



HSC Research Report

HSC/04/03

**Principal Components
Analysis in implied
volatility modeling**
*(Analiza składowych głównych
w modelowaniu implikowanej
zmienności)*

Rafał Weron*
Sławomir Wójcik**

* Hugo Steinhaus Center, Wrocław University of
Technology, Poland

** ComArch SA, Kraków, Poland

Hugo Steinhaus Center
Wrocław University of Technology
Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland
<http://www.im.pwr.wroc.pl/~hugo/>

Rafał Weron

Centrum im. H. Steinhausa, Politechnika Wrocławska

Sławomir Wójcik

ComArch S.A., Kraków

ANALIZA SKŁADOWYCH GŁÓWNYCH W MODELOWANIU IMPLIKOWANEJ ZMIENNOŚCI¹

1. Wprowadzenie

Ceny instrumentów finansowych podlegają ciągłym fluktuacjom. Parametr, który mierzy te fluktuacje w danym okresie czasu nazywamy zmiennością (ang. *volatility*). Im większe fluktuacje – a zatem i większa zmienność cen instrumentu finansowego – tym większe jest ryzyko związane z tym instrumentem. W powszechnie stosowanym modelu Blacka-Scholesa cena opcji zależy od pięciu zmiennych (zobacz [10] lub [14]): ceny instrumentu podstawowego (we wzorze poniżej: U), ceny wykonania opcji (K), czasu pozostałego do terminu wygaśnięcia opcji (τ), stopy procentowej (r) oraz właśnie zmienności (σ). Niestety wzorów typu Blacka-Scholesa (tutaj: na cenę opcji kupna C_{BS} i opcji sprzedaży P_{BS} na kontrakt futures):

$$C_{BS} = e^{-r\tau} [U\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)] \quad \text{oraz} \quad P_{BS} = e^{-r\tau} [-U\Phi(-d_+) + K\Phi(-d_-)],$$

gdzie $d_{\pm} = \ln(U/K) / \sigma\sqrt{t} \pm \sigma\sqrt{t}/2$, a Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego, nie da się odwrócić ze względu na zmienność, tzn. przekształcić do postaci $\sigma = f(C_{BS} \text{ lub } P_{BS}, U, K, \tau, r)$. Jeżeli jednak znamy rynkową cenę opcji oraz wartości pierwszych czterech parametrów wzoru na cenę opcji to korzystając z iteracyjnej metody znajdowania zer (pierwiastków) funkcji, np. bisekcji czy metody Newtona-Raphsona [13], możemy „odwrócić” powyższe wzory i numerycznie aproksymować zmienność użytą do wyceny tej opcji. Tak uzyskaną zmienność nazywamy implikowaną (ang. *implied volatility*).

¹ PRINCIPAL COMPONENTS ANALYSIS IN IMPLIED VOLATILITY MODELING.

We analyze the implied volatility surface structure of ODAX options as traded on DTB (currently Eurex). We apply PCA to cross sections of the implied volatility surface taken along the same moneyness (m) or the same time to maturity (τ). For data from the period October 3rd 1997 – November 30th 1998 a substantial reduction of the dimensionality of the problem was achieved. It turned out that (i) for the m -sections the first two principal components contained 99,997% of information, and (ii) for the τ -sections the first three principal components contained 99,892% of information. Moreover, the obtained principal components were very similar for different m 's or τ 's allowing us to assume that that the space spanned by the eigenvectors is identical across several groups (of m 's or τ 's), i.e. leading us to the so called Common PCA.

Praktycy rynku dobrze wiedzą, że opcje z cenami wykonania poniżej aktualnej ceny instrumentu podstawowego są wyceniane w oparciu o wyższą zmienność niż opcje po cenie [8]. Natomiast wycena opcji z wyższymi cenami wykonania zależy już od instrumentu podstawowego. Na rynku walutowym są one wyceniane podobnie, jak opcje z niższymi cenami wykonania, tzn. w oparciu o wyższą zmienność, i jeśli wykreślimy implikowane zmienności tych opcji względem ich cen wykonania (lub tzw. parametru *moneyness* $m = K/U$) to ujrzymy krzywą przypominającą uśmiech (ang. *volatility smile*). Jednakże dla większości pozostałych opcji – włączając w to najaktywniej handlowane na giełdach terminowych opcje na indeks S&P500 oraz na indeks DAX – możemy zaobserwować asymetrię. Krzywa implikowanych zmienności przypomina wtedy bardziej grymas (ang. *grimace, smirk*) niż uśmiech.

Jeżeli w danej chwili czasu t , oprócz rozpatrywania zmienności dla różnych cen wykonania opcji (w praktyce częściej dla różnych wartości parametru *moneyness*) będziemy chcieli zbadać zależność implikowanej zmienności od terminu do wygaśnięcia opcji τ , to otrzymamy tzw. powierzchnię implikowanej zmienności (ang. *implied volatility surface*) $I_t : (m, \tau) \rightarrow I_t(m, \tau)$.

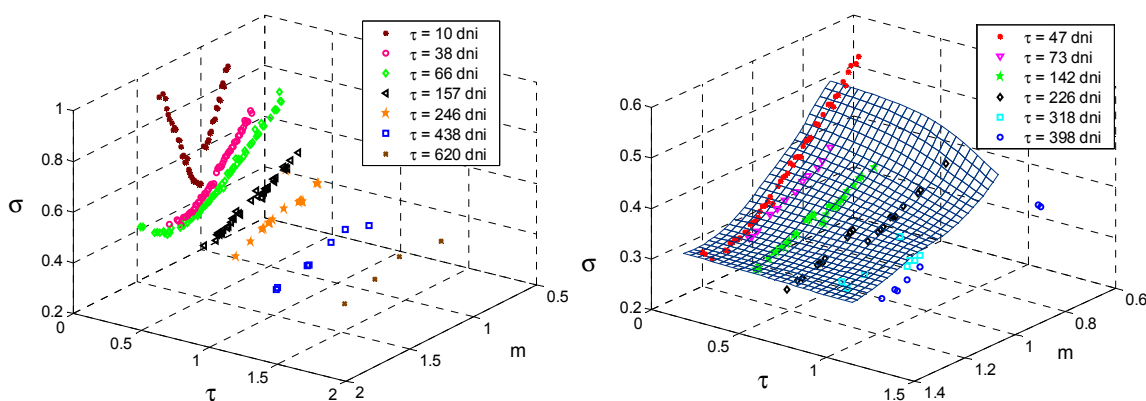
2. Opcje na indeks DAX

Do ilustracji omawianych pojęć posłużą nam dane z jednego z najbardziej płynnych rynków opcji, a mianowicie z giełdy DTB (aktualnie Eurex). Są to dane transakcyjne typu *tick-by-tick* dla opcji ODAX, czyli opcji typu europejskiego na niemiecki indeks akcji DAX, z okresu od 3 października 1997 do 30 listopada 1998 roku. Ze względu na niemieckie prawo podatkowe, które praktycznie uniemożliwia obliczenie stopy dywidendy indeksu DAX, opcje ODAX są wyceniane przy pomocy wzoru Blacka [1] dla opcji na kontrakty futures (a nie wzoru dla opcji indeksowych). Do wyznaczania implikowanej zmienności będziemy używali właśnie tego wzoru.

Spośród wszystkich notowań opcji ODAX z analizowanego okresu zostały przez nas wybrane ceny zamknięcia opcji, które nie były w cenie (ang. *out-of-the-money*), tzn. opcje kupna dla $m > 1$ oraz opcje sprzedaży dla $m < 1$, ponieważ te opcje wnoszą najwięcej informacji na temat zmienności. Otrzymano w ten sposób około 100 notowań dziennie. Druga redukcja danych polegała na usunięciu kontraktów, których czas do terminu wygaśnięcia był mniejszy niż 0,05 roku czyli około 18 dni. Zabieg ten był konieczny ze względu na bardzo nieregularne, w stosunku do innych τ , zachowania się zmienności opcji

bliskich terminu wykupu, patrz rys. 1. Z drugiej strony trzeba było usunąć dane z dużym τ , ponieważ było ich bardzo niewiele i estymacja z ich udziałem mogłaby zniekształcić całą powierzchnię. Dlatego rozpatrywany przez nas przedział czasu do terminu wygaśnięcia wynosił $[0,05; 1]$.

Ze względu na fakt, iż najczęściej handluje się tzw. opcjami po cenie (ang. *at the money*, ATM), czyli opcjami o cenie wykonania K bliskiej obecnej cenie instrumentu podstawowego U , siatka generowanych przez nas powierzchni była równomiernie rozłożona wokół punktu $m = 1$ i zawierała się w przedziale $[0,7; 1,3]$.



Rys. 1: Lewy panel: Wykresy zmienności dla opcji notowanych 12 października 1998 r. Widać, że kształt krzywej w jaką układają się punkty dla małych τ znacznie odbiega od krzywych tworzonych dla większych τ . Prawy panel: Estymowana powierzchnia implikowanej zmienności z 4 listopada 1997 r. wraz z danymi, które posłużyły do jej estymacji. Źródło: opracowanie własne.

Po takim „przefiltrowaniu” danych obliczone zostały implikowane zmienności $I_t(m_i, \tau_i)$, które posłużyły do skonstruowania nieparametrycznego estymatora Nadaraya-Watsona wygładzającego powierzchnię implikowanej zmienności postaci (zobacz [9] lub [15]):

$$\hat{I}_t(m, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^n g(m - m_i, \tau - \tau_i) I_t(m_i, \tau_i)}{\sum_{i=1}^n g(m - m_i, \tau - \tau_i)},$$

gdzie $g(x, y) = (1/2\pi\sqrt{h_1 h_2}) \cdot \exp(-x^2/2h_1) \cdot \exp(-y^2/2h_2)$ jest jądrem gaussowskim. Kluczowym momentem estymacji jest dobranie odpowiednich szerokości okien h_1 i h_2 . Zbyt szerokie okna powodują, że powierzchnia jest za bardzo wygładzona, a zbyt małe, że jest za bardzo pofałdowana. Parametry h_1 i h_2 wyznaczono używając tzw. metody *crossvalidation* [9], której idea bazuje na znalezieniu okna minimalizującego wyrażenie

$p(h_1, h_2) = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N (I(m_i, \tau_i) - \hat{I}_{h_1, h_2}(m_i, \tau_i))^2$, gdzie $\hat{I}_{h_1, h_2}(m_i, \tau_i)$ wylicza się tak, jak w powyższym wzorze, ale z pominięciem i -tej obserwacji. Okazało się, że wszystkie powierzchnie mają podobną strukturę i parametry dobrane dla jednej, zupełnie dobrze pasują do innych. Przyjęto więc $h_1 = 0,003$ oraz $h_2 = 0,03$. Otrzymany estymator został użyty do stworzenia powierzchni implikowanej zmienności, patrz rys. 1.

3. Analiza Składowych Głównych (PCA)

Przypomnijmy, że każdy punkt przestrzeni można opisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów własnych tej przestrzeni. Analiza Składowych Głównych (*Principal Components Analysis*, PCA) polega na konstrukcji nowej bazy umożliwiającej redukcję „niepotrzebnych” wymiarów, a tym samym umożliwia opisanie grupy danych jak najmniejszą liczbą niezależnych składników.

Wprowadzenie nowego układu współrzędnych, czy też znalezienie nowej bazy wektorów własnych opisuje rozkład Karhunen-Loeve². Niech (x_i^1, x_i^2) będzie parą współrzędnych opisującą punkt x_i płaszczyzny (przestrzeni R^2), którą w standardowej bazie można zapisać jako $(x_i^1, x_i^2) = x_i^1(1,0) + x_i^2(0,1)$. Przy zadanej liczbie punktów n

można utworzyć macierz postaci $X = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n-1}^1 & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \end{bmatrix}$. Przy jej użyciu można

utworzyć macierz kowariancji próbkowej (ang. *sample covariance matrix*)

$$S = \begin{bmatrix} \text{Cov}(x^1, x^1) & \text{Cov}(x^1, x^2) \\ \text{Cov}(x^2, x^1) & \text{Cov}(x^2, x^2) \end{bmatrix}, \text{ którą można rozłożyć na iloczyn macierzy } \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_2^1 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 \end{bmatrix}$$

wektorów własnych i diagonalnej macierzy Λ wartości własnych, tj. $S = \Gamma \Lambda \Gamma^T$. Główne składowe (nowe współrzędne) opisujące dane mają postać $Y = X \Gamma$.

Współrzędne (x_i^1, x_i^2) punktu x_i można teraz przedstawić w nowej bazie wektorów własnych $(x_i^1, x_i^2) = y_i^1(\gamma_1^1, \gamma_2^1) + y_i^2(\gamma_1^2, \gamma_2^2)$, gdzie y_k^i to elementy macierzy Y , a γ to elementy macierzy Γ . Jeżeli wariancja, równa wartości własnej, jednej ze zmiennych (np. y_i^2) jest bardzo mała w stosunku do drugiej (y_i^1) to można ją pominąć zmniejszając w ten sposób liczbę składników potrzebnych do opisu punktu $(x_i^1, x_i^2) \approx y_i^1(\gamma_1^1, \gamma_2^1)$. Można więc

² Rozkład Karhunen-Loeve (K-L) – nazywany także dekompozycją K-L lub *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) – został niezależnie opracowany w latach 40-tych przez Karhunena [11] i Loeve [12]. Był on później z powodzeniem stosowany w analizie turbulencji, kompresji danych i obrazów, a ostatnio również w finansach w ramach analizy składowych głównych, zobacz np. [4] i [6].

powiedzieć, że daną x_i opisuje teraz tylko zmienna y_i^1 . W praktyce zamiast rzutowania macierzy X na podprzestrzeń wektorów własnych Γ , często rzutuje się macierz $X - X_0$, gdzie X_0 oznacza macierz powielonego pierwszego wiersza X , czyli czynników opisujących pierwszą daną. Oprócz redukcji wymiarów uzyskuje się w ten sposób zależność wszystkich danych od pierwszej.

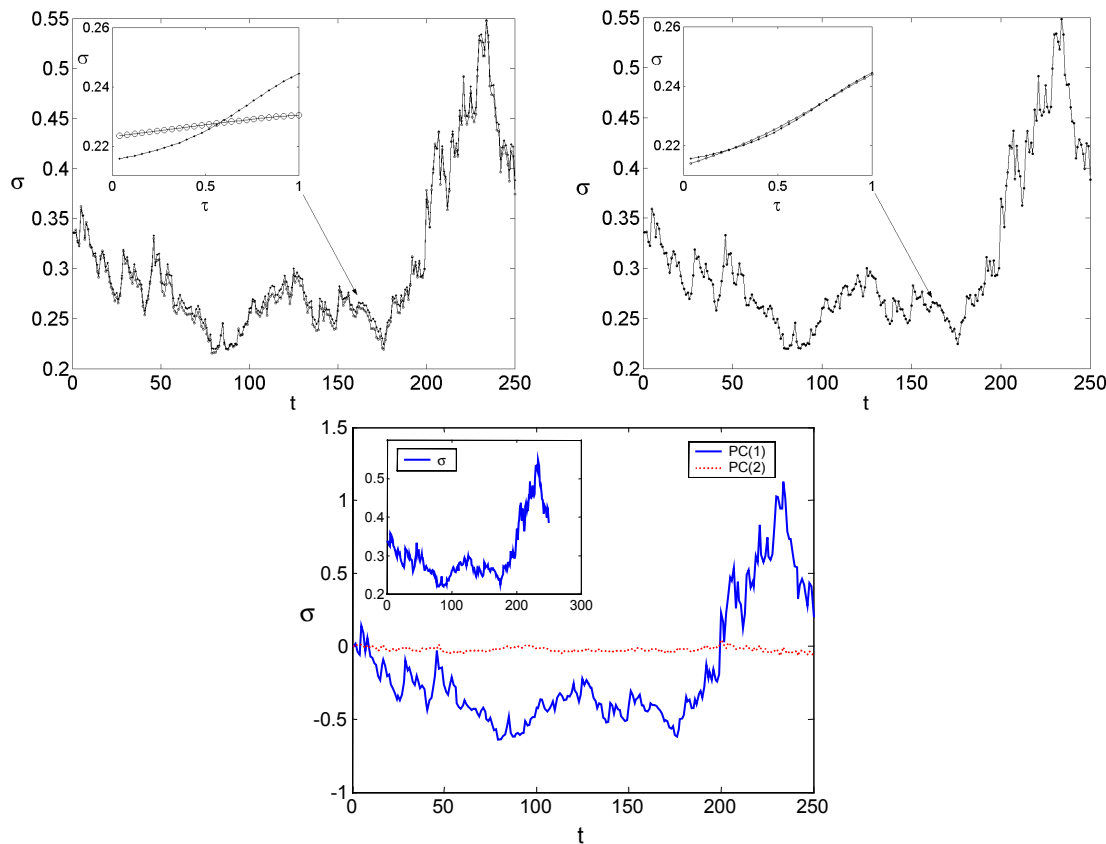
Analizy PCA niestety nie można w bezpośredni sposób zastosować do opisu całej powierzchni implikowanej zmienności. Wynika to z faktu, iż obiektami analizy PCA są macierze dwuwymiarowe, podczas gdy powierzchnie implikowanej zmienności to obiekty trójwymiarowe.³ Dlatego w dalszej części artykułu opisane zostanie zastosowanie analizy PCA do przekrojów powierzchni implikowanej zmienności w ustalonym punkcie *moneyness* (jak np. w [2]), a następnie do przekrojów w ustalonym punkcie czasu do terminu wygaśnięcia (jak np. w [1]).

4. Analiza PCA dla przekroju powierzchni w jednym punkcie *moneyness*

Z powierzchni implikowanej zmienności wybrano punkty dla których $S_t = K$, czyli opcje kwotowane po cenie. Dla nich została przeprowadzona analiza PCA. Ponieważ 25 to liczba wszystkich możliwych τ , a 250 to liczba wygenerowanych powierzchni, można powiedzieć, że 250 danych opisywanych jest przez 25 czynników. Rozkład macierzy kowariancji doprowadził do następujących wartości własnych [15]: $\lambda_1=0,16062634610$, $\lambda_2=0,00026157939$, $\lambda_3=0,00000346860$, $\lambda_4=0,00000040789$, $\lambda_5=0,00000001678$, itd. Procentowy, skumulowany udział pierwszych dwóch wartości to odpowiednio 99,835% i 99,997%. Wzięcie tylko pierwszego czynnika daje już bardzo dobre przybliżenie. Na rysunku 2 pokazane zostało jak użycie tylko dwóch głównych składowych przybliża analizowane dane. Średni procentowy błąd bezwzględny (ang. *Mean Absolute Percentage Error*, MAPE), liczony dla każdego przekroju, nie przekracza 1,5%. Na rysunku 2 pokazano również dynamikę pierwszej PC(1) i drugiej PC(2) składowej głównej. Uwagę przykuwa tutaj prawie identyczne zachowanie się PC(1) i analizowanych danych, co wydaje się bardzo zrozumiałe wzięwszy pod uwagę fakt, iż zawiera ona aż 99,8% całej wariancji. Pozwala to również interpretować pierwszą składową jako odpowiedzialną za przesunięcie (w pionie) powierzchni implikowanej zmienności. Z kolei na podstawie

³ Istnieją jednak metody „transformacji” tablic trójwymiarowych na macierze dwuwymiarowe. Ich zastosowanie pozwala na analizę PCA całej powierzchni implikowanej zmienności, zobacz [4] oraz [15].

podwykresów na obu górnych panelach można wnioskować, że druga składowa odpowiada za nachylenie powierzchni, porównaj z pracami [4], [5] oraz [6].



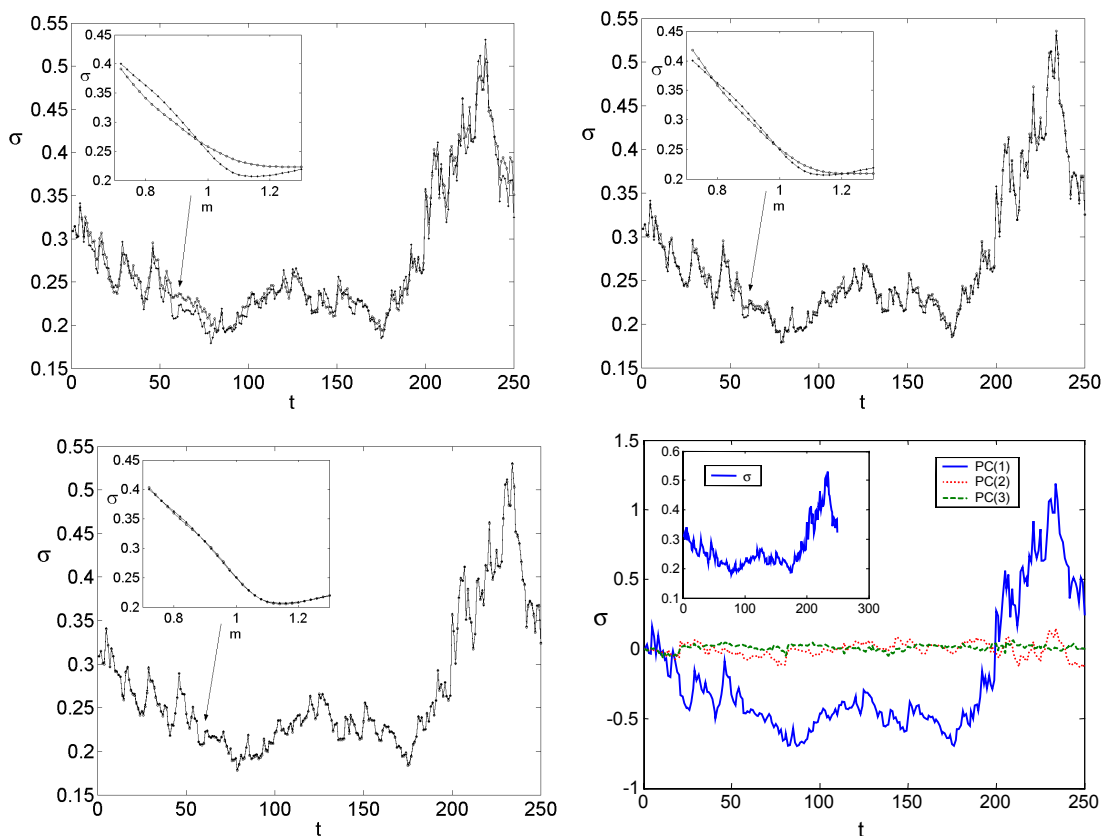
Rys. 2: Lewy panel: Zmienność implikowana (kropki) oraz estymowana z użyciem tylko pierwszej składowej (kółka). Prawy panel: Zmienność implikowana oraz estymowana z użyciem dwóch pierwszych składowych. Wyraźnie widać jak zmienia się dokładność w opisie danych wraz ze zwiększeniem liczby składowych głównych. Dolny panel: Dynamika pierwszej PC(1) i drugiej PC(2) składowej głównej. Widać prawie identyczne zachowanie się PC(1) i implikowanej zmienności (w lewym górnym rogu). Źródło: opracowanie własne.

5. Analiza PCA dla przekroju powierzchni w jednym punkcie τ

W poprzednim punkcie do analizy brany był przekrój powierzchni w jednym punkcie m (*moneyness*). W teraz przeanalizujemy przekrój w jednym punkcie czasu do terminu wygaśnięcia (τ). Liczba danych się nie zmieniła – jest ich również 250, natomiast liczba opisujących punktów wynosi 30, bo tyle różnych m zawiera siatka zmienności.

Rozkład macierzy kowariancji doprowadził do następujących wartości własnych [15]: $\lambda_1=0,19493765901$, $\lambda_2=0,00256131224$, $\lambda_3=0,00043674618$, $\lambda_4=0,00013661471$, $\lambda_5=0,00004596848$, itd. Podobnie jak poprzednio, już pierwsza składowa (z wszystkich 30) zawiera aż 98,379% informacji o danych, dwie pierwsze 99,672%, a trzy pierwsze

99,892%. Na rysunku 3 pokazane zostało jak użycie trzech głównych składowych przybliża analizowane dane. Średni procentowy błąd bezwzględny (MAPE), liczony dla każdego przekroju, nie przekracza 1%. Na tym rysunku pokazana została również dynamika trzech pierwszych składowych głównych. Podobnie jak poprzednio pierwsza składowa dobrze odwzorowuje charakter analizowanej zmienności. Jej dynamika w czasie prawie pokrywa się z dynamiką implikowanej zmienności, co jest jak najbardziej zrozumiałe biorąc pod uwagę jej 98,4% udział w całej wariancji danych. Ponownie pozwala to interpretować pierwszą składową jako odpowiedzialną za przesunięcie (w pionie) powierzchni implikowanej zmienności. Pozostałe dwie składowe zawierają odpowiednio 1,4% i 0,22% wariancji i odpowiadają za nachylenie powierzchni, choć ich wpływ nie jest aż tak wyraźny jak drugiej składowej otrzymanej dla przekroju powierzchni w jednym punkcie *moneyness*.



Rys. 3: Lewy górny panel: Zmienność implikowana oraz estymowana z użyciem tylko pierwszej składowej. Prawy górny panel: Zmienność implikowana oraz estymowana z użyciem dwóch pierwszych składowych. Lewy dolny panel: Zmienność implikowana oraz estymowana z użyciem trzech pierwszych składowych. Wyraźnie widać jak zmienia się dokładność w opisie danych wraz ze zwiększeniem liczby składowych głównych. Prawy dolny panel: Dynamika pierwszych trzech składowych głównych. Widać prawie identyczne zachowanie się PC(1) i implikowanej zmienności (w lewym górnym rogu). Źródło: opracowanie własne.

6. Analiza CPCA

Zastosowanie analizy PCA do przekrojów powierzchni implikowanej zmienności pozwoliło – kosztem niewielkiej utraty informacji – znacznie zredukować liczbę zmiennych potrzebnych do opisu tych powierzchni. W przypadku przekrojów w jednym punkcie *moneyness* wystarczyły dwie główne składowe (zamiast oryginalnych 25) aby zachować aż 99,997% informacji o zmienności. W przypadku przekrojów w jednym punkcie τ wystarczyły trzy główne składowe (zamiast oryginalnych 30) aby zachować 99,892% informacji. Wydaje się jednak, iż jest to tylko połowiczne zwycięstwo. Nawet jeśli użyjemy tylko dwóch składowych do opisu powierzchni dla przekroju w dowolnym punkcie m , to i tak będziemy potrzebowali aż $30 \times 2 = 60$ składowych bo nasza powierzchnia jest rozpięta na 30 punktach m . Na szczęście dokładna analiza składowych głównych dla różnych punktów *moneyness* pozwala jeszcze zredukować tę liczbę. Otóż okazało się, że wektory własne liczone w punktach m leżących blisko siebie są do siebie bardzo podobne. Jeżeli więc przyjąć, że są takie same to można zredukować liczbę baz wektorów własnych do jednej. Jest to tzw. *Common Principal Component Analysis* (CPCA), której szerszy opis można znaleźć m.in. w [6] i [7]. Niestety dla m leżących daleko od siebie np. 0,8 i 1,2 wektory są na tyle różne, że przyjęcie dla nich wspólnej bazy nie jest możliwe. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku przekrojów powierzchni implikowanej zmienności w jednym punkcie τ . Dla różnych, ale bliskich sobie (np. 0,2; 0,24; 0,28; 0,32), czasów do wygaśnięcia pojawiają się prawie takie same wektory własne. Pozwalają one na redukcję liczby baz liczonych dla różnych τ do jednej. Niestety dla τ bardziej od siebie oddalonych, np. 0,2 i 0,8, wektory te za bardzo już się różnią żeby przyjąć, że są takie same.

7. Zakończenie

Powierzchnia implikowanej zmienności jest parametrem wejściowym większości współcześnie stosowanych w praktyce modeli wyceny opcji [5]. Dokładność jej estymacji jest szczególnie istotna kiedy chodzi o wycenę opcji egzotycznych zależnych od trajektorii (np. barierowych), a tym samym kiedy ważne jest oszacowanie zmienności ceny instrumentu podstawowego w punkcie *moneyness* odległym od 1. Zastosowanie analizy PCA do przekrojów powierzchni implikowanej zmienności, a szczególnie analizy CPCA do całej powierzchni pozwala na znaczną redukcję liczby zmiennych potrzebnych do opisu tych powierzchni. Taka forma „kompresji” danych ma niebagatelne znaczenie dla

systemów zarządzania portfelami opcyjnymi. Dwie, trzy najważniejsze składowe główne mogą być symulowane za pomocą prostych i nie wymagających żmudnych obliczeń modeli szeregów czasowych, takich jak ARIMA czy GARCH. Analiza PCA/CPCA pozwala zatem na bardzo szybką analizę scenariuszową czy *stress testing* przy jednoczesnym zachowaniu dokładności obliczeń, a tym samym na efektywne zarządzanie ryzykiem.

Przeprowadzona analiza pokazuje również, że do opisu powierzchni implikowanej zmienności potrzebne są przynajmniej dwie składowe. Wydaje się zatem, że dwufaktorowe modele stochastycznej zmienności, gdzie tylko jeden faktor odpowiada za stochastyczny charakter zmienności, będą niewystarczające do opisu ruchu powierzchni. Mogą one modelować przesunięcie powierzchni (w pionie), ale jej nachylenie już nie.

Literatura

- [1] Alexander, C. (2001) *Principles of the skew*, RISK **14**, 29-32.
- [2] Avellaneda, M., Zhu, Y. (1997) *An E-ARCH model for the term structure of implied volatility of FX options*, Applied Mathematical Finance **4**, 81-100.
- [3] Black, F. (1976) *The pricing of commodity contracts*, J. Financial Economics **3**, 167-179.
- [4] Cont, R., da Fonseca, J. (2002) *Dynamics of implied volatility surfaces*, Quantitative Finance **2**, 45-60.
- [5] Fengler, M. (2004) *Semiparametric Modelling of Implied Volatility*, Praca doktorska, Uniwersytet Humboldta, Berlin.
- [6] Fengler, M., Härdle, W., Schmidt, P. (2002) *The Analysis of Implied Volatilities*, w Härdle, W., Kleinow, T., Stahl, G. (red.) *Applied Quantitative Finance*, Springer, Berlin.
- [7] Flury, B. (1988) *Common Principle Components Analysis and Related Multivariate Models*, Wiley, New York.
- [8] Garliński, T., Weron, R. (1999) *Krótką historią VOLAX-u – czyli jak próbowano handlować implikowaną zmiennością*, Rynek Terminowy **6** (4/99), 52-56.
- [9] Härdle, W. (1990) *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Jajuga, K., Jajuga, T. (1996) *Inwestycje*, PWN, Warszawa.
- [11] Karhunen, K. (1946) *Zur spektraltheorie stochastischer prozesse*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, vol. 34.
- [12] Loeve, M. (1955) *Probability Theory*, Van Nostrand, Princeton, N.J.
- [13] Stoer, J., Bulirsch, R. (1987) *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa.
- [14] Weron, A., Weron, R. (1998, 1999) *Inżynieria finansowa: wycena instrumentów pochodnych, symulacje komputerowe, statystyka rynku*, WNT, Warszawa.
- [15] Wójcik, S. (2003) *Generator scenariuszy dla portfeli opcyjnych – toolbox w Matlabie*, praca magisterska, PWr.

HSC Research Report Series 2004

For a complete list please visit <http://ideas.repec.org/s/wuu/wpaper.html>

- 01 *Finding the optimal exercise time for American warrants on WIG20 futures (Wyznaczanie optymalnego momentu wykonania warrantów amerykańskich na kontrakty futures na indeks WIG20)* by Bartosz Stawiarski
- 02 *Power markets in Poland and worldwide (Rynki energii elektrycznej w Polsce i na świecie)* by Rafał Weron
- 03 *Principal Components Analysis in implied volatility modeling (Analiza składowych głównych w modelowaniu implikowanej zmienności)* by Rafał Weron and Sławomir Wójcik