dédit si elle n'est pas affermie. Le coût supporté dans la première phase du marché devient : $\theta_i^1 + p\theta_i^2$ où p est la part du coût de la deuxième phase supportée dans la première. Dans ce cas, nous avons : $\theta_i^\mu = \theta_i^1 + (p + \mu)\theta_i^2$. Sans perte de généralités, nous supposons donc que $p = 0$.

[8] On déduit cette loi de la loi $g(.)$ dans l'annexe A.

L'organisateur souhaitant minimiser T, il définit le mécanisme :

$$\left\langle t_i\left(\hat{\theta}^{\mu}\right), \pi_i\left(\hat{\theta}^{\mu}\right)\right\rangle$$

indiquant pour tout vecteur d'annonce $\hat{\theta}^{\mu} = (\hat{\theta}_1^{\mu}, ..., \hat{\theta}_i^{\mu}, ..., \hat{\theta}_n^{\mu})$:

- $\pi_i(\hat{\theta}^{\mu})$, la probabilité d'attribuer le marché à l'entreprise i,
- et $t_i(\hat{\theta}^{\mu})$ le transfert monétaire versé.

Quand l'information est incomplète, l'acheteur n'est pas en mesure d'observer le coût espéré des agents. En vertu du principe de révélation, l'étude se restreint aux mécanismes directs révélateurs. Le problème devient ainsi :

$$\min_{t_i(.),\pi_i(.)} E(T) = \int_{\Theta^{\mu}} \sum_i t_i(\theta^{\mu}) f^{\mu}(\theta^{\mu}) d\theta^{\mu}$$

sous les contraintes :

$$\mathrm{RI}: U_i(\theta_i^{\mu}) \geqslant 0 \qquad \forall i, \forall \theta_i^{\mu} \in [\underline{\theta}^{\mu}, \bar{\theta}^{\mu}]$$

$$\mathrm{I}: U_i(\theta_i^{\mu}) \equiv U_i(\theta_i^{\mu}, \theta_i^{\mu}) \geqslant U_i(\hat{\theta}_i^{\mu}, \theta_i^{\mu}) \qquad \forall i, \forall \theta_i^{\mu}, \hat{\theta}_i^{\mu} \in [\underline{\theta}^{\mu}, \bar{\theta}^{\mu}]$$

$$\mathrm{R}: \begin{cases} 0 \leqslant \pi_i(\theta^{\mu}) \leqslant 1 \\ \sum_i \pi_i(\theta^{\mu}) \leqslant 1 \end{cases} \qquad \forall i, \forall \theta^{\mu}$$

où $$U_i(\hat{\theta}_i^{\mu}, \theta_i^{\mu}) = \int_{\Theta_{-i}^{\mu}} \left[t_i(\hat{\theta}_i^{\mu}, \theta_{-i}^{\mu}) - \pi_i(\hat{\theta}_i^{\mu}, \theta_{-i}^{\mu})\theta_i^{\mu}\right] f_{-i}^{\mu}(\theta_{-i}^{\mu}) d\theta_{-i}^{\mu}$$

représente l'utilité espérée de la firme i de type θ_i^{μ} lorsqu'elle annonce $\hat{\theta}_i^{\mu}$, et la fonction $f_{-i}^{\mu}(\theta_{-i}^{\mu}) = \underset{j \neq i}{\times} f^{\mu}(\theta_j^{\mu})$ résume les croyances de i sur ses adversaires avec $\theta_{-i}^{\mu} = \times_{j \neq i} \theta_j^{\mu}$.

La contrainte RI constitue la contrainte de rationalité individuelle et I représente la contrainte d'incitation : une firme espère un profit plus élevé si elle annonce la vérité sur son coût espéré plutôt que toute autre annonce. Enfin R est la contrainte de réalisabilité.

3 Propriétés du mécanisme optimal

Les propriétés du mécanisme optimal concernent les règles d'attribution et de paiement du marché mais aussi la mesure du coût que l'acheteur supporte en raison de l'incertitude pesant sur la réalisation de la seconde tranche.

3.1 L'attribution et le paiement du marché

De façon désormais bien connue les contraintes RI, I et R du problème sont satisfaites si les relations suivantes sont vérifiées :

$$U_i(\theta_i^\mu) = \int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} Q_i(\varepsilon)d\varepsilon \tag{1}$$

$$Q_i(\theta_i^\mu) = \int_{\Theta_{-i}^\mu} \pi_i(\theta^\mu) f_{-i}^\mu(\theta_{-i}^\mu) d\theta_{-i}^\mu \quad \text{non croissante en } \theta_i^\mu \tag{2}$$

$$U_i(\bar{\theta}^\mu) = 0 \tag{3}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} 0 \leqslant \pi_i(\theta^\mu) \leqslant 1 \\ \sum_i \pi_i(\theta^\mu) \leqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

Dès lors la fonction objectif peut se réécrire, avec $\phi^\mu(.) = F^\mu(.)/f^\mu(.)$:

$$\min_{\pi_i(.)} \sum_i \int_{\Theta^\mu} \pi_i(\theta^\mu) \left[\theta_i^\mu + \phi^\mu(\theta_i^\mu)\right] f^\mu(\theta^\mu) d\theta^\mu$$

Les propriétés du mécanisme optimal sont présentées dans la proposition suivante.

Proposition 1 (Myerson (1981), pp.66-67). *Les règles optimales du marché à tranches sont :*

- $\begin{cases} \pi_i^*(\theta^\mu) = 1 & si\ \theta_i^\mu = \min_l \theta_l^\mu \quad l = 1, ..., n \\ \pi_i^*(\theta^\mu) = 0 & sinon \end{cases}$
- $t_i^*(\theta^\mu) = \pi_i^*(\theta^\mu)\theta_i^\mu + \int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} \pi_i^*(\varepsilon, \theta_{-i}^\mu) d\varepsilon$

Démonstration. D'après l'hypothèse de régularité, la fonction $\theta_i^\mu + \phi^\mu(\theta_i^\mu)$ est croissante en θ_i^μ. En conséquence, l'acheteur satisfait son objectif en attribuant le marché à la firme annonçant le coût espéré le plus faible dans la mise en concurrence. On déduit de cette règle d'attribution que $Q_i(\theta_i^\mu)$ est non croissante car $Q_i(\theta_i^\mu) = (1 - F^\mu(\theta_i^\mu))^{n-1}$.

La règle de paiement se déduit quant à elle de la combinaison des équations (1), (2) et (3). □

L'acheteur attribue donc le marché à tranches à la firme la plus efficace initialement (ou ex-ante). Afin de l'inciter à soumettre une annonce conforme à la vérité, l'acheteur lui accorde une marge s'ajoutant au coût qu'elle soumet, c'est à dire une rente informationnelle. Ces règles d'attribution et de paiement sont analogues à celles préconisées dans un marché public ne comportant aucune incertitude (Mougeot et Naegelen (1988), p. 732) ou, dit autrement, lorsque la probabilité μ est soit nulle soit égale à un.

La différence avec un marché sans incertitude provient du fait que le paramètre pertinent pour élaborer ces règles n'est qu'un coût espéré et non plus un coût certain. La conséquence en est que, contrairement à un marché ne présentant pas d'incertitude sur sa réalisation, l'allocation ex-post, c'est à dire la réalisation effective ou non de la tranche conditionnelle peut être non efficace : la firme sélectionnée initialement ne se révèle plus nécessairement être la plus efficace a posteriori pour réaliser le marché.

Cela est dû au fait que la firme sélectionnée l'est sur la base d'un coût espéré et non sur le coût qu'elle supporte effectivement. Ainsi, celle-ci est la moins disante ex-ante lorsque l'incertitude présente conditionne l'attribution du marché. Mais elle peut ne plus l'être pour réaliser soit la première tranche, si la seconde est abandonnée, soit les deux tranches dans le cas d'un affermissement. L'incertitude du marché à tranches se traduit donc par un coût pour l'acheteur car il peut sélectionner un entreprise qui ex-post n'est pas la plus efficace.

Etudions plus précisément l'influence de l'incertitude en mesurant le coût qu'elle représente pour l'acheteur.

3.2 Le coût de l'incertitude

Définition. *À la date de passation du contrat, le coût de l'incertitude du marché à tranches est mesuré par la probabilité que le titulaire du marché ne soit pas le plus efficace ex-post alors qu'il l'est ex-ante.*

Il existe donc deux mesures de ce coût selon que la tranche conditionnelle est abandonnée ou non. Commençons par étudier ce coût avec abandon de la seconde tranche.

3.2.1 Coût de l'incertitude avec abandon de la seconde tranche

Pour analyser ce cas, précisons tout d'abord la situation de référence pour laquelle le coût de l'incertitude est nul. Si la deuxième tranche est abandonnée le coût de l'incertitude est nul lorsque l'allocation ex-post correspond avec certitude à l'allocation ex-ante, c'est à dire lorsqu'à la date de passation du marché, le contrat ne prévoit la réalisation que de la première tranche.

Raisonnons alors sur une firme i quelconque qui gagne le marché à tranches. Le coût de l'incertitude est donné par la probabilité ex-ante que l'entreprise i ne possède pas le coût de la première tranche (qui est la seule effectuée ex-post) le plus faible[9], sachant qu'elle est moins chère en matière

[9] Nous supposons ici implicitement que la fonction $\theta_i^1 + F^1(\theta_i^1)/f^1(\theta_i^1)$ représentant le paiement de l'acheteur à la firme i si le contrat ne prévoit que la réalisation de la première tranche est croissant en θ_i^1, avec

$$f^1(\theta_i^1) = \int_{\underline{\theta}^2}^{\bar{\theta}^2} g(\theta_i^1, \varepsilon) d\varepsilon \quad \text{et} \quad F^1(\theta_i^1) = \int_{\underline{\theta}^1}^{\theta_i^1} f^1(\varepsilon) d\varepsilon$$

de coût espéré. La proposition suivante permet de quantifier ce coût.

Proposition 2. *Le coût de l'incertitude dans un marché à tranches lorsque la deuxième tranche n'est pas réalisée, est :*

$$1 - \left[\int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \frac{\int_{\Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\bar{\omega})} h(\varepsilon, \bar{\omega}) d\varepsilon}{1 - F^\mu(\theta_i^\mu)} d\bar{\omega}\right]^{n-1}$$

où $h(.)$ est la loi du couple $(\theta_i^\mu, \theta_i^1)$ et $\Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\theta_i^1)$ représente le domaine de définition de $\theta_j^\mu > \theta_i^\mu$ conditionné par θ_i^1[10].

Démonstration. La probabilité que la firme i soit la plus efficace ex-post sachant qu'elle l'est ex-ante est donnée par :

$$\Pr(\theta_i^1 < \theta_j^1/\theta_i^\mu < \theta_j^\mu, \forall j \neq i) = \frac{\Pr(\theta_i^1 < \theta_j^1 \text{ et } \theta_i^\mu < \theta_j^\mu, \forall j \neq i)}{\Pr(\theta_i^\mu < \theta_j^\mu, \forall j \neq i)}$$

soit :

$$\frac{\left[\int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \int_{\Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\bar{\omega})} h(\varepsilon, \bar{\omega}) d\varepsilon d\bar{\omega}\right]^{n-1}}{\left[\int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} f^\mu(\varepsilon) d\varepsilon\right]^{n-1}}$$

La probabilité que tel ne soit pas le cas est donc :

$$1 - \left[\int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \int_{\Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\bar{\omega})} h(\varepsilon, \bar{\omega}) d\varepsilon d\bar{\omega}\right]^{n-1} / \left[\int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} f^\mu(\varepsilon) d\varepsilon\right]^{n-1}$$

ce qui correspond à la définition du coût de l'incertitude. □

La probabilité d'occurrence de l'événement E intervenant dans la définition de θ_i^μ et de sa loi de probabilité, on en déduit que le coût de l'incertitude évolue avec le niveau d'incertitude μ. Si l'on note alors :

$$\bar{\delta}(\mu, \theta_i^1, \theta_i^2) = \sup \left[\theta_j^\mu / \theta_j^\mu \in \Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\theta_i^1)\right]$$

et

$$\underline{\delta}(\mu, \theta_i^1, \theta_i^2) = \inf \left[\theta_j^\mu / \theta_j^\mu \in \Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\theta_i^1)\right]$$

on peut montrer (voir annexe B) que la dérivée du coût de l'incertitude est du signe opposé de l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \Bigg\{ \Bigg[h(\bar{\delta}(\mu, \bar{\omega}, \theta_i^2), \bar{\omega}) \frac{\partial}{\partial \mu} \bar{\delta}(\mu, \bar{\omega}, \theta_i^2) - h(\underline{\delta}(\mu, \bar{\omega}, \theta_i^2), \bar{\omega}) \frac{\partial}{\partial \mu} \underline{\delta}(\mu, \bar{\omega}, \theta_i^2) \\
&- \int_{\Delta(\mu, \omega, \theta_i^2)} \frac{1}{\mu} \left(h(\varepsilon, \omega) + \frac{\partial}{\partial \theta_i^2} g\left(\bar{\omega}, \frac{\varepsilon - \bar{\omega}}{\mu}\right) \frac{\varepsilon - \bar{\omega}}{\mu^2} \right) d\varepsilon \Bigg] \times (1 - F^\mu(\theta_i^\mu)) \\
&- \int_{\Delta(\mu, \bar{\omega}, \theta_i^2)} h(\varepsilon, \bar{\omega}) d\varepsilon \Big[f^\mu(\bar{\theta}^\mu) \bar{\theta}^2 - f^\mu(\theta_i^\mu) \theta_i^2 \\
&\int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} \frac{1}{\mu} \left(f^\mu(\varepsilon) + \int_{\underline{\theta}^1}^{\bar{\theta}^1} \frac{\partial}{\partial \theta_i^2} g\left(\theta_i^1, \frac{\varepsilon - \theta_i^1}{\mu}\right) \frac{\varepsilon - \theta_i^1}{\mu^2} d\theta_i^1 \right) d\varepsilon \Big] \Bigg\} d\bar{\omega}
\end{aligned}$$

[10] La loi $h(.)$ est déterminée dans l'annexe A.

On constate donc que les variations ne peuvent pas être déterminées de façon générale dans la mesure où elles dépendent de la loi $g(.)$ du couple (θ_i^1, θ_i^2) et du domaine conditionnel $\Delta(.)$.

Toutefois, on peut raisonnablement envisager que le coût de l'incertitude peut varier sur certains intervalles dans le même sens que le niveau d'incertitude et sur d'autres dans le sens contraire.

Ainsi, le coût peut diminuer à mesure que le niveau d'incertitude se réduit (μ augmente), ce qui apparaît contre intuitif dans la mesure où lorsque μ croît, on s'écarte de plus en plus de la situation où l'allocation ex-ante correspond à l'allocation ex-post et donc de la situation pour laquelle le coût de l'incertitude nul[11]. Ainsi, l'acheteur peut préférer ex-ante une situation garantissant une plus grande chance à la réalisation de la seconde tranche. Toutefois, il faut remarquer que le coût de l'incertitude est totalement exogène (puisqu'il dépend de $g(.)$ et de μ), l'acheteur ne peut donc pas calculer de niveau d'incertitude optimal visant à minimiser ce coût.

3.2.2 Coût de l'incertitude avec réalisation de la seconde tranche

Soit θ_i la somme des coûts de l'agent i. $F(.)$ et $f(.)$ représentent respectivement la fonction de répartition et de densité de θ_i sur l'intervalle $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ avec $\underline{\theta} = \underline{\theta}^1 + \underline{\theta}^2$ et $\bar{\theta} = \bar{\theta}^1 + \bar{\theta}^2$[12].

Dès lors, le coût de l'incertitude est donné par la probabilité ex-ante que l'entreprise i ne possède pas la somme des coûts la plus faible, sachant qu'elle est la plus efficace sur le coût espéré[13].

La probabilité que i soit la plus efficace ex-post sachant qu'elle l'est ex-ante est donnée par :

$$\Pr(\theta_i < \theta_j / \theta_i^\mu < \theta_j^\mu, \forall j \neq i) = \frac{\Pr(\theta_i < \theta_j \text{ et } \theta_i^\mu < \theta_j^\mu, \forall j \neq i)}{\Pr(\theta_i^\mu < \theta_j^\mu, \forall j \neq i)}$$

On peut alors avancer la proposition suivante :

Proposition 3. *Le coût de l'incertitude dans un marché à tranches lorsque la deuxième tranche est réalisée est :*

$$1 - \left[\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}} \frac{\int_{D(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu / \bar{\omega})} m(\varepsilon, \bar{\omega}) d\varepsilon}{1 - F^\mu(\theta_i^\mu)} \right]^{n-1}$$

où $m(.)$ est la loi du couple (θ_i^μ, θ_i) et $D(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu / \theta_i)$ représente le domaine de définition $\theta_j^\mu > \theta_i^\mu$ de conditionné par θ_i.[14]

---

[11] L'annexe C permet d'illustrer ce résultat.

[12] $f(.)$ se détermine de façon analogue à $f^\mu(.)$ dans le cas où $\mu = 1$ (cf. annexe A).

[13] Une remarque similaire à la note 10 peut se faire sur la croissance de fonction $\theta_i + F(\theta_i)/f(\theta_i)$ en θ_i qui constitue le paiement de l'acheteur à l'agent i.

[14] $m(.)$ se déduit de façon similaire à $h(.)$, voir annexe A, dans le cas où $z = \theta_i^1 + \theta_i^2$.

Démonstration. Elle est analogue à la démonstration de la proposition 2.□

Un commentaire similaire à celui de la proposition 2 peut être effectué. Tout d'abord, remarquons que si la seconde tranche est réalisée, le coût de l'incertitude est nul lors de la passation du marché, si le contrat englobe la réalisation de l'ouvrage tout entier, puisque l'allocation ex-post correspond alors à l'allocation ex-ante de façon certaine.

Intuitivement, le coût de l'incertitude doit se réduire à mesure que μ s'accroît, c'est à dire que le niveau d'incertitude pesant sur le marché à tranche diminue, car la différence entre l'allocation ex-post et l'allocation ex-ante se réduit. Pourtant, l'étude des variations de ce coût ne nous permet pas d'exclure que le contraire se produise.

Donc le coût de l'incertitude dans un marché à tranches pour l'acheteur lorsque, ex-post, la deuxième tranche est réalisée, peut décroître à mesure que la probabilité de réaliser cette tranche se réduit ex-ante. Ainsi, assez paradoxalement, l'acheteur peut préférer une situation plus incertaine, c'est à dire moins favorable à la réalisation de la tranche conditionnelle.

4 Conclusion

Dans cet article, nous venons d'examiner les marchés à tranches. Nous montrons que l'incertitude fait que l'attribution du marché peut déboucher sur une allocation inefficace ex-post dans la mesure où ce n'est pas la firme la moins coûteuse qui effectue le marché. Le coût de l'allocation inefficace est ensuite mesuré.

Annexes

Annexe A

Pour construire la loi $f^{\mu}(.)$, définissons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \theta_i^{\mu} = \theta_1^{\mu} + \mu\theta_2^{\mu} \\ z = \theta_i^1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \theta_i^2 = \dfrac{\theta_i^{\mu} - z}{\mu} \\ \theta_i^1 = z \end{cases}$$

La matrice jacobienne est alors :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\theta_i^2}{\partial\theta_i^{\mu}} & \dfrac{\partial\theta_i^2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\theta_i^1}{\partial\theta_i^{\mu}} & \dfrac{\partial\theta_i^1}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\mu & -1/\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La valeur absolue du déterminant de cette matrice est :

$$|\det(J)| = \frac{1}{\mu}$$

La loi du couple (θ_i^{μ}, z) devient :

$$h(\theta_i^{\mu}, z) = \frac{1}{\mu} g\left(z, \frac{\theta_i^{\mu} - z}{\mu}\right) \equiv h(\theta_i^{\mu}, \theta_i^1)$$

Enfin, la loi de θ_i^{μ} est :

$$f^{\mu}(\theta_i^{\mu}) = \int_{\underline{\theta}^1}^{\bar{\theta}^1} h(\theta_i^{\mu}, z)dz$$

Annexe B

En effet, définissons :

$$\begin{aligned} x(\mu) &\equiv \int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \frac{\int_{\Delta(\theta_j^{\mu} > \theta_i^{\mu}/\bar{\omega})} h(\varepsilon, \bar{\omega})d\varepsilon}{1 - F^{\mu}(\theta_i^{\mu})} d\bar{\omega} \\ &= \int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \frac{\int_{\underline{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)}^{\bar{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)} \frac{1}{\mu} g\left(\bar{\omega}, \frac{1}{\mu}(\varepsilon - \bar{\omega})\right) d\varepsilon}{\int_{\theta_i^1 + \mu\theta_i^2}^{\bar{\theta}^1 + \mu\bar{\theta}^2} \int_{\underline{\theta}^1}^{\bar{\theta}^1} \frac{1}{\mu} g\left(\theta_i^1, \frac{1}{\mu}(\varepsilon - \theta_i^1)\right) d\theta_i^1 d\varepsilon} d\bar{\omega} \end{aligned} \qquad (B.1)$$

Le coût de l'incertitude devient donc :

$$1 - [x(\mu)]^{n-1}$$

La variation du coût de l'incertitude avec μ est donc égale à :

$$-(n-1)x'(\mu)[x(\mu)]^{n-2}$$

Comme les termes $(n-1)$ et $[x(\mu)]^{n-2}$ sont positifs, les variations du coût de l'incertitude sont du signe de $-x'(\mu)$.
Or $x'(\mu)$ est égal à :

$$\int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \frac{\left[\int_{\underline{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)}^{\bar{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)} h(\varepsilon,\bar{\omega})d\varepsilon\right]' \times \int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} f^\mu(\varepsilon)d\varepsilon - \int_{\underline{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)}^{\bar{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)} h(\varepsilon,\bar{\omega})d\varepsilon \times \left[\int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} f^\mu(\varepsilon)d\varepsilon\right]'}{\left[\int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} f^\mu(\varepsilon)d\varepsilon\right]^2} d\bar{\omega}$$

ce qui par (B.1) et le théorème de Leibniz est du signe de :

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \Bigg\{ \Bigg[& h(\bar{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2),\bar{\omega})\frac{\partial}{\partial\mu}\bar{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2) - h(\underline{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2),\bar{\omega})\frac{\partial}{\partial\mu}\underline{\delta}(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2) \\
& - \int_{\Delta(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)} \frac{1}{\mu}\left(h(\varepsilon,\omega) + \frac{\partial}{\partial\theta_i^2} g\left(\bar{\omega},\frac{\varepsilon-\bar{\omega}}{\mu}\right)\frac{\varepsilon-\bar{\omega}}{\mu^2}\right)d\varepsilon \Bigg] \times (1 - F^\mu(\theta_i^\mu)) \\
& - \int_{\Delta(\mu,\bar{\omega},\theta_i^2)} h(\varepsilon,\bar{\omega})d\varepsilon \left[f^\mu(\bar{\theta}^\mu)\bar{\theta}^2 - f^\mu(\theta_i^\mu)\theta_i^2\right. \\
& - \int_{\theta_i^\mu}^{\bar{\theta}^\mu} \frac{1}{\mu}\left(f^\mu(\varepsilon) + \int_{\underline{\theta}^1}^{\bar{\theta}^1} \frac{\partial}{\partial\theta_i^2} g\left(\theta_i^1,\frac{\varepsilon-\theta_i^1}{\mu}\right)\frac{\varepsilon-\theta_i^1}{\mu^2}d\theta_i^1\right)d\varepsilon \Bigg]\Bigg\} d\bar{\omega}
\end{aligned}$$

Annexe C

Supposons que les croyances de l'acheteur sur les coûts de production de la firme i sont représentées par la loi de probabilité suivante :

$$g(\theta_i^1,\theta_i^2) = 2,$$

avec : $\theta_i^1 \in [0,1]$, $\theta_i^2 \in [0,1]$, et $\theta_i^2 \geqslant \theta_i^1$.
On en déduit que la loi du couple $(\theta_i^\mu,\theta_i^1)$ est :

$$h(\theta_i^\mu,\theta_i^1) = \frac{2}{\mu}$$

Dès lors, on a :

$$f^\mu(\theta_i^\mu) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{\theta_i^\mu}{1+\mu}\right) & \text{si } \theta_i^\mu \in [0,1] \\ \dfrac{2}{\mu}\left(1 - \dfrac{\theta_i^\mu}{1+\mu}\right) & \text{si } \theta_i^\mu \in]1,1+\mu[\end{cases}$$

Étudions la situation où $\theta_i^\mu \in]1, 1+\mu[$, on a alors : $\Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\theta_i^1) = [\theta_i^\mu, (1+\mu)\theta_i^1]$. Donc, on obtient :

$$\int_{\Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\theta_i^1)} h(\varepsilon, \theta_i^1) d\varepsilon = \int_{\theta_i^\mu}^{(1+\mu)\theta_i^1} \frac{2}{\mu} d\varepsilon = \frac{2}{\mu}[(1+\mu)\theta_i^1 - \theta_i^\mu] = \frac{2}{\mu}(\mu\theta_i^1 - \mu\theta_i^2) = 2(\theta_i^1 - \theta_i^2)$$

et par conséquent :

$$\int_{\theta_i^1}^{\bar{\theta}^1} \int_{\Delta(\theta_j^\mu > \theta_i^\mu/\bar{\omega})} h(\varepsilon, \bar{\omega}) d\varepsilon d\bar{\omega} = \int_{\theta_i^1}^{1} 2(\bar{\omega} - \theta_i^2) d\bar{\omega} = \left[\omega^2 - 2\theta_i^2\bar{\omega}\right]_{\theta_i^1}^{1} = 1 - {\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^2 + 2\theta_i^2\theta_i^1$$

Enfin :

$$\begin{aligned} 1 - F^\mu(\theta_i^\mu) &= \int_{\theta_i^\mu}^{1+\mu} \frac{2}{\mu}\left[1 - \frac{\varepsilon}{1+\mu}\right] d\varepsilon = \frac{2}{\mu(1+\mu)}\left[(1+\mu)\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\right]_{\theta_i^\mu}^{1+\mu} \\ &= \frac{2}{\mu(1+\mu)}\left[(1+\mu)^2 - \frac{(1+\mu)^2}{2} - (1+\mu)\theta_i^\mu + \frac{{\theta_i^\mu}^2}{2}\right] \\ &= \frac{1}{\mu(1+\mu)}[(1+\mu) - \theta_i^\mu]^2 \end{aligned}$$

On a alors :

$$x(\mu) = \frac{1 - {\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^2 + 2\theta_i^2\theta_i^1}{\frac{[(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2}{\mu(1+\mu)}}$$

Dérivons cette expression par rapport à μ, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x'(\mu) &= -(1 - {\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^2 + 2\theta_i^2\theta_i^1)\frac{\left[\frac{[(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2}{\mu(1+\mu)}\right]'}{\left[\frac{[(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2}{\mu(1+\mu)}\right]^2} \\ &= -(1 - {\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^2 + 2\theta_i^2\theta_i^1)\frac{\frac{\left[[(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2\right]'\mu(1+\mu) - [(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2[\mu(1+\mu)]'}{\mu^2(1+\mu)^2}}{\left[\frac{[(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2}{\mu(1+\mu)}\right]^2} \\ &= -(1 - {\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^2 + 2\theta_i^2\theta_i^1)\frac{\left[[(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2\right]'\mu(1+\mu) - [(1+\mu)-\theta_i^\mu]^2[\mu(1+\mu)]'}{[(1+\mu)-\theta_i^\mu]^4} \end{aligned}$$

Le numérateur de la fraction nous donne après simplifications :

$$2\mu\left(-1 + 2\theta_i^1 - {\theta_i^1}^2\right) - \left({\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^1 + 1\right) - \mu^2\left(1 - {\theta_i^2}^2 + 2\theta_i^1 + 2\theta_i^1 2\theta_i^2\right)$$

Supposons alors pour simplifier les calculs que l'on travaille sur $\theta_i^1 = \theta_i^2$. Nous obtenons :

$$1 - {\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^2 + 2\theta_i^2\theta_i^1 = {\theta_i^1}^2 - 2\theta_i^1 + 1 = (\theta_i^1 - 1)^2 > 0$$

et

$$2\mu(-1+2\theta_i^1-{\theta_i^1}^2)-({\theta_i^1}^2-2\theta_i^1+1)-\mu^2(1-{\theta_i^2}^2+2\theta_i^1+2\theta_i^1 2\theta_i^2) = -({\theta_i^1}^2-1)^2(\mu+1)^2 < 0$$

Dès lors, nous avons :

$$x'(\mu) = (\theta_i^1 - 1)^2 \frac{(\theta_i^1 - 1)^2(\mu + 1)^2}{[(1 + \mu) - \theta_i^{\mu}]^4} > 0$$

donc $x'(\mu)$ est croissant, autrement dit le coût de l'incertitude est décroissant.

Références bibliographiques

Brémont P., (1993), *Les Marchés Publics des Collectivités Territoriales*, Paris, Sofiac.

Brunelli P., (1995), *Marchés Publics et Union Européenne*, Paris, Continent Europe.

Branco F., (1996), "Multiple Unit Auctions of an Indivisible Good", *Economic Theory*, 8, pp. 77-101.

Che Y.-K., (1993), "Design Competition Through Multi-Dimensional Auctions", *Rand Journal of Economics*, 24, pp. 668-680.

Code des marchés publics, (1995), Journal Officiel de la République Française, Paris, Imprimerie nationale.

Dasgupta S. and F. Spulber, (1990), "Managing Procurement Auctions", *Information Economics and Policy*, 4, pp. 5-29.

Huynh N. D., (1993), « Le Recensement des Marchés Publics », *Marchés Publics*, n° 272, Mars, pp. 55-75.

Manelli A. and D. Vincent, (1995), "Optimal Procurement Mechanism", *Econometrica*, 63, pp. 591-620.

Mougeot M. et F. Naegelen, (1988), « Analyse Micro-Economique du Code des Marchés Publics », *Revue Economique*, 39, pp. 725-752.

Mougeot M. et F. Naegelen, (1993), *Marchés Publics : Règles, Stratégies, Politiques*, Paris, Economica.

Myerson R., (1981), "Optimal Auction Design", *Mathematics of Operation Research*, 6, pp. 58-73.

Naegelen F., (1990), « L'arbitrage qualité-prix dans les procédures d'appels d'offres », *Economie et Prévision*, n° 96, pp. 95-108.