

CIRJE-J-84

## 数理ファイナンスと計量ファイナンスの展開

東京大学大学院経済学研究科

国友直人

東京大学大学院数理科学研究科

高橋明彦

2002年11月

このディスカッション・ペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿である。著者の承諾なしに引用・複写することは差し控えられたい。

# **On Recent Developments in Mathematical Finance**

Naoto Kunitomo  
Akihiko Takahashi

## **Abstract**

We review some recent developments in mathematical finance and financial econometrics. In particular we discuss the asymptotic expansion approach recently proposed by Kunitomo and Takahashi (1995, 2001, 2002). Its mathematical validity is closely related to the Watanabe=Yoshida theory on Malliavin Calculus in Stochastic Analysis.

# 数理ファイナンスと計量ファイナンスの展開

国友直人\*

高橋明彦†

2002年10月

キーワード:

資産価格/連続確率過程/ブラック・ショールズ・モデル/統計的時系列解析/漸近展開法 (asset prices/continuous stochastic processes/Black-Scholes model/ statistical time series analysis/ asymptotic expansion method)

## 1. はじめに

日本の代表的株価指標である日経平均株価の最近の動きを図1に示した。株式の価格や外国為替レートをはじめとして金融市場で取引されている資産価格が、時間の経過とともに刻々とはげしく変動を続けていることは古くから人々によって観察されてきた。新聞やテレビで報道されるニュースでは世界で起こる政治や経済に関係する出来事とともに株価や外国為替レートの変動に言及されることが多くなり、今や一部の経済学者だけではなく一般の人々の間でも話題にのぼることも多い。日々報道されている日本経済のマクロ的状况や各企業のミクロ的状况を反映しつつも、このように時間とともに激しく変動する株式価格や外国為替レートの挙動を説明することのできる数理モデルはどんなものであろうか？

この問いに対する系統的な研究はフランスの学者 L. Bachelier (1900) の研究まで遡ることができる。彼は株価の変動の説明にブラウン運動を用いるといった当時としては画期的なアイデアを提案している。L. Bachelier (1900) の研究はあまりにも時代に先駆的すぎた為もあって当時の経済学者の注目するところとはならず、その後ブラウン運動の理論は A. Einstein の著名な研究をはじめ物理学者や数学者にゆだねられ発展した。ところが1970年代以降になって米国の金融市場において新たな金融デリバティブ(派生証券)の開発がすすみ、現実の市場取引が開始されはじめることと相前後して、ファイナンス分野における派生証券理論も急展開した。そこでは再び株価や外国為替レートの変動モデルとしてブラウン運動にもとづく確

---

\* 東京大学大学院経済学研究科教授。

† 東京大学大学院数理科学研究科助教授。

率過程モデルが用いられるようになってきている。ただし、こうした最近の研究ではブラウン運動を資産価格の確率過程として直接あてはめるのではなく、ブラウン運動に基づく幾何ブラウン運動やより一般の伊藤過程と呼ばれている確率過程を用いるようになってきている<sup>1</sup>。

本稿では数理ファイナンスと計量ファイナンスの分野における近年の展開や研究の動向について一つの短い説明を試みる。2節ではブラック・ショールズの数理モデルの背景を説明し、なぜそれでは不十分であるかを3節で言及する。4節ではより一般の資産価格の確率過程モデルについて述べ、確率過程を用いた数理モデルによる分析の新しいアプローチと制御問題についてそれぞれ5節と6節で言及する。7節は本稿の結論である。

## 2. 資産価格の幾何ブラウン運動モデル

時刻  $t$  のある株価を 1 次元の連続変数  $S(t)$  で表そう。一般に確率・統計モデルでは、時間とともに不確実性をともなって  $S(t)$  が変動するとき、 $S(t)$  は何らかの確率法則にしたがっていると考える。そこで、各時刻  $t$  に対して  $S(t)$  を確率変数と考えることにすれば、確率変数の束  $\{S(t) \mid t \in [0, T]\}$  は連続時間の確率過程 (stochastic process) になる。株式や外国為替のようにほぼ連続的に市場で取引が可能な資産価格を分析するときに連続時間の数理モデルを考えることも多くなってきている。ここでは 1 つの株式価格を例にとりその変動を考察するために時間を離散的に考え、 $[0, T]$  を  $n$  等分して時間単位を  $\Delta t = T/n$  かつ記号の節約の為に  $T = 1$  に設定しておこう。時刻  $t (i\Delta)$  における株価を  $S_n(i\Delta)$ 、第  $i$  期 ( $i = 1, \dots, n$ ) に株式を保有するときの収益率を  $r(i\Delta t)$  とおけば、配当が存在しない場合には価格系列  $\{S_n(i\Delta)\}$  より

$$r(i\Delta t) = \frac{S_n(i\Delta t) - S_n((i-1)\Delta t)}{S_n((i-1)\Delta t)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

で与えられる。初期値  $S_n(0)$  を既知の定数として、期間  $((i-1)\Delta t, i\Delta t]$  における収益率  $r(i\Delta t)$  が次の条件を満たすものとしよう。

[条件 A] 単位時間  $\Delta t$  あたりの収益率  $r(i\Delta t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が次の条件を満たす。(A-i) 期待収益率は一定  $E^P[r(i\Delta t)] = \mu\Delta t$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )、(A-ii)  $r(i\Delta t)$  と  $r(j\Delta t)$  ( $i \neq j$ ) は互いに無相関な確率変数列、(A-iii) 収益率の分散は一定  $V^P[r(i\Delta t)] = \sigma^2\Delta t$ 、(A-iv)  $E^P[|r(i\Delta t)|^3] = o(\Delta t)$ 。ただし数学的期待値  $E^P[\cdot]$  は (観察可能な) 確率測度  $P$  の下で定義する。

<sup>1</sup> 数理ファイナンスへの入門としては Pliska (1997) 及び Lamberton=Lapeyre (1997) とその翻訳を参考文献に挙げておいた。本稿で述べる内容については国友・高橋 (2002) が参考になる。なお伊藤清氏 (Kiyoshi Ito) の独創的研究に端を発して発展している確率解析学については、長井 (1999) や Ikeda=Watanabe (1989) が詳しい

ここでは説明を容易にする為に条件 A として超過収益率系列  $r(i\Delta t) - \mu\Delta t$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が「公平なゲーム (fair game)」の条件として知られているマルチンゲール差分 (martingale differences) になっているように設定した<sup>2</sup>。さらに、 $n$  個の互いに無相関で分散  $\Delta t$  の確率変数  $X_n(i\Delta t)$  を  $X_n(i\Delta t) = [r(i\Delta t) - \mu\Delta t]/\sigma$ 、確率変数列  $\{B_n(i\Delta t)\}$  により  $X_n(i\Delta t) = B_n(i\Delta t) - B_n((i-1)\Delta t)$  と表しておこう。初期値を  $B_n(0) = 0$  とすれば  $B_n(i\Delta t) = \sum_{j=1}^i X_n(j\Delta t)$  と書けるので収益率は

$$(1) \quad r(i\Delta t) = \mu\Delta t + \sigma[B_n(i\Delta t) - B_n((i-1)\Delta t)]$$

と表せる。また議論を分かりやすくする為に、離散間隔以外の箇所は  $B_n(t)$  が連続 ( $t \in [0, T]$ ) となるように補間しておこう。

次に株式価格は収益率の定義より

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{S_n(i\Delta t)}{S_n(0)} &= \frac{S_n(i\Delta t)}{S_n((i-1)\Delta t)} \frac{S_n((i-1)\Delta t)}{S_n((i-2)\Delta t)} \dots \frac{S_n(\Delta t)}{S_n(0)} \\ &= \prod_{j=1}^i (1 + r(j\Delta t)) \end{aligned}$$

となることに注目しよう。両辺の対数をとると時間単位  $\Delta t$  が十分小さければ、 $\ln(1 + r(j\Delta t)) = r(j\Delta t) - \frac{1}{2}r(j\Delta t)^2 + o_p(\Delta t)$  と近似できよう。このことから  $i = 1, \dots, n$  を  $n$  に依存させてガウス記号を用いて  $[nt] = i(n)$  とおけば

$$\begin{aligned} \ln\left[\frac{S_n(i(n)\Delta t)}{S_n(0)}\right] &\sim \sum_{j=1}^{i(n)} r(j\Delta t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i(n)} r(j\Delta t)^2 \\ &\sim \sum_{j=1}^{i(n)} \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma[B_n(j\Delta t) - B_n((j-1)\Delta t)] \right\} \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)[i(n)\Delta t] + \sigma B_n(i(n)\Delta t) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで  $[0, 1]$  上の時刻  $t$  を固定しておいて分割区間の数  $n \rightarrow +\infty$  とすると、単位時間  $\Delta t \rightarrow 0$  となるので  $i(n)\Delta t \rightarrow t$  につれて極限では

$$(3) \quad \ln \frac{S(t)}{S(0)} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)$$

<sup>2</sup> ここで確率変数列  $\{X(i\Delta t)\}$  がマルチンゲール差分とは条件付期待値  $E^P[X(i\Delta t)|\mathcal{F}_{i-1}] = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を意味し、無相関な確率変数列となる。ここで、 $\mathcal{F}_{i-1}$  は直観的には時刻  $i-1$  における利用可能な情報を意味するが、より正確には確率変数列が作る  $\sigma$  集合体を意味している。互いに独立な確率変数はマルチンゲール差分であるが、この逆は必ずしも成立しない。ここで取りあげたのはマルチンゲール理論が現代的な数理ファイナンスの議論の基礎となっているからである。

となることが予想される。確率論でよく知られている中心極限定理を拡張したマルチンゲールに関する汎関数中心極限定理 (functional central limit theorem) を利用すると、より緩やかな条件下で厳密に正当化できるが、ここで  $B(t)$  は期待値 0、分散  $t$  の正規分布にしたがう確率変数 (1次元標準ブラウン運動) を意味することになる。これが資産価格の幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion) のモデルである。ここで  $B(t)$  は時間が連続的で有界変動でない  $C[0, T]$  (区間  $[0, T]$  の連続関数全体) 上に値をとる確率変数なので、通常の意味では微分することができないことに注意しておく。確率解析における伊藤の公式を利用すれば確率微分方程式 (stochastic differential equation)

$$(4) \quad dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

を得ることができる。

いま金融市場で一定の短期金利  $r$  により資金を債券で運用可能であるときには、(基準化された) 債券価格  $e^{rt}$  で株価を割り引いた現在価値  $Z(t) = e^{-rt}S(t)$  は

$$Z(t) = Z(0)e^{(\mu-r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)}$$

を満足するので、 $Z(T)$  も幾何ブラウン運動にしたがうことがわかる。ここで  $B^*(t) = B(t) + (\frac{\mu-r}{\sigma})t$  と置けば

$$(5) \quad Z(t) = Z(0)e^{(-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)^*}$$

と表現することができる。そこで  $\{B(t)^*\}$  を別の標準ブラウン運動とみなしてみよう。すなわち、確率測度  $P$  の下でのドリフト項を  $(\mu-r)t/\sigma$  だけずらして、確率測度  $Q$  を構成することにする。このとき測度  $Q$  の下では  $dZ = \sigma Z dB^*$  であるので、任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  について

$$Z(t) = Z(s) \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s) + \sigma[B(t)^* - B(s)^*]\right\}$$

となる。ここで確率測度  $Q$  の下ではブラウン運動  $B(t)^* - B(s)^*$  が期待値ゼロ、分散  $t-s$  の正規分布にしたがうので対数正規分布の性質を使って条件付期待値を評価すると

$$E^Q[Z(t)|Z(s), r \leq s] = Z(s)$$

となる。よって確率過程  $Z(t)$  は確率測度  $Q$  に関して連続マルチンゲールとなることがわかる。さらにこの標準ブラウン運動  $\{B(t)^*\}$  を用いてリスクの伴う証券価格がしたがう確率過程は

$$(6) \quad dS = rS dt + \sigma dB^*$$

と表現される。すなわち、もとの確率過程のドリフト項の母数  $\mu$  をリスクのない債券の収益率である  $r$  で置き換えたことになるが、これが現代的な数理ファイナンスにおけるブラック・ショールズの数理モデルの骨格である。連続マルチンゲールとしてのブラウン運動の測度変換に関する（少し分かりにくいかもしれないこの）議論が金融市場における（裁定の機会が存在しないという）ある種の経済的合理性を簡潔に表現する数理モデルを与えてくれていることに特に注意する必要がある。

ここで満期時刻  $T$  における支払い関数が  $g(S(T))$  となるヨーロッパ型オプション契約の時刻  $t$  の理論価格は条件付期待値

$$(7) \quad x = E^Q[e^{-r(T-t)}g(S(T))]$$

で与えられる。コール・オプション契約を例にとると、この契約はある事前に確定した時刻  $T$  において、資産を事前に確定する権利行使価格  $K$  により資産価格  $S(T)$  を取得できる権利である。したがって、権利行使時点で権利を行使しなくてもよいので、 $g(S(T)) = \max\{S(T) - K, 0\}$  ( $K$  は一定値) となる。 $\{S(t)\}$  が幾何ブラウン運動にしたがう時には

$$(8) \quad g(S(T)) = xe^{r(T-t)} + \int_t^T e^{r(T-s)}\pi(s)\sigma dB^*(s)$$

となるポートフォリオ関数  $\pi(S(t), t)$  を明示的に求めることが可能である。こうしたブラック・ショールズにはじまる派生証券の数理モデルは今日では経済学、とりわけファイナンス分野では標準的な議論として広く知られるようになってきている。実務的にもブラック・ショールズの公式はよく知られ、古典的モデルによる結果として利用されることもあるが、次に述べるように現実に観察されるデータの上からは様々な問題があることが議論されてきている。

### 3. 資産価格の統計的時系列解析

ブラック・ショールズの数理モデルは極めて簡潔ですっきりした表現を持つが、金融市場において観察される収益率データ  $r(i\Delta t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の統計的分析から支持されるであろうか？

株価に関してこれまで行われた多くの統計学的研究によると、条件 A はかなり現実のデータを近似しているものの、妥当しないことも少なくない。ここでは比較的よく知られている3つの論点のみを指摘しておこう。  
(i) 期待収益率 ( $\mu$ ) とボラティリティ ( $\sigma$ ) については確かに大きな変動がそれほど多くないということは云えるが、一定の値を取るといったことはない。

(ii) 少なくとも日次データのレベルでは株価から計算される収益率の分布としては正規分布から少しずれたより裾が厚い分布がよく検出される。他

方、週次や月次等のある程度の期間では収益率の分布はかなり正規分布に近い。

(iii) 収益率系列は厳密な意味でのマルチンゲール差分としての無相関性ではなく、統計的にはある程度まで有意な自己相関が検出されることも少なくない。

これら統計的なデータ解析の結果は様々な市場や時期により程度の差はあれ、かなりの共通した結果であることが分かって来ている。株価を始めとするこうした金融データ解析を扱う分野を計量ファイナンスと呼ぶことにすれば、その結果は金融ビジネスの新たな展開や金融リスク管理など金融システム全体の制御に直結することが少なくない。そこで、ここしばらく多くの数理モデルの開発と実証的研究が行われている。そうした研究の大部分は統計的時系列解析 (statistical time series analysis) や統計的多変量解析 (statistical multivariate analysis) と呼ばれている確率論に基づく数理統計学において開発、発展している統計的モデルを主要な分析用具として用いている<sup>3</sup>。

#### 4. 資産価格の確率過程モデル

計量ファイナンスにおいて得られている実証的分析を踏まえ、より一般的に (例えば Karatzas=Shreve (1998) を参照)  $n$  個の危険資産と 1 個の安全資産が存在する金融市場を考えよう。ここで危険資産としては市場に存在している多くの株式価格や外国為替レート、安全資産としては倒産リスクのない短期国債などを一般化していると解釈しておけばよいであろう。3つ組  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  を完備確率空間として、この空間上で経済におけるリスクの源泉として  $d$  個の標準ブラウン運動  $B(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t))'$  が存在する状況を考察する。標準ブラウン運動の初期条件は  $B(0)$ 、有限期間  $[0, T]$  でブラウン運動より生成されるフィルターを  $\mathcal{F}^B(t) = \sigma\{B(s) : 0 \leq t \leq T\}$ 、 $\sigma$ -集合体  $\mathcal{F}^B(T)$  に対して確率測度  $P(\cdot)$  のゼロ部分集合  $\mathbf{N}$  を加えた  $\sigma$ -集合体を  $\mathcal{F}(t) = \sigma(\mathcal{F}^B(t) \cup \mathbf{N})$  ( $0 \leq t \leq T$ ) としておく。この  $\sigma$ -集合体  $\mathcal{F}(t)$  は市場参加者にとり時刻  $t$  において利用可能な情報と解釈することができる。

ここで金融市場では安全資産を取引することができ、時刻  $t$  における安全資産の価格を  $S_0(t)$  で表しておこう。この価格  $S_0(t)$  が  $\mathcal{F}(t)$  適合的かつ有界変動、さらに  $t \in [0, T]$  についての絶対連続性まで仮定すれば

$$(9) \quad dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt$$

と表される。 $\{r(t, \omega)\}$  は短期金利と呼ばれるが、主要銀行間の短期貨幣市

<sup>3</sup> こうした計量ファイナンスにおける 1990 年代半ばまでの動向については例えば Campbell et. al. (1997) が教科書的に解説している。



場において成立するリスクのない短期債券の金利を数理的に表現したものと解釈することが一般的であろう。

価格リスクを内包する市場で取り引きされる資産（通常は証券と呼ばれる）の時刻  $t$  における価格（ベクトル）を  $S(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))'$  としよう。この価格が正值の連続経路をとり確率微分方程式

$$(10) \quad dS_i(t) = S_i(t)[b_i(t, \omega)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, \omega)dB_j(t)] \quad (i = 1, \dots, n)$$

にしたがう連続時間の確率過程としよう。この確率微分方程式は正值の初期条件  $S(0) = (S_i(0))$  を与えれば伊藤の公式を利用すると

$$S_i(t) = S_i(0) \exp\left\{\int_0^t [b_i(s, \omega) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s, \omega)] ds + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(s, \omega) dB_j(s)\right\}$$

と表現することができる。ここで、事象  $\omega$  はドリフト項  $b_i(\cdot, \cdot)$  やボラティリティ  $\sigma_{ij}(\cdot, \cdot)$  が確率的となることまで許しているの、2節で説明した数理モデルよりもかなり一般的であることに注意しておく。また、云うまでもないがこのような数理モデルが意味のある解を持つためには幾つかの標準的な条件が必要となる。

さらに現物の資産を保有することから配当が発生する可能性をも考慮すると、証券価格 1 に対して非負の一定額  $\delta_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が連続的に配当として支払われると仮定して分析を行うことができる。配当がゼロでないときには、第  $i$  リスク証券 1 単位を保有することにより発生する収益過程を  $Y_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と置けば、

$$(11) \quad Y_i(t) = S_i(t) + \int_0^t S_i(s) \delta_i(s) ds$$

で与えられることが分かる。そこで資産保有のポートフォリオの構成と金融市場を通じた取引戦略は数理モデルとして次のように表現される。区間  $[0, T]$  を適当に  $n$  区間に分割して  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ 、時刻  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) における安全資産の保有量を  $\eta_0(t_k)$ 、危険資産の保有量を  $\eta_i(t_k)$  ( $i = 1, \dots, n$ )、期間  $[0, t_k]$  における資産保有から発生する利得を  $G(t_k)$  で表そう。初期状態  $G(0) = 0$  とすると  $G(t_{k+1}) - G(t_k) = \sum_{i=0}^n \eta_i(t_k)[Y_i(t_{k+1}) - Y_i(t_k)]$  で与えられる。ここで期間  $[t_k, t_{k+1}]$  においては各資産の保有量を変化することが出来ないとしていることに注意する。取引時間の間隔  $\Delta t = t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$  となる極限を考えると

$$dG(t) = \sum_{i=0}^n \eta_i(t) dY_i(t)$$

と表現される。したがって、ポートフォリオ過程を  $\pi_i(t) = \eta_i(t)S_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) で定めれば

$$dG(t) = [\pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}]r(t)dt + \pi'(t)[\mathbf{b}(t) + \delta(t) - r(t)\mathbf{1}]dt + \pi'(t)\Sigma(t)d\mathbf{B}(t)$$

と書き直すことができる。ここで  $\omega$  を省略してベクトル  $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))'$ ,  $\delta(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_n(t))'$ ,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$ ,  $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t))'$ , と行列  $\Sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))$  とした。利得過程  $G(t)$  をポートフォリオ  $\pi_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) を用いて積分で表現すると

$$(12) \quad G(t) = \int_0^t [\pi_0(s) + \pi'(s)\mathbf{1}]r(s)ds + \int_0^t \pi'(s)[\mathbf{b}(s) + \delta(s) - r(s)\mathbf{1}]ds + \int_0^t \pi'(s)\Sigma(s)d\mathbf{B}(s)$$

となる。特に任意の  $t \in [0, T]$  において条件  $G(t) = \pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}$  を満たせば、ポートフォリオ過程は自己充足的 (self-financing) と呼ばれている。この戦略ではポートフォリオを選択する際に利用できる資金は市場でそれまでに得られた利得のみに限定していることに注意しておこう。

例えば1節のブラック・ショールズ・モデルにおける(8)式は  $n = d = 1$  かつ  $\delta(s) = 0, r(s) = r, \Sigma(s) = \sigma, \pi(s) = \eta(s)S(s)$  と置くことで対応がつく。このとき市場は完備 (complete) と呼ばれ、派生証券の満期の支払い関数  $G(S(T))$  を金額  $x$  をリスクなしの債券 (あるいは預金) とリスクのある原証券 (資産)  $S(t)$  で運用することで複製できることを意味しているが、このとき(8)式はマルチンゲール確率測度による「確率過程の確率積分表現」の一種と考えられる。このような議論をより一般化・精緻化する方向で数理ファイナンスでは様々な確率過程モデルが活用されている。

## 5. 漸近展開アプローチ

近年の金融市場では先物、オプション、スワップなどを含んだ様々な派生証券 (デリバティブ) が導入され、実際に取り引きされている。ブラック・ショールズの数理モデルとして説明した短期金利  $r$  が一定でかつ証券価格が幾何ブラウン運動にしたがうという状況を除けば、より一般的には派生証券の理論価格を明示的に与えることは極めて困難であると考えられてきた。こうした考え方をかなり修正する必要があることを国友・高橋 (Kunitomo=Takahashi (1995, 2001), Takahashi (1999)) は「小分散理論 (small disturbance asymptotic theory)」と呼ばれる方法を提案することで示している。この方法は例えば前節までに述べた株式価格や外国為替レートなどの原資産価格が、連続時間の伊藤過程と呼ばれているクラス確率過程にしたがう場合、オプション契約など派生証券の理論価格を評価することを可能とするかなり一般的な評価法を与える。また漸近展

開を用いると結果としてはしばしば簡単に解析的な公式を導くので、ファイナンスにおける様々な問題において有用と考えられる。さらに、この漸近展開法は Malliavin 解析における渡辺・吉田理論と呼んでいる最近の理論的展開を背景としているので、単なるアド・ホックな近似理論ではないことも強調しておこう。(例えば Ikeda=Watanabe (1989) 5章, Yoshida (1992, 1987) などを参照。)

ここで対象となる市場がブラック・ショールズ経済と呼ばれる状況については、高橋 (Takahashi (1999)) は  $n$  個の資産価格を要素とする価格ベクトル  $\mathbf{S}(t) = (S_i(t))$  ( $i = 1, \dots, n; 0 \leq t \leq T < +\infty$ ) が確率微分方程式 (SDE) :

$$(13) \quad \mathbf{S}^{(\epsilon)}(t) = \mathbf{S}(0) + \int_0^t r(S^{(\epsilon)}(v), v) S^{(\epsilon)}(v) dv + \epsilon \int_0^t \Sigma^*(S^{(\epsilon)}(v), v) d\mathbf{B}(v)$$

を満足する場合を考察している。ここで  $S^{(\epsilon)}(t) (= S_i^{(\epsilon)}(t))$  はパラメーター  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon \leq 1$ ) を含む  $n \times 1$  価格ベクトル、 $\Sigma^*(S^{(\epsilon)}(v), v)$  ( $n \times d$ ) はボラティリティ項、 $r(\cdot, \cdot)$  は非負の短期金利、 $\mathbf{B}(v) (= (B_i(v)))$  は  $d$  次元ブラウン運動ベクトルである。このとき  $\epsilon \rightarrow 0$  となる状況での無裁定理論の下での「小分散理論」を考えることで<sup>4</sup>、資産価格  $\{S^{(\epsilon)}(t)\}$  にもとづく派生証券価格の評価法を導くことができる。上の式 (13) において  $\epsilon \rightarrow 0$  として (確率変数列の分布の意味で) 極限を考えれば、確率微分方程式は常微分方程式になっていることに注意しておこう。さらにより一般的な定式化も可能であり、そうした漸近理論の応用が既に Kunitomo=Kim (1999, 2000), Sørensen=Yoshida (2000) 等において研究されている。

他方、金利が一定という仮定を緩めたより現実的な状況では「金利の期間構造」を考慮する必要がある。この問題については有力な理論として HJM 理論 (Heath et. al. (1992)) が知られている。ここで  $P(s, t)$  を満期が  $t$  である割引債の時刻  $s$  における価格としよう ( $0 \leq s \leq t \leq T < +\infty$ )。この割引債価格が変数  $t$  について微分可能であって非負条件  $P(s, t) > 0$  を満たすとすれば時刻  $s$  における時刻  $t$  の瞬間的先渡 (フォワード) レート ( $0 \leq s \leq t \leq T$ ) は

$$(14) \quad f(s, t) = -\frac{\partial \log P(s, t)}{\partial t}$$

<sup>4</sup> ここで無裁定理論 (no arbitrage theory) とは 2 節や 4 節で説明したマルチンゲール確率測度の下での評価理論のことを意味している。金融市場に裁定機会が存在しない条件 (すなわち、「元手がゼロで正の利得を得られる機会」があること) は経済学的な均衡が存在する為の必要条件となるが、より正確な数理的定式化については例えば国友・高橋 (2002) が説明している。

により定まる。この金利の期間構造モデルについて Kunitomo=Takahashi (1995, 2001) はフォワード・レート  $\{f(s, t)\}$  の系列に関して無裁定条件から導かれるドリフト関数についての制約を組み込み

$$f^{(\varepsilon)}(s, t) = f(0, t) + \varepsilon^2 \int_0^s \sum_{i=1}^D \left[ \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v, t), v, t) \int_v^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v, y), v, y) dy \right] dv \\ + \varepsilon \sum_{i=1}^D \int_0^s \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v, t), v, t) dB_i(v),$$

と定式化して派生証券価格を評価することを提唱している。ただし  $f(0, t)$  は(非確率的)初期フォワード・レート、 $\{B_i(v); i = 1, \dots, D\}$  は  $D$  次元ブラウン運動、 $\{\sigma_i(f(v, t), v, t); i = 1, \dots, D\}$  はフォワード・レートのボラティリティ関数を表している。ボラティリティ関数  $\{\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(s, t), s, t); i = 1, \dots, D\}$  は変数  $s$  と  $t$  に依存するだけでなく、一般的な状況では  $f^{(\varepsilon)}(s, t)$  に依存していることに注意しておこう。瞬時的金利過程は

$$(15) \quad r^{(\varepsilon)}(s) = \lim_{t \downarrow s} f^{(\varepsilon)}(s, t)$$

で与えておくと整合的になる。ここでパラメーターが  $\varepsilon \rightarrow 0$  となる状況を想定することで小分散理論を展開することが可能となる。すなわちフォワード・レート  $\{f^{(\varepsilon)}(s, t)\}$  より割引国債過程

$$(16) \quad P^{(\varepsilon)}(t, T) = \exp\left[-\int_t^T f^{(\varepsilon)}(t, u) du\right]$$

に関連する派生証券価格の評価を行うことが可能となるのである。

## 6. 資産価格変動と制御問題

ここで理工系の読者にとり興味があるであろう確率的制御の話題について言及しておこう。数理ファイナンス分野や経済学でしばしば表れる重要な問題の一つに、時間を通じた消費や投資の異時点間の配分問題がある。時間とともに資産価格が不確実に変動する時に予算制約条件の下での消費経路や投資経路を決定する問題は数理的に見れば確率制御の問題と同一である。

数理ファイナンス(あるいは経済学)において有限期間  $[0, T]$  における消費・投資の決定問題は次のような問題である。初期資産額  $x$ 、任意の時刻  $t \in [0, T]$  における消費  $c(t)$ 、ポートフォリオ  $\pi_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) としよう。このとき時刻  $t$  における資産価値は4節の記号を利用して

$$(17) \quad X(t) = x - \int_0^t c(s) ds + \int_0^t (\pi_0(s) + \pi'(s)\mathbf{1})r(s) ds \\ + \int_0^t \pi'(s)([\mathbf{b}(s) + \delta(s) - r(s)\mathbf{1}]ds + \Sigma(s)d\mathbf{B}(s))$$

と表現できる。ここで、取りうる戦略を自己充足的なポートフォリオに限定すると  $X(t) = \sum_{i=0}^n \pi_i(t)$  であるので資産方程式は

$$dX(t) = -c(t)dt + \frac{X(t)}{S_0(t)}dS_0(t) + \pi'(s)dR(t)$$

と変形することもできる。(ここで、 $R(t)$  は (16) 式の最後の積分項の超過収益過程を表している。) したがって、この資産方程式の制約条件下での数理的問題は、期間  $[0, T]$  の各時点で消費  $c(t)$  より効用が得られるのでそれを  $U_1(t, c(t))$ 、ポートフォリオ運用の結果として満期時点で残る資産額  $X(T|x, c, \pi)$  より得られる効用を  $U_2(X(T))$  とすると、値関数

$$(18) \quad V(x) = \sup_{c(\cdot), \pi(\cdot)} E\left[\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(X(T))\right]$$

となる解を求める問題になる。この問題の主たる目標は最適解の消費とポートフォリオの経路を実際に求めると云うものなので、数理的にはかなり困難な問題と思われてきた。しかしながら、Takahashi=Yoshida (2001) はかなり重要な場合について漸近展開の方法が解を求める上で有効であることを示している。

## 7. おわりに

本稿では限られた範囲であったが、数理ファイナンスと計量ファイナンス分野の最近の話題の一端を述べた。近年では数理科学や理工学を専攻する学生や院生の間でも数理ファイナンスや計量ファイナンスへの関心が高まっている。しかしながら、既存のほんの僅かな数理的知識の中で大きな貢献が可能であるかのような誤解も少なからず散見される。本稿の議論から推論できるように、数理ファイナンスや計量ファイナンスの分野では経済学・経営学・数学(確率解析学)・計算機科学、そして云うまでもなく統計学など幅広い、しかもそれぞれかなり本質的な深い議論が必要である。既に本格的な発展がはじまり四半世紀にもなる数理ファイナンスや計量ファイナンスにおける研究の展開は、今では世界的にはもっとも競争的な部類に属するようになってきているようである。もちろん、数理モデルの面白さや難しさへの表面的な関心が、より本格的な問題や分野への関心や理解へとつながっていけば、これらの相対的には新しい分野における研究面でのオリジナルな貢献や金融実務界への新たな貢献も期待できよう。

## 参考文献

- Bachelier, L. (1900), "Theory of Speculation," in Cortner, P. (1964) ed. *The Random Character of Stock Prices*, MIT Press, Reprint.
- Campbell, J., Lo, A., and A.C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Ikeda, N. and Watanabe, S. (1989), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Second Edition, North-Holland/Kodansha, Tokyo.
- Heath, D., Jarrow, R., and Morton, A. (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claim Valuations," *Econometrica*, Vol.60, 77-105.
- Karatzas, I. and Shreve, S. (1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer.

- Kim, Y. and N. Kunitomo (1999), "Pricing Options under Stochastic Interest Rates : A New Approach," *Asia-Pacific Financial Markets (Kluwer)*, Vol. 6, 49-70.
- Kunitomo, N. and Kim, Y. (2001), "Effects of Stochastic Interest Rates and Volatility on Contingent Claims," Discussion Paper CIRJE-F-129, Faculty of Economics, University of Tokyo.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (1995), "The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims," Discussion Paper No.95-F-19, Faculty of Economics, University of Tokyo.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (1998), "On Validity of the Asymptotic Expansion Approach in Contingent Claim Analysis," Discussion Paper No.98-F-6, Faculty of Economics, University of Tokyo, forthcoming in *Annals of Applied Probability*.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001), "The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims," *Mathematical Finance*, Vol. 11, 117-151.
- 国友直人・高橋明彦 (2002), "数理ファイナンスの基礎：漸近展開の手法と応用," 東洋経済新報社 (近刊)。
- Lamberton, D. and B. Lapeyre (1997), "Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance," Ellipses (日本語訳「ファイナンス確率解析」, 朝倉書店)。
- Pliska, S. (1997), "Introduction to Mathematical Finance," Blackwell (日本語訳「数理ファイナンス入門：離散時間モデル」, 共立出版)。
- 長井英生 (1999), "確率微分方程式," (21世紀の数学 27, 共立出版)。
- Sørensen, M. and Yoshida, N. (2000), "Random Limit Expansion for Small Diffusion Processes," Unpublished Manuscript.
- Takahashi, A. (1999), "An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Contingent Claims," *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 115-151.
- Takahashi, A. and Yoshida, N. (2001), "Asymptotic Expansion Scheme for the Optimal Portfolio for Investment," Preprint, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo.
- Yoshida, N. (1992), "Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimators for Small Diffusions via the Theory of Malliavin-Watanabe," *Probability Theory and Related Fields*, Vol.92, 275-311.
- Yoshida, N. (1997), "Asymptotic Expansions for Martingales on Wiener Space and Applications to Statistics," *Probability Theory and Related Fields*, Vol.109, 301-342.

図1: 日経平均株価の動き

