CIRJE-J-92

変額年金保険の評価

東京大学大学院経済学研究科
小林孝雄

東京大学経済学部
池田亮一

格付投資情報センター
長谷川洋一郎

2003 年 4 月
（2003 年 9 月改訂）

変額年金保険の評価

Valuing Variable Annuities

2003 年 4 月 1 日

小林　孝雄
東京大学大学院経済学研究科

池田　亮一
東京大学経済学部

長谷川　洋一郎
格付投資情報センター

Abstract

In this paper we propose a framework to evaluate variable annuities. We show that the invested capital to a variable annuity can be decomposed into: (i) the reserve money in the account, (ii) options, (iii) fees paid to the mutual fund companies, and (iv) margin accruing to the insurance company. The first two components comprise value to the insured, and the last two accrue to the supply side companies. This view provides a convenient method to double-check the computation of various components of value.

We also show that death benefit option attached to the most popular variable annuities is a portfolio of European put options of differing maturities. Assuming that investment value follows a geometric Brownian motion, this component can be valued applying the Black-Scholes formula and using the "death rates statistics" published by the Ministry of Health, Labour and Welfare. Options on the income benefit are also valued using the Black-Scholes formula. Stepped-up death benefit is a form of look-back options, which we value using a trinomial lattice.

We value some typical products assuming that a person purchases them at age 40 and at age 50. We then examine how various value components would change in response to the volatilities of the investment products, the length of the contract and so on.

変額年金保険の評価

Valuing Variable Annuities

2003 年 4 月 1 日

要約

この論文では変額年金保険の評価のためのフレームワークを提示する．変額年金保険に投資された資本は，(a) 口座の積立金額，(b) 何種類かのオプション，(c) 投資信託の運用会社に支払われる手数料，および (d) 保険会社のマージンに分けられる．最初の二つは保険購入者に対する価値を構成するもので，後の二つは商品供給側の企業に対して支払われるものである．この考え方は，評価計算の正しさをダブルチェックする方法としても便利である．

もっともポピュラーな商品に付加される死亡保障は，異なった満期のヨーロピアン・プットオプションのポートフォリオであることを示すことができる．われわれは，積立金額が幾何ブラウン運動に従うと仮定して，この死亡保障の価値をブラック・ショールズ公式と「死亡率統計」を用いて算出する．また，年金部分に付加される最低保障オプションも，ブラック・ショールズ公式を用いて算出できる．死亡保障の最低保障額がステップアップするタイプのものはルックバック・オプションの一種であるが，このオプションの評価には三項ツリーのアルゴリズムを用いる．

一般的な評価方法を確立したのち，いくつかの典型的な商品を評価する．同時に，(a) ～ (d) の各部分の価値が投資対象ファンドのボラティリティー，保険契約者の年齢や積立期間の長さなどに影響される度合いを分析する．

1. はじめに

この論文で，われわれは変額年金保険の評価のためのフレームワークを提示する．変額年金保険は，保険会社が将来のあらかじめ決められた時点から定期的に年金を支払うことを約束する金融契約である．変額年金保険の場合，積立金の運用成果によって将来受け取る年金額が変わってくる．すなわち，与えられた株式，債券，短期金融資産，あるいはそれらを組み合わせた投資信託の中から，運用するファンドを契約者が自由に選べるようになっていて，ファンドの運用パフォーマンスのリスクは契約者自身が負うことになる．

変額年金保険に共通する特徴は死亡保障である．被保険者が積立期間中に死亡した場合，(i)積立金の時価と(ii)最低保障額のいずれか大きいほうの金額が保険金の受取人に支払われる．通常は，最低保障額は払込元本に等しく設定されるが，運用成果に応じて死亡保障額が「ステップアップ」する商品もある．後者の商品では，保険の購入者は投資成果を「ロックイン」し，相続人に残す金額がそれを下回らないようにできる．

多くの変額年金保険では，被保険者が積立期間中に死亡しない場合は，積立最終日における積立金時価に相当する金額が支払われ，この年金部分に元本保障は付かない．しかし，年金部分にも最低保障が付加される商品もある．このタイプの商品の場合，運用に損失が発生した場合，その損失部分は保険会社が補填する．こうした保障が潤沢に付加された商品ほど，毎年課せられる保険費用も高くなり，その分だけ積立金を減価させる．

2 節では，変額年金保険をいくつかのタイプにわけて，その契約内容を具体的に説明する．3 節では，もっともポピュラーな「プレーン型」商品を取り上げて，付加される死亡保障が，異なった満期のヨーロピアン・プットオプションのポートフォリオとみることができることを示す．また，積立金額が幾何ブラウン運動に従うと仮定して，この死亡保険の価値をブラック・ショールズ公式から求める．同時に，この節で，変額年金保険に関する一般的な原理を導出する．その原理は，変額年金保険に投資された資本が，(a)口座の積立金額，(b)何種類かのオプション，(c)投資信託の運用会社に支払われる手数料，および(d)保険会社のマージンに分けられるという原理である．最初の二つは保険購入者に対する価値を構成する部分，後の二つは商品供給側の企業に対して支払われる部分である．また，この原理が，評価計算の正しさをダブルチェックする便利な方法を提供することも示す．

4 節では，「生命表」の死亡率統計を利用して 3 節で確立した評価式を具体的に計算する方法を述べる．5 節では，「年金保障型」商品の取り扱い方を論じる．6 節では，死亡保険の最低保障額が段階的に切り上がる「ステップアップ型」の商品を扱う．この種の商品はルックバック・オプションの一種である．ステップアップが連続的に行われる場合には解析解が知られている．しかし実際の商品の場合，最低保障額の更新は離散的（多くの商品で四半期に一回）であり，本論文では三項ツリーのアルゴリズムを用いたステップアップ・オプションの評価方法を採用する．

最後に 7 節で，いくつかの典型的な商品を評価する．同時に，(a)～(d)の各部分の価値が投資対象ファンドのボラティリティー，保険契約者の年齢や積立期間の長さなどに影響される度合いを

分析する.

2. 変額年金保険のタイプ別商品特性

現在一般に販売されている変額年金保険は大きく3種類に分類することができる.

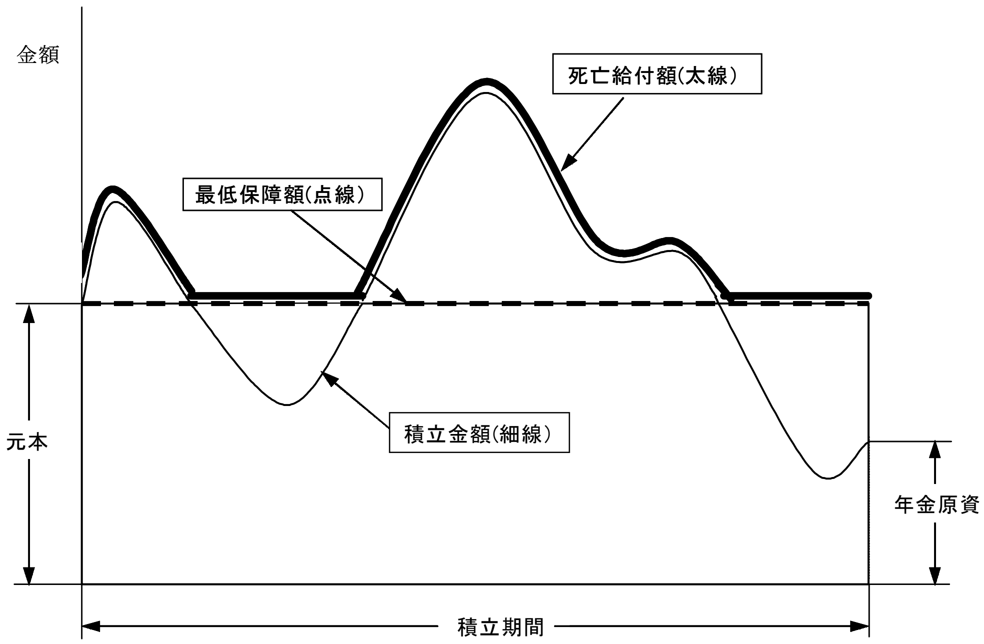
(a)プレーン型

最も一般的な変額年金保険は, 積立期間中に死亡した場合は元本が保障されるが, 年金受取りには最低保障がつかないタイプである. このタイプの商品はプレーン型と呼ばれる.

図 1 の細い実線は, 積立金の契約期間中の推移を表している. 契約者が積立期間中に死亡した場合は, 死亡時に太線部に対応した金額が支払われる. 一方, 積立期間が終了した場合の受取額には, 元本保障がつかない. 図は, 積立期間満了日に積立金が元本を下回る場合を表しているが, このような場合には年金受取額は元本よりも少なくなる.

なお, 年金は積立期間終了日に一括で受け取るか, 年金として定期的に受け取るかを選択することができるが, 受取金額の価値を評価する上ではどちらでも同じである.

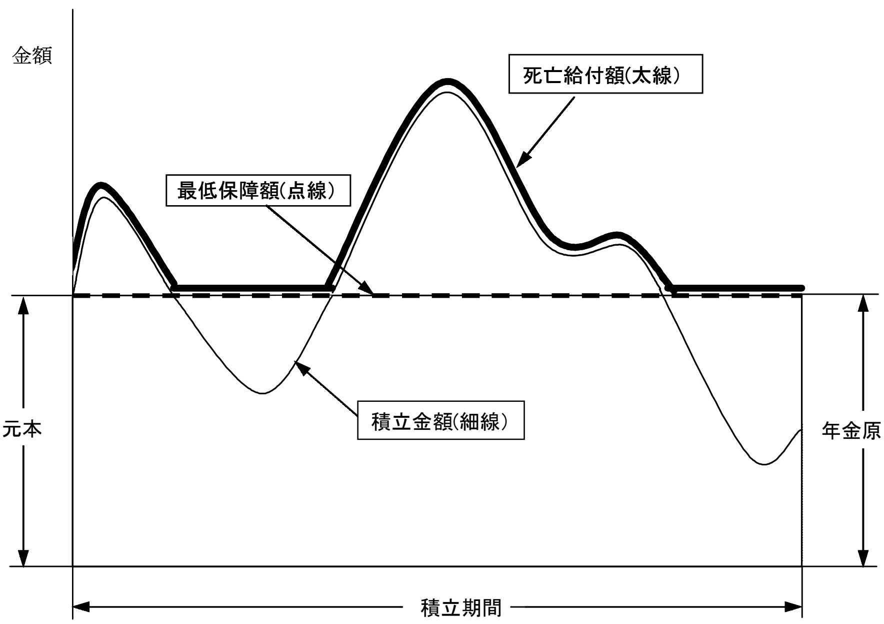
図1 プレーン型



(b) 年金保障型

年金保障型商品とは，年金について元本の全額，または一部が保障されるタイプの商品である．すなわち，このタイプの商品では，積立金の運用パフォーマンスが悪く，積立期間満了日に積立金が元本を下回る場合，保険会社が損失の全額，ないしは一部を補填する．年金保障型の商品には，プレーン型と同じ死亡保障がつくことが多い．図 2 の場合，積立金の推移は図 1 と同じであるが，積立期間満了日の年金受取額は元本相当額となる．

図2 年金保障型

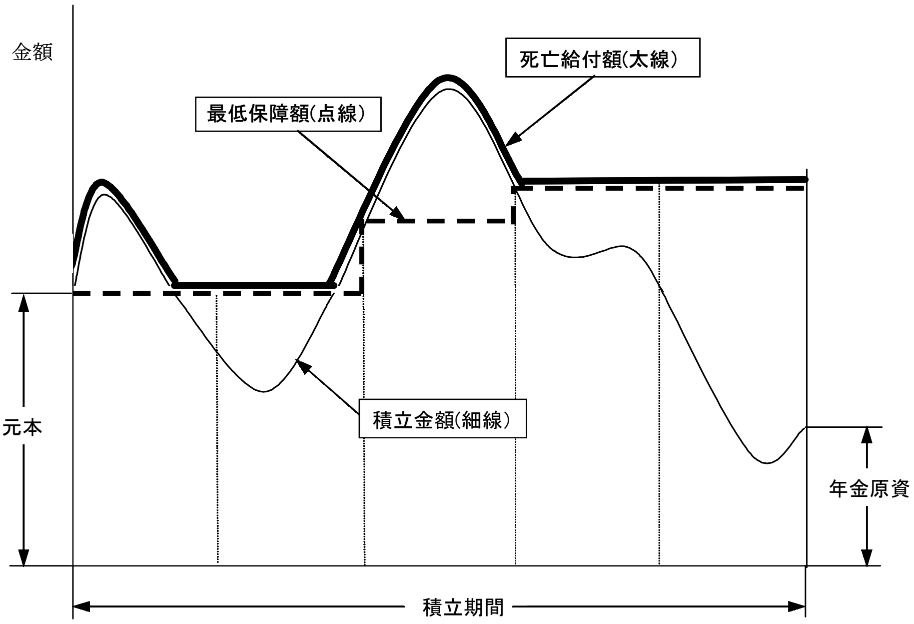


(c) ステップアップ型

ステップアップ型（別名，ラチェット型）商品とは，死亡保障部分について，一定の期間毎に最低保障額が見直され，見直し時点での積立金時価がそれまでの最低保障額を超えていた場合に最低保障額が新たな水準に更新されるタイプの商品を指す．通常，ステップアップ型商品では年金部分に最低保障はつかない．最低保障額の見直し回数は年 4 回の商品が多い．

図 3 では，最低保障額の更新時点を矢印で示している．積立金が細い実線のように推移する場合，最低保障額は点線のように更新される．そして，契約者が積立期間中に死亡した場合，最低保障額（点線）と積立金（細い実線）の大きい方の金額（太い実線）が支払われる．図 3 では，積立期間満了日に積立金が元本を下回っているが，この場合，年金受取額は積立金相当額となり，元本よりも少なくなる．

図3　ステップアップ型



なお，どの商品にも，死亡原因が災害による死亡の場合に元本の一定割合が割増給付される災害死亡保険がついている．

3. プレーン型の評価

この節では，プレーン型の変額年金保険について，問題を定式化し，商品を評価する方法を述べる．

モデルの仮定

契約者によって選択された投資信託の時価が，変動率（ボラティリティー）σ の幾何ブラウン運動に従うと仮定する．積立金運用のための「運用費用」と，死亡保障のための「保険費用」の合計額が積立金から控除されるが，この年当たり費用を元本１円につき δ 円とする．短期金利を定数 r，積立期間を $\{0 \le t \le T\}$ とすると，積立金 $\{S_t; 0 \le t \le T\}$ のリスク中立確率過程は，

$$dS_t = (r-\delta)S_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t, \quad (Z_t\text{は標準ブラウン運動}) \tag{1}$$

と表されることになる．

契約者の受取額の経済価値

保険契約者の死亡リスクは，大数の法則によって，保険会社側で完全ヘッジ可能と考えることができる．したがって，原資産変動リスクが投信会社で完全ヘッジ可能な場合，契約者が死亡時点あるいは積立期間満了日に受け取る金額の経済価値を，リスク中立化法によって求めることができる．

契約者の死亡日を確率変数（ストッピングタイム）τ で表す．また，災害死亡の生起・非生起を確率変数Y で表す（災害死亡のときは$Y=1$，通常死亡のときは$Y=0$）．通常の死亡保障および災害死亡保障がついたプレーン型変額年金保険では，契約者の受取額の経済価値を契約時点で評価すると，元本S_0 に対してその値V_0 は次式で与えられる．

$$V_0 = E\left[\left\{\max\left(S_\tau, S_0\right) + kS_0\mathbf{1}_{\{Y=1\}}\right\}\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}e^{-r\tau} + S_T\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-rT}\right] \tag{2}$$

ここでは，災害死亡の場合の死亡給付金の元本に対する割増給付率をk としている．右辺の$\max\left(S_\tau, S_0\right)$は死亡時の給付額，$kS_0$ は災害死亡時の割増給付額である．最後の項は，積立期間中に契約者が死亡しない場合の年金受取額の割引現在価値である．

τ とY は独立な確率変数と仮定できるので，災害死亡確率$E\left[Y=1\right]$をy と記すと，(2)式は

$$\begin{aligned} V_0 &= E\left[\left\{\max\left(S_\tau, S_0\right) + kyS_0\right\}\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}e^{-r\tau} + S_T\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-rT}\right] \\ &= OP_0 + E\left[S_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}e^{-r\tau} + S_T\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-rT}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{ただし，}\ OP_0 = E\left[\left\{\max\left(0, S_0 - S_\tau\right) + kyS_0\right\}\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}e^{-r\tau}\right] \tag{4}$$

と変形できる．ここで，(4)式で与えられるOP_0 は保険会社による死亡時補填額ならびに災害死亡割増給付額の割引現在価値の期待値，(3)式右辺の第 2 項は積立金の割引現在価値の期待値を表す．すなわち，プレーン型変額年金保険において保険会社が負担するオプションの経済価値（「製造」原価）は(4)式のOP_0 である．

(3)式右辺の第 2 項は，次のように簡単化することができる．(1)式の確率微分方程式を解くと，

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma Z_t} \tag{5}$$

となる．これを代入して，条件付き期待値の重ね合わせ公式(tower law)を用いると

$$\begin{aligned} E\left[S_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}e^{-r\tau} + S_T\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-rT}\right] &= E\left[E\left[S_0 e^{-(\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma Z_\tau}\,\middle|\,\tau\right]\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}\right] \\ &\quad + E\left[E\left[S_0 e^{-(\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma Z_T}\,\middle|\,\tau\right]\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\right] \end{aligned}$$

ここで，Z_t は平均 0，分散 t の正規分布に従うので，

$$E\left[e^{\sigma Z_t}\right]=e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

また，$\left\{Z_t:0\le t\le T\right\}$とストッピング・タイム τ は統計的に独立なので，

$$E\left[S_0 e^{-(\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma Z_\tau}\middle|\tau\right]=S_0 e^{-\delta\tau}$$

$$E\left[S_0 e^{-(\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma Z_T}\middle|\tau\right]=S_0 e^{-\delta T}$$

これより

$$E\left[S_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}e^{-r\tau}+S_T\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-rT}\right]=E\left[S_0 e^{-\delta\tau}\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}+S_0 e^{-\delta T}\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\right]$$

となる．

同様に，(4)式の OP_0 についても条件付き期待値の重ね合わせ公式(tower law)を用いると

$$OP_0=E\left[\left\{E\left[\max\left(0,S_0-S_\tau\right)e^{-r\tau}\middle|\tau\right]+kyS_0e^{-r\tau}\right\}\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}\right] \tag{6}$$

となる．ここで，$E[\max\left(0,S_0-S_\tau\right)e^{-r\tau}\big|\tau]$ は権利行使価格 S_0 で満期日が既知の日付け τ のプットオプションを初期時点で評価した評価額である．これは(1)式の仮定の下ではヨーロピアン・プットオプションのブラック＝ショールズ公式で与えられる．つまり，原資産価格 S，権利行使価格 K，満期日までの残存日数 t（年表示），原資産のボラティリティー σ，原資産の配当利回り δ，短期利子率 r のときのヨーロピアン・プットオプションのブラック＝ショールズ価格を

$BSPut\left(S,K,t,\sigma,\delta,r\right)$ で表すと，

$$OP_0=E\left[\left\{BSPut\left(S_0,S_0,\tau,\sigma,\delta,r\right)+kyS_0e^{-r\tau}\right\}\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}\right] \tag{7}$$

ただし

$$BSPut(S,K,\tau,r,\delta,\sigma)=Ke^{-r\tau}\Phi(-x_2)-Se^{-r\tau}\Phi(-x_1)$$

$$x_1 = \frac{\log(S/K) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$x_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$\Phi(x) =$ 標準正規分布の累積分布関数

また，(3)式は

$$V_0 = OP_0 + E\left[S_0 e^{-\delta\tau} \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + S_0 e^{-\delta T} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right] \tag{8}$$

となる.

保険会社のマージンおよび投信会社の運用費用の割引現在価値

積立金から控除される費用率δは，保険費用と運用費用の合計である. 前者をδ_1，後者をδ_2と記す. 前者は，死亡保障や災害死亡保障，年金保障にかかわる保険会社の補填分に見合う費用である. また，後者は，積立金の運用費用として投信会社に支払われる費用である. したがって，変額年金保険から保険会社が獲得するマージンを契約時点で評価した割引現在価値は，元本S_0に対して，次のようになる.

$$W_0^I = E\left[\int_0^\tau \delta_1 S_t e^{-rt} dt \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + \int_0^T \delta_1 S_t e^{-rt} dt \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right] - OP_0 \tag{9}$$

(5)式を用いると

$$\int_0^T \delta_1 S_t e^{-rt} dt = \delta_1 S_0 \int_0^T e^{-(\delta_1 + \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma Z_t} dt$$

となるので，ここでも期待値の重ね合わせ公式を利用して

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\tau \delta_1 S_t e^{-rt} dt \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \right] &= E\left[E\left[\delta_1 S_0 \int_0^\tau e^{-(\delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma Z_t} dt \middle| \tau \right] \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \right] \\ &= E\left[\delta_1 S_0 \int_0^\tau e^{-\delta t} dt \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \right] = E\left[\frac{\delta_1}{\delta} S_0 (1 - e^{-\delta\tau}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \right] \end{aligned}$$

同様に

$$E\left[\int_0^T \delta_1 S_t e^{-rt} dt \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right] = E\left[\frac{\delta_1}{\delta} S_0 (1 - e^{-\delta T}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right]$$

以上より，(9)式は

$$W_0^I = E\left[\frac{\delta_1}{\delta} S_0 (1 - e^{-\delta\tau}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \right] + E\left[\frac{\delta_1}{\delta} S_0 (1 - e^{-\delta T}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right] - OP_0 \tag{10}$$

となる.

同じように，投信会社に支払われる運用費用を契約時点で評価した割引現在価値は，元本 S_0 に対して，次のようになる．

$$W_0^M = E\left[\int_0^\tau \delta_2\, S_t e^{-rt} dt\ \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + \int_0^T \delta_2\, S_t e^{-rt} dt \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right] \tag{11}$$

この式についても，上と同様に変形すると

$$W_0^M = E\left[\frac{\delta_2}{\delta} S_0 (1 - e^{-\delta\tau}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right] + E\left[\frac{\delta_2}{\delta} S_0 (1 - e^{-\delta T}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right] \tag{12}$$

となる．

投下資本の「価値保存の法則」

(8)，(10)，(12)式を足し合わせると，

$$\begin{aligned}
&V_0 + W_0^I + W_0^M \\
&= E\left[S_0 e^{-\delta\tau}\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + S_0 e^{-\delta T}\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right] + E\left[S_0(1 - e^{-\delta\tau}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right] + E\left[S_0(1 - e^{-\delta T}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right] \\
&= E\left[\left\{S_0 e^{-\delta\tau} + S_0(1 - e^{-\delta\tau})\right\} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + \left\{S_0\, e^{-\delta T} + S_0(1 - e^{-\delta T})\right\} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right] \\
&= E\left[S_0 \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + S_0 \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right] = S_0
\end{aligned} \tag{13}$$

となる．

この等式は，投下資本に関する「価値保存の法則」を示している．保険契約者が投下した元本は積み立てられ，投信会社によって運用される．そして，積立金の運用成果が，(i)保険契約者，(ii)保険会社，(iii)投信会社の 3 者の間に過不足なく分配される．したがって，この 3 者への分配額の割引現在価値の期待値の合計は投下資本 S_0 に等しくなければならない．

7 節では，実際に販売されているいくつかの代表的な変額年金保険を例にとって，投下資本 S_0 が上記 3 者の間にどのように分配されているかを調べるが，(13)式の価値保存の法則は，プレーン型，ステップアップ型，年金保障型のどのタイプにも共通に成立する法則である[1]．また，この法則は，計算結果の正確さをチェックするためにも使うことができる．

4. 生命表からの死亡確率の算出

表 1 は，厚生労働省発表の第 19 回生命表（平成 12 年国勢調査および平成 11 年・12 年人口動態統計ベース）から取った年齢 40 歳以上 60 歳未満の男子の死亡率に関するデータである[2]．

表１　第19回生命表（男）

年齢 x	死亡率 $q(x,x)$	40歳の人の 生存確率 $r(40,x)$	死亡確率 $q(40,x)$
40	0.00147	1.00000	0.00147
41	0.00159	0.99853	0.00159
42	0.00173	0.99694	0.00172
43	0.00190	0.99522	0.00189
44	0.00210	0.99333	0.00209
45	0.00232	0.99124	0.00230
46	0.00258	0.98894	0.00255
47	0.00287	0.98639	0.00283
48	0.00318	0.98356	0.00313
49	0.00352	0.98043	0.00345
50	0.00392	0.97698	0.00383
51	0.00435	0.97315	0.00423
52	0.00480	0.96892	0.00465
53	0.00527	0.96427	0.00508
54	0.00575	0.95918	0.00552
55	0.00625	0.95367	0.00596
56	0.00678	0.94771	0.00643
57	0.00737	0.94128	0.00694
58	0.00795	0.93435	0.00743
59	0.00854	0.92692	0.00792
60	-	0.91900	-

（データ：厚生労働省、平成12年度）

いま, ちょうど x 歳に達した者が $x+n$ 歳で死亡する確率を $q(x,x+n)$ で表す. 生命表では, 各年齢の死亡率 $q(x,x)$, すなわち, ちょうど x 歳に達した者が $x+1$ 歳に達しないで死亡する確率が与えられる. これが表の 2 列目の数字である. この死亡率の数字から, 任意の年齢の者について死亡年齢の確率分布を計算することができる. ちょうど 40 歳に達した者を例にとって, この確率分布を求めた結果が表の 3 列目と 4 列目である.

ちょうど 40 歳に達した者が x 歳 $(x \geq 40)$ の誕生日に生存している確率を $r(40,x)$ で表すと, $r(40,40)=1$ として, 漸化式

$$r(40,x+1)=r(40,x)(1-q(x,x)) \qquad (14)$$

が成立する. これを $40 \leq x \leq 60$ の範囲で計算すると, 第 3 列のようになる. また, x 歳で死亡する確率（x 歳の誕生日から $x+1$ 歳の誕生日の前日までに死亡する確率）$q(40,x)$ は,

$$q(40,x)=r(40,x)q(x,x) \qquad (15)$$

で与えられる. これが, ちょうど 40 歳に達した者の死亡年齢の確率分布を与えることになるが, この計算結果を示したのが第 4 列である. [3]

生命表では 1 年を最小単位としているので, 変額年金保険の評価においても, 時間を離散化しなければならない. いま, 加入時に契約者がちょうど a 歳に達したとすると, (7)式は

$$OP_0 = \sum_{\tau=0}^{T} q(a,a+\tau)\left\{BSPut(S_0,S_0,\tau,\sigma,\delta,r) + kyS_0 e^{-r\tau}\right\} \tag{16}$$

(8)式は

$$V_0 = OP_0 + \sum_{\tau=0}^{T} S_0 e^{-\delta\tau} q(a,a+\tau) + S_0 e^{-\delta T} r(a,a+T) \tag{17}$$

(10)式は

$$W_0^I = \frac{\delta_1 S_0}{\delta} \sum_{\tau=0}^{T} q(a,a+\tau)(1-e^{-\delta\tau}) + \frac{\delta_1 S_0}{\delta}(1-e^{-\delta T}) \sum_{\tau=T+1}^{\infty} q(a,a+\tau) - OP_0 \tag{18}$$

(12)式は

$$W_0^M = \frac{\delta_2 S_0}{\delta} \sum_{\tau=0}^{T} q(a,a+\tau)(1-e^{-\delta\tau}) + \frac{\delta_2 S_0}{\delta}(1-e^{-\delta T}) \sum_{\tau=T+1}^{\infty} q(a,a+\tau) \tag{19}$$

となる．ただし，上の式では，離散化にあたって，死亡時保険金は期初に支払われるものとした．なお，実際の商品を評価した 7 節では，月単位の離散化を行っている．[4]

5. 年金保障型商品の評価

年金部分に元本保障がつくタイプの商品は，プレーン型商品の死亡保険部分と同じように考えて評価すればよい．

すなわち，プレーン型の場合に(2)式で与えられた契約者受取額の経済価値は

$$\begin{aligned} V_0 &= E\left[\left\{\max\left(S_\tau, S_0\right) + kyS_0\right\} \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} e^{-r\tau} + \max(S_T, S_0)\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} e^{-rT}\right] \\ &= OP_0 + E\left[S_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} e^{-r\tau} + S_T \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} e^{-rT}\right] \end{aligned} \tag{20}$$

ただし，$OP_0 = E\left[\left\{\max\left(0, S_0 - S_\tau\right) + kyS_0\right\}\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} e^{-r\tau} + \max(0, S_0 - S_T)\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} e^{-rT}\right]$ (21)

となる．ブラック＝ショールズ公式を用いると，OP_0 は

$$OP_0 = E\left[\left\{BSPut(S_0,S_0,\tau,\sigma,\delta,r) + kyS_0 e^{-r\tau}\right\}\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + BSPut(S_0,S_0,T,\sigma,\delta,r)\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right] \tag{22}$$

で与えられる．V_0，W_0^I，W_0^M を与える(8)式，(10)式，(12)式および「価値保存の法則」(13)式はそのままである．元本の一部が保障されるタイプの商品についても，同じように取り扱うことができる．

6. ステップアップ型商品の評価

変動ストライク・ルックバック・オプション

ステップアップ型死亡保障の場合，最低保障額の更新日を $t_1, t_2, \cdots$ とすると，死亡時点 τ における

る最低保障額 $\hat{S}_\tau$ は

$$\hat{S}_\tau = \max_{0 \le t_i \le \tau} S_{t_i} \tag{23}$$

であり，(4)式に対応するオプション部分の経済価値は

$$OP_0 = E\left[\left\{\max\left(0, \hat{S}_\tau - S_\tau\right) + kyS_0\right\}\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} e^{-r\tau}\right] \tag{24}$$

で与えられる．ふたたび条件付き期待値の重ね合わせ公式を用いると，

$$OP_0 = E\left[\left\{E\left[\max\left(0, \hat{S}_\tau - S_\tau\right)e^{-r\tau}\middle|\tau\right] + kyS_0 e^{-r\tau}\right\}\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right] \tag{25}$$

となる．ここで，$E[\max\left(0, \hat{S}_\tau - S_\tau\right)e^{-r\tau}\big|\tau]$ は満期日が τ のヨーロピアン変動ストライク・ルックバック・プットオプションを初期時点で評価した評価額である[5]．そこで，今日の原資産価格 S，最大価格 $\hat{S}$，満期までの残存日数（年表示）τ の変動ストライク・ルックバック・プットオプションの理論価格を $LBPut(S, \hat{S}, \tau, \sigma, \delta, r)$ と表すと，(25)式は

$$OP_0 = E\left[\left\{LBPut(S_0, S_0, \tau, \sigma, \delta, r) + kyS_0 e^{-r\tau}\right\}\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right] \tag{26}$$

となる．

最低保障額の更新が時間的に連続で行われる場合は，(1)式の仮定の下で変動ストライク・ルックバック・プットオプションの解析解が次式で与えられることが知られている．[6]

$$\begin{aligned} LBPut(S, \hat{S}, \tau, \sigma, \delta, \tau) \;&=\; \hat{S}e^{-r\tau}\Phi(-x_2) - Se^{-\delta\tau}\Phi(-x_1) \\ &+ Se^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}\left[-\left(\frac{S}{\hat{S}}\right)^{\frac{-2(r-\delta)}{\sigma^2}}\Phi\left(x_1 - \frac{2(r-\delta)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + e^{(r-\delta)\tau}\Phi\left(x_1\right)\right] \end{aligned} \tag{27}$$

ただし

$$x_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{\hat{S}}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$x_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{\hat{S}}\right) + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

ルックバック・プットオプションの利得は，次のような戦略によって複製できる．まず，今日の原資産価格を行使価格とし，複製対象のルックバック・オプションと同じ満期日のヨーロピアン・プットオ

プションを購入する．そして，そのポジションを原資産価格が最高価格を更新するまで維持する．最高価格が更新されたときは，古いプットオプションを売って，新しい最高価格を行使価格とするプットオプションを買う．このプットオプションも，満期日は同じものを選ぶ．そして，このプットオプションを最高価格がふたたび更新されるまで持ち続け，最高価格が更新された時点で，また新しい最高価格を行使価格とするプットオプションに入れ替える．このロールオーバーをオプションの満期日まで繰り返していく．上記の戦略に従えば，満期日にはルックバック・オプションと全く同一の利得が実現する．

この複製戦略を実行するには，最高価格の更新日におけるオプション入れ替えのために，途中で資金の追加投入が必要になる．資金の出入りがかならずマイナスになるのは，オプションの入れ替えが，安い行使価格のプットオプションを売って高い行使価格のプットオプションを買うという形になるためである．この途中のキャッシュフローを証券化した仮想的な証券化商品に，Garman [1993] は「ストライク・ボーナス・オプション」という名前をつけている．この用語を用いると，最初に購入するプット・オプション 1 単位とストライク・ボーナス・オプション 1 単位のポートフォリオは，変動ストライク・ルックバック・オプション 1 単位と等価である．ルックバック・オプションの満期日の利得が，最初のプット・オプションとストライク・ボーナス・オプションから得られるキャッシュフローから，完全に複製できるからである．

(27)の評価式はこの等価関係を表現している．右辺の前半が最初に購入するヨーロピアン・プットオプションの価値である．また，Garman はストライク・ボーナス・オプションの価値が右辺の後半の式で与えられることを導いた．ただ，この評価式は最高価格の更新が時間的に連続で行われる場合にしか成立しない．しかし，実際の商品では，更新は一定の時間間隔で行われる．われわれは，三項ツリーのアルゴリズムによってルックバックオプションの評価を行い，連続時間更新の場合の評価値と比較した．

三項ツリー・アルゴリズムによる評価

ルックバック・オプションはオプションの利得が原資産価格の経路に依存する経路依存型オプション(path-dependent option)である．そのために，Cox/Ross/Rubinstein [1979]が考案した再結合型ツリー(recombining tree)による評価法をそのまま用いることができない[7]．われわれは，原資産価格の三項ツリー上に Hull/White [1993]の方法を適用して，ルックバック・オプションの評価計算を行った．以下にその概要を説明する．

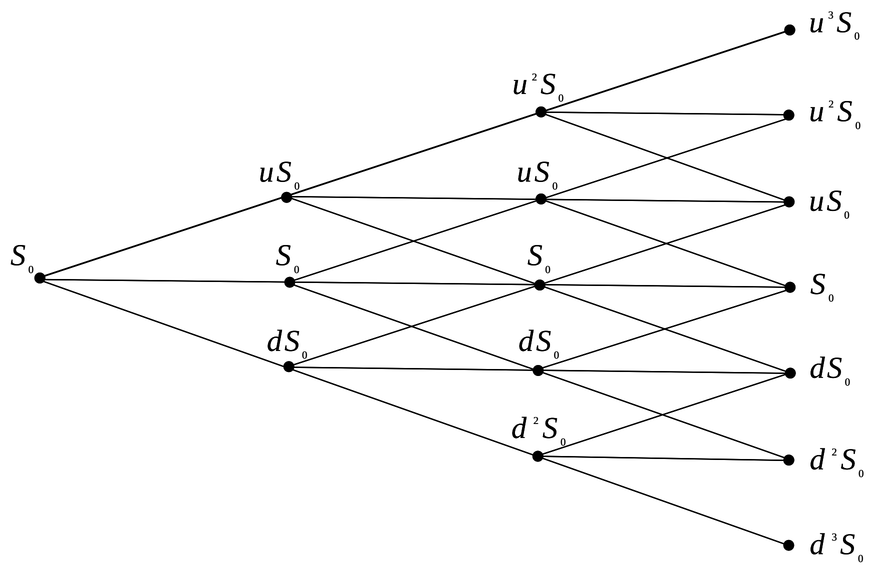
(1)式で与えられた積立金$\{S_t; 0 \le t \le T\}$の確率的挙動を図 4 の三項ツリーで表す．格子の最小時間間隔をΔtとする．最初の格子点が表す積立金は元本S_0である．この積立金は，Δt時間後に確率p_u, p_m, p_dで，それぞれuS_0, S_0, dS_0になる．同様に，他の任意の格子点が表す積立金をSとすると，Δt時間後に積立金は確率p_u, p_m, p_dでそれぞれuS, S, dSになる．ここでパラメーターを

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\,(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{1}{6},\ \ p_m = \frac{2}{3},\ p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\,(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{1}{6}$$

と設定すると, 図 4 の三項ツリーはΔtを十分小さくとるときに(1)式の幾何ブラウン運動を表現することが知られている. [8]

図4　積立金の三項ツリー



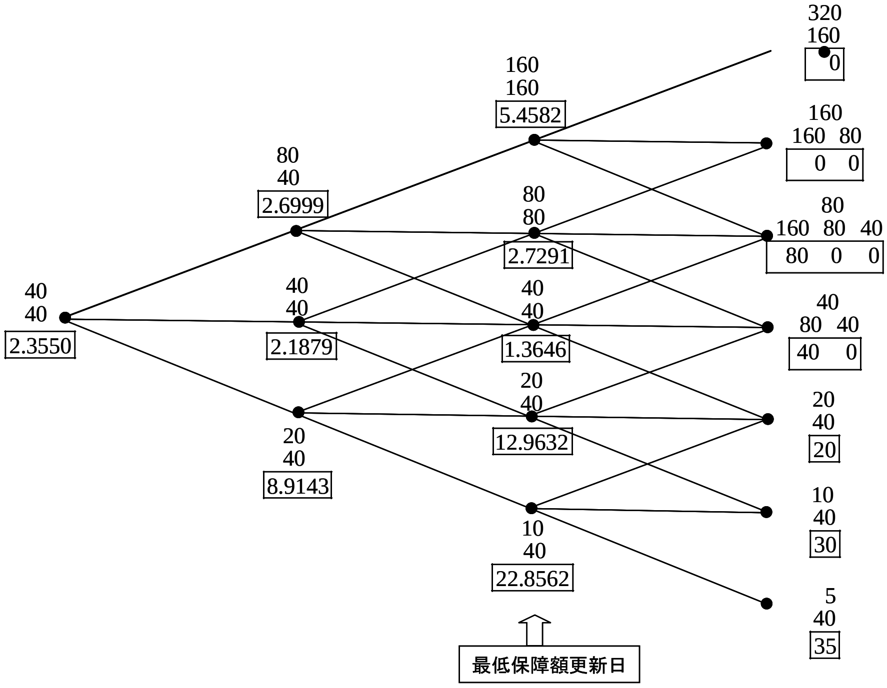
ステップアップ型の死亡保障を提供する変額年金保険の場合, 契約者の死亡時点で保険会社が負担する変動ストライク・ルックバック・プットオプションの利得は$\max\left(0, \hat{S}_\tau - S_\tau\right)$である. この利得の大きさは, 契約者の死亡時点で積立金が図のどの格子点に達しているか(S_τ)だけでなく, 死亡時点における最低保障額の大きさ$(\hat{S}_\tau)$にも依存する. そして後者は, 積立金が過去にどの格子点を通過して現在の格子点に到達したかに依存する. つまり, 各格子点には, 積立金の経路に依存して複数個の最低保障額が対応する. これをそのまま格子上に表そうというのが Hull/White [1993]の方法である[9].

図 5 は, 元本 40 円, 短期金利年利 10%, 死亡までの年数 6 年として, 積立金の動きを 3 期の三項ツリーで表したものである. この場合, $S_0 = 40, \Delta t = 2, r = 0.10$ である. また, $p_u = 1/4, p_m = 2/3,\ p_d = 1/12$とする. また, 最低保障額の更新は契約開始から4年後, つまり左から 3 番目の時点に行われると仮定する.

図の格子点の上段の数字は積立金の大きさ(S_t)である. 中段には, その格子点で達成可能な最低保障額の大きさ$(\hat{S}_t)$をすべて列挙している. 下段には, その格子点で達成可能な最低保障

額の個々のケースに対応して計算されたオプションの価値を示している．右端の各格子点でのオプション価値は，オプションの利得 $\max(0, \hat{S}_\tau - S_\tau)$ から計算される．

図5　ルックバック・オプションの評価



最低保障額の更新は契約開始 4 年後（左から 3 番目）の格子点でのみ行われるので，それ以前の全格子点では最低保障額は 40 円である．左から 3 番目の格子点では，その日の積立金がそれまでの最低保障額 40 円を超えたときに最低保障額の切り上げが起きる．つまり，最低保障額は一番上と上から 2 番目の格子点で 160 円と 80 円，それより下の格子点では 40 円となる．右端の格子点では最低保障額の更新は行われないので，達成可能な最低保障額は図に示すようになる．この例では，一つの格子点に複数の最低保障額が対応するのは右端の格子点だけになるが，ツリーが右側に拡がれば，途中の格子点にも複数の最低保障額が対応するようになる．

オプションの価値は右端から逆順に決まっていくが，そのロジックを格子点 A について説明する．現在の積立金は 40 円，最低保障額も 40 円であるが，1 期後にも最低保障額は 40 円のままなので，積立金が 80 円になればオプションはアウト・オブ・ザ・マネーとなり，価値は 0 円である．積立金が 40 円のままの場合，オプションはアット・ザ・マネーで価値は 0 円，積立金が 20 円になれば，オプションはイン・ザ・マネーで価値は 20 円となる．したがって，格子点 A におけるオプションの価値は，1 期後のオプション価値の割引現在価値の条件付き期待値

$$(0 \times p_u + 0 \times p_m + 20 \times p_d) e^{-0.01 \times 2} = 1.3646$$

と計算される. 同じように各格子点におけるオプション価値を計算していくと, 契約開始時点でのオプション価値は 2.3550 円であることが分かる.

このロジックで重要な点は, どの格子点についても, 1 期間後に積立金がどの格子点に移動するかが決まれば, 移動後の格子点で実現可能な最低保障額が複数あっても, どの最低保障額が次の格子点で実現するかが確定することである. すなわち, $\hat{S}_t$ と $S_{t+\Delta t}$ が決まれば $\hat{S}_{t+\Delta t}$ が $\hat{S}_{t+\Delta t} = \max(\hat{S}_t, S_{t+\Delta t})$ によって一意的に決まる. 経路依存型オプションでも, 利得が原資産価格の過去の最大値や最小値に依存して決まるルックバック・オプションのほかに, 平均値に依存して決まるアジアン・オプションや標準偏差に依存して決まるタイプのオプションでは, この性質が満たされるので, 上記のアルゴリズムが実行可能である. しかしながら, 利得が原資産価格の過去の更新時点における上から 2 番目の値や中位数, 最大値と最小値の幅などに依存して決まるタイプのオプションには, 上記のアルゴリズムは通用しない[10].

7. 変額年金保険商品の評価および考察

この節では, 3 種類の商品タイプ別に, 保険費用率, 運用費用率, 災害死亡割増給付率について実際の商品の平均値を前提にして, 変額年金保険の分析を行う[11]. なお, 現在販売されている変額年金保険で, これらのパラメータが加入者年齢や契約期間に依存する設計になっている商品は存在しない. 本節末尾では, いくつかの商品を選んで個別商品間の横比較の結果も示し, 実質費用面で商品間の格差が大変大きいことを指摘する.

プレーン型商品

現在販売されている商品の平均的な費用率を前提にして, 40 歳の誕生日を迎えた男子が 60 歳まで 20 年間の積立期間で, プレーン型変額年金保険に加入する場合を分析してみよう. 前提にしたパラメーター値は表 2 の通りである.

表 2　計算に用いたパラメータ値

保険費用率　(δ_1)	1.50%
運用費用率　(δ_2)	1.50%
災害死亡割増給付率 (k)	50.00%
災害死亡率 (y)	0.05%
短期金利 (r)	3.00%

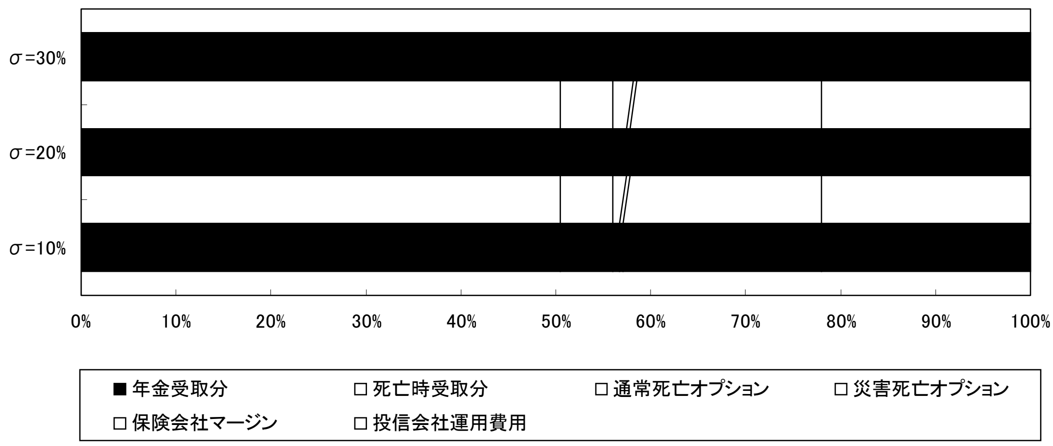
図 6 は, このモデル・ケースにおける元本の分配状況を示したものである. 左から, (a)積立金のうち契約者が年金として受け取る部分の割合, (b)契約者が死亡時に受け取る部分の割合, (c)保険

会社によって補填される通常死亡オプション，(d)災害死亡オプション，(e)保険会社のマージン，(f)投信会社の運用費用，である．(a)から(d)が契約者の取り分，(e)が保険会社の取り分，(f)が投信会社の取り分である．図では，運用するファンドのボラティリティーを変えて，分配状況がどう変化するかを調べた結果も示した．

オプション部分を除けば，積立金の 3 者への分配割合は，ファンドのボラティリティーの影響を受けない．その割合は，契約者が年金として受け取る部分が 50.5%，契約者が死亡時に受け取る部分が 5.5%，保険会社と投信会社への分配がそれぞれ 22%である．死亡保障に関わるオプションは，保険会社から契約者への価値の移転を意味するが，この部分は積立金がボラティリティーの大きいファンドで運用されるほど大きくなる．したがって，元本の分配を有利にするという観点からいうと，選択するファンド間で運用費用に差がない場合，契約者には，少しでもハイリスク・ハイリターンのファンドで積立金を運用しようというインセンティブが働く．ただ，いまのモデル・ケースではオプションの価値は，通常死亡オプションが元本の 0.7 から 2.1%，災害死亡オプションが 0.4%程度で，ハイリスク・ハイリターン型運用へのインセンティブは限定的である．

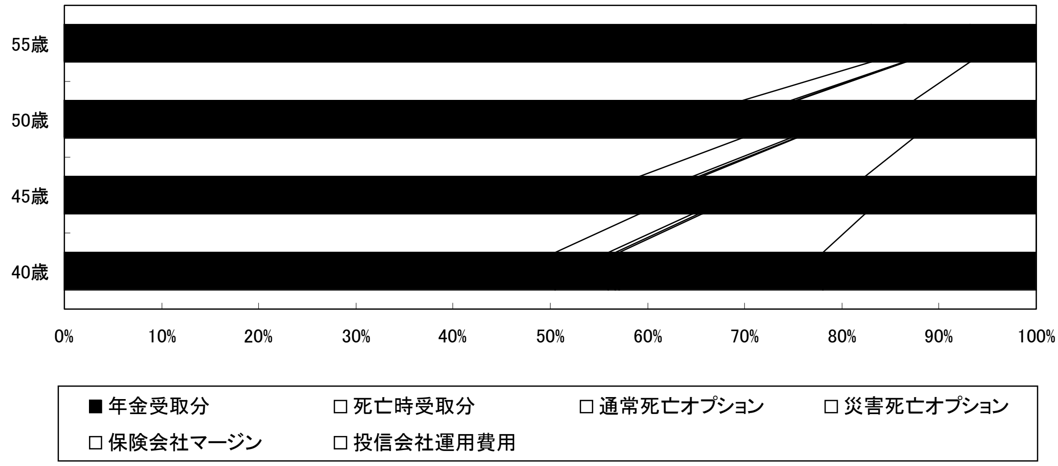
このモデル・ケースの分析結果からいえば，オプション価値を含めても，保険契約者が拠出した元本のうち，契約者本人に将来返ってくる価値の割合は 60%弱で，プレーン型商品は 40 歳前後の契約者にはかなり不利な商品という印象を与える．

図 6 ボラティリティーと元本分配状況（プレーン型商品）



加入時の年齢と 3 者間の元本分配状況の関係をみたのが，図 7 である．ここでは，60 歳の誕生日に年金を受け取ると仮定して，表 2 のプレーン型変額年金保険に 40 歳，45 歳，50 歳，55 歳の誕生日に加入した場合の分配状況を比較した．バランス型ファンドでの運用を念頭において，ファンドのボラティリティーは 10%と仮定した．

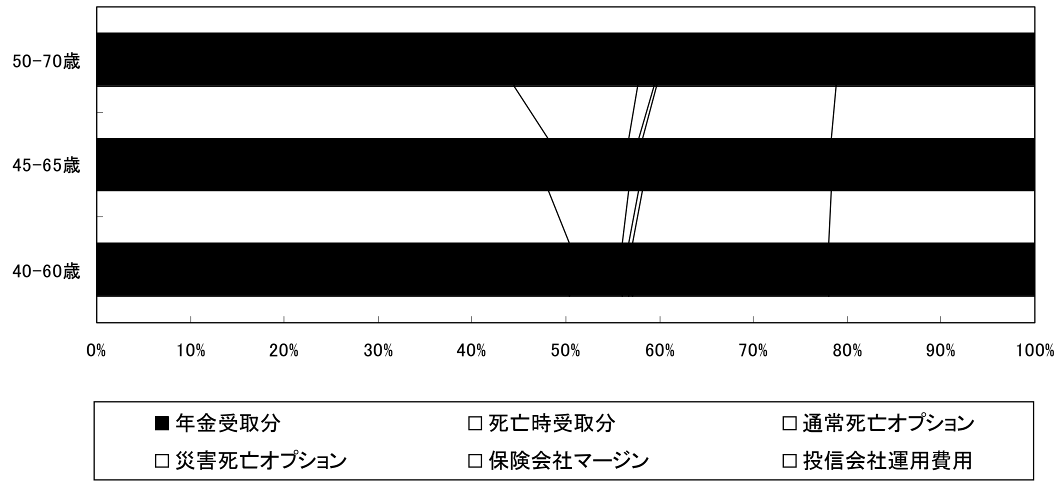
図 7 加入時年齢と元本分配状況(プレーン型商品, 年金受取年齢:60歳)



積立期間が長くなるほど, 保険会社と運用会社が元本の分配を受ける期間が長くなるので, 積立金の契約者受取分は小さくなる[12]. つまり, 若年時に加入するほど, 契約者への元本の分配割合は小さくなる. 他方, 死亡オプションの価値は若年時に加入するほど大きくなる. しかし, モデル・ケースにおいて, 加入年齢と契約者受け取り分の関係では前者の影響がはるかに大きいので, 若年契約者ほど, 元本の将来における分配は小さくなる. 図 7 の試算では, 40 歳加入者の元本受取分は 57%, 45 歳加入者の元本受取分は 66%であるのに対して, 50 歳加入者では 75%, 55 歳加入者では 87%となる. 現在, ほとんどの変額年金保険で費用率は加入者の年齢によらず一定となっているが, そうした商品設計では, プレーン型の変額年金保険は若年者に不利で, 若年者から高年齢者への所得の移転が相当程度起きることになる.

ただし, 若年時に加入するほど, 長い年数にわたって保険会社ならびに投信会社のサービスを受けるわけであるから, より多くの費用を契約者が負担するのは, 一定の範囲内で合理的ということもできる. 図 8 では, 積立期間を 20 年として, それを 40 歳から行った場合, 45 歳から行った場合, 50 歳から行った場合を比較した. 一般に, 死亡確率が単調に増加する期間の場合, 年金受取分と死亡時受取分の和及び通常死亡オプションの価値は, 期間の長さが同じであれば高年齢で契約をした方が大きい. 図 8 の試算ではそれらのいずれの条件も満たしており, 契約者受取分合計は高年齢で加入する方が大きくなることが確かめられる.

図 8 加入時年齢と元本分配状況(プレーン型商品，積立期間:20年)



年金保障型商品

現在販売されている年金保障型商品の平均的なパラメータ値を表 3 に挙げた．年金保障型の場合には，保険会社の積立金補填が年金保障の分だけ大きいので，保険費用率はプレーン型よりも高く設定される．表 3 のデータを用いて，40 歳から 60 歳までの積立期間というモデルケースについて，元本の分配状況を計算した結果を図 9 に示す．

表 3 計算に用いたパラメータ値

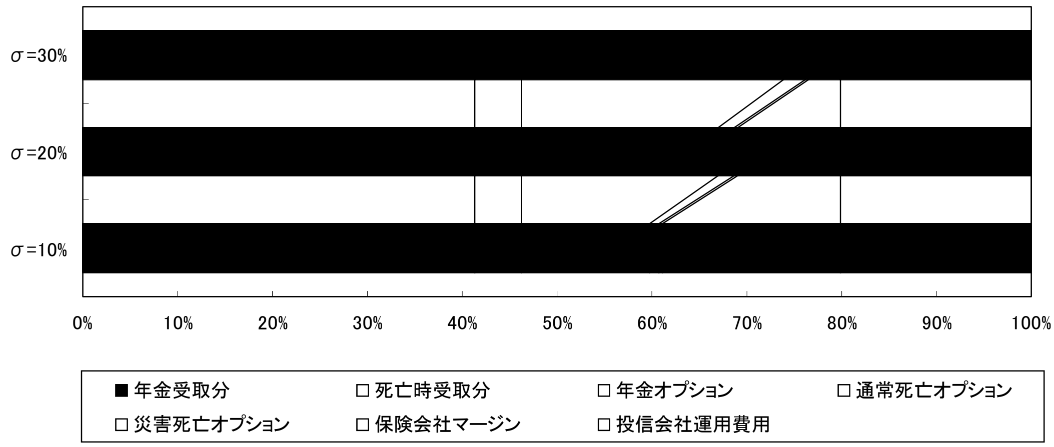
保険費用率 (δ_1)	2.50%
運用費用率 (δ_2)	1.50%
災害死亡割増給付率 (k)	50.00%
災害死亡率 (y)	0.05%
短期金利 (r)	3.00%

年金オプション部分も通常死亡オプション同様に，積立金がボラティリティーの大きいファンドで運用されるほど大きくなる．ただし，オプション価値の元本に占める割合は，通常死亡オプションでは限定的だったのに対し，年金オプションはそれに比べ非常に大きい．いまのモデル・ケースでは，通常死亡オプションが元本の 1.0 から 2.3%であるのに対し，年金オプションは 13.5%から 27.6%となっており，契約者がハイリスク・ハイリターン型運用を選択するインセンティブはプレーン型に比べさらに強くなる．

このモデル・ケースの分析結果からいえば，オプション価値を含めて，保険契約者が拠出した元

本のうち，契約者本人に将来返ってくる価値の割合は60から80%弱であり，年金保障型商品は40歳前後の契約者には有利な商品という印象を与える．

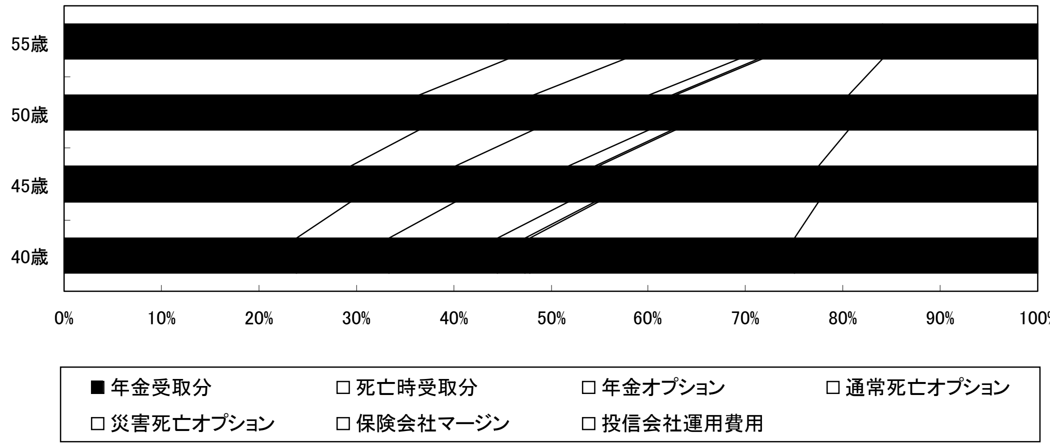
図 9 ボラティリティーと元本分配状況(年金保障型商品，年金受取年齢：60歳)



次に，加入時の年齢と3者間の元本分配状況の関係をみたのが，図10である．ここでは，70歳の誕生日に年金を受け取ると仮定して，表3の年金保障型変額年金保険に40歳，45歳，50歳，55歳の誕生日に加入した場合の分配状況を比較した．ファンドのボラティリティーは10%と仮定した．

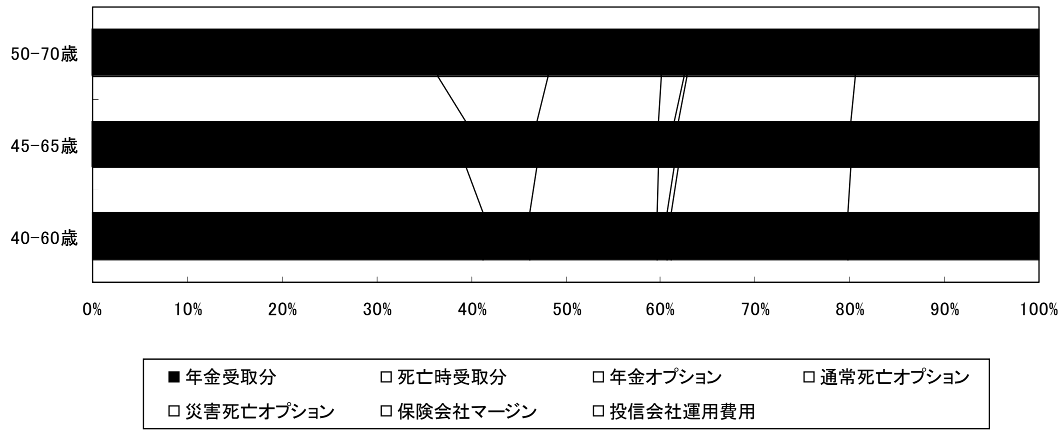
通常死亡オプションの場合は積立期間が長いほど，オプションの価値は大きくなったが，年金オプションの場合は必ずしも大きくなるとはいえない．これは，積立期間が長い場合，契約者死亡のリスクが大きくなり，年金を受け取れない確率が高くなるからである．実際にいまのモデル・ケースの場合，元本に占める年金オプションの割合は，55歳加入者は11.8%，50歳加入者は11.9%となるのに対し，45歳加入者では11.6%，40歳加入者では11.1%と，45歳以前では積立期間が長くなるにつれ元本に占めるオプション価値の割合が逆に小さくなっている．

図 10　加入時年齢と元本分配状況(年金保障型商品，年金受取年齢：70歳)



さらに，図11では，積立期間を20年として，それを40歳から行った場合，45歳から行った場合，50 歳から行った場合を比較した．いまのモデル・ケースでは，契約者受取分合計は高年齢で加入した場合の方が大きいという結果が出ているが，年金オプションに限定すると，期間の長さが同じであれば若年契約者のほうが分配価値が大きくなり，一概に高年齢で加入した方が有利であるとは言えない．

図 11　加入時年齢と元本分配状況(年金保障型商品，積立期間：20年)



ステップアップ型商品

最後に，ステップアップ型変額年金保険に加入する場合を分析してみよう．前提にしたパラメーター値は表 4 の通りである．

表4　計算に用いたパラメータ値

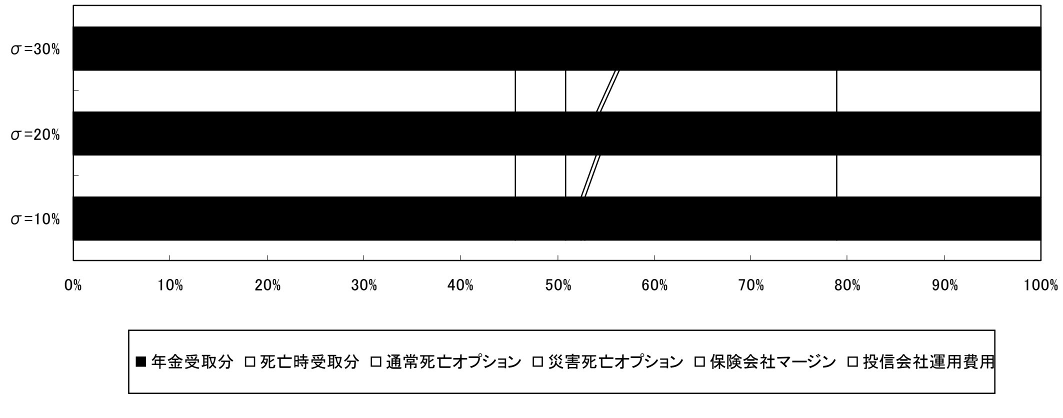
保険費用率　(δ_1)	2.00%
運用費用率　(δ_2)	1.50%
災害死亡割増給付率 (k)	50.00%
災害死亡率 (y)	0.05%
短期金利 (r)	3.00%

図 12 では 40 歳の誕生日を迎えた男子が 60 歳まで 20 年間の積立期間で，運用するファンドのボラティリティーを変えて分配状況がどう変化するかを調べた．

積立金がボラティリティーの大きいファンドで運用されるほど通常死亡オプションが大きくなる点はプレーン型と変わらないが，ここで特徴的なのは，元本に占める通常死亡オプション価値の割合がプレーン型に比べ非常に大きいことである．前のモデル・ケースでは，プレーン型は通常死亡オプションの割合が元本の 0.7 から 2.3%であったのに対し，いまの年 4 回更新のステップアップ型モデル・ケースでは 1.6 から 5.2%と非常に高い．死亡保険についてはプレーン型と比較してステップアップ型は契約者に有利な商品と言える．

ただし，いまのモデル・ケースの場合，プレーン型と比較して死亡保険が有利になる分，保険費用率も高く設定したため，ステップアップ型の年金受取分及び死亡時受取分はプレーン型と比べ小さくなっている．前者は元本に占める割合が非常に大きいため，契約者受取額合計はプレーン型のモデル・ケースと比較して，どのボラティリティーの場合も下回っている．実際の商品においてもステップアップ型の保険費用率は比較的高く設定されることが多いため，一概にプレーン型商品よりもステップアップ型商品の方が契約者に有利とは言えず，このモデル・ケースの場合のように契約者受取合計額ではかえってプレーン型を下回ることもある．

図12　ボラティリティーと元本分配状況（ステップアップ型商品，年4回更新）



次に，最低保障額更新回数がオプションの価値にどれほど影響を与えるかについて調べる．図 13, 14 では 40 歳の誕生日を迎えた男子が 60 歳まで 20 年間の積立期間で，最低保障額更新を

年 1 回, 4 回, 12 回, そして連続的に更新される場合に分けて試算した. ボラティリティーは図 13 が 10%, 図 14 が 30%の場合である.

図 13 を見るとおり, ボラティリティーが小さいときには更新回数の増減はそれ程大きくオプション価値に影響しない. 通常死亡オプションの元本に占める割合は最も大きい連続更新の場合で 1.8%, 最も小さい年 1 回の場合でも 1.4%と極めて限定的である. ボラティリティーが大きくなった図 14 の場合は幾分その影響が表れており, 連続更新の場合は 6.1%, 年 12 回の場合は 5.5%, 年 4 回の場合は 5.2%, 年 1 回の場合は 4.5%である. しかしそれでも, 更新回数の増加に対するオプション価値のセンシティビティーはボラティリティーに対するものに比べそれほど大きくない. 契約者は, 最低保障額更新回数のより多い商品に支払う対価について, 過大評価をしないようにする注意が必要である.

図13 加入時年齢と元本分配状況(ステップアップ型商品, ボラティリティー10%)

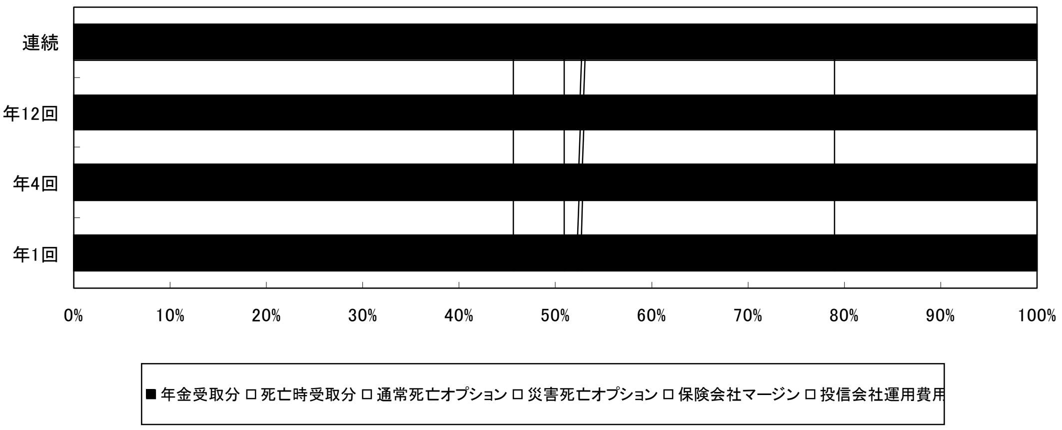
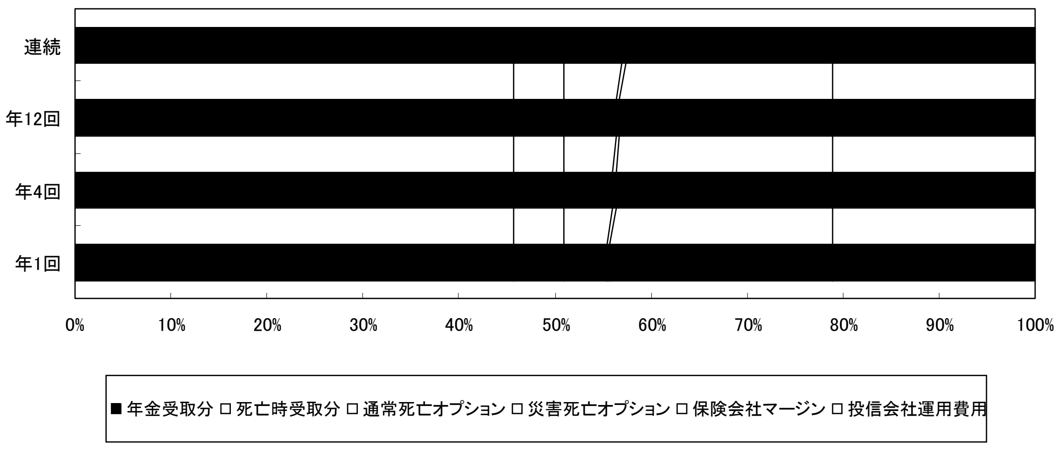


図14 加入時年齢と元本分配状況(ステップアップ型商品, ボラティリティー30%)



個別商品の比較

表 5 に, 6 個の変額年金保険商品の保険費用率及び運用費用率を示す. これらは, 実際に販売されている変額年金保険商品から各タイプの商品を 2 個ずつ選んだ結果である. これらの商品を評価した結果を図 15 に示す. 評価に用いたパラメータは表 6 の通りである. ファンドの運用は国内株のパッシブ運用を想定して, それに見合う運用費用率を選んだ. また, ボラティリティーは 20% に設定した.

表5 商品別保険費用率及び運用費用率

商品	タイプ	保険費用率(%)	運用費用率(%)	備考
A	プレーン型	1.5	0.9	
B		1.1	0.5	
C	ステップアップ型	1.9	1.0	最低保障更新回数年4回
D		2.4	0.8	最低保障更新回数年1回
E	年金保障型	1.6	0.5	年金給付は元本を全額保障
F		1.3	1.3	年金給付は元本の80%を保障

表6 計算に用いたパラメータ値

契約時年齢	40歳
年金受取年齢	60歳
災害死亡割増給付率 (k)	10.00%
災害死亡率 (y)	0.05%
ボラティリティー (σ)	20.00%
短期金利 (r)	3.00%

図15 商品別元本分配状況(ボラティリティー20%, 契約時年齢:40歳, 年金受取年齢:60歳)

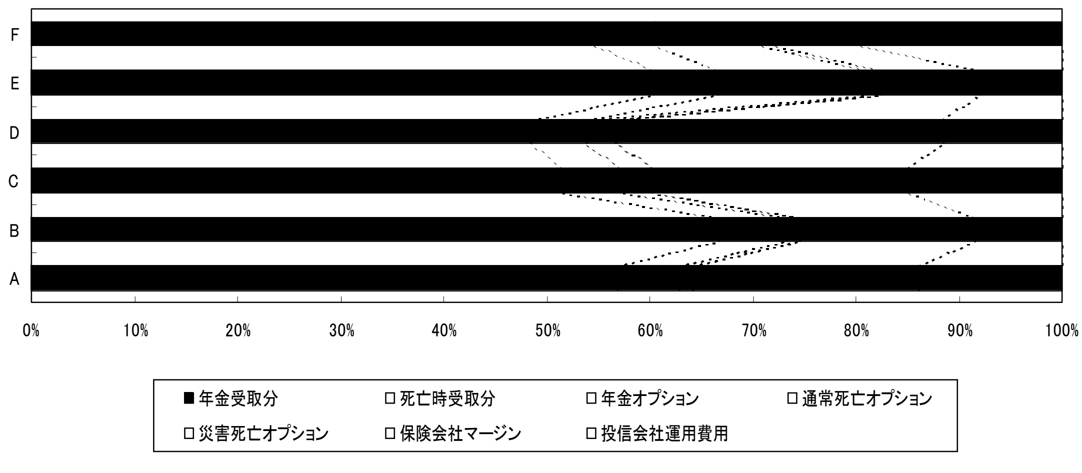


図 15 の結果にみるように，われわれの計算例では，契約者取り分に，商品 D の 56.8%から商品 E の 82.4%まで，大きな格差が存在する．保険会社の設定する保険費用率は，プレーン型，年金保障型，ステップアップ型の順に大きくなるが，元本の分配を見ると，年金保障型が契約者への分配が大きく，ステップアップ型が小さい傾向があり，現在の設定では契約者にとって年金保障型は割安，ステップアップ型は割高である．

さらに，同じパッシブ運用型ファンドにもかかわらず，運用費用率が 0.5%～1.3%と運用会社によって大きく異なっていることが商品の元本分配に著しい格差をもたらしている．計算例では，運用費用率が 0.5%の商品 E の運用会社への配分は 8.0%，1.3%の商品 F では 19.8%である．わずか 1%未満の運用費用率の差であるが，20 年に渡る契約では契約者の取り分の違いが大きく現れることになる．

総じて，プレーン型のように単純な保障を提供する商品では保険費用率が低く，きめ細かい保障を提供する商品では保険費用率が高く設定されている．しかし，ここで取り上げたステップアップ型商品（D と E）の場合，プレーン型にくらべて通常死亡保険オプションの価値は大きいものの，契約者受取合計額ではかなり不利な商品になっている．契約者にとっては，手数料がその商品の特性に照らして適切に設定されているかどうかを見極めることが商品選択上の重要なポイントである．また，保険会社・運用会社には，著しく商品の魅力を損なわないような手数料設定をすることが求められる．

また，契約者の加入年齢，契約期間によって手数料を差別化している商品が見あたらないことは問題である．契約期間の長さに関わらず手数料が一定であるため，変額年金保険は長期契約者にとって相対的に不利な商品になっている．今後，保険会社や運用会社は契約者の加入年齢や契約期間などによって手数料を差別化し，契約者間の不公平を解消していくことが望ましい．

８．まとめ

ブラック＝ショールズ・モデルにはじまるオプション評価理論は，金融商品の複製コストを導く理論である．その意味で，この論文は変額年金保険の「原価計算」の考え方とその具体的な計算方法を提示したものであり，保険購入者の立場からみた保険商品の最終的な価値を計算したわけではない．製造原価の同じ商品でも，購入者からみた消費価値はさまざまであり，さらに商品の価値は個々の消費者によって異なると考えるべきである．したがって，後者の意味で個々の変額年金保険を評価するには，原価に対する分析以外に，保険購入者のリスク選好や将来の資金計画を織り込んだより総合的な評価方法が必要となる．また，この論文で提示した原価計算の方法は，保険契約者の死亡リスクが完全ヘッジ可能という仮定の上に立ったものであり，契約者の年齢層に偏よりがあったり，保険会社が保有する契約件数が少なければ，死亡保障オプション部分のモデル評価額はヘッジ・エラーの分だけ実際のコストよりも過小になる．

本論文では，変額年金保険の評価の基本的な考え方の確立を目的としたので，評価のもっとも重要な部分のみに分析を限定した．現在販売されている変額年金保険には，途中解約の場合の

解約控除やファンド切り替え頻度の制限，積立期間の延期などの条項が設定されているものが多い．こうした条項もオプション評価理論を使って評価することが可能であり，今後の課題としたい．

引用文献

Babbs, S. [1992], “Binomial valuation of lookback options,” Working Paper, Midland Global Markets.

Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein [1979], “Option Pricing: A Simplified Approach,” *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263.

Garman, M. [1989], “Recollection in Transquillity,” *Risk*, 2(3), 16-19.

Goldman, M., H. Sosin and M. Gatto [1979], “Path-Dependent Options: Buy at the low, Sell at the High,” *Journal of Finance*, 34(5), 1111-1127.

Hull, J. and A. White [1993], “Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options,” *Journal of Derivatives*, 1(1), 21-31.

黒田耕嗣 [2003a],『生保年金数理〈1〉理論編』培風館.

黒田耕嗣(編) [2003b],『生保年金数理〈2〉理論・実務編』培風館.

脚注

[1] この価値保存の法則は，保険会社の負担するオプション部分のリスクが保険会社にとって完全ヘッジ可能という条件の下で，一般的に成立する.

[2] 生命表やそれに基づく確率計算については黒田[2003a]，[2003b]に詳しい解説がなされている.

[3] $r(40,x)$ は $r(40,x)=1-\sum_{i=40}^{x-1} q(40,i)$ からも求めることができる.

[4] 年間死亡率 $q(x,x)$ を各月に均等配分した.

[5] 満期日 T の利得が $\max\{(\max_{0\le t\le T} S_t)-K,0\}$ のオプションを固定ストライク・ルックバック・コール，$\max\{K-(\min_{0\le t\le T} S_t),0\}$ のオプションを固定ストライク・ルックバック・プットと呼ぶ. 一方，満期日 T の利得が $\max\{S_T-(\min_{0\le t\le T} S_t),0\}$ のオプションを変動ストライク・ルックバック・コール，$\max\{(\max_{0\le t\le T} S_t)-S_T,0\}$ のオプションを変動ストライク・ルックバック・プットと呼ぶ.

[6] 原資産に配当のない場合については Goldman, Sosin, and Gatto [1979]が，原資産の配当利回りが一定の場合については Garman[1993]が，ヨーロピアン・ルックバック・オプションの評価式を導出した.

[7] 変動ストライク・ルックバック・プットの利得は $\max\left(0,\hat{S}_T-S_T\right)=S_T\max(0,\hat{S}_T/S_T-1)$ と書き直すことができる. Babbs[1992]は $M_t=\hat{S}_t/S_t$ の二項ツリーを用いてこのタイプのオプションを評価できることを示した. この方法は，状態変数の数を 1 個にとどめることができるので計算効率が大変良いが，固定ストライク型のオプションには適用できない.

[8] S_t が(1)式の幾何ブラウン運動に従うとき，$x_t=\ln(S_t)$ は算術ブラウン運動 $dx_t=(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\,dt+\delta\,dZ_t$ に従う. この x_t の確率的挙動を三項ツリーで表現して，各格子点に S_t の値を記したのが図 4 である.

[9] これは，オプションの価値関数を $V(S_t,\hat{S}_t,t)$ と表現すること，つまり状態変数を $(S_t,\hat{S}_t)$ の 2 変数にすることに対応する.

[10] 些細な話であるが，利得が中位数に依存して決まるオプションの場合には，原資産価格のモニター時点を 2 つ通過する毎に中位数が更新されると想定する必要がある.

[11] 2003 年 3 月末時点での調査結果に基づく.

[12] これは厳密には，(8)式の右辺第 2 項が T に関して単調減少であることから，数学的に証明される.