Documentos CEDE
ISSN 1657-7191 Edición electrónica

# Analisis digital y deteccion de elecciones atípicas en Colombia

**Diego Jara**
**Felipe Parra**
**Alvaro Riascos**
**Mauricio Romero**
**Santiago Saavedra**

40
OCTUBRE DE 2011

Universidad de los Andes
Facultad de Economía

CEDE
Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico

Serie Documentos Cede, 2011-40
ISSN 1657-7191 Edición electrónica

Octubre de 2011


Calle 19A No. 1 – 37 Este, Bloque W.
Bogotá, D. C., Colombia
Teléfonos: 3394949- 3394999, extensiones 2400, 2049, 3233
*infocede@uniandes.edu.co*
*http://economia.uniandes.edu.co*

Ediciones Uniandes
Carrera 1ª Este No. 19 – 27, edificio Aulas 6, A. A. 4976
Bogotá, D. C., Colombia
Teléfonos: 3394949- 3394999, extensión 2133, Fax: extensión 2158
*infeduni@uniandes.edu.co*

Edición y prensa digital:
Cadena S.A. • Bogotá
Calle 17 A Nº 68 - 92
Tel: 57(4) 405 02 00 Ext. 307
Bogotá, D. C., Colombia
*www.cadena.com.co*

Impreso en Colombia – *Printed in Colombia*

Universidad de los Andes
Facultad de Economía

CEDE
Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico

# Análisis digital y detección de elecciones atípicas en Colombia *

Diego Jara ** Felipe Parra ** Alvaro Riascos ***
Mauricio Romero** Santiago Saavedra ****

**Octubre de 2011**

**Resumen**

Este trabajo utiliza la Ley de Newcomb-Benford y las pruebas de Beber y Scacco para analizar las elecciones presidenciales desde 1958 hasta el 2006, las presidenciales de 1922, las elecciones de Congreso en 2010, y las votaciones para Alcalde en Cali del 2007. Este es el primer estudio y aplicación sistemática de técnicas cuantitativas para la detección de anomalías en resultados electorales en Colombia. Aunque estas técnicas no ofrecen una prueba de la existencia de fraude, ni identifican el origen o receptor de una posible manipulación de los datos, sí permiten generar alertas que podrían ser utilizadas para priorizar investigaciones. Los resultados muestran la existencia de resultados atípicos en las elecciones presidenciales de 1970 y en las de Senado y Cámara de 2010. También se observan, aunque en menor grado, votaciones atípicas en las presidenciales de 1922, 1982, y en las votaciones de la Alcaldía de Cali 2007.

**Palabras Clave:** Fraude electoral; Ley de Benford; Pruebas de Beber y Scacco; Análisis digital; Elecciones Colombia.

---

*Muchas personas han colaborado directa o indirectamente en la realización de este estudio. En particular, nuestros más sinceros agradecimientos a Mónica Pachón, Daniel González, Leopoldo Fergusson, Rodrigo Guerrero, Luis Alfredo Gómez, Juan Manuel Caicedo, Guillermo Alarcón, Christian Jaramillo, Alejandro Gaviria y Fabio Sánchez. Igualmente extendemos nuestros agradecimientos a varias instituciones que apoyaron este proyecto: Congreso Visible, la Facultad de Economía y CEDE de la Universidad de los Andes por su apoyo financiero y Quantil. Por último, este estudio se enriqueció de los comentarios y sugerencias de los participantes del seminario de economía de la Universidad Javeriana de Bogotá y el seminario CEDE de la Facultad de Economía de Universidad de los Andes. Las opiniones y resultados presentados en este documento son opiniones y responsabilidad exclusiva de sus autores.

**Quantil | Matemáticas Aplicadas.

***Universidad de los Andes. Autor corresponsal: ariascos@uniandes.edu.co

****Universidad de Stanford.

# Digital Analysis and Anomalous Elections in Colombia *

Diego Jara † Felipe Parra † Alvaro Riascos ‡
Mauricio Romero† Santiago Saavedra §

October 3, 2011

**Abstract**

This paper applies Newcomb-Benford law and Beber and Scacco tests to electoral counts in Colombia's presidential elections from 1958 to 2006. We also study the presidential elections of 1922, the congressional elections of 2010 and the 2007 Cali mayoral elections. This is the first systematic application of digital analysis and quantitative techniques to study anomalous electoral results in Colombia. Although the proposed techniques don't prove the existence of fraud, they do help detect anomalous behavior that could be used to prioritize detailed investigations. Results show atypical behavior in the presidential elections of 1970 and congressional elections of 2010. We also detect atypical electoral counts in 1922 and 1982 and the 2007 Cali mayoral elections.

**Key Words:** Electoral fraud, Benford's Law, Beber Scacco's Test, Colombian Elections, Digital Analysis.

**Clasificación JEL: C16, C46, D72.**

*For helpful comments and suggestions we thank: Mónica Pachón, Daniel González, Leopoldo Fergusson, Rodrigo Guerrero, Luis Alfredo Gómez, Juan Manuel Caicedo, Guillermo Alarcón, Christian Jaramillo, Alejandro Gaviria, Fabio Sánchez and seminar participants at the Universidad Javeriana in Bogotá and CEDE Economics Seminar at the Faculty of Economics of the Universidad de los Andes. All errors and opinions are our own responsibility.

†Quantil | Matemáticas Aplicadas.

‡Universidad de los Andes. Corresponding author: ariascos@uniandes.edu.co

§Stanford University.

# Índice

# 1. Introducción

El ejercicio saludable de la democracia depende fundamentalmente del desarrollo transparente del proceso electoral. En efecto, la confianza que los votantes tengan sobre la precisión de los resultados electorales oficiales servirá para alimentar la fortaleza de las instituciones democráticas en el país. En consecuencia, es importante establecer un proceso transparente y libre de fraude. Visto de otro modo, es importante tener herramientas y metodologías ágiles que permitan señalar situaciones atípicas (que pueden generar sospechas públicas de la existencia de fraude), que a su vez pueden servir para priorizar investigaciones más profundas y enfocadas. Este trabajo propone algunas reglas de este tipo para ser analizadas en el contexto colombiano, y potencialmente ser usadas como parte de ese grupo de herramientas y metodologías.

El tema de fraude electoral en un contexto estadístico ha sido analizado en estudios académicos, pero es un tema reciente: aún no hay ideas establecidas como estándares para ser usados de forma generalizada. En estos estudios pueden evidenciarse dos ramas generales de análisis: la primera, comúnmente denominada análisis de covarianzas, consiste en pronosticar el resultado esperado, suponiendo la ausencia de fraude, mediante información reveladora de la intención de voto (censos electorales, encuestas, estadísticos de elecciones pasadas y contribuciones financieras de individuos a las campañas); los resultados oficiales son comparados contra estos pronósticos para obtener conclusiones estadísticas cuando se observan desviaciones significativas. Estas técnicas son demandantes en información y han sido aplicadas recientemente a procesos electorales en Estados Unidos, Rusia, Méjico y Venezuela.

La segunda, que denominamos análisis digital, se concentra exclusivamente en los dígitos del conteo electoral desagregando las votaciones por unidades más pequeñas como municipios o puestos de votación, candidatos, etc. El análisis consiste en encontrar patrones atípicos en los resultados del conteo electoral, con base en patrones esperados en datos que tienen una naturaleza aleatoria que no ha sido afectada por manipulaciones humanas que buscan alterar los resultados. Típicamente estos patrones se buscan utilizando dos metodologías: la Ley de Newcomb-Benford y las pruebas de Beber y Scacco. La primera es una ley fenomenológica que se cumple en una gran cantidad de bases de datos de origen natural (véase abajo la revisión de la literatua). La segunda se basa en estudios psicológicos sobre la manera en que los humanos generan números "aleatorios". El análisis digital es en general una técnica poco demandante en información, necesitando únicamente el resultado de las votaciones a diferentes niveles de desagregación, y ha sido aplicada recientemente en procesos electorales en Estados Unidos, Méjico, Rusia, Bangladesh, Ecuador, Venezuela, Puerto Rico, Nicaragua, Armenia, Canadá, Suecia, Nigeria, y otros. A continuación describimos brevemente cada una de estas metodologías dejando para más adelante una exposición más técnica y detallada de las mismas.

La Ley de Newcomb-Benford es un resultado empírico, con bases teóricas, que establece que listas numéricas que abarquen varios órdenes de magnitud, y provengan de distribuciones con cierta estructura aleatoria, poseen una distribución muy particular en los primeros dígitos de los números de las listas. Formalmente, la ley postula que al considerar el primer dígito (de izquierda a derecha), el 1 aparece más veces que el 2, que aparece más veces que el 3, y así sucesivamente. Esto se cumple para una gran variedad de series como: el tamaño de los ríos y la población en los países del mundo, entre otros. Varios autores han hecho uso de esta ley, partiendo de la suposición de que elecciones justas deben cumplirla: específicamente, líneas de estudio reciente parecen favorecer la necesidad de cumplimiento de la ley para el segundo dígito. Por ejemplo, (Mebane 2007) aplica la Ley de Newcomb-Benford en el segundo dígito en elecciones federales de Méjico en 2006 para concluir que en algunos estados los resultados se vieron afectados por intimidación masiva, o por votación estratégica. En otro ejemplo, (Mebane & Kirill 2009) usan la ley en el segundo dígito para alertar a la existencia de resultados atípicos en las elecciones parlamentarias y presidenciales de Rusia entre 2003 y 2008. la situación para el primer dígito es distinta, y existen estudios (ver particularmente (Deckert & Myagkov n.d.)) que han cuestionado la racionalidad del cumplimiento de la ley para el primer dígito en elecciones.

Las pruebas de Beber y Scacco (Beber & Scacco 2008) están basadas en pruebas psicológicas sobre la forma en que los humanos generan números aleatorios. Según comportamientos observados, números inventados por una persona típicamente difieren en tres aspectos de números generados aleatoriamente. Primero, los seres humanos tienen un sesgo hacia dígitos más pequeños; por tanto, la distribución del último dígito no es uniforme, sino usualmente sesgada hacia los números $0, 1$ y 2. Segundo, los humanos tienden a generar menos números con dígitos repetidos de lo que se esperaría bajo una distribución uniforme. Finalmente, los seres humanos suelen generar números con dígitos consecutivos (por ejemplo $12, 54$) más de lo esperado. En Beber & Scacco (2008), los autores ofrecen argumentos que sugieren que unas elecciones limpias deben producir distribuciones uniformes para los últimos dígitos. Partiendo de esa premisa, prueban la hipótesis de cumplimiento de una distribución uniforme en la elecciones parlamentarias de Suecia de 2002, y presidenciales de Nigeria de 2003. Los resultados sugieren que se cumple la hipótesis en la primera, pero no en la segunda, con lo que se sugiere que este tipo de pruebas puede ayudar en el proceso de detección de situaciones anómalas.

Por último, dado que no siempre existen formas de pensar que racionalicen la manipulación esperada de los datos o el referente frente al cuál se comparan los resultados, la literatura reciente ha comenzado a utilizar modelos de comportamiento más explícitos y formales sobre el comportamiento de los actores, los mecanismos específicos de manipulación o fraude, sus restricciones e incentivos en una contienda electoral, etc. Las técnicas de análisis supervisado son un paso en esa dirección.[1]

[1] Véase por ejemplo (Cantu n.d.).

Las técnicas que utilizamos en este artículo son metodologías que sólo tienen como objetivo alertar sobre la posible existencia de anomalías en los datos de una contienda electoral y no constituyen de ninguna forma una prueba de fraude. Más aún, difícilmente logran identificar quién podría ser el beneficiario o sospechoso de haber alterado los resultados de un conteo electoral. En efecto, la presencía de algún tipo de anomalía identificado mediante alguna de las técnicas anteriores puede significar que este candidato manipuló los datos a su favor o que fueron manipulados exógenamente para perjudicarlo. Las enormes dificultades para esclarecer un caso en el que se sopecha hubo fraude están bien reflejadas en la palabras de Deckert, Myagkov y Ordeshook (Deckert & Myagkov n.d.)

*"Detecting and measuring fraud is much like any criminal investigation and requires a careful gathering of all available data and evidence in conjunction with a theory of the crime."*

El presente estudio busca analizar la aplicabilidad del análisis digital (Ley de Newcomb-Benford para el segundo dígito y pruebas de Beber y Scacco) al caso electoral colombiano. Para esto se analizaron las elecciones presidenciales desde 1958 hasta el 2006, las presidenciales de 1922, las elecciones de Congreso en 2010, y las votaciones para Alcalde en Cali 2007. En cada una de estas se realizaron pruebas de cumplimiento de las distribuciones esperadas bajo estas leyes para puestos de votación y votación municipal. Los resultados varían según las pruebas estadísticas usadas, pero en general la Ley de Newcomb-Benford detecta un puñado de anomalías entre las 109 series analizadas, la prueba del último dígito detecta cerca de 20 resultados atípicos, la de los últimos dos dígitos genera menos de cinco alertas, y la de dígitos consecutivos genera 14 alertas. En particular, las pruebas alertan sobre situaciones atípicas en las contiendas electorales para la presidencia de 1922 y 1970.

El artículo se compone de seis secciones, comenzando por esta introducción. La segunda sección hace una revisión de la literatura general sobre el uso del análisis digital en otras áreas del conocimiento (principlamente la Ley de Newcomb - Benford) que refuerzan la idea de que puede ser una herramienta útil para el análisis de contiendas electorales, y termina con una breve revisión de la literatura cuantitativa sobre fraude electoral en Colombia; la tercera describe con más detalles las principlaes metodologías del análisis digital, la cuarta sección describe los datos usados, la quinta presenta los resultados y la última sección contienen las principales conclusiones del estudio.[2]

## 2. Revisión de la literatura

El estudio cuantitativo de resultados anómalos en procesos electorales es una área de investigación relativamente reciente de las ciencias políticas. Quizás

[2]Los resultados detallados para todas las series analizadas pueden descargarse de www.quantil.com.co/appendixAnalisisDigital.pdf.

los primeos en introducir técnicas de detección de resultados atípicos en este contexto fueron Sobyanin y Suchovolsky (Sobyanin & Suchovolsky 1993) en el contexto de las elecciones en Rusia en 1993 (Deckert & Myagkov n.d.). En esta sección vamos a reestringirnos a revisar apenas una rama de esa nueva literatura que se denomina análisis digital y que es propiamente la herramienta de análisis utilizada en este estudio. La primera de estas técnicas que ya tiene una larga historia en otras áreas del conocimiento es la Ley de Newcomb - Benford. La segunda, las pruebas de Beber y Scacco son más recientes y han sido propuestas específicamente en el contexto electoral.

## 2.1. Ley de Newcomb - Benford

En 1881 Simon Newcomb (Newcomb 1881), astrónomo estadounidense, observó que en los libros de tablas logarítmicas las consultas eran más frecuentes para los primeros dígitos. Su análisis lo llevó a concluir que la probabilidad de que el primer dígito de un número tomado al azar sea $d$, $P_1(d)$ es:

$$P(d) = log(\frac{d+1}{d}) \tag{1}$$

para $d = 1, .., 9$. Esto implica que la frecuencia del número 1 es aproximadamente 0.3, la del 2 es 0.18, etc. Existe una ley para el segundo, tercer dígito, etc. y una ley para la probabilidad conjunta. Es notable que la última frase del artículo de Newcomb llame la atención justamente sobre la posibilidad de usar esta ley como una forma de detectar si una lista de números es *natural*:

*"It is curious to remark that this law would enable us to decide whether a large collection of independent results were composed of natural numbers or logarithms".*

Casi cincuenta años después un físico (Benford 1938), Frank Benford recolectó información de 20 bases de datos (en total 20.000 registros) y verificó empíricamente la validez de ley de Newcomb. Desde ese entonces se han hecho varios estudios en diferentes áreas del conocimiento tendientes a verificar o no el cumplimiento de dicha ley. Una búsqueda básica en Mayo de 2010 en JSTOR arrojó 626 registros de Benford Law y 88 de Benfords Law (para una revisión exhaustiva de la literatura véase (Hurlimann 2006)). Algunas de sus aplicaciones han sido a la bolsa de valores (Ley 1996), auditoría (Nigrini 1996), indicadores económicos y cuentas nacionales (Gonzalez & Pastor 2009), financiación de campañas (Tam, Cho & Gaines 2007) y los resultados electorales en Estados Unidos, Méjico, Rusia, Bangladesh, Ecuador, Venezuela, Puerto Rico, Nicaragua, Armenia, Canadá, Suecia, Nigeria, etc. (véanse las referencias en (Mebane 2007) y (Mebane & Kirill 2009)).

De otra parte, la racionalidad científica de la ley de Benford ha sido un poca más elusiva. Sin embargo, existen varios artículos que formalizan el cumplimiento de la Ley en ciertos contextos así como sus propiedades de invarianza que resultan interesantes desde el punto de vista empírico. Por ejemplo (Hill 1996) muestra que bajo ciertas condiciones la Ley de Benford se debe cumplir cuando los números son generados de distribuciones seleccionadas aleatoriamente. Otros trabajos un poco más informales han mostrado que la Ley de Benford se debe cumplir cuando la muestra de números es suficientemente grande y abarca varios órdenes de magnitud. En particular, para que una serie de datos se distribuya de acuerdo a la Ley de Benford debe tener un orden de magnitud[3] de 6, o tener orden de magnitud mayor a 4 y contar con por lo menos 100 registros (Fewster 2009).

Por ejemplo, Brady (2005), citado en (Deckert & Myagkov n.d.) muestra que un proceso estocástico que genere una competencia entre dos candidatos en puestos de votación de entre 100 y 1000 votantes (un orden de magnitud), generaría resultados con primeros dígitos 4,5 ó 6 lo que incumple la Ley Benford en el primer digito ($1BL$). También hay que tener en cuenta que no se espera que $1BL$ se cumpla con los conteos a nivel de mesa porque estos son de tamaño[4] similar, en cambio se espera que $1BL$ se cumpla por puesto cuando existe variabilidad en el tamaño de los mismos (Mebane 2007). De otra parte, Pericchi & Torres (2004) dicen que es preferible revisar el segundo dígito, ya que el primero se ve afectado porque el número de votantes en cada puesto de votación es fijo y no tiene variación entre puesto y puesto.

En un estudio más reciente (Walter R. Mebane 2010), el autor reconoce que las pruebas de primer dígito no sirven, y que hay que enfocarse en datos a un nivel desagregado como precinto (puesto de votación en Colombia). Mebane modela preferencias de los agentes y realiza simulaciones, obteniendo que se cumple la Ley de Benford en el segundo dígito ($2BL$). Sin embargo, el resultado es simplemente una consecuencia de la mixtura de distribuciones de las preferencias de los agentes que utiliza, es decir una aplicación de los resultados teóricos de Hill. Cuando analiza coerción y voto estratégico, encuentra que las pruebas digitales de Benford necesitan de covariados para explicar lo que pasó en la elección. Es decir, analizando solamente los dígitos no se puede concluir nada definitivo sobre una elección. También reconoce que sería valioso reemplazar las simulaciones por argumentos deductivos que expliquen la ocurrencia de Benford en datos de elecciones.

En (Deckert & Myagkov n.d.) se usan datos de elecciones en Ucrania, Ohio y Massachusetts; y unas simulaciones para mostrar que ni $1BL$ ni $2BL$ sirven como herramientas para detectar fraude. De hecho, muestran que a veces el fraude puede inducir a cumplir la Ley de Benford y por tanto la prueba llevaría a conclusiones erróneas. También argumentan que no hay un modelo que explique porque unas elecciones fraudulentas incumplirían Benford ni tampoco hay una teoría que justifique que unas elecciones limpias satisfacen Benford. Por esto

[3]Esto quiere decir que al dividir el mayor número por el menor el resultado debe ser mayor que $10^6$.

[4]El tamaño se refiere a la cantidad de gente que vota en ese lugar.

prefieren el argumento de (Beber & Scacco 2008) sobre el último dígito, pues consideran más lógico que unos jurados redondeen cifras para completar una cuota, que suponer que en vez de 10.000 votos pusieron 20.000.

El fraude por redondeo es lo que se encuentra, por ejemplo, en las elecciones de Rusia 2004 y 2008 (Buzin & Lubarev 2008). De otra parte, hay que reconocer que el argumento de los procesos estocásticos para generar la mezcla de distribuciones que cumplen la Ley de Benford, basado en (Hill 1996), ignora que el fraude no es un proceso centralizado, sino que se da en varias localidades lo que le añade otros errores y variabilidad.

En conclusión, no hay justificación teórica para que se cumpla la Ley de Benford en los primeros dígitos de los resultados electorales. Hay consenso en que Benford sobre el primer dígito no se debe usar y aunque algunos autores siguen usando pruebas sobre el segundo dígito, recomiendan revisar órdenes de magnitud y otras variables. De otra parte, hay un creciente interés en la literatura por las pruebas digitales de Beber y Scacco. Estas han demostrado ser útiles en varios países como Nigeria, Suecia, Venezuela, Rusia y Ucrania.

## 2.2. Pruebas Beber-Scacco

Las pruebas de Beber y Scacco son más recientes que las aplicaciones de la Ley de Benford a elecciones; sin embargo han tenido una aceptación mayor, en parte debido a que su uso como herramienta para detectar fraude tiene una justificación teórica. Beber & Scacco (2008) muestran que bajo condiciones muy generales, si un lista de números ha sido generada de forma aleatoria, sus últimos dígitos deben distribuirse uniformemente. Ahora, basados en tres estudios sicológicos de series de números generadas por humanos, ellos llaman la atención sobre el hecho de que en varios aspectos estos datos no siguen la distribución uniforme. Primero, aunque el ultimo dígito (de izquierda a derecha) de cada número debería aparecer igual número de veces, en los experimentos se encontró que las personas favorecen a los dígitos más pequeños; por tanto el cero, el uno y el dos aparecen más de lo esperado en datos producidos por humanos. Segundo, las personas inconscientemente creen que los dígitos repetidos no son tan frecuentes, por lo que en datos de experimentos de laboratorio se encontró que parejas de últimos dígitos iguales aparecen menos veces que el caso uniforme. Finalmente, los humanos están inclinados a producir parejas de dígitos consecutivos más de lo teóricamente predicho por una distribución uniforme. Esto sugiere una prueba obvia para determinar si una lista de números ha sido alterada por un ser humano y aplican sus resultados a los resultados electorales en Suecia y Nigeria. En Suecia, un país reconocido por su democracia, los resultados siguen muy de cerca la distribución uniforme. Mientras que en Nigeria, los datos de las elecciones presentan evidencia de manipulación humana en concordancia con las sospechas sobre la irregularidad de aquellas elecciones.

## 2.3. El caso colombiano

En la mayoría de las elecciones en Colombia han existido sospechas de fraude; desde antes de 1840 cuando las elecciones eran públicas y a viva voz hasta el día de hoy, cuando el voto es secreto y universal. Aunque el voto pasó a ser secreto en los años cuarenta del siglo $XIX$, el fraude y la "compra" de votos han seguido existiendo.

Las elecciones de 1922, cuando el sistema de votación era por colegio electoral, se llevan a cabo un año después del pago de los $USD\$25$ millones como indemnización por parte de Estados Unidos por la pérdida de Panamá. Este pago es el ingreso directo más grande, en términos reales, que ha tenido la nación, por lo que el partido que ganara esas elecciones tendría a su disposición cuantiosos recursos para ejecutar numerosos proyectos (Chaves, Fergusson & Robinson 2009). Los periódicos liberales de esa época denunciaron casos de fraude; y, efectivamente (Chaves et al. 2009) encuentran que en 508 de los 755 municipios la votación fue superior, un 35 % en promedio, al estimado del censo electoral.

En las elecciones de 1926 el 99 % de los votos fueron para el conservador Miguel Abadía Méndez. En 1936 se instauró la votación universal para varones, pero en ese año y en 1950 la elección del presidente también fue casi unánime. Estas últimas elecciones fueron influenciadas por los grupos paramilitares conocidos como los "pájaros". Desde 1948 la organización electoral quedó en manos de los partidos, para que ejercieran auto-control. Esto disminuyó las acusaciones entre liberales y conservadores de fraude, al punto que sólo las elecciones de 1970 han sido fuertemente cuestionadas desde entonces (Jaramillo 2006).

Gracias al acuerdo del Frente Nacional, se considera que las elecciones de 1958, 1962 y 1966 fueron limpias. Sin embargo, las siguientes elecciones se convirtieron en las más sospechosas de fraude en la historia reciente del país. El 19 de Abril de 1970, Misael Pastrana iba perdiendo frente al general retirado Gustavo Rojas Pinilla por un margen considerable. De repente se fue la luz, se dejaron de emitir resultados y el país amaneció con Pastrana como presidente electo. Aunque muchos observadores extranjeros estaban seguros de que se había cometido fraude en la elección, los informes finales no despiertan sospechas, pues se esperaba que Rojas Pinilla ganara en las urbes y Pastrana en el campo; verificar si hubo fraude sería imposible (Bushnell 1996).

En los 80's las preocupación principal era el hostigamientos de grupos armados y los escándalos de fraude pasaron a segundo plano. A partir de 1994 se implantó el sistema de segunda vuelta: si un candidato no obtiene la mitad más uno de los votos, habrá una nueva elección entre los dos primeros. Los casos de fraude han seguido siendo noticia recientemente. En 1994 en más de la cuarta parte de los municipios del país se anularon inscripciones. En las elecciones parlamentarias de 2002 se descubrieron 102 formularios alterados. Sin embargo, el hecho de que la victoria de Uribe haya sido tan contundente levanta pocas sospechas sobre la legitimidad de su triunfo (Jaramillo 2006).

En las elecciones parlamentarias 2010 también se presentaron irregularidades. Hubo problemas en la asignación de los jurados, los resultados se demoraron en ser difundidos y hubo trasteo de votos. En un debate en la sala plena del Senado, el senador Luis Elmer Arenas denunció las irregularidades en el Valle del Cauca. Citó la participación indebida de funcionarios públicos, la influencia de políticos que están en la cárcel y sobre todo la inscripción tardía de 20.000 cédulas en Cali, Palmira y Buenaventura.

La literatura cuantitativa sobre el tema de fraude electoral en Colombia ha sido relativamente escaza; sin embargo, en los últimos anños han comenzado a aparecer una primera serie de estudios. Por ejemplo (Gonzalez 2009) introduce algunas medidas de atipicidad basada en estadísticos convencionales de dispersión (desviaciones estándard, etc); (Chaves, Fergusson & Robinson 2008) estudian las elecciones de 1922 y comparan el censo electoral de ese entonces con la votación observada. Con base en este tipo de comparaciones logran identificar algunos municipios en donde los reultados resultan sospechosos. En el presente trabajo se comparan los resultados obtenidos por (Chaves et al. 2008) con los resultados obtenidos utilizando técnicas de análisis digital. Finalmente, en la página web http://cavorite.com/ se encuentra, hasta donde nuestro conocimiento alcanza, la primera aplicación de la Ley de Benford al caso de las elecciones en Colombia.

# 3. Marco teórico

## 3.1. Introducción

Como toda ciencia en proceso de maduración, el análisis comienza por establecer regularidades empíricas que ameriten explicación. Este es el espíritu del ejercicio que hemos realizado para algunas elecciones en Colombia. Dado el estado del arte sobre este tema, nuestra justificación está basada en las regularidades empíricas observadas en contiendas electorales de otros países. La metodología, en el mejor de los casos, sólo es útil para generar alertas de atipicidad. A continuación se presenta la metodología estadística usada para generar estas alertas.

## 3.2. Estadísticos de prueba

La distribución de los últimos dígitos, según lo desarrollado por Beber & Scacco (2008), es uniforme. Se sigue entonces que

$$Prob(D_u = d) = 10\,\% = Prob(D_{pu} = d), \forall d \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

donde el sub-índice $u$ se refiere al último dígito y $pu$ al penúltimo dígito. Adicionalmente, se supone independencia entre la distribución de los dos últimos dígitos. Por tanto la probabilidad que los dos últimos dígitos sean iguales es un décimo: la probabilidad que ambos sean $d$ es $0.1 \times 0.1 = 0.01$ y hay 10 valores posibles para $d$. Asi mismo, la probabilidad de que la diferencia, en valor absoluto, entre el último y el penúltimo dígito sea uno, i.e. sean consecutivos, es 18 %: para cada dígito excepto el 9 las parejas (01, 12, ..., 89), en orden ascendente o descendente (01 ó 10) tienen diferencia uno.

Por otro lado, la Ley de Benford establece que,

$$Prob(D_1 = d) = \log_{10}(1 + 1/d) \tag{2}$$

$$Prob(D_2 = d) = \sum_{k=1}^{9} \log_{10}(1 + (10k + d)^{-1}) \tag{3}$$

donde el sub-índice $i$ denota el i-ésimo dígito significativo de un número (i.e. el i-ésimo dígito de izquierda a derecha) y $d$ un número entre 0 y 9. Nótese que el primer dígito significativo de un número no puede ser cero. Por ejemplo, reemplazando en la fórmula $i = 1$ y $d = 1$, se tiene que $Prob(D_1 = 1) = \log_{10}(2) = 0.301$. Nótese que como la Ley de Benford depende del inverso de $d$, se obtiene que la probabilidad es decreciente, es decir, que los dígitos más pequeños aparecen más veces.

Para mirar el ajuste de la distribución empírica a una distribución uniforme o de Benford, se calcularán tres estadísticos:

- Prueba de Pearson: consiste en comparar los valores observados $o_i$ con los valores teóricos ($t_i$) de la frecuencia con la que aparece el dígito $i$. El estadístico sigue una distribución chi-cuadrado con 9 grados de libertad (8 para las pruebas de primer dígito).

$$\aleph^2 = \sum_i \frac{(o_i - t_i)^2}{t_i}$$

- Prueba de Kuiper: esta prueba es del tipo Kolmogorov-Smirnov, en particular es no-paramétrica. Es decir no se supone ninguna forma funcional específica para la distribución sino que se comparan las desviaciones entre la frecuencia empírica y teórica. Por tanto, se puede aplicar sin necesidad de hacer supuestos sobre las distribuciones y los errores. Este estadístico compara las desviaciones más grandes por arriba o por abajo de la distribución teórica contra la empírica.

$$V_n^* = V_n(n^{1/2} + 0.155 + 0.24n^{-1/2})$$

donde $V_n = D_n^+ + D_n^-$ definiendo $D_n^+ = \text{máx}_i\{o_i - t_i\}$ y $D_n^- = \text{máx}_i\{t_i - o_i\}$. Los valores críticos de Kuiper son 1.62, 1.75 y 2.00 para significancias del 10 %, 5 % y 1 % respectivamente.

- Prueba de Medias: se comparan la media de la distribución empírica ($m_o$) con la media de la distribución teórica ($m_t$) y se calcula el estadístico $t$:

$$t = \frac{m_o - m_t}{\sigma_o/\sqrt{n}}$$

La última prueba que se calcula es una binomial, para comprobar si hay pocos dígitos repetidos respecto al 10 % esperado en una uniforme, o si las parejas de dígitos consecutivos exceden el 18 %.

$$Z = \frac{p_o - p_t}{\sqrt{p_t(1-p_t)/n}}$$

Recordemos que esta prueba se basa en la convergencia de la distribución binomial a la normal. La regla que se utiliza en la práctica para aceptar la convergencia es que el número de datos sea mayor a treinta y el mínimo entre $np_t$ y $n(1-p_t)$ sea mayor a 5. Como probaremos en el caso de dígitos repetidos para $p_t = 10\,\%$ y para consecutivos $p_t = 18\,\%$, la última condición obliga a que el número de observaciones sea mayor a 50.

## 3.3. Orden de magnitud para la Ley de Benford sobre el segundo dígito

Para revisar si el orden de magnitud de una serie es adecuado para aplicar las pruebas de la Ley de Benford sobre el segundo dígito, se sigue la metodología descrita en (Fewster 2009), quien encuentra que para que la Ley de Benford sobre el primer dígito se cumpla se debe tener un orden de magnitud de 6 o tener orden de magnitud mayor a 4 y contar con por lo menos 100 registros.

Esta metodología consiste en encontrar el ancho (orden de magnitud) a partir del cual una función suave tiene distribución de segundo dígito significativo "similar" a Benford. Matemáticamente se busca $\pi(x)$ que maximice:

$$\sum_{i=0}^{9} \frac{(o_i - t_i)^2}{t_i} - \lambda \int_0^s \pi''(x)^2 dx, \tag{4}$$

donde $t_i$ es el valor teórico de la probabilidad del segundo dígito, calculado según la fórmula 3 y $o_i$ es la probabilidad empírica del segundo dígito significativo para $\pi$, calculado como

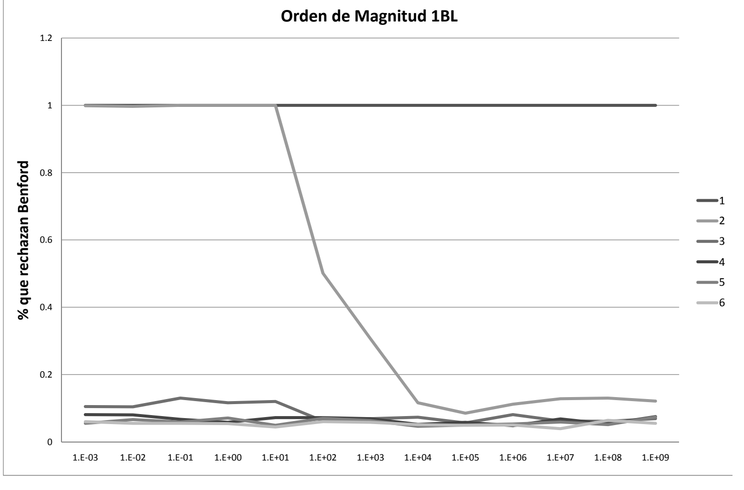
$$\sum_{n=0}^{s-1} \left( \sum_{k=1}^{9} \int_{n+\log_{10}(10k+i)}^{n+\log_{10}(10k+i+1)} \pi(x)dx \right). \tag{5}$$

La intuición de la fórmula 4 es determinar que tan distante una distribución está respecto a Benford (medido por el estadístico de Pearson) penalizando por falta de suavidad en la función (la segunda derivada). El valor de $\lambda$ es el peso relativo que se le da a la suavidad de la función respecto a su desviación de Benford. $s$ es el parámetro que dará el orden de magnitud.

Se intentaron distintas combinaciones variando el orden de magnitud ($s$) y el parámetro de suavidad ($\lambda$). Para cada pareja se obtuvo la distribución $\pi_{s,\lambda}$ "más alejada "de Benford, y luego se realizaron mil muestreos de $\pi_{s,\lambda}$ cada uno de tamaño cien. [5] Finalmente se realizó la prueba $\chi^2$ a cada muestreo para ver cuales satisfacen Benford al 5 %. Los resultados se presentan a continuación. Para permitir una comparación con la Ley de Benford sobre el primer dígito se presentan primero los resultados para ésta.

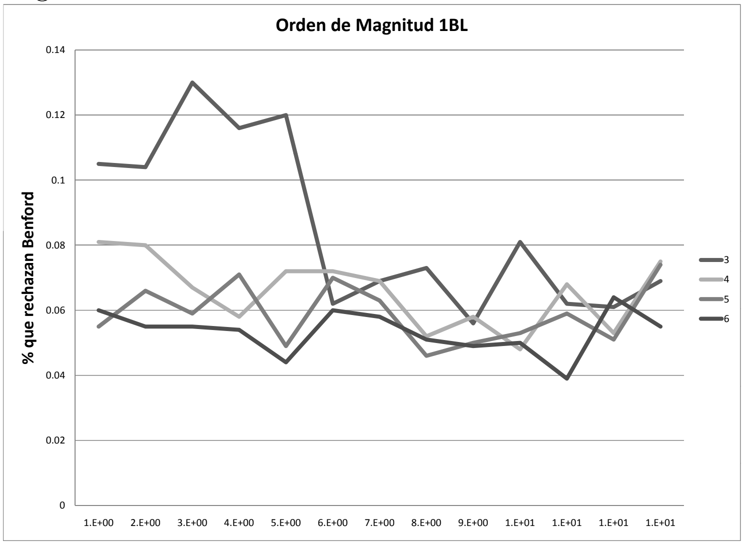
En figura 1 se puede observar, para la Ley de Benford Primer Dígito ($1BL$), que a medida que la función es más suave (eje horizontal), es menos probable que se rechace Benford. Entre más ordenes de magnitud tenga la muestra menos probable es que se rechace Benford. No se incluyen uno y dos órdenes de magnitud pues el primero siempre rechaza Benford y el segundo casi siempre.

Figura 1: Porcentaje de simulaciones que rechazan $1BL$ al 5 % para distintos órdenes de magnitud.



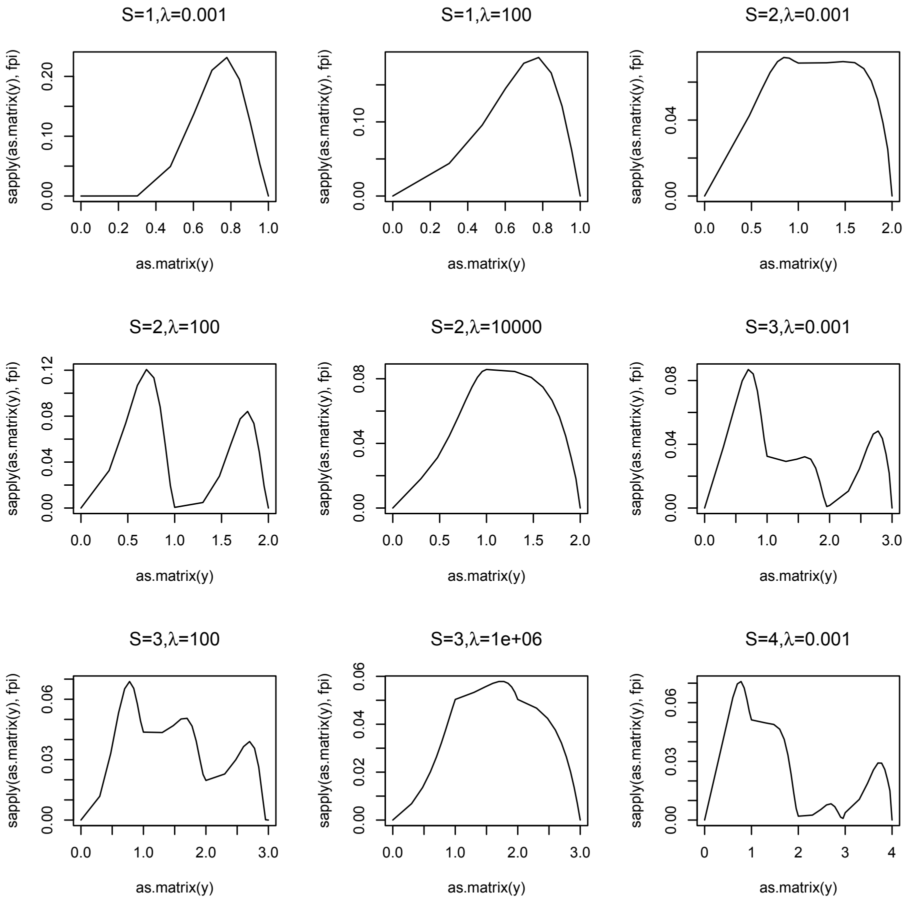

[5]Estos muestreos se hicieron con el método de muestreo de la transformación inversa, que consiste en tomar muestreos de la variable uniforme estándar ($x_i$) y luego para volverlos muestreos de la distribución dada se toman los $y_i = F^{-1}(x_i)$.

Figura 2: Porcentaje de simulaciones que rechazan $1BL$ al $5\,\%$ para distintos órdenes de magnitud.



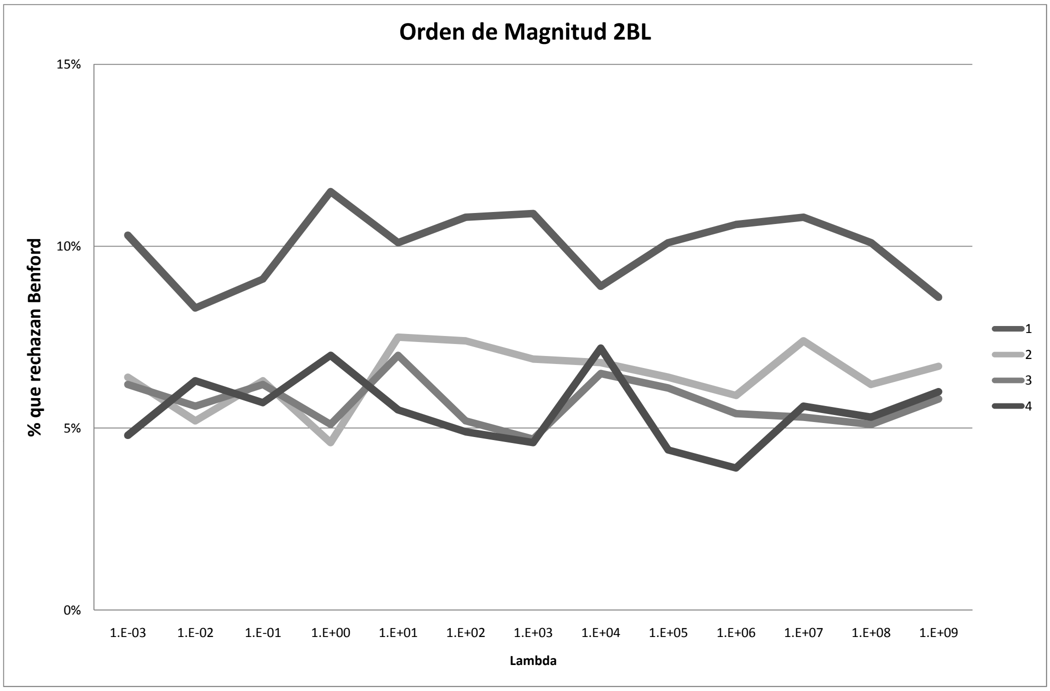

En la figura 3 se presentan algunas gráficas de $\pi_{s,\lambda}$ para distintas parejas de parámetros de suavidad y orden de magnitud. El ejemplo más diciente del ejercicio se tiene para la pareja ($s = 1, \lambda = 0.001$), porque como la penalidad de suavidad es baja y el objetivo es alejarse de Benford, la mejor solución es concentrarse en los dígitos mayores. Luego se ve como, a medida que el parámetro de suavidad y los órdenes de magnitud aumentan, la función tiene menos picos.

Figura 3: La función de $1BL$ para $s$ y $\lambda$ dados



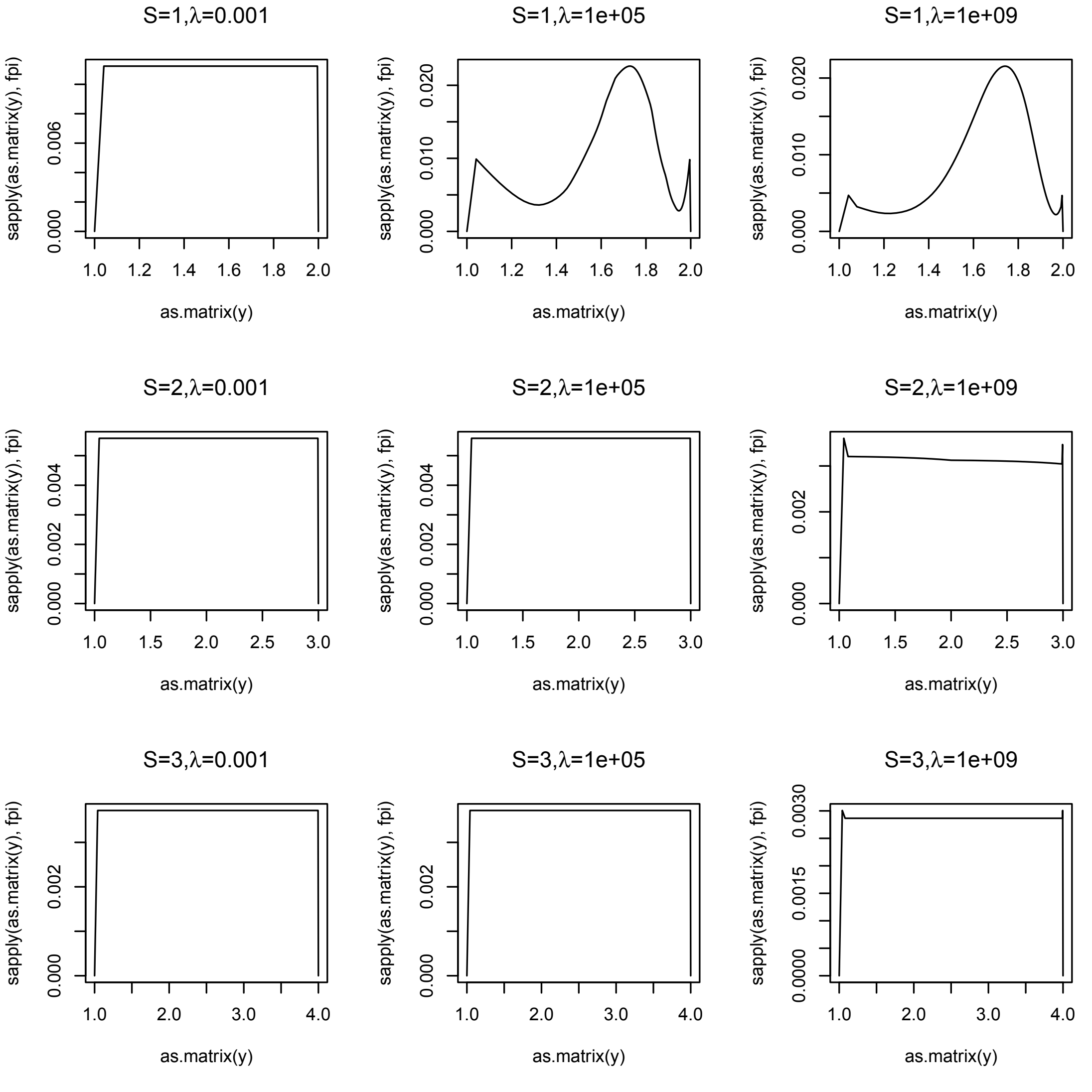

Para la Ley de Benford Segundo Dígito ($2BL$) se presentan las gráficas análogas. En general la Ley de Benford sobre el segundo dígito se rechaza menos que la Ley sobre el primer dígito pues con solo tener un orden de magnitud ya se tienen al menos nueve casos ($1d$,$2d$,...,$9d$) en que el segundo dígito es $d$ y por tanto hacer que la distribución se desvíe de Benford necesitaría nueve picos como los que se mostraron para $1BL$. También se observa que entre más órdenes de magnitud menos se rechace $2BL$ y que los casos en que se cumple Benford son relativamente estables al variar el parámetro de suavidad.

Figura 4: Porcentaje de simulaciones que rechazan $2BL$ al 5 % para distintos órdenes de magnitud




Las gráficas son poco dicientes porque, como se dijo anteriormente, desviarse de Benford alteraría la suavidad. Nótese que, como se necesita que el número tenga por lo menos dos dígitos para hablar del segundo dígito, el eje horizontal comienza en 1.

Figura 5: La función “más alejada ”de $2BL$ para $s$ y $\lambda$ dados




Como regla práctica, a partir de los resultados anteriores, se establece que el orden de magnitud, para aplicar la Ley de Benford sobre el segundo dígito, debe ser mayor a dos.

# 4. Descripción de los datos

En este artículo se analizan las elecciones presidenciales de 1922 y de 1958 hasta 2006, las elecciones de Congreso en 2010, y las votaciones para Alcalde en Cali 2007. Los datos se obtuvieron de diversas fuentes, a saber:

- Los datos de 1922 los facilitó Leopoldo Fergusson; esos datos fueron los usados en (Chaves et al. 2009).
- Las presidenciales de los demás años vienen de las bases de datos del CEDE[6] y de Congreso Visible[7] quienes digitaron lo consignado en los libros de la Registraduría Nacional del Estado Civil.
- Para las presidenciales de 1970 Quantil[8] verificó uno a uno los datos, comparándolos con los libros de la Registraduría.
- Los datos de la Alcaldía de Cali se digitaron a partir de los formularios E-24 publicados en la página de la Registraduría Nacional del Estado Civil.
- Los datos de Congreso 2010 son de la Registraduría Nacional del Estado Civil.

Para 1922 se tiene registro de $651,852$ votos, de los cuales el 64.47 % fueron por Pedro Nel Ospina. Nuestros números difieren de los reportados en (Bushnell n.d.); por Ospina tenemos siete mil votos más, mientras que por Benjamín Herrera veinticinco mil menos.

# 5. Resultados

## 5.1. Pruebas de Benford

Para analizar los resultados se usará la siguiente terminología.[9] A menos que se indique lo contrario el nivel de significancia que se usa es del 5 %:

- Se dice que hay ***evidencia fuerte de atipicidad*** por Benford Segundo dígito si todas las pruebas (Pearson, Kuiper y Medias) señalan que hubo atipicidad.
- Se dice que hay ***evidencia de atipicidad*** por Benford Segundo Dígito si dos de las tres pruebas señalan que hubo atipicidad.

[6] El Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico de la Universidad de los Andes

[7] http://www.congresovisible.org/

[8] http://www.quantil.com.co

[9] Los resultados detallados para todas las series analizadas pueden descargarse de www.quantil.com.co/appendixAnalisisDigital.pdf.

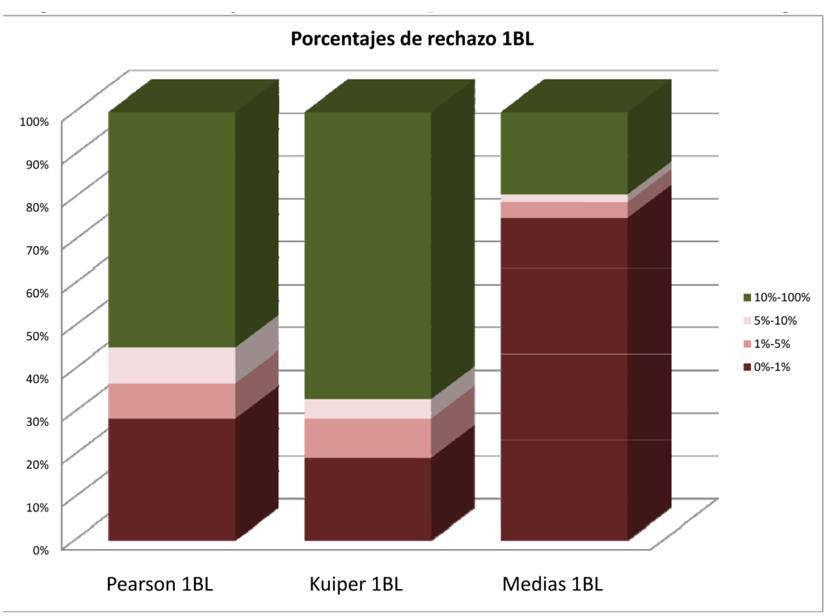
- Se dice que hay ***evidencia leve de atipicidad*** por Benford Segundo dígito si solo una de las tres pruebas señalan que hubo atipicidad.

Aunque no se analizan los resultados de las pruebas de $1BL$, por las razones expuestas en la Revisión de la Literatura, en la tabla 1 (y la figura 6) se presenta un resumen de la cantidad de series de resultados[10] que señalarían atipicidad al usar $1BL$. De las 109 series de resultados electorales, según la prueba de Medias, en más del 80 % de los casos hay atipicidad. Esto corrobora la idea de que $1BL$ no debe ser usado como prueba de atipicidad. Otro punto interesante de notar, es que hay más series con evidencias de atipicidad al 1 % que series con atipicidad entre el 1 % y 10 %.

Tabla 1: Resultados de pruebas de Benford Primer Dígito

| | Pearson 1BL | Kuiper 1BL | Medias 1BL |
|---|---|---|---|
| 0 %-1 % | 31 | 21 | 82 |
| 1 %-5 % | 9 | 10 | 4 |
| 5 %-10 % | 9 | 5 | 2 |
| 10 %-100 % | 60 | 73 | 21 |

Figura 6: Porcentaje de rechazo en pruebas de Benford Primer Dígito



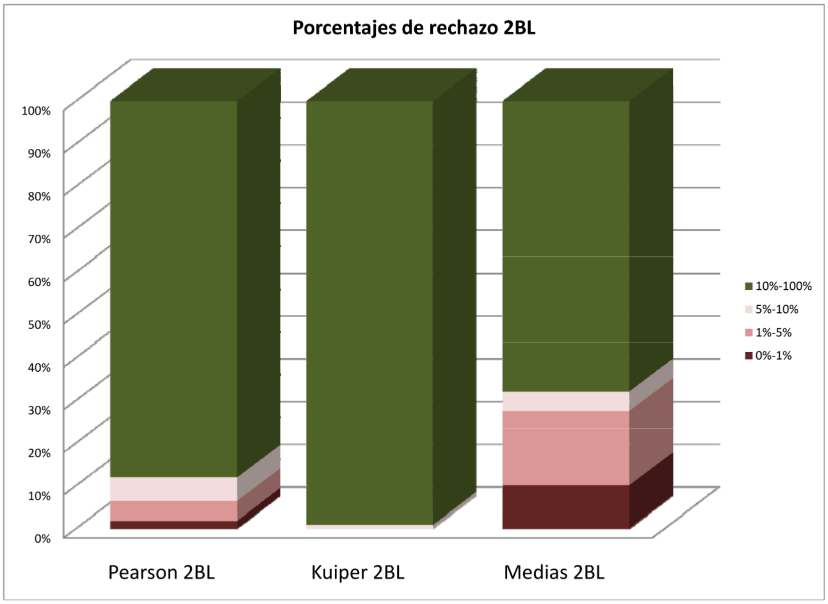

[10]Una serie de resultados es el vector de votos de un candidato en una elección presidencial o de un partido en elecciones parlamentarias.

Por otro lado, las pruebas de Pearson para $2BL$ señalan 7 casos de atipicidad en las 109 series de resultados analizados. A saber: el total de votos en las elecciones de 1962, 1978 y segunda vuelta 1998, los resultados de Uribe en 2002, la votación del Partido Verde para Cámara 2010, los votos en blanco de Senado 2010 y los resultados de Ospina para la Alcaldía de Cali 2007. Por Kuiper para $2BL$ no se registra ninguna alerta, quizás porque esta prueba es más sensible a los valores que se desvíen considerablemente de lo teórico. El más cercano a sospechas es para Ospina en la Alcaldía de Cali que genera sospechas al 10 %. En cambio la prueba de Medias señala atipicidad cerca de un 25 % de las veces. La tabla 2 y la figura 7 presentan los resultados.

Tabla 2: Resultados de pruebas de Benford Segundo Dígito

| | Pearson 2BL | Kuiper 2BL | Medias 2BL |
|---|---|---|---|
| 0 %-1 % | 2 | 0 | 11 |
| 1 %-5 % | 5 | 0 | 19 |
| 5 %-10 % | 6 | 1 | 5 |
| 10 %-100 % | 96 | 108 | 74 |

Figura 7: Porcentaje de rechazo en pruebas de Benford Segundo Dígito



## 5.2. Pruebas Beber-Scacco

Por analogía se usará la siguiente terminología para el análisis de los resultados en pruebas Beber-Scacco:

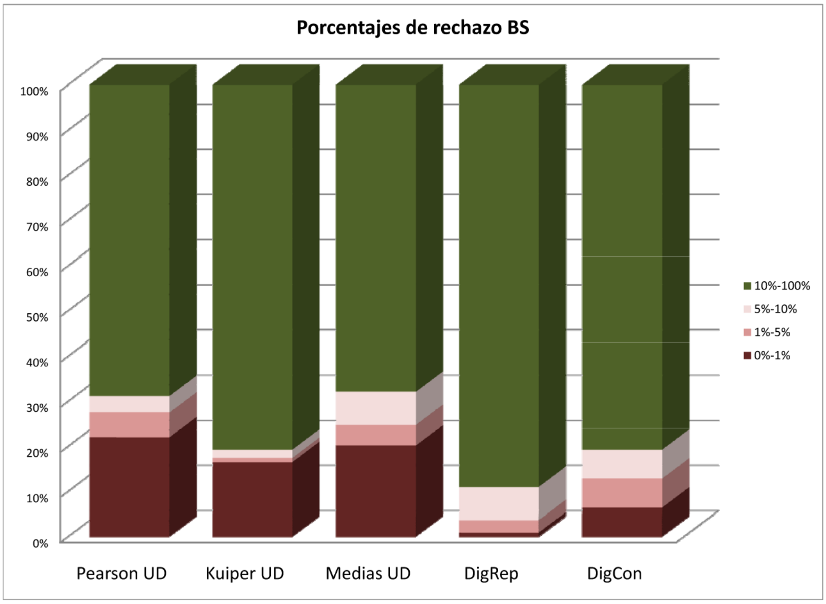
- Se dice que hay ***evidencia fuerte de atipicidad*** por la prueba de Beber y Scacco sobre el último dígito si todas las pruebas (Pearson, Kuiper y Medias) señalan que hubo atipicidad. Hay evidencia fuerte por la prueba de Beber y Scacco sobre parejas de dígitos consecutivos y de dígitos repetidos si ambas pruebas binomiales señalan en la dirección correcta que hubo atipicidad. Es decir, hay menos digitos repetidos de lo esperado y hay más digitos consecutivos de los que tendrían números aleatorios.
- Se dice que hay ***evidencia de atipicidad*** por la prueba de Beber y Scacco sobre el último dígito si dos de las tres pruebas señalan que hubo atipicidad. Se dice que hay evidencia de atipicidad por la prueba de Beber y Scacco sobre parejas de dígitos consecutivos y de dígitos repetidos si al menos una de las pruebas señala atipicidad en la dirección correcta.
- Se dice que hay ***evidencia leve de atipicidad*** por la prueba de Beber y Scacco sobre el último dígito si solo una de las tres pruebas señalan que hubo atipicidad. Se dice que hay evidencia leve de atipicidad por la prueba de Beber y Scacco sobre parejas de dígitos consecutivos y de dígitos repetidos si al menos una de las pruebas señala atipicidad.

Por pruebas de último dígito, Kuiper señala diecinueve casos de atipicidad, Pearson treinta y la prueba de medias veintisiete. Para las pruebas de parejas de dígitos repetidos se tienen solo cuatro casos de alerta: el total de votos en 1922, la votación de Otros Candidatos en 1978, la del Polo para Cámara 2010, y Serpa en segunda vuelta de 1998, pero este último genera alerta en la dirección contraria a lo esperado. Por dígitos consecutivos se generan 14 alertas, once de ellas en la dirección correcta. El resumen de resultados se encuentra en la tabla 3 y la figura 8.

Tabla 3: Resultados de pruebas de Beber-Scacco

| | Pearson UD | Kuiper UD | Medias UD | DigRep | DigCon |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 %-1 % | 24 | 18 | 22 | 1 | 7 |
| 1 %-5 % | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 |
| 5 %-10 % | 4 | 2 | 8 | 8 | 7 |
| 10 %-100 % | 75 | 88 | 74 | 97 | 88 |

Figura 8: Porcentaje de rechazo en pruebas de Beber-Scacco




## 5.3. Resultados Generales

Como se efectuaron ocho pruebas distintas (dos de Pearson, dos de Kuiper, dos de medias y dos binomiales) para determinar atipicidad; se usará la siguiente terminología para el análisis de resultados. A menos que se indique lo contrario el nivel de significancia que se usa es del 5 %:

- Para la votación de un candidato(s) se dice que hay ***evidencia fuerte de atipicidad*** si para las tres distribuciones ($2BL$, Beber-Scacco sobre el último dígito y Beber-Scacco sobre parejas de dígitos consecutivos o repetidos) se considera que hay evidencia fuerte o evidencia de atipicidad.

- Para la votación de un candidato(s) se dice que hay ***evidencia de atipicidad*** si para dos de las tres distribuciones se considera que hay evidencia fuerte o evidencia de atipicidad. Alternativamente, una fuerte y al menos otra leve.

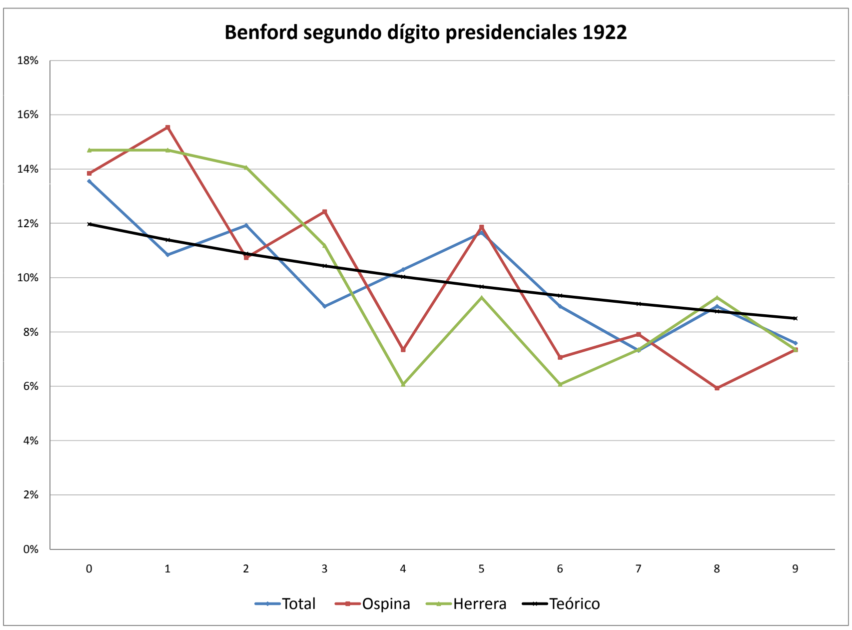
- Para la votación de un candidato(s) se dice que hay ***evidencia leve de atipicidad*** si para alguna de las tres distribuciones se considera que hay evidencia fuerte o evidencia de atipicidad, o evidencia leve en dos o más distribuciones.

En cuanto a las elecciones en general:

- Se considera que unas elecciones tienen ***evidencia de atipicidad*** si al menos dos candidatos tienen evidencia fuerte o evidencia de atipicidad.
- Se considera que para unas elecciones existe ***evidencia leve de atipicidad*** si sólo un candidato presenta evidencia fuerte o evidencia de atipicidad.

En las elecciones de 1922 (ver figura 9) no se encuentran evidencias de atipicidad en los resultados agregados, salvo para Herrera por la prueba de medias. Sin embargo, siguiendo el artículo de Chaves et al. (2009), al clasificar los municipios en aquellos donde la cantidad de votos en las urnas fue un 60 % superior al censo, [11] se tienen evidencias leves de atipicidad en la elección, porque para ambos candidatos hay evidencias de atipicidad por Benford segundo dígito. Cuando se clasifican los municipios en aquellos donde hubo introducción de papeletas, [12] se tiene evidencia fuerte de atipicidad por Parejas de Dígitos para el total de la votación.

Figura 9: Benford segundo dígito presidenciales 1922 por $SC > 6$.

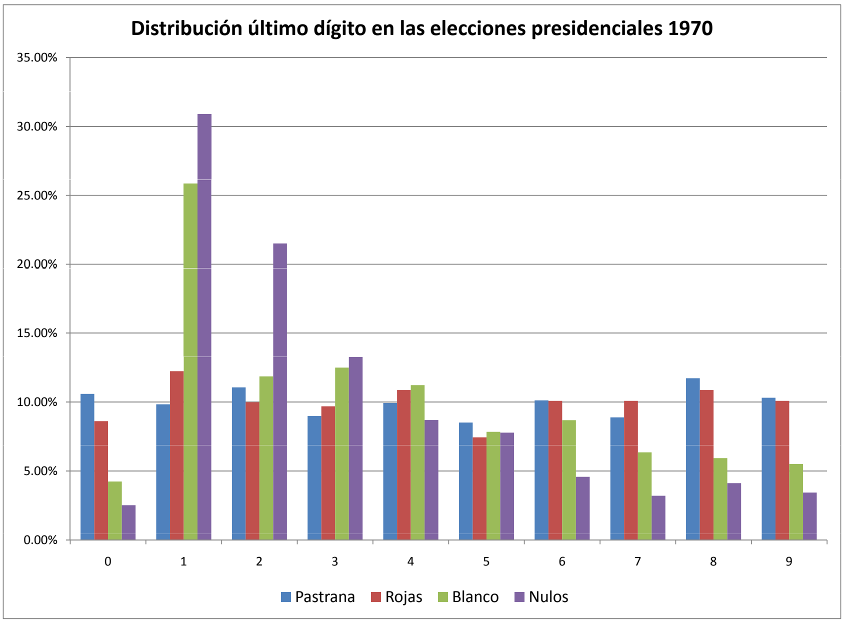



En las elecciones de 1970 (ver figura 10) la votación por Pastrana no resulta sospechsa en ninguna de las ocho pruebas. Sin embargo, los resultados de votos nulos presentan evidencia de fraude. Para votos en blanco también hay evidencia

[11] "Stuffed centiles "mayores a seis según la terminología del artículo.
[12] "Ballot stuffing "según la terminología del artículo.

de fraude por alteraciones del último dígito. En la votación de otros candidatos hay evidencia de fraude por dígito consecutivo, mientras que la votación de Rojas Pinilla genera alertas de atipicidad en su votación. Se podría pensar entonces, a la luz de estos resultados, que en las horas en que se fue la luz los jurados alteraron los votos distintos a los de Pastrana.

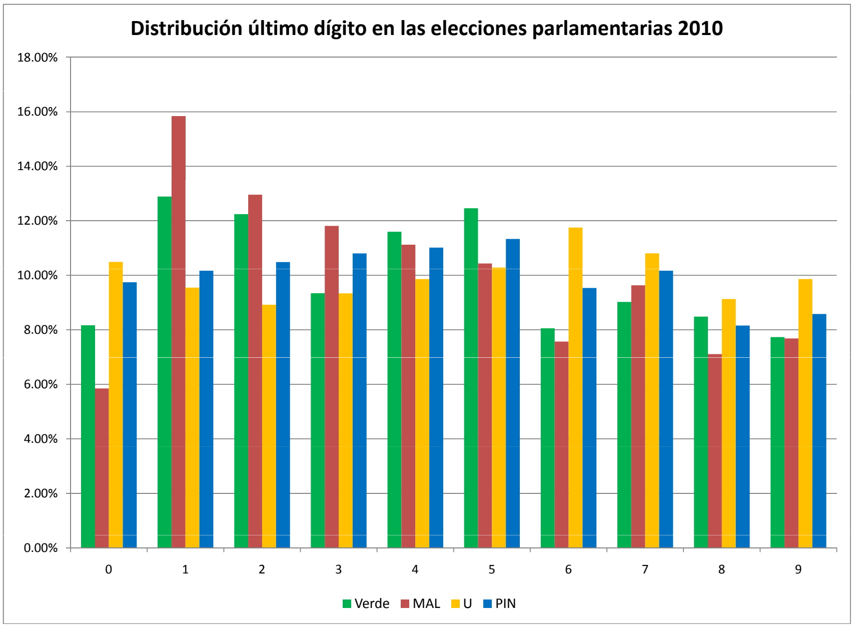
Figura 10: Distribución último dígito elecciones 1970




Hay evidencia leve de atipicidad en los comicios de 1982. Esto se debe a que hay evidencia de atipicidad por último dígito para los resultados de López y evidencia de atipicidad por dígito consecutivo para Galán. En las elecciones presidenciales de 2002 se encuentran evidencias leves de atipicidad para los resultados de Uribe porque no se cumple $2BL$ y hay más dígitos repetidos de lo esperado. Respecto a la Alcaldía de Cali 2007 se tiene evidencia leve de atipicidad. Esto se debe a que hay evidencia leve para los votos de Lloreda, y los de otros candidatos. Los votos de Ospina solo presentan evidencia por Benford Segundo Dígito.

En las elecciones parlamentarias de 2010 (ver figura 11) hay evidencias de atipicidad para Cámara y Senado. En ambas se presentan evidencias de atipicidad en los resultados de los partidos Movimiento Apertura Liberal, Alianza Social Indígena y Partido Alas. Para Cámara se presenta además evidencia de atipicidad en los resultados del Partido Verde. Curiosamente los resultados del cuestionado Partido de Integración Nacional-PIN, no generan alerta en ninguna de las 16 pruebas.

Figura 11: Distribución último dígito elecciones parlamentarias 2010




Restringiendo nuestro análisis al departamento del Valle 2010 por puestos de votación, usando las pruebas de Beber-Scacco sobre el último dígito se tiene evidencia fuerte de atipicidad para el Movimiento Independiente de Renovación (MIR), el Partido Liberal, el Partido de la U, el Polo Democrático Alterantivo (PDA), Cambio Radical, los votos en blanco y el total de votos. Al hacer el análisis de parejas de dígitos consecutivos o repetidos, solo se encuentra evidencia de atipicidad para el PIN por dígitos consecutivos.

Se decide agrupar los municipios del Valle entre sospechosos [13] y no sospechosos, según las denuncias hechas en prensa. El MIR y el PDA presentan atipicidad en municipios sospechosos y no sospechosos. Al realizar la separación, la votación total en los municipios sospechosos señala evidencias fuertes de atipicidad. En las pruebas de último dígito prácticamente no hay cambios al hacer la separación.

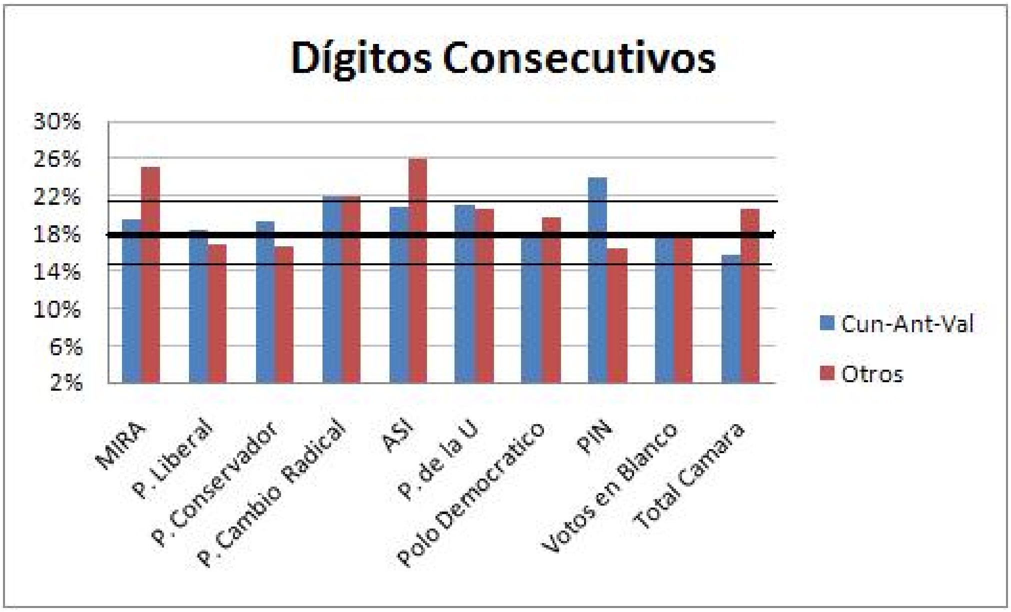
Para Cámara 2010 también se intenta hacer una agrupación de los datos, según denuncias en prensa de fraude, para detectar el origen de la atipicidad. Primero se agrupan[14] los departamentos de Antioquia, Valle, Risaralda y Sucre.

[13] Los municipios sospechosos son Ansermanuevo, Bolívar, Bugalagrande, Cartago, Cerrito, Águila, Dóvio, Guacari, Roldanillo, Yotoco, Yumbo, Cali.

[14] Se omitieron de las pruebas los partidos Verde, Alas y Movimiento de Apertura Liberal, porque tenían menos de 100 datos al hacer la partición, para aplicar las pruebas de Segundo dígito y Pareja de dígitos.

Por Benford Segundo dígito se sigue teniendo evidencia leve de atipicidad para el PDA al 10 % y para el PIN. La evidencia de atipicidad para el PIN no se encuentra en los departamentos restantes, mientras que para el PDA sí. Es decir, se puede concluir que la atipicidad en los resultados del PIN se produce en los 4 departamentos mencionados. En estos departamentos también aparece evidencia de atipicidad para el Partido Conservador y evidencia leve para el MIRA. En los restantes 28 departamentos se encuentra evidencia leve de atipicidad para el Partido de la U al 5 % y para la Alianza Social Indígena (ASI) al 10 %. Por pruebas Beber-Scacco las evidencias de atipicidad para el PIN y la U aparecen en Antioquia, Valle, Risaralda y Sucre, mientras que para Cambio Radical, MIRA y ASI parecen estar en los restantes 28 departamentos.

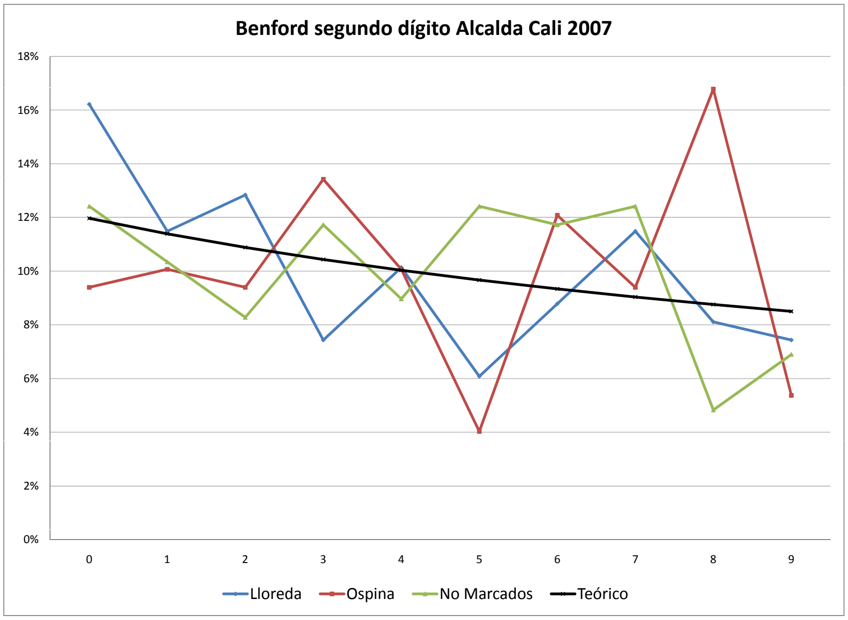
Figura 12: Prueba de Parejas de Dígitos Consecutivos




Una segunda agrupación que se examinó fue la de los tres principales departamentos del país: Antioquia, Valle y Cundinamarca. Al hacer esto, la evidencia de atipicidad por Benford segundo dígito para el PDA y la votación total, se concentra en estos tres departamentos, mientras que para el PIN aparecen en los restantes. En cuanto al último dígito, la evidencia de atipicidad para la ASI aparece en ambos grupos, mientras que la atipicidad del MIRA se concentra solo en los 29 departamentos. La evidencia de atipicidad por dígitos repetidos para el PDA, que estaba en el agregado, no aparece en ninguno de los dos grupos.

Las elecciones para la Alcaldía de Cali en 2007 (ver figura 13) muestran varias alertas de atipicidad. Los votos de Ospina y Otros Candidatos presentan evidencia de atipicidad por $2BL$, y Lloreda, Votos en Blanco y el total de votos evidencia leve de atipicidad por $2BL$. También se presentan evidencias leves de atipicidad por Último Dígito para Lloreda y Otros Candidatos, lo que nos indica que hay evidencias leves de atipicidad en la elección de Alcade de Cali en 2007.

Figura 13: Benford Segundo Dígito Alcaldía Cali 2007




# 6. Conclusiones

En este artículo hemos utilizado algunas técnicas del análisis digital para detectar patrones contrarios a los que se podría esperarse en votaciones "limpias". Los comportamientos "normales" se basan en distribuciones que deben tener números que provienen de conteos con naturaleza aleatoria, y en donde no hay manipulación humana. Las técnicas utilizadas fueron la Ley de Newcomb-Benford y las pruebas de Beber y Scacco. En total se analizaron 109 series de resultados electorales. Se buscaron desviaciones significativas de cuatro distribuciones: Newcomb-Benford para el segundo dígito (2BL), distribución uniforme del último dígito, y distribución uniforme para los últimos dos dígitos, aplicada a dígitos repetidos, y a dígitos consecutivos. Siendo concientes de que la atipicidad buscada se define en términos de distribuciones para las que aún no hay una prueba incontrovertible de que son satisfechas por elecciones sin algún tipo de manipulación, los resultados obtenidos permiten establecer comportamientos con respecto a estas distribuciones. No sobra advertir que estas técnicas se postulan como herramientas que pueden alertar a las autoridades hacia situaciones atípicas, pero no deben ser tomadas como potenciales pruebas de la existencia de fraude.

Usando un nivel de confianza del 5 % para definir casos de atipicidad según las pruebas estadísticas descritas en la sección 3, se probaron las hipótesis nulas según las cuales no hay desviación de la distribución esperada. Los resultados encontrados muestran la existencia de anomalías en las elecciones presidenciales de 1970 y en las de Senado y Cámara 2010. También se observan, aunque en menor grado, votaciones atípicas en las presidenciales de 1922, 1982, y en las votaciones de la Alcaldía de Cali 2007. Estos resultados coinciden con el seguimiento hecho por la opinión pública y los estudios académicos sobre estos casos, lo cual puede tomarse como justificación para usar estas pruebas con el objetivo de alertar hacia situaciones en donde pudo existir alguna manipulación. De otra parte, es igualmente importante resaltar que en la mayoría de los casos donde históricamente no han existido mayores sopechas de fraude, el análisis digital no levanta sospechas. Una vez más esto refuerza la idea, aunque con base en muy pocas observaciones, de que el análisis digital puede ser una herramienta útil en la detección de anomalías.

Considerando posibles estudios futuros, se debe notar que la relevancia del uso de las técnicas presentadas se fortalecería con el desarrollo de modelos de contiendas electorales que permitan determinar de forma teórica las distribuciones que siguen los conteos de votos, en particular para los conjuntos de dígitos expuestos en este trabajo, tanto en el caso sin fraude como en casos en donde se presentan tipologías particulares de fraude (eliminación de votos, adición de votos, alteración de resultados, etc.). Esto permitiría diseñar pruebas estadísticas más efectivas para detectar anomalías y principalmente, nos proveerían de formas de pensar sobre cómo se configuró un posible fraude.

# 7. Bibliografía


Adhikari, A. & Sarkar, B. (1968), 'Distribution of most significant digit in certain functions whose arguments are random variables', *Sankhya Ser.* **30**, 47–58.

Beber, B. & Scacco, A. (2008), What the numbers say: A digit based test for election fraud using new data from nigeria. paper presented at the Annual Meeting of the American Political Science Association, Boston Ma., August 28-31.

Benford, F. (1938), 'The law of anomalous numbers', *Proceedings of the American Philosophical Society* **78**, 551–572.

Brady, H. E. (2005), Comments on benford s law and the venezuelan election. Unpublished manuscript, Stanford University.

Bushnell, D. (1996), *Colombia una nación a pesar de si misma*, Planeta.

Bushnell, D. (n.d.), The making of modern colombia, annex b. http://pdba.georgetown.edu/Elecdata/Col/pres18261990.html.

Buzin, A. & Lubarev, A. (2008), Crime without punishment. Moscow: Nikkolo M.

Cantu, Franciso y Saiegh, S. (n.d.), A supervised machine learning procedure to detect electoral fraud using digital analysis.

Chaves, I., Fergusson, L. & Robinson, J. (2008), 'He who counts elects: The determinants of fraud in the 1922 colombian presidential election.', *NBER* .

Chaves, I., Fergusson, L. & Robinson, J. (2009), He who count elects: determinants of fraud in the 1922 colombian presidential election. NBER Working Paper Series No. 15127, http://www.nber.org/papers/w15127.

Deckert, J. & Myagkov, M. (n.d.), The irrelevance of benfords law for detecting fraud in elections. University of Oregon, California Institute of Technology.

Fewster, R. (2009), 'A simple explanation of benfords law', *The American Statistician* **Vol. 63, No. 1**, 26–32.

Gonzalez, D. (2009), Elecciones atípicas en colombia. una propuesta de medición de atipicidad para la elección popular de alcaldes, 1994 2007.

Gonzalez, J. & Pastor, G. (2009), 'Benford's law and macroeconomic data quality', *IMF Working Paper* .

Hill, T. (1996), A statistical derivation of the significant digit law. 1996.

Hill, T. P. (1995), 'Base invariance implies benfords law', *Proceedings of the American Mathematical Society* **123 No.3 (Mar.,1995)**, 887–895.

Hurlimann, W. (2006), Benfords law 1881 to 2006: A bibliography.

Janvresse, E. & de la Rue, T. (2004), 'From uniform distributions to benfords law', *Journal of Applied Probability* **Vol. 41, No. 4 (Dec., 2004)**, 1203–1210.

Jaramillo, F. (2006), 'El fantasma del fraude electoral', *Revista Semana* **Agosto 26**.

Levin, I., Cohny, G. A., Ordeshookz, P. C. & Alvarez, R. M. (2009), Detecting voter fraud in an electronic voting context: An analysis of the unlimited reelection vote in venezuela.

Ley, E. (1996), 'On the peculiar distribution of the u.s. stock indices digits', *The American Statistician* (Ley, E.).

Mebane, W. (2007), Election forensics: Vote counts and benfords law.

Mebane, W. & Kirill, K. (2009), Comparative election fraud detection.

Newcomb, S. (1881), 'Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers', *American Journal of Mathematics* **4**, 39–40.

Nigrini, M. (1996), 'Taxpayer compliance application of benford's law', *Journal of the American Taxation Asscociation* **18**, 72–92.

Pericchi, L. R. & Torres, D. (2004), La ley de newcomb-benford y sus aplicaciones al referendum revocatorio en venezuela, Technical report, Reporte Tï¿$\frac{1}{2}$ecnico no-definitivo 2a. versiï¿$\frac{1}{2}$n.

Pinkham, R. (1961), 'On the distribution of the first significant digits', *Ann, Math. Statist.* **32**, 1223–1230.

Posada, E. (2003), 'Ilegitimidad del estado en colombia: sobre los abusos de un concepto', *Libros de Cambio* .

Posada, E. (2006), *La nación soñada : violencia, liberalismo y democracia en Colombia*, Norma.

Raimi, R. (1976), 'The first digit problem', *Amer. Math. Monthly* **102**, 322–327.

Sobyanin, A. & Suchovolsky, V. (1993), Elections and the referendum december 11, 1993.

Tam, W., Cho, T. & Gaines, B. (2007), 'Breaking the (benford) law: Statistical fraud detection in campaign finance', *The American Statistician* **61**.

Terra.com (n.d.), Demora, desorden y fraude en las elecciones. Acceso web http://www.terra.com.co/elecciones2010/votebien/html/vbn811-demora-desorden-y-fraude-en-las-elecciones.htm.

Votebien.com (n.d.), Elecciones: Una historia de fraude. Acceso web http://www.terra.com.co/elecciones2003/informesespeciales/registraduria/23-08-2003/nota103241.html.

Walter R. Mebane, J. (2010), Election fraud or strategic voting? 2010.