

CIRJE-J-45

**信用リスクを含んだ転換社債の評価：
Duffie-Singleton アプローチ**

東京大学大学院数理科学研究科

高橋明彦

東京大学大学院経済学研究科

小林孝雄

東京大学経済学部

中川成久

2001年2月

このディスカッション・ペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿である。著者の承諾なしに引用・複写することは差し控えられたい。

信用リスクを含んだ転換社債の評価：

Duffie-Singleton アプローチ

(Pricing Convertible Bonds with Credit Risk: A Duffie-Singleton Approach)

2001年2月15日

高橋 明彦

東京大学大学院数理科学研究科

小林 孝雄

東京大学大学院経済学研究科

中川 成久

東京大学経済学部

Abstract

This paper proposes a method to price convertible bonds with credit risk using Duffie-Singleton approach to handle credit risk. As such it also provides a method to replicate convertibles by trading common stocks and corporate bonds of the issuing company. Empirical comparison with existing models which incorporate credit risk is provided using Japanese convertible bond data.

要約

この論文は信用リスクの評価を含めた転換社債の評価モデルを提示するものである。この分野で現在知られている評価モデルはすべて、信用スプレッドを取り扱う部分でアド・ホックな仮定ないしは方法を用いている。われわれは Duffie-Singleton アプローチを採用することによって評価方法の理論的整合性を確保する。日本の転換社債のデータを用いて既存のモデル3種類と比較した結果、われわれのモデルの適合度が最も高いことが確認できた。

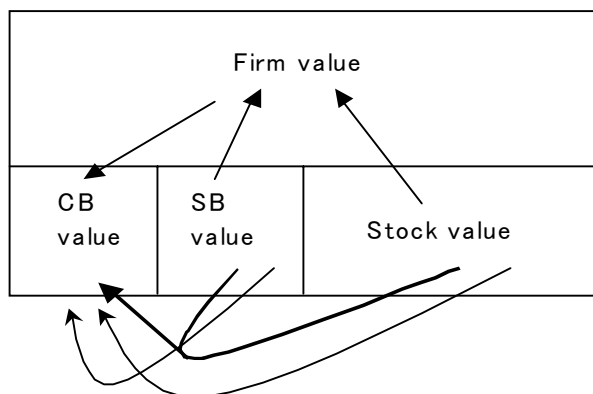
1. はじめに

転換社債は簡単にいえば、株式に転換できる社債である。実際には様々なオプションがつきうるが、転換社債の最も基本的で重要なオプションは株式に対するコール・オプションである。その他にもコール条項やプット条項がオプションとしてついている。これらの原資産が転換社債それ自身であることは、転換社債のプライシングを複雑にする。さらに最近では転換価格が株価に依存して変化するものもあられ、より複雑化している。そして、これらのオプションはアメリカン・タイプであることがほとんどである。

| | ポジション | 原資産 |
|-------|-------|------|
| 転換権 | long | 株式 |
| コール条項 | short | 転換社債 |
| プット条項 | long | 転換社債 |

転換社債の将来価値は、様々な確率的な変数に依存する。このような複雑なデリバティブをプライシングする際には、何を状態変数とみるかということは重要である。株式への転換権のついた社債という観点から見れば、それらの変数は株価であり、金利であり、発行体の信用状態でありうる。さらにより本質的には、転換社債も株式、社債もすべて企業価値のデリバティブである。企業の資本構成に焦点を当て、企業価値を状態変数とみる方法は、首尾一貫した論理で企業の発行したすべての証券をプライシングできる。しかし、この方法は実際に市場で取引されていない企業価値の値とその確率過程を特定化する必要があるため容易に実行できない。実際に市場で見えている株価と社債価格を所与として、企業価値を通して転換社債をプライシングすることは、各々の価値が非線形に企業価値に依存しているため困難である。したがって、実際には一番重要な状態変数として市場で見えている株価を直接的に用いることが多い。本稿では株式と社債の価格を所与として、企業価値を通さずに転換社債をプライシングする。その際に重要なのは株式と社債の市場価格の情報を独立に与えないということである。つまり、本質的には Fig1-1 の上線であるということ認識した上で、太線をたどってプライシングする。

Fig 1-1



株価を状態変数とした上で、本稿で焦点を当てるのはデフォルトという状態変数である。適債基準が撤廃されたことにより、信用状態の低い企業でも転換社債を発行できるようになった。さらに、転換社債は積極的成長計画の資金調達手段として利用されることが多いため、信用力の低い「ニュー・エコノミー」企業の発行が増える可能性がある。アメリカでは既にこの傾向が見られた。これらのことを受けて、クレジットリスクを反映して転換社債をプライシングする重要性は高まると考えられる。

2. 既存のモデリングの概観と新しいモデリングへのインセンティブ

2.1. クレジットリスクのモデリング

信用リスクを考慮した金融商品の評価は以下の2つのアプローチに大別される。

A1 構造アプローチ

A2 誘導型アプローチ

A1においては、企業の資本構成に焦点を当てることによってデフォルトの発生は内生化される。このアプローチはMerton(1974)によって始められた。彼は企業価値を拡散過程で記述し、満期において企業価値が負債の額面を下回ったときにデフォルトは発生するととらえた。そこでは社債は企業価値を原資産とするオプションであり、社債を原資産とするオプションは企業価値のコンパウンド・オプションである。Longstaff-Schwartz(1995)はその値にヒットしたらデフォルトというデフォルト境界を考えることによって満期日やクーポン日以外の $\{t; 0 < t < T\}$ でデフォルトを認識できるようにし、金利を確率的にする拡張を行った。しかし、A1においては2つの大きな問題点がある。まず企業価値は現実に市場性資産ではなく、市場で観察することはできない。よってパラメータを推定することは困難である。またある負債の価値を計算するためには、その負債よりも優先順位の高い負債の価値を同時にプライシングしなければならず、その上、社債を原資産とするオプションの場合はコンパウンド・オプションとなってしまうので計算を実行することは困難である。2つ目の問題点は拡散過程で企業価値を記述していることに起因するものである。実証分析においてデフォルトは突然起こり、予測できないことが示されている。そのために、社債の спреッドが、満期より少し前だとしても、相当に高いものがあることは拡散過程では説明しきれない場合がある。

A2は上に示された問題点を考慮し、ジャンプ・プロセスを導入することによってデフォルトを、ジャンプを伴うレア・イベントとして記述し、さらに現実に市場性資産であり、観察可能な証券を用いてモデリングした。このことによって、現在の市場価格と整合的にパラメータを決定すれば、より直接的に裁定価格を導出できる。つまり、デフォルトリス

クのパラメータであるハザード・レートやリカバリー・レートは外生的に与えられる。Duffie-Singleton(1999)、Jarrow-Turnbell(1994)はこのアプローチの代表的なモデルである。

2.2. クレジットリスクを考慮した転換社債のモデリング

信用リスクを考慮した転換社債のプライシングも 2.1 で挙げた 2 つのアプローチのどちらかに分類することができる。Ingersoll(1977)、Brenann-Schwartz(1980)は A1 に属する。2.1. で挙げた A1 に関する問題点はそのまま当てはまる。Tsiveriotis-Fernandes(1998)はクレジット・スプレッドを外生的に与えているという点においてのみ、A2 に属するということができる。このモデルでは A2 のフレームワークが完全に生かされてはいない。そこで本論文では A2、特に Duffie-Singleton(1999)のフレームワークで転換社債をプライシングすることを中心に、信用リスクを考慮した転換社債のプライシングを考える。

3. Duffie and Singleton (1999)の枠組みにおける転換社債のプライシング

市場に無裁定条件が成立することを仮定する。Harrison and Pliska (1981)において示されているように、このときマネー・マーケット資産の収益率を基準財として、すべての市場性資産の相対価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度 Q が少なくとも 1 つ存在する。

最初にデフォルトという事象を数学的に記述する。以下の議論はある計数過程の 1 番目のジャンプが起こるときにデフォルトが起こると考えることに依拠している。

デフォルト関数を次のように定義する。

$$(3.1) \quad \Lambda_t = 1_{\{t \geq \tau\}}$$

ここで τ はデフォルトが起こる時間である。計数過程を次のように定義する。

$$(3.2) \quad N_t = \sum_{k=1} 1_{\{t \geq \tau_k\}}$$

where $\tau_1 = \tau_1 < \tau_2 < \dots$

Doob-Meyer 分解によって、 N_t は $N_t = A + M$ と有界変動で可測な右連続増加過程 A (A の初期値は 0) とマルチンゲール性をもつ確率過程 M の 2 つに一意に分解可能であるから、 N_t を次のように表現できる。

$$(3.3) \quad N_t = \int_0^t \lambda_s ds + M_t$$

ここで λ_t は強度関数で、確率的に変動してもよい。 M_t はマルチンゲールである。(3.1)-(3.3) より、 N_t は次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad \Lambda_t &= N_{t \wedge \tau} \\
&= \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_s ds + M_{t \wedge \tau} \\
&= \int_0^t \lambda_s 1_{\{s < \tau\}} ds + m_t \\
&\text{where } m_t = M_{t \wedge \tau}
\end{aligned}$$

(3.4)を微分型で書くと、

$$(3.5) \quad d\Lambda_t = \lambda_t 1_{\{t < \tau\}} dt + dm_t$$

次にデフォルト可能性がある資産が同値マルチンゲール測度Qの下でどのように記述できるかを考える。デフォルトしたときにある回収金額（は確率的であることを許す）を支払う資産は、デフォルト時に配当D（Dは確率的であることを許す）を1回だけまとめ払いした後に消える資産と考えることができるから、まとめ払いの配当を支払う証券の枠組みで考えることができる。

同値マルチンゲール測度Qの下で、まとめ払いの配当をおこなう証券は次のように表せた（see Duffie (1996)）。

$$(3.6) \quad S_t = E_t^Q \left[\int_t^T \exp(-\int_t^s r_u du) dD_s + \exp(-\int_t^T r_u du) S_T \right]$$

(3.6)をデフォルトリスクのある資産に応用すると次のように表現できる。

$$(3.7) \quad S_t = E_t^Q \left[\int_t^T \exp(-\int_t^s r_u du) \Phi_s d\Lambda_s + \exp(-\int_t^T r_u du) S_T (1 - \Lambda_t) \mid t \leq \tau \right]$$

(3.5)を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad S_t &= E_t^Q \left[\int_t^T \exp(-\int_t^s r_u du) \Phi_s (\lambda_s 1_{\{s < \tau\}} ds + dm_s) + \exp(-\int_t^T r_u du) S_T 1_{\{T < \tau\}} \mid t \leq \tau \right] \\
&= E_t^Q \left[\int_t^T \exp(-\int_t^s r_u du) \Phi_s \lambda_s 1_{\{s < \tau\}} ds + \exp(-\int_t^T r_u du) S_T 1_{\{T < \tau\}} \mid t \leq \tau \right]
\end{aligned}$$

ここで、" Pre-default process " $\forall t$ を次のような条件を満たす確率過程とする。

$$(3.9) \quad S_t = V_t 1_{\{t < \tau\}}$$

(3.8)にテクニカルな条件とともに Generalized Ito's lemma(see.Protter (1990))を用いると、(3.9)を満たす $\forall t$ は、

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad dV_t &= [-\Phi_t \lambda_t + (r_t + \lambda_t) V_t] dt + dM_t \\
&\text{where } M_t \text{ is some martingale under } Q
\end{aligned}$$

という確率過程に従うことが分かる。満期の境界条件と合わせれば、この解は一意に定まる。満期の境界条件は資産の契約条項によって決まる。ここまでは非常に一般的な議論であった。ここで、RMV(Recovery of Market Value)

$$(3.11) \quad \Phi_t = \phi_t V_t$$

ϕ : recovery rate

を仮定すれば、(3.10)は

$$(3.12) \quad dV_t = R_t V_t dt + dM_t$$

where M_t is some martingale under Q

and $R_t = r_t + (1 - \phi_t)\lambda_t$

と整理できる。ヨーロッパタイプでクーポン支払いがない場合は（アメリカンタイプ、クーポン支払いのある場合への拡張は straightforward である）満期の条件 $V(T)$ を与えてやれば、(3.12) と合わせて $V(t)$ は一意に定まり、次の Pricing formula を導出できる。

$$(3.13) \quad V_t = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T (r_s + (1 - \phi_s)\lambda_s) ds \right\} V_T \right]$$

転換社債の場合は、満期の境界条件を

$$(3.14) \quad V_T = \text{Max}(aS_T, F)$$

where a is a conversion ratio

and F is a face value

and S_T is the price of the underlying stock at time T

と書ける。

クーポン支払いがある場合には(3.13)は次のようになる。

$$(3.15) \quad V_t = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T (r_s + (1 - \phi_s)\lambda_s) ds \right\} V_T \right] + E_t^Q \left[\int_t^T \exp \left\{ - \int_t^u (r_s + (1 - \phi_s)\lambda_s) ds \right\} dD_u \right]$$

where dD_t is a lump sum coupon

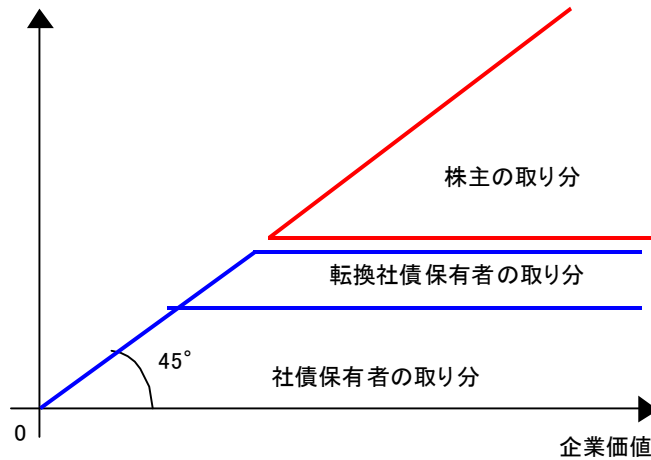
(3.14)にあるように、原株価格の確率過程が特定されないと(3.13)を評価することはできない。ここで原株価格の同値マルチンゲール測度 Q の下での確率過程に通常の

$$(3.16) \quad dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dw_t$$

where w_t is a standard brownian motion under Q

を採用してよいだろうか。以下、経済学的に(3.16)はおかしいことを述べる。転換社債のデフォルトを引き起こすのは原株価格の下落である。さらに企業の資本構成に目を向ければ、

Fig 3-1



であり、転換社債のデフォルトは原株価格が0に行ったときのみに起こることが分かる(図は一般的に転換社債は普通社債よりも優先順位が低いことを反映している)。つまり、計数過程の1番目の事象を転換社債の回収金額のデフォルトとすると、同時に原株価格は0にジャンプしなければならない(つまり、回収金額0のデフォルト)。このことは原株価格のSDEが

$$(3.17) \quad dS_t = R_t^* S_t dt + dM_t$$

where M_t is some martingale under Q

$$\text{and } R_t^* = r_t + \lambda_t$$

Note: λ_t is the same intensity process as (3.12)

とならなければ、モデル内部で経済学的矛盾を含んでしまうことを示唆している。

4. 実際的なプライシングモデル

この章では実際に容易に実行可能であるような2つの転換社債プライシングモデルを提案する。2つに共通していることは、社債で imply されている情報を用いて転換社債のクレジット部分をプライシングするということである。そのため2つのモデルは誘導型アプローチに属する。究極的には社債と転換社債のクレジット部分の relative pricing である。今の場合には社債価格を所与としているので、転換社債が社債と比べてクレジット的に割高か割安かを判定しようとしている。転換社債は株価のデリバティブであるのももちろん株式と転換社債との relative pricing でもある。既存の転換社債のプライシングにおける誘導型アプローチでは、株価と社債の市場価格の情報は独立に転換社債のプライシングに用いられた。そこでは大きな点が見過ごされていると思われる。Fig1-1, Fig3-1 にあるように、本質的には株式も社債も同一の原資産、企業価値をもつデリバティブであるからである。

以下に挙げる 2 つのモデルではこのことを意識している。

4.1. Duffie-Singleton (1999)の枠組み

この節では 3 章で説明したモデルを実際に定式化し、バイノミアル・ツリーモデルによってアメリカンタイプの転換社債をプライシングできるようにする。

4.1.1. 連続時間モデル

まず転換社債をプライシングする上で一番重要なファクターである原株価格の確率過程を考える。(3.16)のマルチンゲール M_t に標準ブラウン運動を採用し、

$$(4.1) \quad dS_t = R_t^* S_t dt + \sigma_t S_t dw_t$$

where w_t is the standard brownian motion under Q

$$\text{and } R_t^* = r_t + \lambda_t$$

とする。ここで λ_t は転換社債のデフォルトを引き起こすジャンプの強度に等しくならなければならない。次に λ_t をどのように定式化するかを選択しなくてはならないが、 λ_t と原株価格の相関が負であることはアカデミック、実務どちらの世界においても説得力がある議論である。 λ_t を CIR 型などの確率過程で記述し、カリブレーションによって原株価格との標準ブラウン運動の相関係数が負になることを期待するのほひとつの選択肢であるが、ここでは既知の情報をいかに、 λ_t を次のように定式化する。

$$(4.2) \quad \lambda(\cdot): R_+ \mapsto R_+$$

is a decreasing function of the stock price S_t satisfying the conditions

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda'(\cdot) \leq 0 \text{ for } S > 0$$

For example,

$$(4.3) \quad \lambda(S_t) = \theta + \frac{a}{S_t^b}$$

$$(4.4) \quad \lambda(S_t) = \theta + be^{-aS_t}$$

$$(4.5) \quad \lambda(S_t) = (\theta - aS_t)1_{\{\theta - aS_t \geq 0\}}$$

where $\theta, a, b \geq 0$ are some constants

を(4.2)のように定式化し、金利を確定的にすればファクター数を一個にすることができる。このことは計算時間にとって大きなプラスである。

次に λ_t のカリブレーションについて説明する。

λ_t は社債市場で Implied されている。社債は今の枠組みで次のようにプライシングされる。

$$(4.6) \quad V_t = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T (r_s + (1 - \phi_s^*) \lambda_s) ds \right\} F \right] + E_t^Q \left[\int_t^T \exp \left\{ - \int_t^u (r_s + (1 - \phi_s^*) \lambda_s) ds \right\} dD_u \right]$$

where F is a face value of the underlying corporate bond

and dD_t is a lump sum coupon of the underlying corporate bond

Fig3-1 から明らかなように転換社債と普通社債ではリカバリー・レートが異なる。しかし、別々に推定することは困難である。さらに、リカバリー・レートを別々に推定することも困難であるので

$$(4.7) \quad \phi = \phi^* \equiv \text{constant}$$

と仮定することにする。すると(4.6)において未知のパラメータは ϕ だけであり、(4.1)によって原株価格の確率過程が与えられているので、(4.2)によって定式化される V_t を Newton-Raphson Method によって現在の社債価格にフィットさせることができる。

最後に今までの情報を用いて転換社債を次のようにプライシングする。

$$(4.8) \quad V_t = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T (r_s + (1 - \phi_s^*) \lambda_s) ds \right\} V_T \right] + E_t^Q \left[\int_t^T \exp \left\{ - \int_t^u (r_s + (1 - \phi_s^*) \lambda_s) ds \right\} dD_u \right]$$

where $V_T = \text{Max}(aS_T, F)$

and a is a conversion ratio

and F is a face value of the convertible bond

and S_T is the price of the underlying stock at time T

and dD_t is a lump sum coupon of the convertible bond

With the boundary condition,

$$(4.9) \quad V_t \geq aS_t, t \in [0, T]$$

コール条項やプット条項のある転換社債については(4.9)に境界条件をつけくわえてやればよい。

以下では(4.1)を確定項と確率過程とに分解する。これはツリーを効率的に作るための工夫である(see.高橋・時岡 (1999))。なお簡単化のため金利は一定とする。すると確率積分によって、次のように書ける。

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t (r + \lambda_s) - \frac{1}{2} \sigma^2 ds + \sigma \int_0^t dw_s \\ &= \ln(S_0) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \int_0^t \lambda_s ds + \sigma \int_0^t dw_s \\ &= \ln(S_0) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) t + X_t \end{aligned}$$

$$(4.11) \quad \text{where } dX_t = \lambda_t dt + \sigma dw_t : X_0 = 0$$

4.1.2. 離散時間近似モデル

この節では(4.11)の $dX(t)$ を離散時間に近似し、バイノミアルツリーを構築する。満期時刻 T までの期間を N 個に均等分割して $0, h(=T/N), 2h, \dots, T$ と離散化したときの各時点 ih ($i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$) における $dX(ih)$ を次のように 2 項近似する。

$$(4.12) \quad X(i+1, j') - X(i, j) = \sigma \sqrt{h} Y \quad : X(0) = 0$$

where $X(i, j)$ is the value of X at time i , at state j
and Y is a random variable defined by

$$(4.13) \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{if } j' = j+1 \text{ with a probability of } q(i, j) \\ -1 & \text{if } j' = j \text{ with a probability of } 1-q(i, j) \end{cases}$$

Y の状態推移確率 $q(i, j)$ は(4.12)が(4.11)を満たすように決められる。拡散過程においては 2 次までのモーメントを合わせればよい。(4.12)の右辺より $t(=h)$ についての高次のオーダーを無視すれば、既に 2 次モーメント(分散)は満たされている。よって、あとは(4.12)の条件付期待値が(4.11)のドリフト項と等しくなるように $q(i, j)$ を決めればよい。

$$(4.14) \quad q'(i, j) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{h}}{\sigma} \lambda(i, j) \right)$$

(4.14)はパラメータによっては、株価が低く λ が高いときに、1 を超える可能性があるので次の調整をおこなう。

$$(4.15) \quad q(i, j) = \text{Min}[1, q'(i, j)]$$

しかし、時間分割幅 h を 0 に近づけるに従ってどのようなパラメータが設定されてもこの問題は生じなくなる。

Note:金利が確定的に時間に依存するときの(4.10),(4.11),(4.14)

$$(4.10)' \quad \begin{aligned} \ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t (r_s + \lambda_s) - \frac{1}{2} \sigma^2 ds + \sigma \int_0^t dw_s \\ &= \ln(S_0) - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \int_0^t (r_s + \lambda_s) ds + \sigma \int_0^t dw_s \\ &= \ln(S_0) - \frac{1}{2} \sigma^2 t + X_t \end{aligned}$$

$$(4.11)' \quad \text{where } dX_t = (r_t + \lambda_t) dt + \sigma dw_t : X_0 = 0$$

$$(4.14)' \quad q'(i, j) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{h}}{\sigma} (r(j) + \lambda(i, j)) \right)$$

4.2 デフォルト境界を用いた誘導型アプローチ

4.2.1. 連続時間モデル

この節では Longstaff-Schwartz(1995)にあるようなデフォルト境界を用いて、1ファクターの誘導型アプローチをモデリングすることを考える。満期までの期間にデフォルトが起きた場合には、企業は F を即座に支払い清算すると仮定することによって、バリアがデフォルト境界でリベート F のノックアウト・オプションの枠組みで転換社債をプライシングできる。拡散過程のみを用いてモデリングし、ファクターとしては企業価値ではなく原株価格を採用する。

マネー・マーケット資産の収益率を基準財として、すべての市場性資産の相対価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度 Q が少なくとも1つ存在することを仮定する。

まず同値マルチンゲール測度 Q の下での株価の確率微分方程式は通常の

$$(4.16) \quad dS = rSdt + \sigma Sdw_t \quad : S_0 = S$$

where w_t is a standard brownian motion under Q :

σ is assumed to be a constant

に従うとする。次にデフォルト境界を一定としデフォルト時刻 τ を次のように定式化する。

$$(4.17) \quad \tau = \inf \{t : S(t) \leq S'\}$$

where τ is a stopping time associated with default :

$S' (< S)$ is a critical value of default

(4.16),(4.17)の下で、転換社債のプライシングは次のように表現できる(簡単化のためクーポンは無視する)。

$$(4.18) \quad V_0 = \phi F \int_0^T e^{-rt} Q_{S'}(t) dt + e^{-rT} \text{Max}[aS_T, F] \left(1 - \int_0^T Q_{S'}(t) dt\right)$$

where ϕ is a constant recovery rate of the CB :

F is a face value of the CB :

a is a conversion ratio

$Q_{S'}(t)$ is the p.d.f. of the first passage time to barrier S' at time t under Q

with the boundary condition,

$$(4.19) \quad V_t \geq aS_t, t \in [0, T]$$

転換社債の場合には、(4.18),(4.19)は数値的に解くことが要求される。あえてこの表現をしたのは、のちにカリブレーションで社債を解析的に解くときに、整合性に気を付けるためである。

今までの議論を整理するために偏微分方程式の表示をしておく。その前に再度ノックアウト・オプションの枠組みのなかでの転換社債のプライシングを明らかにする。時間に依存しない一定のデフォルト境界 S' が「バリア」である。転換社債の満期までの期間に S_t が S' に到達したならば、転換社債保有者は回収金額(「リベート」) F を受け取り、企業

は直ちに清算される（転換社債は直ちに「消滅」する）。さもなくば、転換社債は株に対するコール・オプションを内蔵したデフォルトフリーの債券である。

通常のブラック・ショールズにおける偏微分方程式との違いは境界条件である。満期までの間、 $t \in [0, T]$ で原株価格がバリア S' を上回っている限りは、通常のケースと同じ偏微分方程式が用いられる。

$$0 \leq t \leq T,$$

$$V_t \geq aS_t,$$

$$\text{if } S_t > S',$$

$$(4.20) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, V_T = \text{Max}[aS_T, F]$$

$$\text{if } S_t \leq S',$$

$$(4.21) \quad V_t = \phi F$$

次に S' のカリブレーションについて説明する。株価が S' にヒットするとデフォルトが起きるといふ仮定の下で、明らかに社債も株価のデリバティブである。(4.16)の r と σ を与えてやり株価の確率過程を特定化し、一定と仮定とした回収率を与えてやる。その下で社債の価格を求めるのに必要なパラメータは S' のみである。そこで市場で観測された社債価格を逆に与えてやり、 S' を求めることができる。求めた S' とそのときに用いた株価の確率過程を用いて、今度は転換社債をプライシングできる。

このモデルの利点として社債の場合に解析解が求まることが挙げられる。よって、カリブレーションの時間を短縮できる。

以下では社債のリカバリー・レートは転換社債のそれに等しく、さらにクーポンと元本部分についてもリカバリー・レートが等しいことを仮定する。

元本部分の現在価値は、次のように求められる。

$$(4.22) \quad \text{principal}_0 = \phi F \int_0^T e^{-rt} Q_{S'}(t) dt + e^{-rT} F \left(1 - \int_0^T Q_{S'}(t) dt \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{where } \phi \text{ is a constant recovery rate :} \\ F \text{ is a face value of the corporate bond :} \\ Q_{S'}(t) \text{ is the p.d.f. of the first passage time to barrier } S' \text{ at time } t \text{ under } Q \end{array} \right)$$

(4.22)を解析的に評価する。

$$1 - \int_0^T Q_{S'}(t) dt \text{ の評価}$$

$$(4.16) \text{ に対して自然対数をとれば } d \ln S = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dw_t \text{ で、 } \ln S_t = Z_t \text{ とおけば } Z_t \text{ は}$$

(μ, σ^2) - ブラウン運動である。

(4.17)における停止時刻の定義より、

$$(M.1) \quad 1 - \int_0^T Q_{S'}(t) dt = \Pr[\tau > T]$$

ブラウン運動の連続性より、

$$(M.2) \quad \Pr[\tau > T] = \Pr[\min_{0 \leq t \leq T} S_t > S']$$

Z_t の初期値を 0 にずらすと、

$$(M.3) \quad \Pr[\min_{0 \leq t \leq T} S_t > S'] = \Pr\left[\min_{0 \leq t \leq T} Z_t > \log\left(\frac{S'}{S}\right)\right]$$

ブラウン運動の対称性より、

$$(M.4) \quad \begin{aligned} \Pr\left[\min_{0 \leq t \leq T} Z_t > \log\left(\frac{S'}{S}\right)\right] &= \Pr\left[-\max_{0 \leq t \leq T} -Z_t > \log\left(\frac{S'}{S}\right)\right] \\ &= \Pr\left[\max_{0 \leq t \leq T} -Z_t \leq \log\left(\frac{S}{S'}\right)\right] \\ &= 1 - \Pr\left[\max_{0 \leq t \leq T} -Z_t > \log\left(\frac{S}{S'}\right)\right] \end{aligned}$$

$\Pr\left[\max_{0 \leq t \leq T} -Z_t \leq \log\left(\frac{S}{S'}\right)\right]$ の部分は、初期値 0 の $(-(r - \sigma^2/2), \sigma^2)$ - ブラウン運動が、上方境界 $\log\left(\frac{S}{S'}\right)$ に、時刻 T までに到達しない確率である。これが求めれば、 $\Pr[\tau > T]$ を

評価できる。そこで、notation を簡単にして、初期値 0 の (μ, σ^2) - ブラウン運動 (B_t とおく) が上方境界 U に到達しない確率、 $\Pr[\max_{0 \leq t \leq T} B_t \leq U]$ を求めることを考える。

$Y_t = \sigma^{-1} B_t$ とスケール変換すれば、 $\Pr[\max_{0 \leq t \leq T} B_t \leq U] = \Pr[\max_{0 \leq t \leq T} Y_t \leq U/\sigma]$ である。

さらに、ギルサノフの定理を用いて測度変換することによって、 Y_t を標準ブラウン運動にすることができる。以上のことを念頭におきながら計算する。

$\Pr[\max_{0 \leq t \leq T} B_t \leq U]$ を求めるために、確率測度と確率過程を次のように定義する。

W_t is a standard brownian motion under P.

$$B_t = \mu t + \sigma W_t$$

$$Y_t = \mu t + W_t$$

Define an exponential martingale,

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^t \mu_s^2 ds - \int_0^t \mu_s dW_s\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \mu^2 t - \mu W_t\right\} \end{aligned}$$

$$M_Y(T) = \max_{0 \leq t \leq T} Y_t$$

ギルサノフの定理より、測度Qを

$$\frac{dQ}{dP} = \Lambda_T$$

によって定義すれば、 Y_t は測度Qの下で標準ブラウン運動である。

$$\begin{aligned} \text{(M.5)} \quad \Pr[M_Y(T) \leq H] &= E^P [1_{\{M_T \leq H\}}] \\ &= E^Q [\Lambda_T^{-1} 1_{\{M_T \leq H\}}] \\ &= E^Q \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \mu^2 T + \mu W_T \right\} 1_{\{M_T \leq H\}} \right] \\ &= E^Q \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \mu^2 T + \mu Y_T \right\} 1_{\{M_T \leq H\}} \right] \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \text{(M.6)} \quad \Pr[M_T \leq H] &= \Pr[M_T \leq H \cap Y_T \leq H] + \Pr[M_T \leq H \cap Y_T > H] \\ &= \Pr[M_T \leq H \cap Y_T \leq H] \end{aligned}$$

なので、測度Qの下での M_T と Y_T の同時密度関数が分かれば、(M.5)を評価できる。

ブラウン運動の reflection principle より、 $c > 0, b < c$ である2つの定数に対して、

$$\begin{aligned} \text{(M.7)} \quad \Pr[Y_T \leq b \cap M_T > c] &= \Pr[Y_T > 2c - b] \\ &= \Phi \left(\frac{b - 2c}{\sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \text{(M.8)} \quad \Pr[Y_T \leq b \cap M_T \leq c] &= \Pr[Y_T \leq b] - \Pr[Y_T \leq b \cap M_T > c] \\ &= \Phi \left(\frac{b}{\sqrt{T}} \right) - \Phi \left(\frac{b - 2c}{\sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

(M.8)をbに関して微分して、

$$\text{(M.9)} \quad f_b^T(b, c) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \phi \left(\frac{b}{\sqrt{T}} \right) - \phi \left(\frac{b - 2c}{\sqrt{T}} \right) \right\}$$

さらにcに関して微分して、

$$\text{(M.10)} \quad f_{bc}^T(b, c) = \frac{2(2c - b)}{T\sqrt{T}} \phi \left(\frac{2c - b}{\sqrt{T}} \right)$$

M_T と Y_T の同時密度関数が分かる。次に(M.5)を評価する。

$$\begin{aligned} E^Q \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \mu^2 T + \mu Y_T \right\} 1_{\{M_T \leq H\}} \right] &= \int_{-\infty}^c \int_0^c \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mu^2 T + \mu x_T \right\} f_{xy}^T(x, y) dy dx \\ \text{(M.11)} \quad &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2} \mu^2 T} \int_{-\infty}^c e^{\mu x} \left\{ \phi \left(\frac{x}{\sqrt{T}} \right) - \phi \left(\frac{x - 2c}{\sqrt{T}} \right) \right\} dx \end{aligned}$$

(M.11) の積分記号の中を計算すると、

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{1}{2}\mu^2 T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2\mu x T+\mu^2 T^2}{2T}} - e^{\mu x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-4xc+4c^2}{2T}} \\
&= e^{\frac{1}{2}\mu^2 T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2c-\mu T)^2-4c\mu T-\mu^2 T^2}{2T}} \\
\text{(M.12)} \quad &= e^{\frac{1}{2}\mu^2 T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\right)^2} - e^{\frac{1}{2}\mu^2 T} e^{2\mu c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2c-\mu T}{\sqrt{T}}\right)^2}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\text{(M.13)} \quad \Pr[M_Y(T) \leq H] &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^c \phi\left(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\right) dx - \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\mu c} \int_{-\infty}^c \phi\left(\frac{x-2c-\mu T}{\sqrt{T}}\right) dx \\
&= \Phi\left(\frac{c-\mu T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu c} \Phi\left(\frac{-c-\mu T}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

スケール変換によって、

$$\text{(M.14)} \quad \Pr[M_B(T) \leq H] = \Phi\left(\frac{c-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu c}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-c-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

(M.14) より、

$$\text{(M.15)} \quad \Pr\left[\max_{0 \leq t \leq T} -Z_t > \log\left(\frac{S}{S'}\right)\right] = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S}{S'}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{S'}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

1 から (M.15) の右辺を引くことによって、

$$\text{(M.16)} \quad \Pr[\tau \leq T] = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{S'}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

1 から (M.16) の右辺を引くことによって、

$$\text{(M.17)} \quad \Pr[\tau > T] = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S}{S'}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{S'}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$\int_0^T e^{-rt} Q_{S'}(t) dt$ の評価

(M.16) を T に関して微分して $\log\left(\frac{S}{S'}\right) = z$ とおけば、

$$(M.18) \quad Q_{S'}(T) = \frac{z}{\sigma\sqrt{2\pi T^3}} \exp\left(-\frac{(z + (r - \sigma^2/2)T)^2}{2\sigma^2 T}\right)$$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-rt} Q_{S'}(t) dt &= \int_0^T \frac{z}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{z^2 + 2(r - \sigma^2/2)zt + (r - \sigma^2/2)^2 t^2 + 2r\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 t}\right) dt \\ (M.19) \quad &= e^z \int_0^T \frac{z}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(z + (r + \sigma^2/2)T)^2}{2\sigma^2 t}\right) dt \end{aligned}$$

つまり、 e^{-rt} というディスカウント・ファクターが入ることによって、 $(-(r - \sigma^2/2), \sigma^2)$ - ブラウン運動が、 $(-(r + \sigma^2/2), \sigma^2)$ - ブラウン運動に代わり、 e^z が外に出てきたことになる。このことを踏まえると、

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-rt} Q_{S'}(t) dt &= e^z \left[\Phi\left(\frac{-z - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{-\frac{2r + \sigma^2}{\sigma^2}z} \Phi\left(\frac{-z + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right] \\ &= \frac{S}{S'} \left[\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{S'}{S}\right)^{(2r/\sigma^2)+1} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right] \\ (M.20) \quad &= \frac{S}{S'} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{S}{S'}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S'}{S}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

(M.17) と (M.20) より、

$$\begin{aligned} \text{principal}_0 &= \phi F \left[\frac{S}{S'} \Phi\left(\frac{\log\frac{S'}{S} - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{S}{S'}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log\frac{S'}{S} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right] \\ &\quad + e^{-rT} F \left[\Phi\left(\frac{\log\frac{S}{S'} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{S}{S'}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log\frac{S'}{S} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right] \end{aligned}$$

時間 $T_i \{ T_i; 0 < T_i < T \}_{i=1, \dots, N}$ で支払われるクーポン C_i の部分の現在価値は、同様にして、

$$(4.23) \quad \text{Interest}_0^i = \phi c_i \int_0^{T_i} e^{-rt} Q_{S'}(t) dt + e^{-rT_i} c_i \left(1 - \int_0^{T_i} Q_{S'}(t) dt \right)$$

(where c_i is a coupon paid at time T_i :
 $Q_{S'}(t)$ is the p.d.f. of the first passage time to barrier S' at time t under Q)

$$= \phi c_i \left[\frac{S}{S'} \Phi \left(\frac{\log \frac{S'}{S} - (r + \frac{\sigma^2}{2}) T_i}{\sigma \sqrt{T_i}} \right) + \left(\frac{S}{S'} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi \left(\frac{\log \frac{S'}{S} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) T_i}{\sigma \sqrt{T_i}} \right) \right]$$

$$+ e^{-rT_i} c_i \left[\Phi \left(\frac{\log \frac{S}{S'} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) T_i}{\sigma \sqrt{T_i}} \right) - \left(\frac{S}{S'} \right)^{1 - \frac{2r}{\sigma^2}} \Phi \left(\frac{\log \frac{S'}{S} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) T_i}{\sigma \sqrt{T_i}} \right) \right]$$

線形結合で表すことができるので、

$$(4.24) \quad B_0 = \text{principal}_0 + \sum_{i=1}^N \text{interest}_0^i$$

が社債の価格である。

4.2.2. 離散時間近似モデル

バリア・オプションを数值的に解くときには特別な配慮が必要である。ノードが正確に境界上でない限り、誤った境界条件で解くことになってしまうからである。ここでは制御変数を用いたトリノミアル・ツリーにより、効率的にプライシングする(see Ritchken(1995))。

(4.16)に対して自然対数をとって

$$(4.25) \quad d \ln S = (r - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dw_t$$

where w_t is a standard brownian motion under Q :

σ is assumed to be a constant

(4.25)を離散近似して

$$(4.26) \quad \ln S(t + \Delta t) = \ln S(t) + \xi(t) \quad \text{with } S(0) \text{ given}$$

where $\xi(t)$ should be normal with mean $(r - \frac{1}{2} \sigma^2) \Delta t$ and variance $\sigma^2 \Delta t$

(t)、推移確率を次のようにおくことによって、2次までのモーメントを満たす。

$$(4.27) \quad \xi(t) = \begin{cases} \lambda\sigma\sqrt{\Delta t} & \text{with probability } p_u \\ 0 & \text{with probability } p_m \\ -\lambda\sigma\sqrt{\Delta t} & \text{with probability } p_d \end{cases}$$

If r is a constant,

$$(4.28) \quad \mathbf{p} = \begin{cases} p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \\ p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \\ p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \end{cases}$$

If r is time - dependent,

$$(4.28)' \quad \mathbf{p}(t) = \begin{cases} p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \\ p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \\ p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \end{cases}$$

=1 のときには通常のバイノミナル・モデルに帰着する。

ここで n を次のように定義し、 n をあるノードがデフォルト境界のちょうど上にくるよ
うに定める。

$$(4.29) \quad \eta = \frac{\ln(S(0)/S')}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$(4.30) \quad n = \text{floor}(\eta)$$

where $\text{floor}(x)$ is a function which returns the largest integer smaller
than x

$$(4.31) \quad \lambda = \frac{\eta}{n}$$

今の定義で、 $1 < \lambda < 2$ となる。 n は何回連続でダウンしたらバリアに到達するかを示して
いる。運が良くない限りこれは整数にならない。そこで η を介して、 n (整数)回の連続のダ
ウンで境界 S' に到達するようにしている。(4.26)-(4.31)を用いて、トリノミナル・ツリーを

構築する。

一旦ツリーを構築すれば、バリア・オプションを数値的に解く際に通常のアмерикан・オプションと異なる点は以下の点だけである(see Cox and Rubinstein (1985))。各ノードで転換権を行使することが最適かどうかを判断するのに加えて、デフォルト境界に達しているかどうかをチェックし、達しているならばリベート価値となる。もちろん、priority はデフォルトにある。

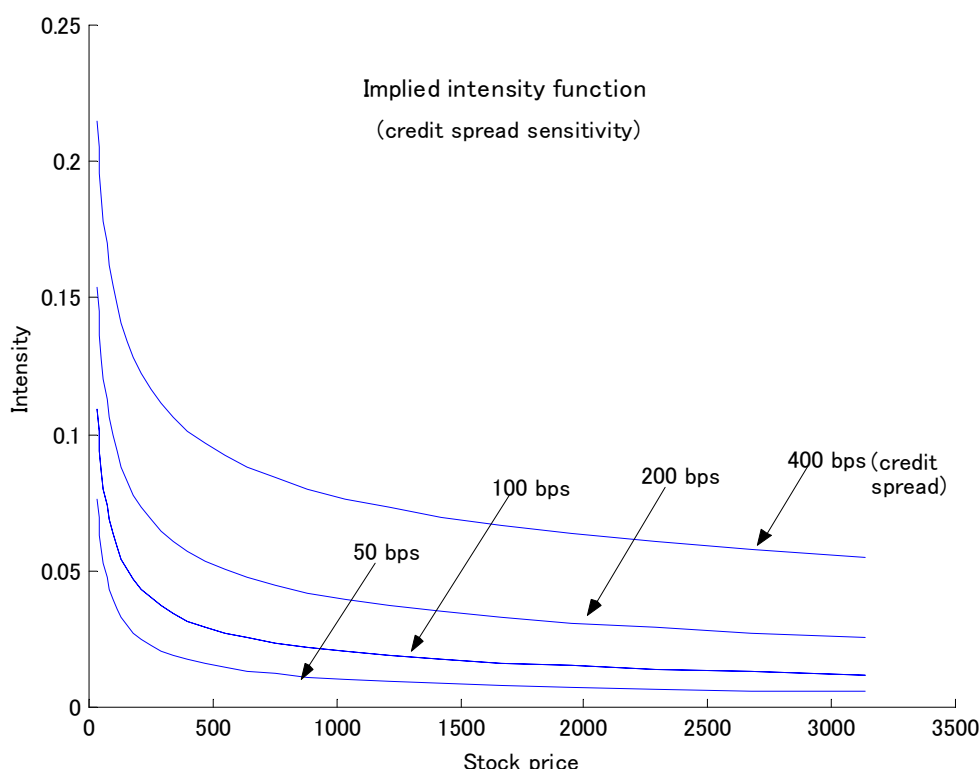
4'. (4.1),(4.2)に関する Sensitivity Analysis

(すべてのプログラミングは Matlab でおこない、データ解析には Matlab と Excel を用いた)

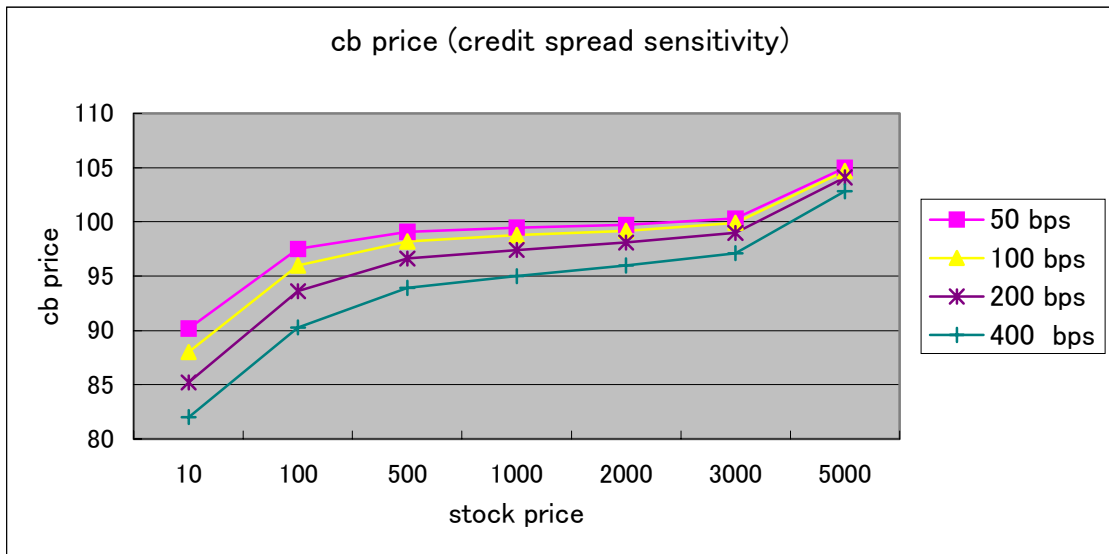
4.1,4.2 で挙げたモデルについて、実際の市場データを用いながら様々な感度分析を行い、モデルについて具体的に考察する。以下 4.1 のモデルを Intensity model、4.2 のモデルを Boundary model と表記する。

以下に述べるすべての分析において金利は確定的とし、C B の満期に対応する Libor rate を補間して用いた。カリブレーションに用いる社債には一番 C B に近い満期のものを用いた。カリブレーションの際の金利には社債の満期に対応する Libor rate を補間して用いた。ボラティリティには直近半年のヒストリカル・ボラティリティを用いた。

まず、2つのモデルにおいてクレジットリスクを処理する部分について見てみる。Intensity model においては強度関数のパラメータがクレジットリスクを処理する部分であった。ここでは(4.3)を強度関数として採用し、 a と b を与えてやり、 b を用いて社債の価格によって Implied されているクレジットリスクにフィットさせた。他のパラメータを一定にしてクレジット・スプレッドを動かしたグラフは次のようになった。

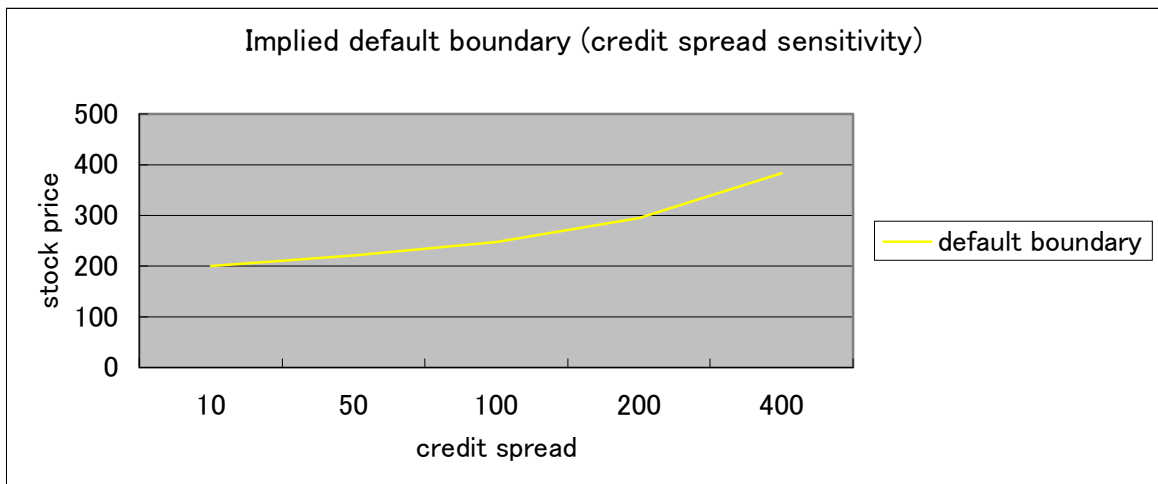


クレジット・スプレッドが低いほど、株価が高くなるにつれて急激にデフォルトを引き起こすジャンプの強度は小さくなる。このことはパラメータ b の上昇によって達成されている。この Implied intensity function を用いて C B をプライシングすると次のようになる。

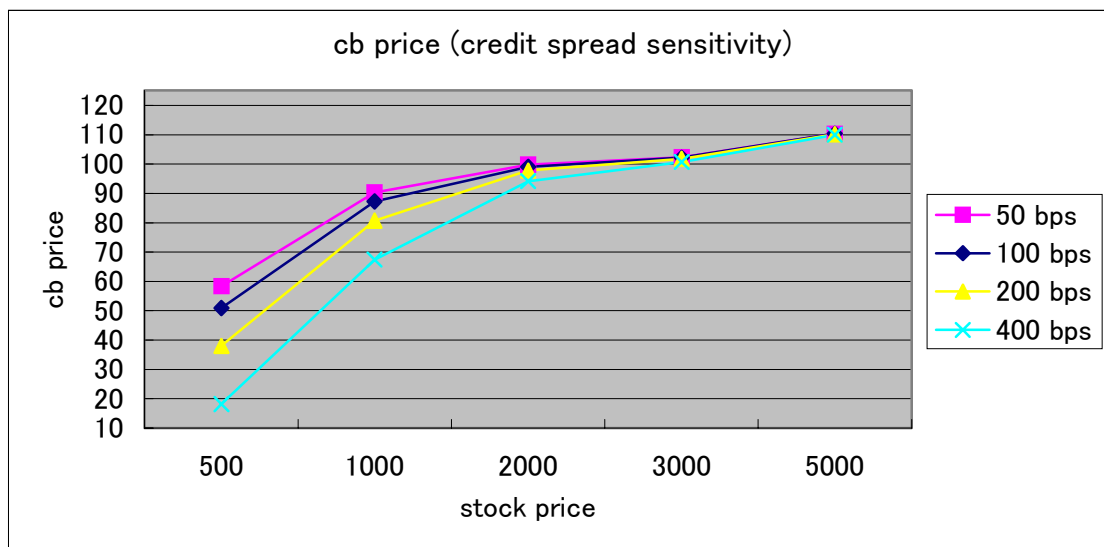


株価がある程度まで下がると加速度的に下がることは、前の図でジャンプの強度が加速度的に上がることによって達成されている。

次に Boundary model におけるクレジットリスクの処理について見てみる。Boundary model においてはデフォルト境界の水準がクレジットリスクを処理する部分であった。まず、他のパラメータを一定にして社債のクレジット・スプレッドを動かしたときの Implied default boundary について見てみる。

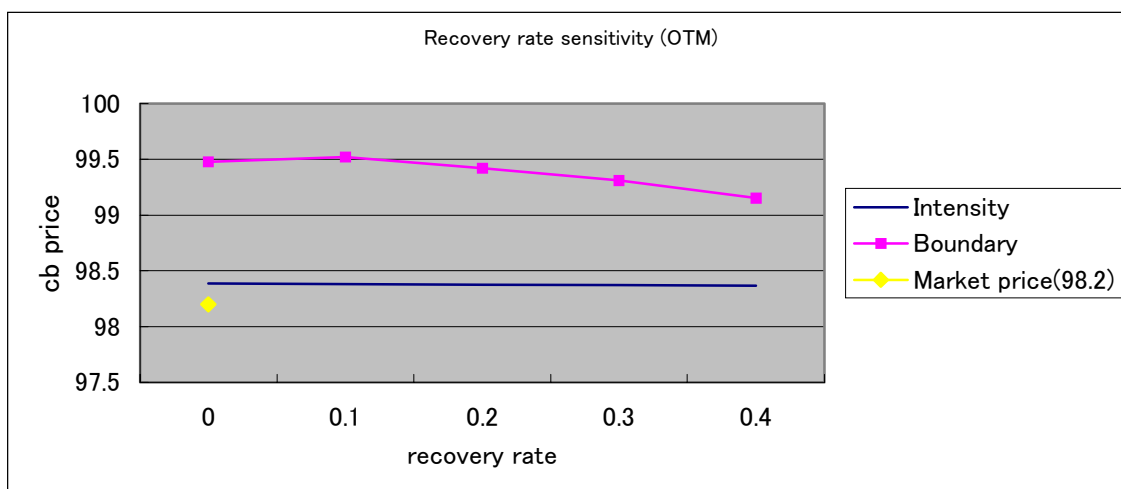


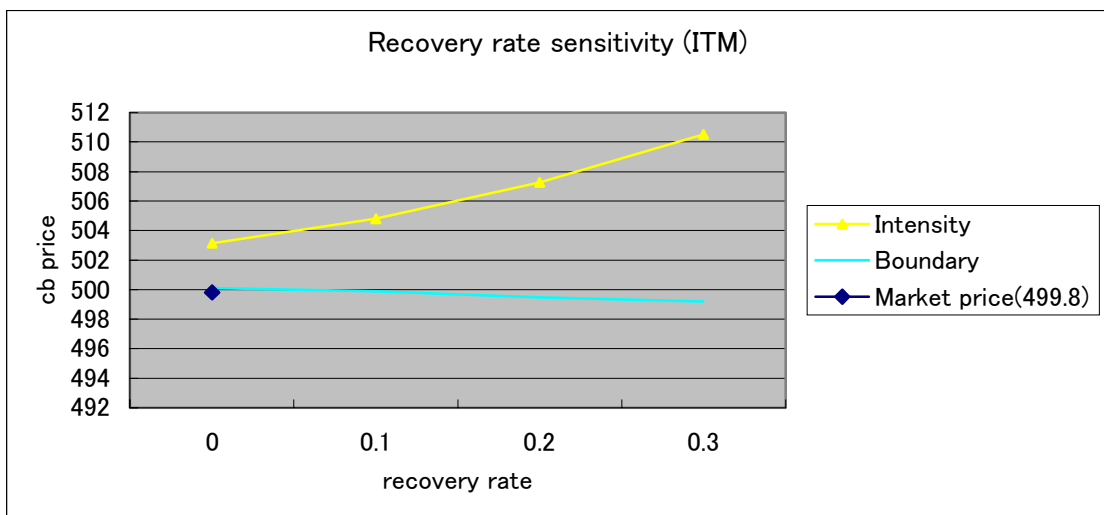
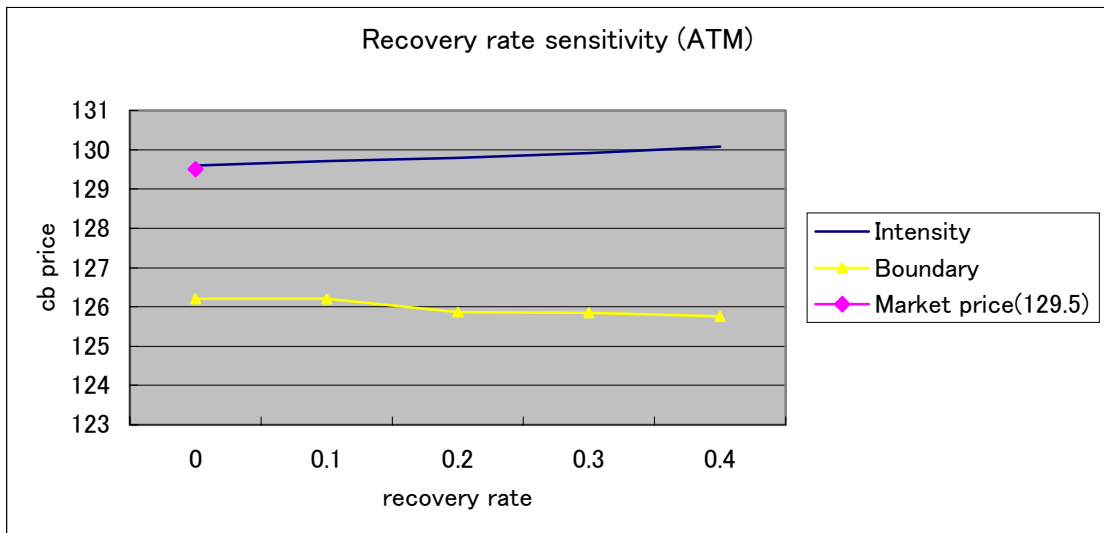
クレジット・スプレッドが上がるとデフォルト境界の水準は上昇する。その Implied default boundary を用いて C B をプライシングすると次のようになる。



Boundary model では、株価が低いときにスプレッドの違いが大きく C B のプライスにあらわれ、株価が高くなるとほとんどあられなくなる。これは Boundary model においてデフォルトが拡散過程のみを用いて記述されているためである。

次にリカバリー・レートの感度分析を行う。

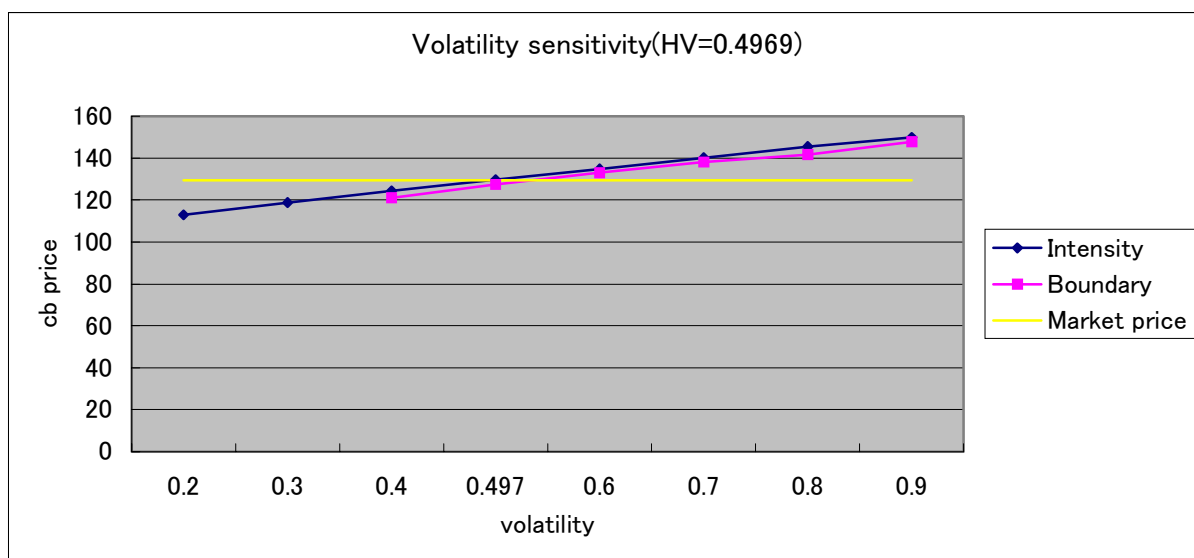




Intensity model はOTMのとき、リカバリー・レートに対して安定的である。ITMのときにリカバリー・レートが上昇すると転換社債の価格が急激に上がるのは、次のメカニズムによる。社債のспредが一定のまま、リカバリー・レートが上がると、社債のспредを説明するためにはジャンプの強度が上がらなければならない。ITMの場合は、それによる同値マルチング - ル測度Qの下での株価の収益率の上昇が効いている。

Boundary model は総じて安定的であった。

次に転換社債をプライシングする際に一番重要なパラメータであると思われる原株のボラティリティに対しての感度分析をおこなう。



双方のモデルにおいてボラティリティの上昇はCBの価格を上昇させる。

Boundary modelにおいて、ボラティリティを変えるごとにカリブレーションし直しているためにボラティリティの低いところでは社債のスプレッドを説明できず、解くことができない。これもBoundary modelが拡散過程のみによってデフォルトを表現していることによる。

Model parameters (summary)

for volatility sensitivity:

| | |
|------------------------------|---------------------|
| Settlement date | 11/03/2000 |
| Maturity of CB | 03/31/2003 |
| SB | 03/18/2003 |
| Stock price | 720 |
| Conversion price | 732 |
| HV of underlying stock | 0.4969 |
| (last half year) | |
| Yield of SB | 1.598 (Libor 0.705) |
| Market price of CB | 129.5 |
| With HV and zero recovery, | |
| Arb price by intensity model | 129.6 |
| by boundary model | 126.2 |

5. Tsiveriotis and Fernandes (1998)の理論的解釈

5.1. Tsiveriotis and Fernandes (1998)について

Tsiveriotis and Fernandes (1998)は外生的に与えられたクレジット・スプレッドを用いて転換社債のプライシングを行うので、誘導型アプローチの一つである。そこでは、導出なしで次の2本の連立偏微分方程式を解く問題に転換社債のプライシングを帰着させている。

$$(5.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + r_g S \frac{\partial u}{\partial S} - r(u - v) - (r + r_c)v = 0$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + r_g S \frac{\partial v}{\partial S} - (r + r_c)v = 0$$

where u is the value of CB, v is the value of COCB :

S is the price of the underlying stock, r_g is the growth rate of the stock :

r is the risk - free rate :

r_c is the observable credit spread implied by non - convertible bonds of the same issuer for similar maturities with the CB :

ここで COCB(Cash-Only part of the CB)という便宜的な仮想証券は次のように定義される。COCB の所有者は、対応する CB の所有者が最適に行動した時に受け取るすべての Cash-flows (Equity-flows は含まない) を受け取る権利を持つ。(5.1),(5.2)は境界条件を通じて連立されていて、同時に解く必要がある。Tsiveriotis and Fernandes (1998)では述べられていないが、EOCB(Equity-Only part of the CB)という新たな仮想証券を次のように定義すると : EOCB の所有者は、対応する CB の所有者が最適に行動した時に受け取るすべての Equity-flows (Cash-flows は含まない) を受け取る権利を持つ :、Tsiveriotis and Fernandes (1998)は(5.1),(5.2)に加えて、次に挙げる(5.3)の3本の偏微分方程式うち2本を解けばよいと言っていることと同値である。

$$(5.3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + r_g S \frac{\partial w}{\partial S} - rw = 0$$

where w is the value of EOCB

このことはCB,COCB,EOCBのうち2つが市場性資産であれば、 $u=v+w$ という関係が成り立たなければならないことから自明である。また、 r_g についてはなにも述べられていなかった。

5.2. Duffie and Singleton (1999)の枠組みにおける解釈

比較を行うために、4.1で挙げたモデルの偏微分方程式を導くことから始める。さら

に、Tsiveriotis and Fernandes (1998)に合わせて、 r_g は一定とする。伊藤の補題を用いて、

$$(5.4) \quad d[e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t}V(S,t)] = e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t} \left[-(r+(1-\phi)\lambda)Vdt + e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t} \left[\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \right] \right]$$

dS に同値マルチンゲール測度 Q の下での確率微分方程式を代入して、

$$(5.5) \quad d[e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t}V(S,t)] = e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t} \left[-(r+(1-\phi)\lambda)Vdt + e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t} \left[\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} ((r+\lambda)Sdt + \sigma Sdw_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \right] \right]$$

ドリフト項をまとめると、

$$(5.6) \quad d[e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t}V(S,t)] = e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t} \left[-(r+(1-\phi)\lambda)V + \frac{\partial V}{\partial t} + (r+\lambda)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + e^{-(r+(1-\phi)\lambda)t} \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw_t$$

ここで、確率測度 Q の下で(5.6)の左辺はマルチンゲールであった。よって、(5.6)の右辺のドリフト項は0にならなければならない。つまり、

$$(5.7) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r+\lambda)S \frac{\partial V}{\partial S} - (r+(1-\phi)\lambda)V = 0$$

が導かれる偏微分方程式である。

(5.7)を注意深く観察すると、Tsiveriotis and Fernandes (1998)の導出に必要な仮定が見えてくる。 S に関する一階微分のところで r_g がでてくるのは、企業の資本構成から導かれた当然の帰結であった。この r_g を消すためには、

(A1) 原株価格が転換社債のデフォルトを引き起こすレア・イベントの影響を受けない

と仮定することが必要である。さらに

(A2) CB,COCB,EOCB のうち2つが市場性資産であり、 $u=v+w$ という裁定均衡が成立する

(A3) CB,COCB のデフォルト時の回収率は同一である

(A4) EOCB は CB,COCB のデフォルトを引き起こすレア・イベントの影響を受けない

と仮定すると、(5.1),(5.2),(5.3)において

$$(5.8) \quad r_g = r$$

$$(5.9) \quad r_c = (1-\phi)\lambda$$

とおいたものが導ける。ところで Tsiveriotis and Fernandes (1998)においては、 rg についてなにも触れられていなかった。そこで(A1)の仮定をなくして

$$(5.10) \quad r_g = r + \lambda$$

とおき(A2)を仮定してみる。まず、(5.2),(5.3)はそれぞれ次のようになる。

$$(5.11) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + (r + \lambda)S \frac{\partial v}{\partial S} - (r + (1 - \phi_v)\lambda)v = 0$$

where ϕ_v is the recovery rate of COCB

$$(5.12) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + (r + \lambda)S \frac{\partial w}{\partial S} - (r + \lambda)w = 0$$

すると、(5.1)は

$$(5.13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (r + \lambda)S \frac{\partial u}{\partial S} - (r + \lambda)w - (r + (1 - \phi_v)\lambda)v = 0$$

となるので、(5.10)とおくと w の前の項に g がでてきてしまい(5.1)のようにはならない。

よって Tsiveriotis and Fernandes (1998)は、(5.10)のように解釈してはいない。つまり、(A1)を仮定しなければ導けないモデルである。

5.3. デフォルト・ヘッジから導かれる偏微分方程式

この節では最初から同値マルチンゲール測度 Q の存在を仮定せずに、デフォルトリスクのある金利デリバティブをヘッジすることから考える。そしてある仮定の下で、株以外の原資産でデフォルトリスクのあるデリバティブについては、(5.2)の型の偏微分方程式が導けることを見る。

Setting:

- ・ デフォルトリスクと金利リスクにさらされている証券をヘッジすることを考える。 G をヘッジしようとしている証券、 Z を金利に依存するデフォルトリスクのない証券、 V を金利に依存し、 G と同一のクレジット・クラスの証券とする。
- ・ 簡単化のためリカバリー・レートは 0、デフォルトが起きる確率 p は一定とする。ここで p はリスク中立確率ではなく現実の確率である。
- ・ 金利の確率過程を次のようにおく。

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dB$$

ここで dB は確率測度 P の下で標準ブラウン運動である。確率測度 P はリスク中立測度 (同値マルチンゲール測度) Q ではない。

次のようなヘッジング・ポートフォリオを考える。

$$(5.14) \quad \Pi = G - \Delta_1 Z - \Delta_2 V$$

デフォルトに対するヘッジを考える前に次の仮定をおく。

(Assumption) デフォルトは dt の $1/2$ 乗より速いオーダーで起こる。

すると確率 pdt で起こる、デフォルト時のこのポートフォリオの価値の変化は

$$(5.15) \quad d\Pi = -G - \Delta_2(-V) + o(\sqrt{dt})$$

である。この式は G と V の価値が、 dt の $1/2$ 乗よりも速いオーダーでゼロに行くことを意味している。よって、 Z の価格変化は無視できるオーダーである。デフォルト・イベントのリスクをヘッジするためには、

$$-G + \Delta_2 V = 0$$

$$(5.16) \quad \therefore \Delta_2 = \frac{G}{V}$$

であればよい。

次にデフォルトしない時 (確率 $1 - pdt$) の金利リスクをヘッジする。ポートフォリオの価値の変化は

$$(5.17) \quad d\Pi = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial r} dr + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} dt - \Delta_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial t} dt + \frac{\partial Z}{\partial r} dr + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} dt \right) - \frac{G}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dt \right)$$

である。金利リスクをヘッジするためには

$$\frac{\partial G}{\partial r} - \Delta_1 \frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{G}{V} \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$(5.18) \quad \therefore \Delta_1 = \frac{V \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial V}{\partial r}}{V \frac{\partial Z}{\partial r}}$$

であればよい。

ヘッジ・パラメーターが(5.16),(5.18)のように定められたヘッジング・ポートフォリオは、リスクフリーである。無裁定条件より、の収益率はリスクフリー・レートでなければならない。従って、

$$(5.19) \quad d\Pi = r\Pi dt$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned}
 (5.20) \quad & (1 - pdt) \left(\frac{\partial G}{\partial t} dt + u \frac{\partial G}{\partial r} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} dt - \frac{V \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial V}{\partial r}}{V \frac{\partial Z}{\partial r}} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} dt + u \frac{\partial Z}{\partial r} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} dt \right) \right) \\
 & - \frac{G}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} dt + u \frac{\partial V}{\partial r} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dt \right) \\
 & + pdt \left(-G - \frac{G}{V} (-V) \right) \\
 & = r \left(G - \frac{V \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial V}{\partial r}}{V \frac{\partial Z}{\partial r}} Z - \frac{G}{V} V \right) dt
 \end{aligned}$$

- Default-free な Bond Market において裁定機会が存在しない必要十分条件は、

$$(5.21) \quad \frac{\mu_i - r}{\sigma_i} = \lambda(r, t)$$

がすべての Default-free Bond i について成立することである。

ここで μ_i , σ_i は Default-free Bond i の return と volatility、 λ は Default-free Bond Market における Market price of risk を表している。今の Setting では、

$$(5.22) \quad \frac{dZ_i}{Z_i} = \mu_i dt + \sigma_i dB$$

where

$$(5.23) \quad \mu_i = \frac{1}{Z_i} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial t} + u \frac{\partial Z_i}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z_i}{\partial r^2} \right)$$

$$(5.24) \quad \sigma_i = \frac{1}{Z_i} \left(w \frac{\partial Z_i}{\partial r} \right)$$

となる。

(5.20)において dt の higher order を無視し、(5.21),(5.23),(5.24)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 (5.25) \quad & \frac{\partial G}{\partial t} + (u - \lambda w) \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \\
 & - \frac{G}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV \right) - rG = 0
 \end{aligned}$$

- Market price of default risk を次のように定義する。

$$(5.26) \quad \lambda^*(r,t) := \frac{\mu^* - r}{p}$$

ここで、 μ^* は Default-free Bond に付随するリスクのプレミアムを控除した後の Defaultable Bond のリターンである。今の Setting では

$$(5.27) \quad \mu^* = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - pV \right)$$

である。(5.26)はデフォルトのイベントリスク(起こる確率)一単位当たりのリスク・プレミアムを示している。

(5.25)を(5.26),(5.27)を用いて整理すると、

$$(5.28) \quad \frac{\partial G}{\partial t} + (u - \lambda w) \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - (r + (1 + \lambda^*)p)G = 0$$

最初からヘッジできることを前提とし、Risk-Neutral World で(同値マルチンゲール測度の下で) r と p を定義していれば、2つの Market price of risk は0で、(5.27)は

$$(5.29) \quad \frac{\partial G}{\partial t} + u \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - (r + p)G = 0$$

となる。実際には、 r と p を市場で観察可能な時価と整合的にすることによって、(5.29)を用いることができる。

(5.29)において $p=rc$ とおいたものは、(5.2)において $rg=r$ (risk-neutral) としたものと構造的には同じになる。しかし、最終的に(5.29)のようなきれいな偏微分方程式になるためには(Assumption)が必要であるし、原資産が株の場合もこううまくはいかない。

6. Goldman Sachs (1994)

Goldman Sachs(1994)も外生的に与えられたクレジット・スプレッドを用いて転換社債のプライシングを行うので、誘導型アプローチの一つである。

バイノミアル・モデルによって解くことを前提とする。各ノードにおいて転換権が行使される確率を帰納的に計算していき、それを用いて、後ろ向きに計算する際に用いるべきクレジットリスク反映した割引率を求めることによって、クレジットリスクを Handling するモデルである。以下、クレジットリスクの扱い方の部分だけを説明する。

$P(t,S)$ を時間 t , 株価 S の状態で転換権が行使される確率、 p をノードの上昇確率とする。Terminal Condition において $P(T,S)$ は1か0,すなわち転換された状態になることが確実な場合か債券の状態になることが確実な場合に決定される。

次に Roll-back routine を示す。あるノードにおいて転換権が行使される確率を

$$P(t,S) = pP(t+1,S+) + (1-p)P(t+1,S-)$$

ここで $S+, S-$ はそれぞれ次の期において Up, Down が起きた時の株価である

とバックワードに計算にしていき、これを用いて時間 t , 株価 S の状態の割引率 (t, S) を

$$(t, S) = P(t, S)r + (1 - P(t, S))(r + rc)$$

と計算する。ここで r はリスクフリー・レート、 $r + rc$ は CB 発行体が発行する社債のイールドに相当するものである。最後にバックワードされてきた価値とすぐに転換したときの価値を比べ、転換が最適と判断されるならば $P(t, S)$ は 1 に変更される。このモデルの本質的なアルゴリズムは以上の部分で、後はアメリカンオプションのバイノミアル・モデルと同じである。

7. Cheung and Nelken (1994)

本稿で挙げるモデルのなかで Cheung and Nelken (1994) のみが 2 ファクターモデルである。

8. において Cheung and Nelken (1994) のアイデアを応用したモデルについても考察するので、まず利用したアイデアを簡単に記述する。

- すべての株の総リターンは少なくともリスクフリー・レートに等しくなければならない。もしそうでなければ、投資家は株を買おうとしない。したがって、リスクフリー・レートと株の総リターンは正の相関をする。
- 株価の著しい下落を発行者が被ったとき、debt to equity ratio が高まることにともない発行体の信用力は低下し、クレジット・スプレッドは上昇する。よって、クレジット・スプレッドと株の総リターンは負の相関をする。
- 社債のイールドは 2 つのファクター（リスクフリー・レートとクレジット・スプレッド）の合計である。そして 1 つは株のリターンと正の相関を、他方は負の相関をする。よって社債のイールドと株のリターンは相関がないと仮定する。

以上の議論は、もちろん銘柄、業種によってまったく当てはまらないだろう。しかし、きちんとやろうとすると避けられない、株価、リスクフリー・レート、クレジット・スプレッドという 3 つのファクター間の相関係数行列を推定しなければならないという困難な問題を避けることができる。

8. においては拡張 Vasicek モデルを用いて、社債のイールドの確率過程をそのときのイールド・カーブにフィットさせた。また、株価の確率過程には標準的なリスクニュートラル・プロセスを用い、ファクター間の相関は 0 とした。

$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz$ における、 a, σ にはそれぞれ 0.03734, 0.14625 を与えた。これは乾・室町 (2000) による 1979 年 3 月から 2000 年 2 月までのユーロ円 (1 ヶ月) の利回りデータを用いた GMM による推定結果である。

参考文献

Brennan, M. J. and E. J. Schwartz, "Analyzing Convertible Bonds", *Journal of financial and quantitative analysis*, November 1980

Cheung, W. and I. Nelken, "Costing the Converts", *Risk*, July 1994

Cox, J. C. and M. Rubinstein, "Options Markets", Prentice-Hall, 1985

Duffie, D. and K. Singleton, "Modeling Term Structure of Defaultable Bonds", *The Review of Financial Studies*, 1999

Duffie, D., "Dynamic Asset Pricing Theory", Princeton University Press, 1996

Harrison, J., M., and S. Pliska, "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 1981

Hull, J.C., "Options, Futures, and Other Derivatives", 3rd and 4th edition, Prentice-Hall, 1997 and 2000

Ingersoll, J. E., "A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities", *Journal of Financial Economics*, 1977

Jarrow, R.A. and S.A. Turnbull, "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk", *Journal of Finance*, March 1995

乾孝治・室町幸雄、金融モデルにおける推定と最適化、朝倉書店、2000

Karatzas, L. and S. E. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", Springer-Verlag, 1988

Longstaff, F., and E. Schwartz, "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt", *Journal of Finance*, 1995

Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973

Merton, R. C., "On the pricing of corporate debt: The risk Structure of interest rates",
Journal of Finance, 1974

Merton, R. C., "Continuous-time finance", Blackwell, 1992

Nyborg, K.G., "The use and pricing of convertible bonds", Applied Mathematical
Finance, 1996

Protter, P., "Stochastic Integration and Differential Equations", Springer-Verlag, 1990

Ritchken, P., "On Pricing Barrier Options", the journal of derivatives, winter 1995

Takahashi, Akihiko, "Pricing of Securities with Default Risks", preprint, July 1995

Takahashi, Akihiko, "Notes on Default Risks I", preprint, January 1996

Takahashi, Akihiko, "Notes on CB", preprint, 2000

高橋明彦・時岡毅実、3ファクターラティスモデルによる2カ国の金利の確率的変動を考
慮した派生商品の評価、現代ファイナンス、1999.3

Tsiveriotis, K. and C. Fernandes, "Valuing Convertible Bonds with Credit Risk", The
Journal of Fixed Income, September 1998