International Statistical Review (1988), **56**, 2, pp. 139–151. Printed in Great Britain

Processus Empiriques Multidimensionnels: Aperçu De Quelques Résultats Récents

J.H.J. Einmahl[1], D.M. Mason[2] and F.H. Ruymgaart[3]

[1] Department of Medical Informatics and Statistics, University of Limburg, P.O. Box 616, 6200 MD Maastricht, The Netherlands. [2] Department of Mathematical Sciences, 501 Ewing Hall, University of Delaware, Newark, DE 19716, USA. [3] Department of Mathematics, K. U. Nijmegen, Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen, The Netherlands

Résumé

Dans cet article, nous présentons un ensemble de résultats récents sur les processus empiriques multidimensionnels dans le cadre classique. Le thème central de notre étude est le comportement asymptotique global, aussi bien faible que presque sûr, des processus corrigés. Nos résultats principaux concernent les limites fortes pour les suprêma et les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une loi limite fonctionnelle forte et faible. En outre, nous esquissons quelques généralisations et applications.

Mots clés: Fonction correctrice; Limite faible fonctionnelle; Limite forte; Limite forte fonctionnelle; Processus empirique multidimensionnel.

1 Introduction

Dans cet article nous voulons présenter un aperçu de quelques résultats récents sur les processus empiriques multidimensionnels. Les résultats sont présentés dans le cadre traditionnel: nous ne nous occupons pas de classes de type Vapnik–Červonenkis, voir Dudley (1978, 1984), Alexander (1982, 1984), et nous basons notre étude sur une inégalité exponentielle de probabilité au lieu d'utiliser des approximations fortes, voir par exemple Komlós, Major & Tusnády (1975), Berlinet (1984), Mason & van Zwet (1985), Csörgő et al. (1986). (En outre les techniques d'approximation forte ne semblent pas actuellement suffisamment puissantes dans le cas d'une dimension supérieure à 1.) Nous ne nous affranchissons pas non plus de l'hypothèse d'indépendance; voir par exemple Balacheff & Dupont (1979, 1980), Harel (1980).

Pour préciser le cadre de cette étude considérons une suite $X_1, X_2, \ldots$ de vecteurs aléatoires *indépendants et identiquement distribués,* definie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sans perte de généralité nous supposons que les X_i sont à valeurs dans $(0, 1)^d$, où $d \geq 1$ est arbitraire mais fixé. Soit F la function de répartition de la loi commune des X_i, notons $[0, 1]^d = I^d$ et

$$\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[0,t]}(X_i), \quad t \in I^d, \tag{1.1}$$

la function de répartition empirique. Le processus empirique, objet de notre étude, est défini par

$$U_n^F(t) = n^{\frac{1}{2}}(\hat{F}_n(t) - F(t)), \quad t \in I^d. \tag{1.2}$$

Nous nous servirons d'une terminologie bidimensionnelle de sorte que, par exemple, nous parlerons du carré (fermé) pour indiquer I^d. Nous notons

$$e=(1,\ldots,1), \quad |t|=t_1\times\ldots\times t_d. \tag{1.3}$$

L'égalité et convergence en loi sont notées respectivement par

$$\sim, \quad \Rightarrow. \tag{1.4}$$

L'égalité en distribution

$$n\hat{F}_n(t)\sim \text{ Bin }(n, F(t)), \quad t\in I^d, \tag{1.5}$$

entraîne immédiatement les propriétés élémentaires locales suivantes:

$$U_n^F(t)\Rightarrow \mathcal{N}(0, F(t)(1-F(t))), \quad n\to\infty; \tag{1.6}$$

$$n^c\,|U_n^F(t)|\to 0, \quad n\to\infty, \quad \text{pour tout } c<0, \tag{1.7}$$
presque sûrement.

En plus, il est immédiat que

U_n^F s'annule sur la borne inférieure $\{t\in I^d\colon |t|=0\}$ et au sommet 'nord-est' e du carré. (1.8)

De ces propriétés locales émerge le thème central de cette étude: le comportement asymptotique *global, faible* ou *presque sûr*, des processus *corrigés*

$$U_n^F/\{q(F)\tilde{q}(1-F)\} \quad \text{sur } I^d, \tag{1.9}$$

où les fonctions correctrices q, $\tilde{q}$ sont toujours dans l'ensemble

$$\mathcal{Q}^*=\{q\colon[0,1]\to[0,\infty), \quad \text{continue, non-décroissante}\}, \tag{1.10}$$

ou dans l'ensemble plus restreint

$$\mathcal{Q}=\{q\in\mathcal{Q}^*\colon(.)^{-\frac{1}{2}}q(.) \quad \text{non-croissante sur } (0,1]\}. \tag{1.11}$$

Au vu de (1.8), les fonctions correctrices dignes d'intérêt s'annulent au point 0, mais nous ne voulons pas pour autant exclure le choix $q\equiv 1$, $\tilde{q}\equiv 1$ qui correspond au processus non corrigé.

Dans le paragraphe 2 nous énonçons l'inégalité fondamentale précédemment évoquée dans l'introduction. Les résultats principaux sont réunis dans le paragraphe 3, lui même divisé en quatre parties: Généralités, Théorèmes limites forts pour les supréma, Théorème limite fort fonctionnel, Théorème limite faible fonctionnel. Dans le paragraphe 4, enfin, nous esquissons quelques extensions et généralisations dans la première partie, alors qu'une seconde partie est vouée à l'énumération de quelques applications. Nous ne voulons pas lasser le lecteur avec les démonstrations parfois très techniques et préférons nous limiter à quelques idées directrices essentielles, renvoyant, le cas échéant, à la littérature écrite sur le sujet.

2 Outils

Fixons $z\in\mathbb{N}^d$, $d\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in\mathbb{N}^d$ tel que $x\leq z$ soit ξ_x une variable aléatoire dans $\mathbb{R}$ telle que $E(\xi_x)=0$ et Var $(\xi_x)=\sigma_x^2<\infty$. Supposons que les ξ_x soient indépendantes. Introduisons les sommes partielles

$$S_y=\sum_{x\leq y}\xi_x, \quad y\in\mathbb{N}^d\colon y\leq z, \tag{2.1}$$

et écrivons

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(S_z) = \sum_{x \leqslant z} \sigma_x^2. \tag{2.2}$$

Pour la démonstration de l'inégalité suivante voir e.g. Klesov (1983) ou Einmahl (1987).

THÉORÈME 2.1. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

$$P\Big(\max_{y \leqslant z} S_y \geqslant \lambda\Big) \leqslant 2^d P(S_z \geqslant \lambda - d(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}). \tag{2.3}$$

Soit N_n^F un processus de Poisson sur I^d d'intensité $E(N_n^F(t)) = nF(t)$, $t \in I^d$. Notons

$$Z_n^F(t) = n^{-\frac{1}{2}}(N_n^F(t) - nF(t)), \quad t \in I^d, \tag{2.4}$$

le processus standardisé. Nous avons la relation

$$U_n^F \sim (Z_n^F \mid N_n^F(e) = n), \quad \text{sur } I^d, \tag{2.5}$$

qui nous permet de ramener l'étude du processus empirique à l'étude du processus de Poisson standardisé, ayant des accroissements indépendants.

Fixons $t = (t_1, \ldots, t_d) \in I^d$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, fabriquons le quadrillage

$$\mathscr{P}_{t,k} = \{2^{-k}(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) : m_j \in \{1, \ldots, 2^k\}\} \tag{2.6}$$

du bloc $[0, t]$. En utilisant l'indépendance des accroissements du processus Z_n^F il découle facilement du Théorème 2.1 que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P\Big(\max_{s \in \mathscr{P}_{t,k}} \pm Z_n^F(s) \geqslant \lambda\Big) \leqslant 2^d P(\pm Z_n^F(t) \geqslant \lambda - d(2F(t))^{\frac{1}{2}}). \tag{2.7}$$

Si l'on prend la limite pour $k \to \infty$, on arrive à

$$P\Big(\sup_{s \leqslant t} \pm Z_n^F(s) \geqslant \lambda\Big) \leqslant 2^d P(\pm Z_n^F(t) \geqslant \lambda - d(2F(t))^{\frac{1}{2}}), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Une modification d'une inégalité de Bennett (1962) pour la loi binomiale entraîne que

$$P(\pm Z_n^F(t) \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2F(t)}\,\psi\left(\frac{\pm\lambda}{n^{\frac{1}{2}}F(t)}\right)\right), \quad \lambda \geqslant 0, \tag{2.9}$$

où la fonction $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ est donnée par

$$\psi(\lambda) = 2\lambda^{-2}\int_0^\lambda \log(1+\sigma)\,d\sigma, \quad \lambda > 0; \quad \psi(0) = 1; \tag{2.10}$$

voir Shorack & Wellner (1986), Ruymgaart & Wellner (1984). Enfin, on peut déduire de la relation (2.5) que

$$P\Big(\sup_{s \leqslant t} \pm U_n^F(s) \geqslant \lambda\Big) \leqslant 2P\Big(\sup_{s \leqslant t} \pm Z_n^F(s) \geqslant \lambda\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

voir Pyke & Shorack (1968) ou encore Ruymgaart & Wellner (1984). Le théorème suivant est une conséquence immédiate des résultats partiels contenus dans (2.8), (2.9), (2.11). Nous avertissons le lecteur que ce théorème est particulièrement utile pour les petites valeurs de $F(t)$.

THÉORÈME 2.2. *Inégalité fondamentale. Pour tout* $t \in I^d$ *tel que* $0 < F(t) \leqslant \frac{1}{2}$, *tout*

$\varepsilon \in (0, 1)$ *et tout* $\lambda \geq 0$ *on a*

$$P\left(\sup_{s \leq t} |U_n^F(s)| \geq \lambda\right) \leq C \exp\left(\frac{-(1-\varepsilon)\lambda^2}{2F(t)} \psi\left(\frac{\lambda}{n^{\frac{1}{2}}F(t)}\right)\right), \tag{2.12}$$

où $C \in (0, \infty)$ *ne dépend que de* d *et* ε.

3 Résultats principaux

3.1 Généralités et notations

Bien que dans le paragraphe précédant nous n'ayons imposé aucune condition sur la répartition F, dans ce paragraphe nous attacherons à l'étude du cas particulier de la *loi uniforme* sur le carré, c'est à dire nous choisissons

$$F(t) = |t|, \quad t \in I^d; \tag{3.1}$$

nous écrirons simplement

$$U_n^F = U_n, \quad \text{si } F \text{ vérifie (3.1).} \tag{3.2}$$

Nous verrons plus tard dans le paragraphe 4 que nos résultats resteront vrais, à quelques modifications près, si la loi F reste voisine de la loi uniforme.

Les fonctions correctrices utilisées dans la section 3.2 seront de la forme

$$q(\sigma) = \sigma^\alpha, \quad \sigma \in [0, 1], \quad \alpha \in [0, 1]. \tag{3.3}$$

Remarquons que la fonction $\sigma \mapsto \sigma^\alpha$, $\sigma \in [0, 1]$, est élément de $\mathcal{Q}$ si et seulement si $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. En plus, nous y aurons besoin des nombres β_σ, pour $\sigma > 0$ définis par

$$\beta_\sigma(\log \beta_\sigma - 1) + 1 = \sigma^{-1} \quad \text{et} \quad \beta_\sigma > 1. \tag{3.4}$$

Dans la section 3.3 il est plus naturel de supposer que q appartient à l'ensemble, voir (1.11),

$$\mathcal{Q}_k = \left\{q \in \mathcal{Q} : \int_0^1 \frac{(\log(1/\sigma))^k}{q^2(\sigma) \log\log(1/\sigma)} d\sigma < \infty\right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.5}$$

alors que dans la section 3.4 les classes de fonctions, voir (1.10),

$$\mathcal{Q}_0^* = \left\{q \in \mathcal{Q}^* : \int_0^1 \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-\lambda q^2(\sigma)}{\sigma}\right) d\sigma < \infty \forall \lambda > 0\right\}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{Q}_k^* = \left\{q \in \mathcal{Q}^* : \frac{q(\sigma)}{\{\sigma(\log(1/\sigma))^k\}^{\frac{1}{2}}} \to \infty, \quad \text{si} \quad \sigma \downarrow 0\right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

sont plus appropriées.

L'inégalité suivante, qui nous sera très utile dans certaines démonstrations, est une inégalité globale qui se déduit assez facilement de l'inégalité locale (2.12). Cette inégalité est valable pour une large famille de fonctions correctrices $q \in \mathcal{Q}^*$, qui non seulement contient la classe $\mathcal{Q}$ mais aussi les fonctions de la forme (3.3) pour *tout* $\alpha \in [0, 1]$. Pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, $0 < \beta \leq \gamma \leq \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$ et $\lambda \geq 0$ nous avons

$$P\left(\sup_{\beta \leq |t| \leq \gamma} |U_n(t)|/q(|t|) \geq \lambda\right) \leq C \int_{(1-\varepsilon)\beta}^{\gamma/(1-\varepsilon)} \frac{(\log(1/\sigma))^{d-1}}{\sigma} \exp\left(\frac{-(1-\varepsilon)\lambda^2 q^2(\sigma)}{2\sigma} \psi\left(\frac{\lambda q(\beta)}{n^{\frac{1}{2}}\beta}\right)\right) d\sigma. \tag{3.8}$$

3.2 Théorèmes limites forts pour les suprêma

Nous rappelons que les processus non-corrigés verifient la loi du logarithme itéré (Kiefer, 1961); nous avons, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in I^d} \frac{|U_n(t)|}{(\log\log n)^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Le théorème suivant, dont la démonstration est très technique (Einmahl & Mason, 1985), nous informe du comportement du suprémum de certains processus corrigés dans le carré entier. Dans cette section nous prendrons $\tilde{q} \equiv 1$ de sorte que notre étude se concentre sur le comportement des processus pour $|t|$ petit.

THÉORÈME 3.1. *Carré entier. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres positifs et soit $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\log \frac{1}{a_n}\right)^{d-1} \begin{cases} = \infty, \\ < \infty \text{ et } na_n \downarrow, \end{cases} \tag{3.10}$$

nous avons, avec probabilité 1, respectivement

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in I^d} \frac{n^{\frac{1}{2}} a_n^{\alpha} |U_n(t)|}{|t|^{\alpha}} \begin{cases} = \infty, \\ = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Par exemple, si l'on prend $a_n = 1/n$, $\alpha = \frac{1}{2}$ il suit que $n^{\frac{1}{2}} a_n^{\alpha} = 1$ et par conséquence on trouve $\lim\sup = \infty$. Si, par contre, on choisit $a_n = (1/n)^{1+\delta}$ pour un $\delta > 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ on a $n^{\frac{1}{2}} a_n^{\alpha} = (1/n)^{\delta/2}$ de sorte que $\lim = 0$. Le théorème nous dit que, pour $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, il n'existe pas de standardisation propre pour obtenir une loi du logarithme itéré.

La situation est différente pour $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$. Nous verrons dans la section 3.3 qu'il existe même un théorème limite fort fonctionnel pour une classe de fonctions correctrices qui contient les fonctions $\{\sigma(1-\sigma)\}^{\alpha}$ pour $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$.

Au vu des résultats du Théorème 3.1 les deux questions suivantes se posent naturellement.

(a) Existe-t-il une loi du logarithme itéré pour la restriction du suprémum au *centre* $\{t \in I^d : 0 < a_n \leqslant |t|\}$ du carré? On maintient le choix $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, les valeurs $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ n'étant pas intéressants à cause de l'existence d'une loi du logarithme itéré dans le carré entier.

(b) Existe-t-il une loi du logarithme itéré pour la restriction du suprémum à la *borne inférieure* $\{t \in I^d : 0 < |t| \leqslant a_n\}$ du carré? Dans ce dernier cas on prend $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, le choix $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ n'étant pas intéressant parce qu'il découle assez facilement du Théorème 3.1 qu'il n'y aura pas de loi du logarithme itéré dans la queue. Voir aussi (3.4) pour la notation.

THÉORÈME 3.2. *Centre du carré. Soit $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ et supposons que les $a_n \in (0, 1)$ vérifient la condition*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{\log\log n} = c \in (0, \infty). \tag{3.12}$$

Alors on a, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{|t|\geqslant a_n} \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha} |U_n(t)|}{(\log\log n)^{1-\alpha} |t|^{\alpha}} = \max\{c^{1-\alpha}(\beta_{c/d} - 1), (2(d+1))^{\frac{1}{2}} 1_{\{\frac{1}{2}\}}(1-\alpha)\}. \tag{3.13}$$

Démonstration. La démonstration que le membre de droite de (3.13) est borne superieure presque sûrement repose en grande partie sur l'inégalité (3.8): nous prenons

$q(.)=(.)^\alpha$ et nous remplaçons λ par $\lambda n^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Il nous reste à montrer que le membre de droite de (3.13) est également borne inférieure presque sûrement. Voir Einmahl (1987) pour les détails. □

La formulation du théorème suivant sera facilitée par l'introduction d'une suite $\{k_n\}$ non-décroissante de nombres $0<k_n\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, pour lesquels nous définissons

$$a_n=\{nk_n^{(1-2\alpha)/(2\alpha)}(\log\log n)^{1/(2\alpha)}\}^{-1},\quad 0<\alpha<\tfrac{1}{2}. \tag{3.14}$$

Pour la démonstration, qui ressemble à celle du Théorème 3.1, nous renvoyons le lecteur à Einmahl & Mason (1988).

THÉORÈME 3.3. *Borne inférieure du carré. Soit* $0<\alpha<\frac{1}{2}$. *Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\log(1/a_n))^{d-1}\begin{cases}=\infty,\\ <\infty \text{ et } k_n/n\downarrow 0,\end{cases} \tag{3.15}$$

nous avons, avec probabilité 1, *respectivement*

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leq|t|\leq k_n/n}\left(\frac{n}{k_n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{|U_n(t)|}{(\log\log n)^{\frac{1}{2}}|t|^\alpha}\begin{cases}=\infty,\\ \leq(2d)^{\frac{1}{2}}.\end{cases} \tag{3.16}$$

Prenons ensuite $\alpha=0$. *Si*

$$\frac{k_n}{\log\log n}\begin{cases}\to 0 \text{ et } k_n/n\downarrow 0,\\ \to c\in(0,\infty),\\ \to\infty \text{ et } k_n/n\downarrow 0,\end{cases} \tag{3.17}$$

nous avons, avec probabilité 1, *respectivement*

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{0<|t|\leq k_n/n}\left(\frac{n}{k_n}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|U_n(t)|}{(\log\log n)^{\frac{1}{2}}}\begin{cases}=\infty,\\ =c^{\frac{1}{2}}(\beta_{c/d}-1),\\ \leq(2d)^{\frac{1}{2}}.\end{cases} \tag{3.18}$$

3.3 *Théorème limite fort fonctionnel*

Soit D_d l'espace des fonctions 'càdlàg' sur I^d, defini par example dans Neuhaus (1971) et ρ la métrique sur D_d induite par le suprémum. Wichura (1973, Théorème 6) a démontré que

> la suite $\{U_n(2\log\log n)^{-\frac{1}{2}}\}$ jouit avec probabilité 1 des propriétés suivantes: elle est relativement compacte par rapport à ρ, alors que l'ensemble de ses points d'accumulation coïncide avec $\mathcal{K}$, (3.19)

où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des fonctions $f\in D_d$ pour lesquelles

$$f(t)=0\quad\text{pour } t\in I^d\colon |t|=0,\quad f(e)=0; \tag{3.20}$$

$$\text{il existe } f'\colon I^d\to\mathbb{R} \text{ telle que } \int_{[0,t]} f'(s)\,|ds|=f(t),\quad t\in I^d; \tag{3.21}$$

$$\int_{I^d}\{f'(t)\}^2\,|dt|\leq 1. \tag{3.22}$$

Pour la généralisation suivante du résultat (3.19), qu'on peut trouver aussi dans

Alexander (1982), nous aurons besoin de l'ensemble suivant, voir aussi (3.5):

$$\mathcal{K}_{q,\tilde{q}} = \left\{ \frac{f(.)}{q(|.|)\tilde{q}(1-|.|)}, f \in \mathcal{K} \right\}, \quad q, \tilde{q} \in \mathcal{Q}. \tag{3.23}$$

Remarquons par avance que dans la démonstration, nous faisons usage des Théorèmes 3.1 et 3.2.

THÉORÈME 3.4. *Soient q, $\tilde{q} \in \mathcal{Q}$. Avec probabilité* 1 *les termes de la suite*

$$\left\{ \frac{U_n(.)}{(2 \log \log n)^{\frac{1}{2}} q(|.|)\tilde{q}(1-|.|)} \right\} \tag{3.24}$$

appartiennent à D_d, alors que la suite est relativement compacte par rapport à ρ avec $\mathcal{K}_{q,\tilde{q}}$ collection de points d'accumulation $\Leftrightarrow q \in \mathcal{Q}_{d-1}$, $\tilde{q} \in \mathcal{Q}_0$.

Démonstration. Limitons nous à la partie '$\Leftarrow$' et portons notre attention sur la queue gauche en prenant $\tilde{q} \equiv 1$. L'analyse de la queue droite s'effectue de façon analogue.

L'idée directrice est de prouver qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < 1$ tel que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{0 \le |t| \le \delta} \frac{|U_n(t)|}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}} q(|t|)} \le \varepsilon. \tag{3.25}$$

Non seulement on déduit alors de ce résultat que les termes de la suite (3.24) sont éléments de D_d presque sûrement, mais également on en déduit l'énoncé correspondant à la partie '$\Leftarrow$' du théorème qui s'obtient immédiatement à l'aide du résultat (3.19) pour les processus non corrigés.

La démonstration de (3.25) se fait en deux étapes. D'abord on montre que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{0 \le |t| \le n^{-\frac{1}{2}}} \frac{|U_n(t)|}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}} q(|t|)} = 0. \tag{3.26}$$

En écrivant $a_n = n^{-\frac{1}{2}}/\{(n \log \log n) q^2(n^{-\frac{1}{2}})\}$ il est clair qu'il suffit de prouver que, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} (na_n)^{\frac{1}{2}} \sup_{t \in I^d} \frac{|U_n(t)|}{|t|^{\frac{1}{2}}} = 0. \tag{3.27}$$

Ceci suit du Théorème 3.1 ($\alpha = \frac{1}{2}$), parce que

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (\log (1/a_n))^{d-1} < \infty$$

et $na_n \downarrow$.

Il nous reste à vérifier qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < 1$ tel que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{n^{-\frac{1}{2}} \le |t| \le \delta} \frac{|U_n(t)|}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}} q(|t|)} \le \varepsilon. \tag{3.28}$$

Maintenant nous aurons recours au Théorème 3.2 ($\alpha = \frac{1}{2}$) qui donne ($a_n \le n^{-\frac{1}{2}}$) que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{n^{-\frac{1}{2}} \le |t| \le 1} \frac{|U_n(t)|}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}} |t|^{\frac{1}{2}}} \le (2(d+1))^{\frac{1}{2}}. \tag{3.29}$$

On en déduit la validité de (3.28) parce que $q \in \mathcal{Q}_{d-1} \subset \mathcal{Q}_0$ entraîne

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} q(\sigma)\sigma^{-\frac{1}{2}} = \infty,$$

selon James (1975, Lemma 2.1. (ii)). □

3.4 Théorème limite faible fonctionnel

Il est bien connu (Neuhaus, 1971) qu'il existe un processus Gaussien centré U, déterminé par la fonction de covariance $E(U(s)U(t)) = s \wedge t - |s|\,|t|\ (s, t \in I^d)$ tel que $U_n \Rightarrow U$, si $n \to \infty$, dans D_d muni de la topologie de Skorokhod. Selon la construction de Skorokhod il existent $\tilde{U}_n$, $\tilde{U}$ sur le même espace de probabilité, tels que $\tilde{U}_n \sim U_n$, $\tilde{U} \sim U$ et, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in I^d} |\tilde{U}_n(t) - \tilde{U}(t)| = 0. \tag{3.30}$$

Nous rappelons la notation (3.6) et (3.7).

THÉORÈME 3.5. *Soient* $q, \tilde{q} \in \mathcal{Q}^*$. *On a*

$$\underset{n\to\infty}{\text{p-lim}} \sup_{t \in I^d} \frac{|\tilde{U}_n(t) - \tilde{U}(t)|}{q(|t|)\tilde{q}(1-|t|)} = 0 \Leftrightarrow q \in \mathcal{Q}^*_{d-1}, \quad \tilde{q} \in \mathcal{Q}^*_0, \tag{3.31}$$

où 'p-lim' *signifie convergence en probabilité.*

Démonstration. Limitons nous à la partie '$\Leftarrow$' et considérons séparément la borne inférieure et le sommet du carré.

Pour la borne inférieure choisissons $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$,

$$\beta_n = (d-1)!\,(n(\log n)^{d-1})^{-1}, \quad \gamma_n = q^2(1/n), \quad c \in (0, \infty)$$

et remarquons que

$$\sup_{t \in I^d} \frac{|\tilde{U}_n(t) - \tilde{U}(t)|}{q(|t|)} \leq \sum_{k=1}^{5} Y_{nk}, \tag{3.32}$$

où les variables aléatoires Y_{nk} sont données par

$$Y_{n1} = \sup_{0 \leq |t| \leq \beta_n/c} |\tilde{U}_n(t)|/q(|t|), \quad Y_{n2} = \sup_{\beta_n/c \leq |t| \leq \gamma_n} |\tilde{U}_n(t)|/q(|t|),$$

$$Y_{n3} = \sup_{\gamma_n \leq |t| \leq \delta} |\tilde{U}_n(t)|/q(|t|), \quad Y_{n4} = \sup_{0 \leq |t| \leq \delta} |\tilde{U}(t)|/q(|t|), \tag{3.33}$$

$$Y_{n5} = \sup_{t \in I^d} |\tilde{U}_n(t) - \tilde{U}(t)|/q(\delta).$$

De fait que pour n et c suffisamment grand, il n'y a pas d'observations dans la région $\{t \in I^d\colon 0 \leq |t| \leq \beta_n/c\}$ avec grande probabilité on voit facilement que les Y_{n1} convergent vers 0 en probabilité si $n \to \infty$, $c \to \infty$. À l'aide de l'inégalité (3.8) on voit à la fois la convergence vers 0 en probabilité des Y_{n2}, pour tout $c \in (0, \infty)$, si $n \to \infty$ et la convergence vers 0 en probabilité des Y_{n3}, si $n \to \infty$, $\delta \downarrow 0$. Les Y_{n4}, qui ne dépendent pas de n, convergent vers 0 en probabilité, si $\delta \downarrow 0$, selon Orey & Pruitt (1973, Théorème 2.2). La convergence vers 0 en probabilité des Y_{n5}, pour tout δ, si $n \to \infty$ étant immédiate de (3.30), nous avons établi la convergence vers 0 en probabilité de la suite des supréma du membre de gauche de (3.32).

Pour l'étude au sommet, introduisons la notation

$$s^{(j)} = (1, \ldots, 1, s, 1, \ldots, 1), \quad s \in [0, 1], \tag{3.34}$$

où il y ont en $s^{(j)}$ $j-1$ et $d-j$ 1's, respectivement,

$$U_n^{(j)}(s) = U_n(s^{(j)}), \quad s \in [0, 1]. \tag{3.35}$$

On peut se convaincre assez facilement que l'étude des processus $U_n(t)$, pour $|t|$ grand, se réduit à l'étude des processus $U_n^{(j)}(s)$, pour s petit. Les processus $U_n^{(j)}$ étant unidimensionnels, le résultat pour la borne inférieure que nous venons d'établir nous permet d'arriver tout de suite à la conclusion désirée. Pour une démonstration détaillée voir Einmahl, Ruymgaart & Wellner (1988). □

4 Extensions, généralisations et applications

4.1 Extensions et généralisations

Le module de continuïté. Soit $[s, t]$ un bloc dans I^d, $s, t \in I^d$ avec $s \leqslant t$. Notons

$$U_n([s, t]) = n^{\frac{1}{2}}(\hat{F}_n([s, t]) - |t - s|), \tag{4.1}$$

où

$$\hat{F}_n([s, t]) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} 1_{[s,t]}(X_i)$$

et $|t-s|$ désigne la mesure de Lebesgue du bloc. Le module de continuïté du processus empirique uniforme, défini par

$$\omega_n(a) = \sup_{|t-s| \leqslant a} |U_n([s, t])|, \quad a \in [0, 1], \tag{4.2}$$

est un caractère important du processus qui joue un rôle dans la convergence faible et aussi dans la théorie de l'estimation non paramétrique de densités. Dans Einmahl & Ruymgaart (1987) le comportement asymptotique presque sûr de $\omega_n(a_n)$ a été établi pour un spectre complet de suites $\{a_n\}$. Voir aussi Stute (1982, 1984).

Paramétrisation par des blocs. Dans la notation (4.1) nous avons

$$U_n([0, t]) = U_n(t), \quad t \in I^d. \tag{4.3}$$

Par conséquence on peut interpréter le processus paramétrisé par les points $t \in I^d$ comme un processus paramétrisé par les quadrants $[0, t] \subset I^d$. Plus généralement on peut paramétriser le processus par les blocs $[s, t] \subset I^d$. Toujours dans le cas uniforme cela nous mène à l'étude des processus

$$\frac{U_n([s, t])}{q(|t-s|)\tilde{q}(1-|t-s|)}, \quad \text{pour } s, t \in I^d: |t-s| \geqslant \varepsilon_n \in (0, 1). \tag{4.4}$$

Une restriction du genre $|t-s| \geqslant \varepsilon_n$ sera nécessaire pour éviter que les blocs se concentrent autour d'une observation de telle manière que le dénominateur de (4.4) tende vers 0 alors que le numérateur est de l'ordre $n^{-\frac{1}{2}}$. Ceci est lié à la forme géométrique des blocs. Pour le reste, on peut ramener l'étude à celle de processus paramétrisés par des points, grâce à la remarque suivante.

Posons

$$Y_i = (1 - X_{i1}, \ldots, 1 - X_{id}, X_{i1}, \ldots, X_{id}) = (e - X_i, X_i), \quad i \in \mathbb{N}$$

et soit G la fonction de répartition de la loi des Y_i, c'est à dire:

$$G(u,t)=\begin{cases}|u+t-e|, & \text{pour } (u,t)\in I^d\times I^d \text{ avec } u+t\geq e,\\ 0, & \text{autrement,}\end{cases} \tag{4.5}$$

soit $\hat{G}_n$ la répartition empirique des $Y_1,\ldots,Y_n$ et, enfin, notons

$$V_n(u,t)=n^{\frac{1}{2}}(\hat{G}_n(u,t)-G(u,t)),\quad (u,t)\in I^d\times I^d, \tag{4.6}$$

le processus empirique correspondant. On vérifie facilement les identités

$$\begin{aligned}|t-s|&=G(e-s,t);\quad s,t\in I^d\colon s\leq t,\\ U_n([s,t])&=V_n(e-s,t);\quad s,t\in I^d\colon s\leq t.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Voir Einmahl (1987) pour les détails.

Densités arbitraires. On peut s'affranchir assez facilement de l'hypothèse d'uniformité de la loi sous-jacente. Dans la présentation des résultats comme dans leur démonstration des modifications mineures suffisent, à condition que la répartition F possède une densité continue f, relativement à la mesure de Lebesgue, telle que

$$0<m=\inf_{t\in I^d}f(t)\leq\sup_{t\in I^d}f(t)=M<\infty. \tag{4.8}$$

On trouvera des détails sur ce point dans Einmahl (1987).

Processus à sauts aléatoires. Considérons une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués (X_1,Y_1), $(X_2,Y_2),\ldots,$ tels que les X_i sont des vecteurs d-dimensionnels dans I^d et les Y_i des variables aléatoires à valeurs dans une partie bornée de $\mathbb{R}$. Soit

$$M(t)=E(Y_i1_{[0,t]}(X_i)),\quad Q(t)=E(Y_i^21_{[0,t]}(X_i)),\quad t\in I^d, \tag{4.9}$$

$$\hat{M}_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i1_{[0,t]}(X_i),\quad t\in I^d. \tag{4.10}$$

Il est évident que

$$E(\hat{M}_n(t))=M(t),\quad t\in I^d. \tag{4.11}$$

Nous définissons le processus empirique suivant

$$W_n(t)=n^{\frac{1}{2}}(\hat{M}_n(t)-M(t)),\quad t\in I^d. \tag{4.12}$$

Remarquons que $W_n=U_n$ si les variables Y_i sont dégénerées à valeur 1.

L'étude de cette généralisation du processus empirique classique est basée sur une relation entre le processus empirique composé et le processus de Poisson composé, analogue à celle qui existe entre les processus non composés et qui nous a été si utile dans le paragraphe 2. Les processus de Poisson composés ayant toujours des accroissements indépendants, l'inégalité (2.3) s'applique également à ces processus ce qui nous permet d'utiliser les méthodes développées dans le paragraphe 2. Nos résultats, cependant, sont moins précis; en particulier nous nous limitons à des fonctions correctrices de la forme $Q^{\alpha}(t)$, $t\in I^d$, pour $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$. Pour les applications il est intéressant de remarquer que

$$M(t)=\int_{[0,t]}E(Y_i\mid X_i=s)\,dF(s),\quad t\in I^d, \tag{4.13}$$

si F est la fonction de répartition commune des X_i. Pour plus de détails, voir Einmahl & Ruymgaart (1986), ainsi que § 4.2.

Processus de Poisson. Le processus de Poisson a été utilisé dans notre étude des processus empiriques. Naturellement des résultats analogues s'obtiennent par les mêmes techniques pour les processus de Poisson standards. En fait (2.7) nous fournit déjà l'inégalité fondamentale pour les processus de Poisson.

4.2 *Applications*

Estimation non paramétrique de la densité. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués dans $\mathbb{R}^d$, de fonction de répartition commune F. (Nous nous servirons de la notation habituelle, bien que maintenant les valeurs des X_i ne soient plus limitées au carré I^d.) Supposons que F ait une densité f, suffisamment lisse, par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $l_n = (\lambda_n, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_n \in (0, \infty)$ et définissons l'estimateur 'naïf' de la densité par

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{2^d\,|l_n|\,n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[x-l_n, x+l_n]}(X_i), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.14}$$

Ecrivons

$$E(\hat{f}_n(x)) = \frac{1}{2^d\,|l_n|} F([x-l_n, x+l_n]) = f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.15}$$

où $F([x-l_n, x+l_n]) = P(X_i \in [x-l_n, x+l_n])$; voir aussi la notation dans (4.1).

Pour la convergence uniforme presque sûre des $\hat{f}_n$ vers f, le comportement de

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}_n(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2^d\,|l_n|} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\hat{F}_n([x-l_n, x+l_n]) - F([x-l_n, x+l_n])| \tag{4.16}$$

est d'une importance essentielle. Après réduction par transformation dans le carré I^d, on ramène le problème à une question pouvant être abordée grâce à nos résultats sur le module de continuïté; voir § 4.1.

Estimation non paramétrique de la régression. Soit $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribué tels que les X_i sont des vecteurs d-dimensionnels dans $\mathbb{R}^d$ et les Y_i des variables aléatoires à valeurs dans une partie bornée de $\mathbb{R}$. Soit F la répartition commune des X_i. Utilisant les notations et les hypothèses précédantes définissons

$$\hat{\mu}_n(x) = \frac{1}{2^d\,|l_n|\,n} \sum_{i=1}^{n} Y_i 1_{[x-l_n, x+l_n]}(X_i), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.17}$$

et puis l'estimateur 'naïf' de la régression, voir aussi (4.13),

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\hat{\mu}_n(x)}{\hat{f}_n(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.18}$$

L'étude de $\hat{\mu}_n$ se fait de façon peu ou moins analogue à celle de $\hat{f}_n$, à l'aide des propriétés des processus W_n dans (4.12); voir Einmahl & Ruymgaart (1986).

Blocs aléatoires. En combinant les résultats évoqués précédemment sur le module de continuïté (§ 4.1) avec ceux de Mason (1984), nous obtenons des résultats sur la convergence presque sûre des k-blocs aléatoires minimal et maximal (ici $k = k_n$); voir Deheuvels et al. (1988). Le comportement presque sûr du suprémum du processus empirique basé sur les blocs aléatoires unidimensionnels ($d = 1$) a été, entre autres, étudié par Einmahl & van Zuijlen (1988).

Valeurs extrêmes. Quelques résultats additionnels sur le comportement presque sur du suprémum du processus empirique unidimensionnel ont été obtenus par Einmahl, Haeusler & Mason (1985) et Einmahl & Mason (1988). Ces résultats s'appliquent dans l'étude de sommes de valeurs extrêmes: voir Einmahl et al. (1985), Haeusler & Mason (1987) et Deheuvels, Haeusler & Mason (1986).

U-statistiques. On peut représenter le processus empirique basé sur des U-statistiques unidimensionnels ($d=1$) comme moyenne de processus empiriques ordinaires basés sur des variables indépendantes et identiquement distribuées (Silverman, 1983). Cette représentation nous permet d'obtenir quelques résultats pour ces processus, bien-que sous une forme affaiblie. Le processus empirique basé sur des U-statistiques joue un rôle dans l'étude des L-statistiques généralisées: voir Serfling (1984) pour des détails. Helmers & Ruymgaart (1988) ont utilisé un résultat dans le sens de (3.13) pour établir la normalité asymptotique pour une classe de L-statistiques généralisées.

5 Conclusion

Il est bien entendu que se qui précède ne prétend pas réaliser une synthèse exhaustive du sujet, et que nous avons effectué volontairement un choix sélectif de nos citations pour réaliser une présentation homogène. De ce fait, nous ne pouvons citer ici la totalité des articles apportant des résultats importants pour ce vaste sujet.

Remerciement

Nous remercions vivement les organisateurs des Journées Statistiques 1986 de Lille pour nous avoir offert l'occasion de présenter dans cette réunion le contenu de cet article. Nous sommes aussi très reconnaissants aux referees qui ont suggéré une amélioration considérable du texte, et au département de statistique de l'Un. of North Carolina à Chapel Hill pour l'assistance à la préparation de la version définitive du manuscript.

Bibliographie

Alexander, K.S. (1982). Some Limit Theorems for Weighted and Non-Identically Distributed Empirical Processes. Thèse, M.I.T., Cambridge, Mass.

Alexander, K.S. (1984). Probability inequalities for empirical processes and a law of the iterated logarithm. *Ann. Prob.* **12,** 1041–1067.

Balacheff, S. & Dupont, G. (1979). Sur la convergence des suites de processus empiriques multidimensionnels normalisés tronqués et mélangeants. Thèse, Un. de Rouen.

Balacheff, S. & Dupont, G. (1980). Normalité asymptotique des processus empiriques tronqués et des processus de rang (Cas multidimensionnel mélangeant). Dans *Statistique non Paramétrique Asymptotique, Lecture Notes in Math.*, 821, Ed. J.-P. Raoult, pp. 19–45. New York: Springer.

Bennett, G. (1962). Probability inequalities for the sum of independent random variables. *J. Am. Statist. Assoc.* **57,** 33–45.

Berlinet, A. (1984). Sur Quelques Problèmes d'Estimation Fonctionnelle et de Statistique des Processus. Thèse, Un. de Lille I.

Csörgő, M., Csörgő, S., Horváth, L. & Mason, D.M. (1986). Weighted empirical and quantile processes. *Ann. Prob.* **14,** 31–85.

Deheuvels, P., Einmahl, J.H.J., Mason, D.M. & Ruymgaart, F.H. (1988). The almost sure behaviour of maximal and minimal multivariate k_n-spacings. *J. Mult. Anal.* **24,** 155–176.

Deheuvels, P., Haeusler, E. & Mason, D.M. (1986). On the almost sure behaviour of sums of extreme values from a distribution in the domain of attraction of a Gumbel law. Prépublication.

Dudley, R.M. (1978). Central limit theorems for empirical measures. *Ann. Prob.* **6,** 899–929.

Dudley, R.M. (1984). A course on empirical processes. Dans *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XII-1982*; *Lecture Notes in Math., 1097,* Ed. P.L. Hennequin, pp. 107–123. New York: Springer

Einmahl, J.H.J. (1987). *Multivariate Empirical Processes,* CWI Tract 32, Amsterdam.

Einmahl, J.H.J., Haeusler, E. & Mason, D.M. (1985). An extension of a theorem of Csáki with application to the study of the almost sure stability of sums of extreme values. Rapport 8537, Dépt. de Math., Kath. Un. Nijmegen.

Einmahl, J.H.J. & Mason, D.M. (1985). Bounds for weighted multivariate empirical distribution functions. *Z. Wahr. verw. Geb.* **70,** 563-571.
Einmahl, J.H.J. & Mason, D.M. (1988). Laws of the iterated logarithm in the tails for weighted uniform empirical processes. *Ann. Prob.* **16,** 126–141.
Einmahl, J.H.J. & Ruymgaart, F.H. (1986). Some properties of weighted compound multivariate empirical processes. *Sankhyā A* **48,** 393–403.
Einmahl, J.H.J. & Ruymgaart, F.H. (1987). The almost sure behaviour of the oscillation modulus of the multivariate empirical process. *Prob. Letters.* **6,** 87–96.
Einmahl, J.H.J., Ruymgaart, F.H. & Wellner, J.A. (1988). A characterization of weak convergence of weighted multivariate empirical processes. *Acta Sci. Math.* (*Szeged*). To appear.
Einmahl, J.H.J. & van Zuijlen, M.C.A. (1988). Strong bounds for weighted empirical distribution functions based on uniform spacings. *Ann. Prob.* **16,** 108–125.
Haeusler, E. & Mason, D.M. (1987). A law of the iterated logarithm for sums of extreme values from a distribution with a regularly varying upper tail. *Ann. Prob.* **15,** 932–953.
Harel, M. (1980). Convergence en loi pour la topologie de Skorohod du processus empirique multidimensionnel normalisé tronqué et sémi-corrigé (Etude au voisinage de la frontière inférieure de $[0,1]^{1+k}$). Dans *Statistique non Paramétrique, Lecture Notes in Math., 821,* Ed. J.-P. Raoult, pp. 46–85. New York: Springer.
Helmers, R. & Ruymgaart, F.H. (1988). Asymptotic normality of GL-statistics with unbounded scores. *J. Statist. Plan. Inf.* To appear.
James, B.R. (1975). A functional law of the iterated logarithm for weighted empirical distributions. *Ann. Prob.* **3,** 762–772.
Kiefer, J. (1961). On large deviations of the empiric d.f. of vector chance variables and a law of the iterated logarithm. *Pacific J. Math.* **11,** 649–660.
Klesov, O.I. (1983). The law of the iterated logarithm for multiple sums. *Theory Prob. Math. Statist.* **27,** 65–72.
Komlós, J., Major, P. & Tusnády, G. (1975). Weak convergence and embedding, (Ed. P. Révész). *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **11,** 149–165.
Mason, D.M. (1984). A strong limit theorem for the oscillation modulus of the uniform empirical quantile process. *Stoch. Processes Applic.* **17,** 127–136.
Mason, D.M. & van Zwet, W.R. (1985). A refinement of the KMT inequality for the uniform empirical process. *Ann. Prob.* **15,** 871–884.
Neuhaus, G. (1971). On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter. *Ann. Math. Statist.* **42,** 1285–1295.
Orey, S. & Pruitt, W.W. (1973). Sample functions of the N-parameter Wiener process. *Ann. Prob.* **1,** 138–163.
Pyke, R. & Shorack, G.R. (1968). Weak convergence of a two-sample empirical process and a new approach to Chernoff–Savage theorems. *Ann. Math. Statist.* **39,** 755–771.
Ruymgaart, F.H. & Wellner, J.A. (1984). Some properties of weighted multivariate empirical processes. *Statist. Decisions* **2,** 199–223.
Serfling, R.J. (1984). Generalized L-, M- and R-statistics. *Ann. Statist.* **12,** 76–86.
Shorack, G.R. & Wellner, J.A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics.* New York: Wiley.
Silverman, B.W. (1983). Convergence of a class of empirical distribution functions of dependent random variables. *Ann. Prob.* **11,** 745–751.
Stute, W. (1982). The oscillation behavior of empirical processes. *Ann. Prob.* **10,** 86–107.
Stute, W. (1984). The oscillation behavior of empirical processes: the multivariate case. *Ann. Prob.* **12,** 361–379.
Wichura, M.J. (1973). Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments. *Ann. Prob.* **1,** 272–296.

Summary

In this paper we give a survey of some recent results on multivariate empirical processes along the classical lines. The central theme is the global asymptotic behavior, both in the strong and weak sense, of weighted processes. The main results are on strong limits for suprema and criteria for the existence of strong and weak functional limit laws. Moreover, we sketch some generalizations and applications.

Key words: Functional strong and weak limit law; Multivariate empirical process; Strong limit; Weight function.

[*Received September* 1986, *revised November* 1987]