205

MACROECONOMÍA: ENFOQUES Y MODELOS
NUEVOS EJERCICIOS RESUELTOS
Capítulo 8

Félix Jiménez, Gisella Chiang
y Erick Lahura

Octubre, 2001

DOCUMENTO DE TRABAJO 205
http://www.pucp.edu.pe/economia/pdf/DDD205.pdf

MACROECONOMÍA: ENFOQUES Y MODELOS
NUEVOS EJERCICIOS RESUELTOS

Capítulo 8

Félix Jiménez
Gisella Chiang
Erick Lahura

RESUMEN

El keynesiansimo, el monetarismo y la nueva macroeoconomía "clásica" constituyen el contenido de este trabajo. Las discusiones teóricas sobre estas escuelas y sobre las expectativas se efectúan con diversos ejercicios resueltos. Aquí se explican los distintos métodos de solución de modelos con expectativas racionales. El contenido de este documento corresponde a la primera parte del curso de Macroeconomía 2 que se dicta en esta Universidad.

ABSTRACT

Keynesianism, monetarism and new classical macroeconomics are some issues discussed in this document. It contains several exercises which will permit differentiate these approach to macroeconomics. It also contains the methods for solving models with rational expectations. The content of this document belongs to the first part of Macro 2 course and it is oriented to help the teaching and training in macroeconomics in this university.

MACROECONOMÍA: ENFOQUES Y MODELOS
NUEVOS EJERCICIOS RESUELTOS

Félix Jiménez[1] [2]
Gisella Chiang
Erick Lahura

CAPITULO 8

KEYNESIANISMO, MONETARISMO Y NUEVA MACROECONOMÍA CLASICA

INDICE

[1] Los ejercicios incluidos en este documento serán incluidos en la segunda edición del Tomo II de mi libro de Macroeconomía. Los coautores Gisella Chiang y Erick Lahura han trabajado como asistentes de docencia del curso de Macroeconomía 2 que vengo dictando desde hace ya varios años en esta Universidad. Ellos han sido mis mejores alumnos. Quiero expresarles mi reconocimiento por su excelente desempeño como responsables de las prácticas dirigidas y calificadas de mi curso de Macroeconomía.

[2] En la edición y revisión de estos ejercicios participaron Jorge Paz y Martín Tello, asistentes de docencia de mi curso de Macroeconomía 2. También participaron nuestros alumnos: Luis Bendezú, César Cancho, Verónica Esquivel, Noelia Marcos, Verónica Montoya, Walter Muñoz, Jesús Pomajambo, Carlos Romaní y Mario Velásquez. A todos ellos les expresamos nuestro sincero agradecimiento, por su valiosa colaboración.

PREGUNTAS TEÓRICAS

1. En relación a la Curva de Phillips, analice la veracidad de las siguientes afirmaciones:

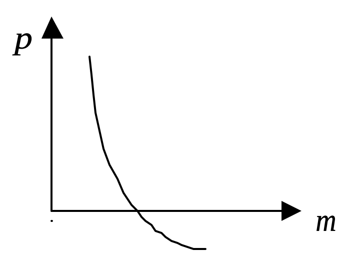
I) La Curva de Phillips implica que los salarios y los precios se ajustan lentamente cuando varia la demanda agregada.

Es correcta, pues un desplazamiento de la demanda agregada ocasiona una elevación del nivel de precios. La subida de los precios genera una caída en el salario real y, por tanto, un exceso de demanda en el mercado de trabajo $(L > L^S)$.
El mecanismo descrito por la curva de Phillips, implica que los salarios nominales se elevarán para restaurar el equilibrio en el mercado.

$$W = -f(L^S - L)$$

II) En términos de política macroeconomía, la Curva de Phillips implicaba que era posible conseguir un nivel de desempleo bajo tolerando una tasa de inflación alta.

Es correcto, Friedman acepta que hay una diferencia entra la inflación esperada y la efectiva, la cual provoca un alejamiento del nivel natural de desempleo. De acuerdo a Friedman, la curva de Phillips debería presentar una relación entre la tasa de desempleo y la variación de los salarios *reales* (no monetarios), además los trabajadores no adolecen de "ilusión monetaria", pues al momento de buscar trabajo se fijan en los salarios reales. El trade off entre las tasas de desempleo e inflación es posible debido a que los trabajadores no conocen con certeza la inflación del próximo período, por lo que si los trabajadores no observan que los precios están subiendo, tampoco notaran que sus salarios reales están cayendo.



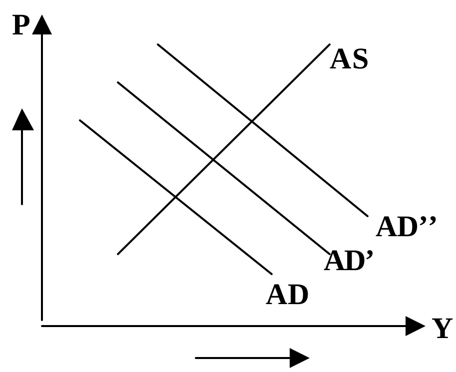
III) Las variables de la demanda agregada que alteran la tasa de desempleo de este periodo afectan los salarios de los periodos posteriores.

Es correcta, ante desplazamientos de la demanda agregada, los precios aumentan, alejando la tasa de desempleo de su nivel natural, a favor de una menor tasa de desempleo. Esto ocurrirá solo en el corto plazo, ya que en el futuro los trabajadores van a darse cuenta (por la explicación anterior) que los salarios reales han disminuido, por lo que exigirán un aumento en salario nominal, de tal forma que el salario real regrese al nivel de equilibrio correspondiente a la tasa natural de desempleo.

2. Comente las siguientes afirmaciones:

I) Al considerar la curva de Phillips, el enfoque de expectativas racionales plantea que para reducir la inflación sin ningún tipo de costo, en términos de recesión, es necesario anunciar la política de reducción de la inflación antes que la gente forme sus expectativas.

Las hipótesis de expectativas racionales supone el uso de toda la información necesaria y posible para evitar errores sistemáticos de predicción. Esto se complementa con la información a la que se pueda acceder de políticas futuras a aplicar. Si los diseñadores de política sorpresivamente, deciden aumentar la cantidad de dinero - aprovechándose de la interrelación entre el producto y la inflación- efectivamente habrá un efecto positivo sobre el producto. Sin embargo, si la política es anunciada con anticipación, los agentes reformularán sus expectativas y no habrá ningún efecto sobre el producto.



II) Bajo expectativas racionales, si el gobierno trata de explotar las implicancias de la Curva de Phillips, entonces el trade-off entre inflación y desempleo desaparece.

Es cierto, puede ser que en un inicio el gobierno pueda sacar provecho de esta relación, pero si los diseñadores de políticas intentan tomar ventaja de ésta, los efectos operantes a través de las expectativas puede causar que ésta relación colapse.

III) El desempleo estructural o friccional es el desempleo que existe cuando la economía se encuentra en el nivel de empleo.

Es cierto, según Friedman, cuando el mercado de trabajo se encuentra en equilibrio, es erróneo creer que no existe desempleo, pues, existe el llamado << desempleo natural o friccional >> cuya explicación se encuentra en la movilidad existente en el propio mercado de trabajo: en todo momento se están cerrando empresas y creándose otra nuevas provocando constantes movimientos de trabajadores y que constituyen desempleados temporales.

IV) De acuerdo a la hipótesis de expectativas racionales, si las políticas de gobierno son aleatorias, entonces serán efectivas o no neutrales.

Es cierto, si los agentes forman sus expectativas con toda la información disponible y el gobierno emite políticas aleatorias, es decir, diferentes a las expectativas formuladas por los agente, estas serán efectivas o no neutrales, pues tienen efectos en el producto y en los precios.

3. Sea la curva de Oferta Agregada Dinámica que relaciona precios y producto:

$$p_t = p_{t-1}\left[1 + \lambda\left(Y - \overline{Y}\right)\right]$$

a) Transforme la ecuación de tal forma que obtenga una relación producto e inflación. ¿Cómo es esta relación?

$$p_t = p_{t-1} + \lambda p_{t-1}\left(Y - \overline{Y}\right)$$
$$p_t - p_{t-1} = \lambda p_{t-1}\left(Y - \overline{Y}\right)$$
$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \lambda\left(Y - \overline{Y}\right)$$
$$\pi_t = \lambda\left(Y - \overline{Y}\right)$$

La tasa de inflación se elevará cuando la producción sea superior al nivel de pleno empleo.

b) Incorpore las expectativas de inflación en la ecuación hallada en la pregunta a)

Introducimos π^{e} a la inflación como un elemento adicional en el lado de la oferta:

$$\pi_t = \pi_t^{e} + \lambda\left(Y - \overline{Y}\right) \qquad \text{Curva de Oferta Agregada con expectativas}$$

Ahora tenemos que la inflación depende de las expectativas inflacionarias y del nivel de producción (o desempleo). Esta ecuación nos muestra que puede coexistir una alta inflación con altas tasas de desempleo, explicada en expectativas inflacionarias.

c) Incorpore un shock aleatorio a la ecuación hallada en b). Usted es un policy maker y le piden que evalúe todas las formas de reducir la inflación?

$$\pi_t = \pi_t^{e} + \lambda\left(Y - \overline{Y}\right) + \varepsilon^{s}{}_{t}$$

La inflación puede reducirse generando políticas que ataquen las expectativas inflacionarias de los agentes, que eleven la tasa de desempleo o por shocks de oferta, aunque estos últimos no pueden ser controlado por los diseñadores de política.

d) Sobre la base de esta ecuación, explique el rompimiento de la Curva de Phillips durante la Crisis del Petróleo (shock de oferta). ¿Se sigue cumpliendo la relación positiva entre inflación y producto? Argumente.

Como vemos, la inflación depende de la inflación esperada $\left(\pi^{e}\right)$, de la desviación del producto (o desempleo) de su pleno empleo $\left(Y, \overline{Y}\right)$ y de shocks de oferta ($\varepsilon^{s}{}_{t}$). En la crisis del petróleo (74), la curva de Phillips se rompió porque coexistían altos niveles de inflación y desempleo; en este caso particular, los precios se incrementaron por el aumento del precio del petróleo, el cual eleva los costos de producción y a su vez se genera un incremento en la tasa de inflación. Por lo tanto los precios pueden estar subiendo aunque el desempleo sea elevado, dada una alta π^{ℓ}.

4. ***"Sólo un cambio no anticipado en la política monetaria puede afectar el producto en el corto plazo ya que los agentes poseen información imperfecta sobre las variables del entorno económico".* ¿Qué críticas se podría hacer a esta afirmación basada en el modelo de las islas de Robert Lucas?**

El modelo de las islas de Lucas es criticable debido al supuesto de información imperfecta. En las economías modernas, la información de alta calidad es proporcionada a los agentes económicos con rezagos muy pequeños, por lo que no es creíble que los agentes no conozcan el nivel de precios general de la economía. En periodos distintos a los hiperinflacionarios, los agentes económicos pueden estimar los movimientos en los precios con considerable certeza y a un costo muy bajo. Es difícil pensar por tanto; que los productores puedan entrar en confusión con respecto a si los movimientos en precios son relativos o absolutos.

5. **En el *modelo de las islas* de Robert Lucas (1977), en el equilibrio se obtiene:**

$$y_t = \frac{b}{1+b}\left[m_t - E(m_t)\right]$$

Explique las implicancias de este resultado en términos de la efectividad de las políticas de demanda. ¿Existe un trade–off aprovechable entre inflación y producto? ¿Por qué?. Sustente su respuesta basándose en el parámetro *b*

$$b = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)\frac{V_z}{V_z + V_m}$$

De la definición de b extraemos que la autoridad monetaria puede sorprender a los agentes económicos pero, si lo hace sistemáticamente la varianza de m va a crecer mucho y esto va a ocasionar una caída en b puesto que; si $V_m \rightarrow \infty$ entonces, $b \rightarrow 0$.
Por ende no existe un trade-off aprovechable entre inflación y producto en el largo plazo. Aquí la autoridad monetaria no puede aprovechar relaciones estadísticas ya que en algún momento los mecanismos que operan por medio de las expectativas originarán el rompimiento de esta relación.

Tenemos que si $b \rightarrow 0$ entonces $y = \frac{b}{1+b}\left[m - E(m)\right] \rightarrow 0$

Por otro lado, un incremento no observado en la oferta monetaria incrementa la demanda agregada (y=m-p), lo cual produce un cambio aparente en la curva de demanda de cada bien. En la medida que el incremento no es observado, la idea racional de cada productor es que alguna porción del incremento en la demanda por su producto, está reflejando un shock en su precio relativo por tanto; el productor incrementa su producción. Pero esta situación no puede ser permanente pues los agentes se dan cuenta que el aumento en la demanda por su producto se debe al incremento en la oferta monetaria por lo que ya no va a variar su nivel de producción.

6. Sea la siguiente definición de expectativas adaptativas:

$$p_t^e - p_{t-1}^e = l\left(p_{t-1} - p_{t-1}^e\right)$$

a) **Resuelva el modelo para P_t^e expresando los precios esperados como un promedio ponderado del precio esperado y del precio efectivo para *t*.**
   a.1) ¿Qué puede decir cuando λ= 0?
   a.2) ¿Qué puede decir cuando λ=1?

$$p_t^e - p_{t-1}^e = lp_{t-1} - lp_{t-1}^e$$
$$p_t^e = lp_{t-1} + (1 - l)p_{t-1}^e$$

Si $l = 0 \Rightarrow p_t^e = p_{t-1}^e$ Los agentes formulan sus expectativas de manera adaptativa MIOPE esto es, los agentes no corrigen sus expectativas al cambiar de periodo.

Si $l = 1 \Rightarrow p_t^e = p_{t-1}$ Los agentes generan sus expectativas de manera adaptativa ESTÁTICA. Los precios esperados son iguales a los precios que se dieron en el periodo pasado.

b) **Resuelva el modelo para P_t^e en su forma general** (Ayuda: que los precios esperados no dependan de ninguna variable esperada). Interprete su ecuación de precios.

Iterando obtenemos:

$$p_t^e = l\sum_{i=1}^{\infty}(1 - l)^i p_{t-1-i}$$

En la formulación de las expectativas sobre los precios, los precios esperados dependen únicamente de los precios pasados, donde los más antiguos obtienen un menor peso que los más recientes.

7. Suponga el siguiente modelo:

$$y_t = c_t + a + m_t$$
$$c_t = c\left(y^d\right)^e$$
$$E(m) = 0$$
$$m_t\left(0, s^2\right)$$

Los agentes pueden formular sus expectativas de la siguiente manera:

Expectativas Racionales: $\left(y^d\right)^e = (1-k)E(y_t)$

Expectativas Adaptativas: $\left(y^d\right)^e = (1-k)y_{t-1}$

Si asumimos que $E(y_t) = \dfrac{a}{[1-c(1-k)]}$, ¿con cual de los procesos de formación de expectativas el impacto de un incremento de la tasa de impuestos *(k)* sobre la demanda agregada será menor? ¿Por qué?

- **Con expectativas adaptativas**:

$$y_t = c(1-k)y_{t-1} + a + m_t$$

Rezagando obtenemos:

$$y_t = c(1-k)Ly_t + a + m_t$$

$$y_t = \frac{a}{1-c(1-k)} + \frac{m_t}{1-c(1-k)L}$$

$$y_t = \frac{a}{1-c(1-k)} + \sum_{i=0}^{\infty}\left[c(1-k)L\right]^i m_{t-i}$$

$$\frac{dy_t}{dk} = -c\left[\frac{a}{1-c(1-k)} + \sum_{i=0}^{\infty} i\left[c(1-k)\right]\right]^{i-1} m_{t-i}$$

- **Con expectativas racionales:**

$$y_t = c(1-k)E(y_t) + a + m_t$$

$$y_t = c(1-k)\left[\frac{a}{1-c(1-k)}\right] + a$$

$$y_t = \frac{a}{1-c(1-k)}$$

$$\frac{dy_t}{dk} = -\frac{ca}{1-c(1-k)}$$

Por lo tanto con expectativas racionales las fluctuaciones son menores en la medida que los individuos poseen eficientes predicciones sobre el futuro dado que; utilizan toda la información de la cual disponen de manera óptima.

8. Sea el Modelo de Cagan con expectativas adaptativas y racionales, suponga una economía en la cual existen dos agentes (i=1,2), cada uno con una demanda de dinero y una forma de generar sus expectativas. Así, la demanda por dinero de cada agente es como:

$$\frac{M_t}{p_t} = c - b\left(\frac{p_{t+1}^e - p_t}{p_t}\right) + e_t^i \;; \quad c \succ 0, \quad b \succ 0, \text{ i=1,2}$$

Donde: M_t es la cantidad nominal de dinero
P_t es el nivel de precios
p^{e}_{t+1} es la expectativa del nivel de precios en t+1 que se formula el agente 1 en el periodo t
$p^{e^2}_{t+1}$ es la expectativa del nivel de precios en t+1 que se formula el agente 2 en el periodo t

Además, suponga que los policy makers piensan que la oferta monetaria debe fijarse según el nivel de precios esperado por los agentes. Así:

$$M_t = d_0 - d_1 p_t$$
$$p_t = f p_t^1 + (1-f) p_t^2$$

a) Convierta la función de demanda de dinero en una ecuación de precios.

Reordenando la expresión para que sea una ecuación de precios:

$$p_t^i = \frac{1}{c+b} M_t + \frac{b}{c+b} p^e_{t+1} + e_t^i$$

Para el agente 1 (expectativas racionales)

$$p_t^1 = \frac{1}{c+b} M_t + \frac{b}{c+b} E_t[p_{t+1}] + e_t^1 \text{ .....(1)}$$

Adelantamos un periodo y tomamos esperanzas:

$$E_t[p_{t+1}] = \frac{1}{c+b} E_t[M_{t+1}] + \frac{b}{c+b} E_t[p_{t+2}]$$

Repetimos esta operación T veces y nos queda después de reemplazar en (1):

$$p_t^1 = \frac{1}{c+b} \sum_{i=0}^{T} \left(\frac{b}{c+b}\right)^i E_t[M_{t+i}] + \left(\frac{b}{c+b}\right)^{T+1} E_t[p_{t+T+1}] + e_t^1 \text{ ....(2)}$$

Para el agente 2 (expectativas adaptativas estáticas)

$$p_t^2 = \frac{1}{c+b} M_t + \frac{b}{c+b} (p_t) + e_t^2$$

$$p_t^2 = \frac{1}{c} M_t + e_t^2 \text{ ....(3)}$$

b) ¿Cuál será la cantidad óptima de dinero que debe proveerse?

La cantidad óptima de dinero es:

$$M_t = d_0 - d_1\left[fp_t^1 + (1-f)p_t^2\right]\text{.........(4)}$$

Reemplazando (2) y (3) en (4):

$$M_t = \delta_0 - \delta_1\left[\phi\left(\frac{1}{c+b}\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{b}{c+b}\right)^i E_t\left[M_{t+i}\right] + \left(\frac{b}{c+b}\right)^{T+1} E_t\left[p_{t+T+1}\right]\right) + (1-\phi)\left(\frac{1}{c}M_t\right)\right] + \mu_t$$

donde $m_t = -\left(d_1 f \ell_t^1 + (1-f)e_t^2 d_1\right)$

llamamos $a = \left(\frac{b}{c+b}\right)^{T+1} E_t\left[p_{t+T+1}\right]$

separando el primer termino de la sumatoria:

$$M_t = d_0 - d_1 f\frac{1}{c+b}M_t - d_1 f\frac{1}{c+b}\sum_{i=1}^{T}\left(\frac{b}{c+b}\right)^i E_t\left[M_{t+i}\right] - d_1 f a - \frac{d_1}{c}(1-f)M_t + m_t$$

despejando M_t :

$$M_t = \frac{c(c+b)}{c(c+b) + cd_1 f + d_1(c+b)(1-f)}d_0 - \frac{cd_1 f}{c(c+b) + cd_1 f + d_1(c+b)(1-f)}\sum_{i=1}^{T}\left(\frac{b}{c+b}\right)^i E_t\left[M_{t+i}\right] - \ldots$$

$$\ldots\frac{c(c+b)d_1 f}{c(c+b) + cd_1 f + d_1(c+b)(1-f)}a + V_t$$; donde V_t es el error aleatorio.

c) Suponga que el agente 1 formula sus expectativas de manera racional y el agente 2 de manera adaptativa estática. Halle la cantidad de dinero óptima.

Si ambos tipos de agentes formulan sus expectativas de manera racionales ($f = 1$), la cantidad óptima de dinero sería:

$$M_t = \frac{c(c+b)}{c(c+b) + cd_1}d_0 - \frac{cd_1}{c(c+b) + cd_1}\sum_{i=1}^{T}\left(\frac{b}{c+b}\right)^i E_t\left[M_{t+i}\right] - \frac{c(c+b)d_1}{c(c+b) + cd_1}a + V_t$$

d) Compare la cantidad de dinero hallada en a) con la cantidad hallada en b) y evalúe las conclusiones que se pueden derivar de este análisis.

Analizando solo los numeradores de los coeficientes de los términos:

Como se sabe, $f \in \left]0,1\right[$ entonces se puede afirmar que el segundo y tercer término de la cantidad de dinero óptima hallada en b) son mayores que el segundo y tercer termino de la cantidad de dinero óptima hallada en a) , pues los numeradores han aumentado.

Analizando los denominadores de los términos se puede concluir que:

$$c(c+b)+cd_1 f+d_1(c+b)(1-f) \succ c(c+b)+cd_1$$

$$c(c+b)+cd_1 f+cd_1(1-f)+bd_1(1-f) \succ c(c+b)+cd_1$$

$$c(c+b)+cd_1+bd_1(1-f) \succ c(c+b)+cd_1 \qquad (b,d_1 \succ 0)$$

Es decir los términos de la b) son mayores que los de la a) pues los denominadores han caído. Por lo tanto la cantidad de dinero en a) es menor que en b). Se puede concluir, que la oferta monetaria será fijada en un monto menor en a) que en b) porque cuando existen expectativas adaptativas en parte de los agentes; los ajustes en las expectativas ante subidas en el nivel de precios son menores y más lentos que cuando todos tienen expectativas racionales. Esto es porque con expectativas adaptativas existen errores sistemáticos.

Dicho de otra manera, al existir dos tipos de agentes, cada cual con una racionalidad distinta, la autoridad monetaria debe ser capaz de percatarse de esta distinción en la población.; pero si de lo que se trata es de homogeneizar creyendo que existe un solo tipo de agente, la política monetaria va a manifestar una actitud mas bien restrictiva lo cual; podría causar efectos negativos en la economía.

MODELO DINÁMICO DE OFERTA Y DEMANDA AGREGADA

Dado el modelo de oferta y demanda agregada tradicional representado por las siguientes ecuaciones estructurales:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
(1) & \left.\begin{array}{l} Y = C + I + G \\ C = C(\overset{+}{y}) \\ I = I(\overset{+}{y}, r) \end{array}\right\} (IS) \\
(4) & M/P = L(\overset{+}{y}, \overset{-}{i}) \quad (LM)
\end{array}
\right\} DA
$$

(1) $Y = C + I + G$

(2) $C = C(\overset{+}{y})$

(3) $I = I(\overset{+}{y}, r)$

(4) $M/P = L(\overset{+}{y}, \overset{-}{i}) \quad (LM)$

(1)–(3): (IS); (1)–(4): DA

(5) $\dot{P}/P = H\,[(Y - \overline{Y})/\overline{Y}] + \Pi \rightarrow OA$

Donde: Y es el ingreso real, C, el consumo real, I, la inversión real, G, el gasto público, M/P es la oferta real de dinero, L la demanda real de dinero y Π = inflación esperada

Supuestos:

$C_y, I_y > 0$	$L_y > 0$	$H' > 0$
$I_r < 0$	$L_i < 0$	
$O < C_y < 1$		

a. **¿Cómo cambia el modelo cuando $\Pi = 0$?**

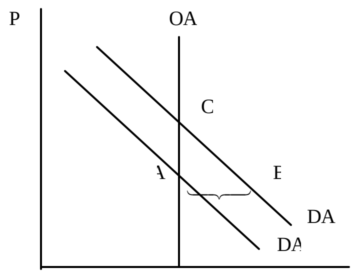
Asumiendo que la $\Pi = 0$, la ecuación (5) se convierte en:

$$\dot{P}/P = H\,[(Y - \overline{Y})/\overline{Y}]$$

Además, conociendo la ecuación de Fischer, $i = r + p^e$, y asumiendo previsión perfecta, es decir que la inflación esperada es igual a la inflación efectiva (en este caso igual a cero), tenemos que, $r = i$, la tasa de interés nominal y real son iguales, por lo que podemos expresar nuestro modelo en función de la tasa de interés real o nominal indistintamente.

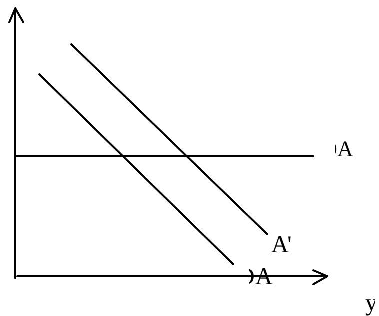
b. **Bajo que supuestos sobre H' llegamos al modelo neoclásico y al keynesiano**

Neoclásico



$H' \to \infty$

Keynesiano Extremo



$H' \to 0$

En el enfoque neoclásico, la Oferta Agregada (OA) esta dada. Ante un aumento de la Demanda Agregada (DA), se genera INFLACION. En el caso Keynesiano extremo, el aumento en la demanda agregada, aumentará el producto y no genera ningún movimiento en precios.

c. ¿Cuáles son las variables endógenas y variables exógenas del modelo en el Corto Plazo (CP) y Largo Plazo (LP)?

Las variables endógenas y exógenas no son las mismas en el CP y LP porque a CP somos keynesianos (P rígidos, dados), y a LP somos clásicos (flexibles de P)

CP: V.Endógenas: $Y, C, I, r, \dot{P}$
V.Exógenas: $G, P, M, \overline{Y}$

LP: V.Endógenas: Y, C, I, r, P
V.Exógenas: $G, M, \overline{Y}$

d. Diferencie totalmente el modelo

i. $dY = dC + dI + dG$
ii. $dC = C_Y \quad dY$
iii. $dI = Iydy + Irdr$
iv. $d\left(\frac{M}{P}\right) = \frac{PdM - MdP}{P^2} = \frac{dM}{P} - \frac{M}{P^2}dP = LydY + Lrdr$
v. $d\left(\frac{\dot{P}}{P}\right) = \frac{Pd\dot{P} - \dot{p}dP}{P^2} = \frac{d\dot{P}}{P} - \frac{\dot{P}}{P^2}dP = H'\left(\frac{1}{\overline{Y}}\right)dY$

- Derivamos la curva IS, reemplazando ii), iii), en i) y la ordenamos en exceso de demanda:

$$dY = CydY + IydY + Irdr + dG$$

$$(IS) \qquad 0 = -(1 - Cy - Iy)dY + Irdr + dG$$

- Ordenando el mercado de dinero en exceso de demanda:

$$(LM) \qquad 0 = -\frac{dM}{P} + \frac{M}{P^2}\,dP + Ly\,dY + Lr\,dr$$

- La ecuación v) es la Curva de Phillips que no es más que una curva de oferta agregada.

$$(OA) \qquad 0 = H'\left(\frac{1}{\overline{Y}}\right)dY - \frac{1}{P}\,d\dot{P} + \frac{\dot{P}}{P^2}\,dP$$

e. Ordene matricialmente el modelo en el CP. ¿Se puede decir que el modelo es recursivo en bloques?

$$\begin{bmatrix} -(1 - Cy - Iy) & Ir & 0 \\ Ly & Li & 0 \\ H'\left(\frac{1}{\overline{y}}\right) & 0 & \frac{-1}{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \\ d\dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/P & -M/P^2 \\ 0 & 0 & -\dot{p}/P^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dG \\ dM \\ dP \end{bmatrix}$$

El sistema es recursivo en bloques; es decir el sistema se va retroalimentando en bloques, en el sentido que las dos primeras ecuaciones pueden resolverse por si mismas, sin necesidad de la tercera ecuación de la oferta agregada.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -(1 - Cy - Iy & Ir \\ Ly & Li \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/p & -M/p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dM \\ dP \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es distinto de cero, por lo que tiene inversa.

$$|A| = \overbrace{\overbrace{-(1 - Cy - Iy)}^{+}\,\overbrace{Li}^{-}}^{+} - \overbrace{Ir\,Ly}^{+} > 0$$

f. Encuentre los multiplicadores de Corto Plazo

Los multiplicadores nos muestran el efecto de una variable exógena como G, M, P sobre las endógenas (Y, r)

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-Cy-Iy) & Ir \\ Ly & Li \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/P & -M/p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dM \\ dP \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} Li & -Ir \\ -Ly & -(1-Cy-Iy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/P & -M/p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dM \\ dP \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -Li & -Ir/p & +Ir\,\dfrac{M}{p^2} \\ Ly & -\dfrac{1}{p}(1-Cy-Iy) & \dfrac{M}{p^2}(1-Cy-Iy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dM \\ dP \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} (+) & (+) & (-) \\ (+) & (-) & (+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dM \\ dP \end{pmatrix}$$

g. Analice la estabilidad o convergencia al equilibrio

- Para que el modelo sea estable se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\frac{d\dot{P}}{dP} < 0$$

- Se asume que $Y = \overline{Y}$ se alcanza en el largo plazo (en el equilibrio
- Vamos a analizar la ecuación dinámica

$$\frac{1}{P}d\dot{P} - \frac{\dot{P}}{P^2}\,dP = H'\left(\frac{1}{\overline{y}}\right)dY$$

$dP = 0 \quad P_t = P_{t+1} = P_{t+n} \quad \rightarrow$ en el LP las variables están en equilibrio.

$$\frac{1}{p}d\dot{P} = \left(\frac{H'}{\overline{y}}\right)dY$$

$$\boxed{\frac{d\dot{P}}{dY} = \frac{PH'}{\overline{Y}}} \qquad (1)$$

- Del modelo de CP tenemos:

$$\frac{dY}{dP} = \frac{Ir \;\; M / P^2}{-[(1-Cy-Iy)\; Li + Ir \;\; Ly} \qquad (2)$$

- De (1) $\quad d\dot{P} = \left(\frac{PH'}{\overline{\overline{Y}}}\right) dY \qquad (1')$

- De (2) $\quad dY = \frac{Ir \;\; M / P^2}{-[(1-Cy-Iy)\; Li + Ir \;\; Ly} \; dP \, (2')$

- De (1') y (2')

$$d\dot{P} = -\left(\frac{PH'}{\overline{\overline{Y}}}\right) \; \frac{Ir \;\; M / P^2}{[(1-Cy-Iy)Li + Ir \;\; Ly} \; dP$$

$$\frac{d\dot{P}}{dP} = -\frac{H' \overset{(-)}{Jr} \; M}{\underbrace{p \; \overline{y}}_{(+)}} \left(\frac{1}{\underbrace{\underset{-}{Li}\,(1-Cy-Iy) + \underset{-}{Ir} \;\; \underset{+}{Ly}}_{(-)}} \right) = q < 0$$

$$\frac{d\dot{P}}{dP} < 0$$

h. Demuestre la estabilidad gráficamente.

Tenemos que la convergencia implica $\frac{d\dot{P}}{dP} < 0$

$$\frac{d\dot{P}}{dP} < 0 \leftrightarrow \overbrace{(1-Cy-Iy)}^{+} \; \overset{-}{Li} + \overset{-}{Ir} \;\; \overset{+}{Ly} < 0$$

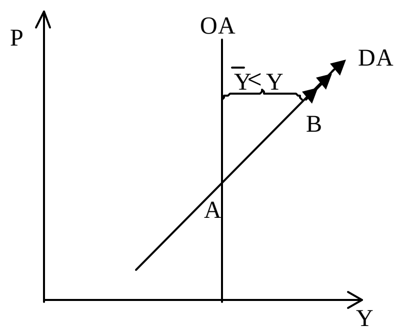
La condición de estabilidad se puede reducir a analizar $(1-Cy-Iy) > 0$
Entonces, podemos demostrar gráficamente la convergencia de dos formas: a través de las pendientes de las curvas de Oferta y Demanda Agregadas y a través de las pendientes de las curvas IS y LM.

- **Análisis de estabilidad a través de las curvas de Demanda y Oferta Agregada**

$$\frac{dY}{dP} = -\left[\frac{I_r M/P^2}{(1-c_y - I_y)L_i + I_r L_y}\right]$$

$$\frac{dP}{dY} = -\left[\frac{(1-C_y - I_y)L_i - I_r L_y}{I_r M}\right] P^2$$

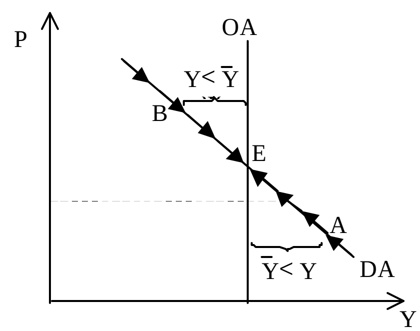
Si $(1\text{-}c_y\text{-}I_y)L_i\text{+}I_rL_y>0$



$$\frac{dP}{dY} = -\frac{(+)}{(-)} > 0$$ DA pendiente +

Para analizar la estabilidad, asumimos que estamos en un punto fuera del equilibrio (B por ej.). B es un punto de exceso de demanda por lo que los precios se elevarán con el fin de mantener el equilibrio en el mercado de bienes

Si $(1\text{-}c_y\text{-}I_y)L_i\text{+}I_rL_y<0$



$$\frac{dP}{dY} = -\frac{(-)}{(-)} < 0$$ DA pendiente -

En A, ante el exceso de demanda los precios se elevaran para mantener el equilibrio en el mercado de bienes.
Análogamente, en B, ante el exceso de oferta, los precios ser reducirán para mantener el equilibrio en el mercado de bienes

- **Análisis de estabilidad a través de las curvas IS y LM**

(IS): $$\frac{dr}{dY} = -\frac{1-c_y - I_r}{I_r} >< 0$$

(LM): $$\frac{dr}{dY} = -\frac{L_y}{L_i} > 0$$

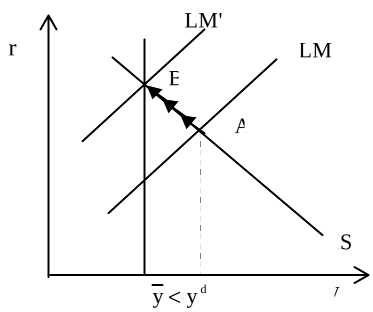
Asumiendo: $$\left.\frac{dr}{dY}\right|_{LM} > \left.\frac{dr}{dYy}\right|_{IS}$$

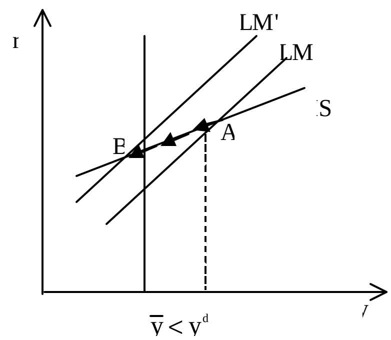
$$-\frac{L_y}{L_i} > \frac{1-c_y-I_y}{I_r}$$

$$-L_y I_r > L_i (1-c_y-I_y)$$
$$0 > L_i (1-c_y-I_y) + L_y I_r$$

Casos en los que el modelo es estable:

Si la pendiente de la curva LM es mayor que la pendiente de la curva IS (condición necesaria y suficiente para la estabilidad), se cumple la estabilidad del modelo.

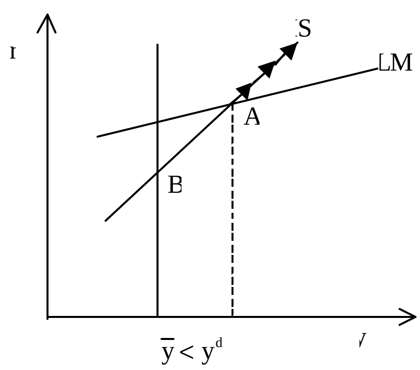




$$\overline{Y} < Yd \rightarrow exc\ dda \rightarrow \uparrow P$$
$$\left(\frac{M}{\uparrow P}\right)\downarrow \rightarrow LM \downarrow \quad hasta\ llegar\ a\ B$$

$$\overline{Y} < Yd \rightarrow exc\ dda \rightarrow \uparrow P$$
$$\left(\frac{M}{\uparrow P}\right)\downarrow \rightarrow LM \downarrow \quad hasta\ llegar\ a\ B$$

Caso en los que el modelo es inestable: cuando la pendiente de la curva LM es menor que la pendiente de la curva IS.



En este caso,

$$\left.\frac{dr}{dY}\right|_{LM} < \left.\frac{dr}{dY}\right|_{IS}$$

y no se cumple la estabilidad

i. Ordene matricialmente el modelo en el Largo Plazo y halle los multiplicadores

V.Endógenas : Y, r, P, C, I
V.Exógenas: G, M, $\overline{Y}$

(IS) $-(1-c_y - I_y)dY + I_r dr = -dG$

(LM) $L_y dY + L_i di + \frac{M}{P^2} dP = \frac{dM}{P}$

(OA) $H'\left(\frac{1}{y}\right)dY + \frac{\dot{p}}{P^2} dP = \frac{1}{P} d\dot{P}$

En el largo plazo, el producto es igual al producto de pleno empleo $\overline{Y}$ por lo que la variación del mismo será igual a cero: $dY = d\overline{Y} = 0 = d\dot{P}$

Dado que el Sistema era recursivo, solo utilizaremos las dos primeras ecuaciones (IS y LM)

$$I_r dr = -dG$$

$$L_i di + \frac{M}{P^2} dP = \frac{dM}{P}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ M/P^2 & L_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dP \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dG} \\ \mathrm{dM} \end{pmatrix}$$

Multiplicadores de largo plazo:

$$\begin{pmatrix} dP \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{-I_r \frac{M}{P^2}} \begin{pmatrix} M/P^2 & 0 \\ -L_i & -I_r / P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dG} \\ \mathrm{dM} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dP \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/I_r & 0 \\ \frac{L_i P^2}{I_r M} & \frac{P}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dG} \\ \mathrm{dM} \end{pmatrix}$$

j. **¿Se cumple la Teoría Monetarista de la inflación en el LP?**

La teoría monetarista de la inflación nos dice que la inflación se genera por cambios en la cantidad de dinero.

$$Mv = PQ$$

$$\frac{dM}{M} + \frac{dv}{v} = \frac{dP}{P} + \frac{dQ}{Q} \rightarrow \boxed{\frac{dM}{M} = \frac{dP}{P}}$$

La teoría cuantitativa nos dice que la velocidad es constante y como la producción está dada, es decir estamos en una situación de pleno empleo, todo incremento en la cantidad de dinero se traducirá en cambios en precios.

Analizando los multiplicadores de LP:

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dM}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}} \rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{M}}}$$

$\therefore$ Si se cumple la teoría monetarista de la inflación.

k. **Asuma que el BCR decide controlar la tasa de interés y no la cantidad de dinero. Presente matricialmente el modelo CP.**

(IS) $\quad -(1-c_y - I_y)dY = -dG - I_r dr$

(LM) $\quad L_y dY - \frac{dM}{P} = -L_i di - \frac{M}{P^2} dP$

(OA) $\quad H'\left(\frac{1}{y}\right) dY - \frac{1}{P} d\dot{P} = -\frac{\dot{p}}{P^2} dP$

$$\begin{pmatrix} -(1-c_y - I_y) & 0 & 0 \\ L_y & -1/P & 0 \\ H'/y & 0 & -1/P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dM \\ dP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{I_r} & 0 \\ 0 & -\mathrm{L_i} & -\mathrm{M}/\mathrm{P}^2 \\ 0 & 0 & -\dot{\mathrm{p}}/\mathrm{P}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dG} \\ \mathrm{dr} \\ \mathrm{dP} \end{pmatrix}$$

Como el sistema es recursivo, tomamos solo las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -(1-c_y - I_y) & 0 \\ L_y & -1/P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & I_r & 0 \\ 0 & -L_i & -M/P^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dr \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dM \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -I/P & 0 \\ -L_y & -(1-c_y-I_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & I_r & 0 \\ 0 & -L_i & -M/P^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dr \\ dP \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dM \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{(1-c_y-I_y)}}{P} \begin{pmatrix} 1/P & Ir/P & 0 \\ +Ly & IrLy + Li(1-c_y-I_y) & \frac{M(1-c_y-I_y)}{P^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dr \\ dP \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dM \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-c_y-I_y)} & \frac{I_r}{(1-c_y-I_y)} & 0 \\ \frac{P}{(1-c_y-I_y)} L_y & \frac{P}{(1-c_y-I_y)}(I_r L_y + L_i S) & M/P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dr \\ dP \end{pmatrix}$$

EXPECTATIVAS ADAPTATIVAS

Explique el concepto de Expectativas Adaptativas

Cuando los agentes formulan sus expectativas de manera adaptativa, toman en cuenta solamente los valores pasados de la variable esperada. En particular, las expectativas para los precios en el periodo t, son un promedio ponderado entre los precios que efectivamente se dieron en t-1 y los precios esperados en t-1.

$$P_t^e - P_{t-1}^e = (1-\lambda)(P_{t-1} - P_{t-1}^e)$$

donde P_t^e: nivel esperado de precios para el periodo t
P_{t-1}^e: nivel esperado de precios para el periodo t – 1
P_{t-1}: nivel de precios efectivos para el periodo t – 1
$(1- l)$: velocidad de adaptación de las expectativas

Alternativamente, podemos expresar el nivel de precios esperado en t como: $(P_{t-1} - P_{t-1}^e)$, el precio que fue esperado en t-1, más una proporción del error de predicción que se cometió en el pasado

$$P_t^e = P_{t-1}^e + (1-\lambda)(P_{t-1} - P_{t-1}^e)$$

o como:

$$P_t^e = P_{t-1}^e + (1-\lambda)(P_{t-1} - P_{t-1}^e)$$
$$P_t^e = P_{t-1}^e + P_{t-1} - P_{t-1}^e - \lambda P_{t-1} + l\, P_{t-1}^e$$
$$\boxed{P_t^e = (1- l)\, P_{t-1} + l\ P_{t-1}^e}$$

Esta última ecuación nos muestra que los precios esperados son iguales a un promedio ponderado entre los precios que efectivamente se dieron ayer y los precios esperados de ayer.

$\lambda = 0 : P_t^e = P_{t-1}$	Los precios son iguales a los que se dieron efectivamente ayer. A esto se les llama EXPECTATIVAS ESTATICAS
$\lambda = 1 : P_t^e = P_{t-1}^e$	Los precios esperados son iguales a los precios esperados de ayer. Las EXPECTATIVAS NO SE CORRIGEN NUNCA, es una caso de MIOPIA.

Una forma más general de presentar las expectativas adaptativas es:

$$P_t^e = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i P_{t-i-1} = (1-\lambda)(P_{t-1} + \lambda P_{t-1} + l^2 P_{t-2} + \dots)$$

Los precios esperados de hoy son una suma ponderada de los precios del pasado, donde los precios más antiguos tendrán una menor ponderación o peso, por lo que serán de menor importancia en la determinación de los precios esperados de hoy.

EXPECTATIVAS RACIONALES

1. Defina brevemente el supuesto de expectativas racionales

El supuesto de expectativas racionales implica que los agentes formulan sus expectativas sobre una variable determinada tomando en cuenta toda la información disponible para ellos hasta el período t. A diferencia de las expectativas adaptativas, los agentes toman en cuenta no sólo valores pasados de la variable que se quiere predecir; si no también de otras que afectan a esta variable.

Matemáticamente: $\Pi_{t+1}^{e} = E[\Pi_{t+1} \mid \Omega_t]$

Alternativamente, podemos expresar las expectativas sobre una variable como:

$$\Pi_{t+1}^{e} = E_t[\Pi_{t+1}]$$

De esta forma, bajo expectativas racionales se supone que se conoce:

- El modelo de comportamiento, es decir se conocen todas las variables que explican la variable que se espera.
- Tanto los valores pasados como las variables que afectarán a mi variable esperada.
- Las decisiones de política son conocidas

2. Responda y comente la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a. Un agente que realiza sus expectativas racionalmente nunca puede cometer errores en su predicción.
Falso. En promedio, los agentes no se equivocan; pero en algún momento podrían hacerlo. Los agentes quieren hacer su mejor predicción, por lo que si se equivocaron una vez, en el siguiente período incorporarán mayor información y no cometerán los mismos errores. La predicción puede ser distinta para cada agente, porque cada agente forma su expectativa según la información que tenga.

b. Bajo expectativas racionales existe la posibilidad de que se generen rentas extraordinarias en el mediano y largo plazo.
Falso. Es cierto que obtendrán rentas extraordinarias en un primer momento; pero luego los demás agentes obtendrán esta información, ya sea por terceros o por los mismos agentes que tenían la información privilegiada. El que tiene la información privilegiada querrá aprovecharse de esta información, entonces la venderá y por tanto, en el largo plazo todos tendrán la misma información.

c. Los agentes no pueden formar sus expectativas racionales si no tienen información perfecta.
Falso. Pueden formar sus expectativas sin tener toda la información, los agentes forman sus expectativas dada una información.

PROPIEDADES DEL OPERADOR DE EXPECTATIVAS RACIONALES

Dado el siguiente modelo para la variable consumo:

$$C_{t+1} = C_t + E_{t+1} \qquad (1)$$

con : $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

$$E_t[E_{t+i}, E_{t+j}] = 0 \qquad i \neq j$$

$$E_t[E_{t+i}, \Omega_{t+j}] = 0 \qquad i > j$$

1. **Demuestre que el valor esperado calculado en el momento "t" del consumo en "t+1" es igual al consumo en "t".**

$$E_t\ C_{t+1} = C_t$$

Tomando esperanzas a (1)

$$E_t[C_{t+1}] = E_t[C_t] + E_t[\varepsilon_{t+1}]$$

$$E_t[C_{t+1}] = C_t + 0$$

$$\boxed{E_t[C_{t+1}] = C_t}$$

Si condicionamos la esperanza matemática de la variable x_t al conjunto de información disponible en t, I_t; tendremos:

$$\begin{aligned} E_t C_{t+1} &= E_t[C_{t+1} \mid I_t] = E_t[C_t + \varepsilon_{t+1} \mid I_t] \\ &= E_t[C_t \mid I_t] + E_t[\varepsilon_{t+1} \mid I_t] \\ &= C_t + 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{E_t\ C_{t+1} = C_t}$$

2. **Demuestre que $E_t\ C_{t+1}$ es un predictor insesgado de C_{t+1}, es decir, que el valor esperado del error de predicción es cero.**

$$E_t[C_{t+1} - E_t[C_{t+1}]] = E_t[C_{t+1} - C_t]$$
$$= E_t\ C_{t+1} - E_t C_t = C_t - C_t = 0$$

Por lo tanto, en promedio el error de predicción $C_{t+1} - E_t[C_{t+1}]$ es cero.

3. Demuestre que $E_t C_{t+1}$ es un <u>predictor eficiente</u> de C_{t+1} es decir, que la varianza del error de predicción es mínima e igual a σ^2.

$$
\begin{aligned}
Var(C_{t+1} - E_t C_{t+1}) &= E_t[C_{t+1} - E_t C_{t+1}]^2 \\
&= E_t[C_{t+1} - C_t]^2 \\
&= E_t[\varepsilon_{t+1}{}^2] \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

MODELO DINÁMICO DE OFERTA Y DEMANDA AGREGADAS Y LA CURVA DE PHILLIPS

Sea el modelo dinámico representado por las siguientes ecuaciones:

(1)	$P_t = P_t^e - \alpha(\mu_t - \mu^n)$	Curva de Phillips
(2)	$\Pi_t = m - \dfrac{1}{\phi}(y_t - y_{t-1})$	Demanda Agregada Dinámica
(3)	$(y_t - \bar{y}) = -\dfrac{\alpha}{\lambda}(\mu_t - \mu^n)$	Ley de Okun

1. Encuentre la curva de Oferta Agregada dinámica y plantee nuevamente el modelo.

De (1)

$$P_t = P_t^e - \alpha(\mu_t - \mu^n)$$

$$(P_t - P_{t-1}) = (P_t^e - P_{t-1}) - \alpha(\mu_t - \mu^n)$$

$$\boxed{\Pi_t = \Pi_t^e - \alpha(\mu_t - \mu^n)} \qquad \ldots (4)$$

De (3)

$$(y_t - \bar{y}) = -\frac{\alpha}{\lambda}(\mu_t - \mu^n)$$

$$(\mu_t - \mu^n) = -\frac{\lambda}{\alpha}(y_t - \bar{y}) \qquad \ldots (5)$$

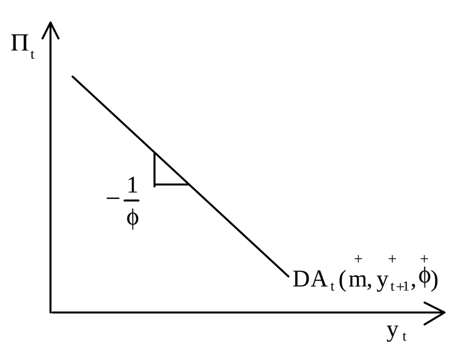
Reemplazando la ecuación (5) en (4) obtenemos la Curva de oferta agregada dinámica

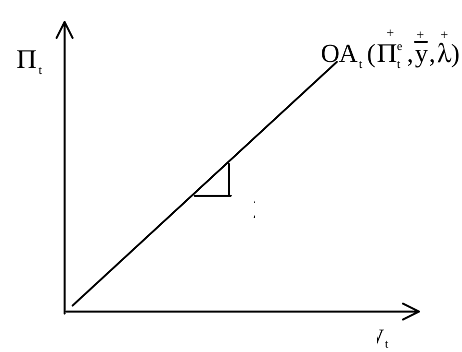
$$\boxed{\Pi_t = \Pi_t^e + \lambda(y_t - \bar{y})} \qquad \ldots (6)$$

Replanteando el modelo tendríamos:

$$\Pi_t = \Pi_t^e + \lambda(y_t - \bar{y}) \qquad \text{(OA)}$$

$$\Pi_t = m - \frac{1}{\phi}(y_t - y_{t-1}) \qquad \text{(DA)}$$





2. Exprese el modelo en la forma estructural y reducida de forma matricial. Asuma que las agentes forman sus expectativas de manera adaptativa, en particular estáticas:

$$\Pi_t^{e} = \Pi_{t-1}$$

$$(OA) \qquad \Pi_t = \Pi_{t-1} + \lambda(y_t - \bar{y})$$

$$(DA) \qquad \Pi_t = m - \frac{1}{\phi}(y_t - y_{t-1})$$

Variables Endógenas : Π_t **,** Y_t

Variables Exógenas : Π_{t-1}**,** Y_{t-1}**,** $\bar{Y}$**, m**

Reacomodando las ecuaciones para expresarlas en la forma estructural:

$$(OA) \qquad \Pi_t - \lambda y_t = \Pi_{t-1} + \lambda\bar{y}$$

$$(DA) \qquad \Pi_t + \frac{1}{\phi}y_t = m + \frac{1}{\phi}y_{t-1}$$

Matricialmente, la forma estructural sería:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1/\phi \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Pi_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\phi \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \Pi_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{Y} \\ m \end{bmatrix}}_{X}$$

y la forma reducida sería:

$$A^{-1} \; A \; Y = A^{-1} B \; y_{t-1} + A^{-1} CX$$

$$Y = A^{-1} B \; y_{t-1} + A^{-1} CX$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1/\phi & \lambda \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\phi}{1+\lambda\phi}\begin{bmatrix} \frac{1}{\phi} & \lambda \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{\phi} + \lambda = \frac{1+\lambda\phi}{\phi}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\frac{1+\lambda\phi}{\phi}} = \frac{\phi}{1+\lambda\phi}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{\phi(1+\lambda\phi)} & \frac{\lambda\phi}{1+\lambda\phi} \\ -\frac{\phi}{1+\lambda\phi} & \frac{\phi}{1+\lambda\phi} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix}\Pi_t\\ Y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+\lambda\phi} & \dfrac{\lambda\phi}{1+\lambda\phi}\\ \dfrac{-\phi}{1+\lambda\phi} & \dfrac{\phi}{1+\lambda\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Pi_{t-1}\\ Y_{t-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+\lambda\phi} & \dfrac{\lambda\phi}{1+\lambda\phi}\\ \dfrac{-\phi}{1+\lambda\phi} & \dfrac{\phi}{1+\lambda\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{y}\\ m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Pi_t\\ Y_t\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+lf} & \dfrac{l}{1+lf}\\ \dfrac{-f}{1+lf} & \dfrac{1}{1+lf}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\Pi_{t-1}\\ Y_{t-1}\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{-l}{1+lf} & \dfrac{lf}{1+lf}\\ \dfrac{lf}{1+lf} & \dfrac{f}{1+lf}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\bar{y}\\ m\end{pmatrix}$$

Multiplicadores de corto plazo (porque hay dinámica)

Multiplicadores de Impacto

3. **Plantee y verifique la condición de Estabilidad de este modelo de dos ecuaciones en diferencia de orden uno.**

$$|\lambda_1|<1, \quad |\lambda_2|<1$$

Condiciones de estabilidad:

a) det (M) < 1
b) tr (M) < 1 + det (M)

a) **det (M) < 1**

$$\frac{1}{(1+\lambda\phi)^2}+\frac{\phi\lambda}{(1+\lambda\phi)^2}=\frac{1+\phi\lambda}{(1+\lambda\phi)^2}=\frac{1}{1+\lambda\phi}>0$$

Además: $\dfrac{1}{1+\lambda\phi}<1$; pues $1<\underbrace{1+\lambda\phi}_{(+)}; \lambda>0, \phi>0$

b) **tr (M) < 1 + det (M)**

$$\frac{1}{1+\lambda\phi}+\frac{1}{1+\lambda\phi}<1+\frac{1}{1+\lambda\phi}$$

$$\frac{2}{1+\lambda\phi} < \frac{2+\lambda\phi}{1+\lambda\phi}$$

$$2 < 2+\lambda\phi$$

Pues : $\lambda\phi>0$; $\lambda>0$
$\phi>0$

4. **Exprese matricialmente el modelo en el largo Plazo**

En el largo plazo las variables se encuentran en reposo, es decir, no varian a lo largo del tiempo:

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} = \Pi^*$$
$$y_t = y_{t-1} = y^*$$

Entonces del modelo de la forma estructural:

$$AY = B\,Y_{t-1} + C\,X$$

$$A\,Y^* = B\,Y^* + C\,X \qquad \text{(notación matricial)}$$

$$(A - B)\,Y^* = C\,X$$

$$\boxed{Y^* = (A-B)^{-1}\;C\,X} \qquad \text{Modelo en largo Plazo}$$

- Hallamos $(A\text{-}B)^{-1}$

$$(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \frac{1}{\phi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

- $Y^* = (A\text{-}B)^{-1}\,CX$

$$\begin{pmatrix} \Pi^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Pi^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ m \end{pmatrix}$$

5. **Analice intuitiva, gráfica y matemáticamente el efecto de un incremento de la oferta monetaria**

En el corto plazo un incremento en la oferta monetaria presenta un efecto positivo sobre el producto y sobre la tasa de inflación:

$$\frac{d\Pi_t}{d\bar{y}} = \frac{-\lambda}{1+\lambda\phi} < 0 \qquad\qquad \frac{dy_t}{d\bar{y}} = \frac{\lambda\phi}{1+\lambda\phi} > 0$$

$$\frac{d\Pi_t}{dm} = \frac{lf}{1+lf} \quad > 0 \qquad\qquad \frac{dy_t}{dm} = \frac{f}{1+lf} \quad > 0$$

y en el largo plazo el incremento en la tasa de crecimiento del dinero (m) tiene solo efectos nominales, es decir solo tiene efectos sobre la inflación mas no sobre el producto. Es decir, se estaría cumpliendo la dicotomía clásica.

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial m} = 1 \rightarrow$$

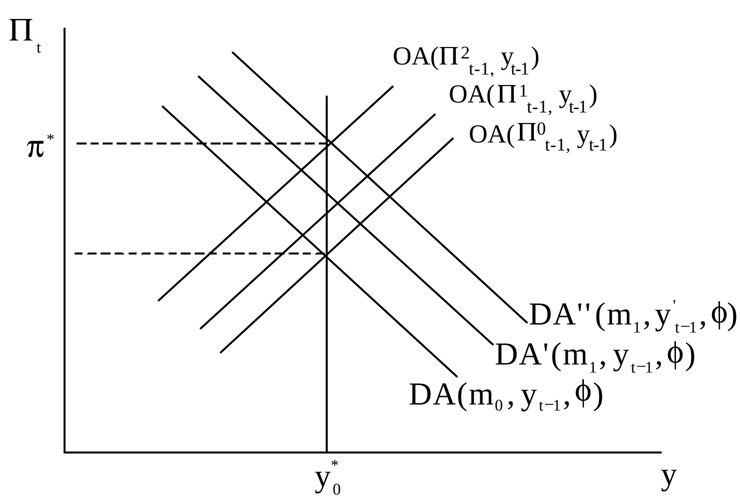
En el largo plazo, sube la tasa de crecimiento del dinero (m) trae efectos sobre la inflación. Valor nominal (m) afectan a valor nominal (Π). En el largo plazo, economía es clásica.

$$\frac{dy^*}{d\bar{y}} = 1$$

$$\frac{dy^*}{dm} = 0 \rightarrow$$

En el largo plazo, el incremento en la tasa de crecimiento del dinero no afectan al producto de equilibrio. Variables nominales afectan sólo a variables nominales (Π), más no a variables reales (y^*).

Gráficamente



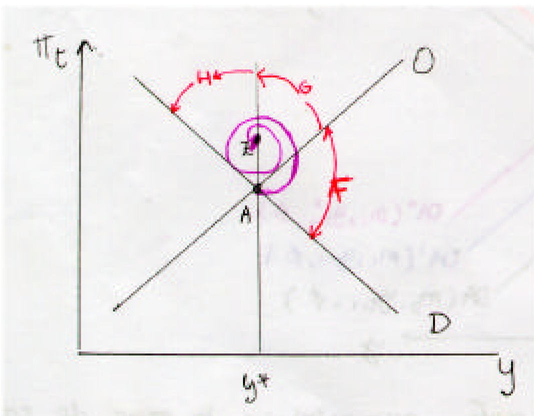
En el primer momento (t=0), ante aumentos en la tasa de crecimiento del dinero (m), la Demanda Agregada se traslada a la derecha y estamos en B. En este punto, aumento tanto el producto como la inflación. (Multiplicadores de corto plazo)

En el segundo momento, ante el $\uparrow m$, tanto Π_t como y_t se vieron afectadas, por tanto en el siguiente período Π_{t-1} e y_{t-1} van a afectar tanto al producto como la inflación.

$$\frac{d\Pi_t}{d\Pi_{t-1}} = \frac{1}{1+\lambda\phi} \quad > 0 \qquad\qquad \frac{d\Pi_t}{dy_{t-1}} = \frac{\lambda}{1+\lambda\phi} \quad > 0$$

$$\frac{dy_t}{d\Pi_{t-1}} = \frac{-\phi}{1+\lambda\phi} < 0 \qquad\qquad \frac{dy_t}{dy_{t-1}} = \frac{1}{1+\lambda\phi} > 0$$

Este modelo nos permite explicar porque no se observa una curva de Phillips todo el tiempo. La curva de Phillips en el largo plazo es vertical, z es el equilibrio de largo plazo y para llegar al equilibrio de largo plazo. Existe una dinámica de transición en la cual en algunos períodos se cumple la curva de Phillips (tramo F, H) y en otros no (G). La transición hacia el equilibrio es un espiral porque las raíces son complejas. (es sinusoide cuando se gráfica la serie respecto al tiempo).



F: Curva de Phillips $\uparrow \Pi, \uparrow$ y

G: No se cumple c.p. $\uparrow \Pi, \downarrow$ y

H: se cumple c.p. $\downarrow \Pi, \downarrow$ y

DINÁMICA DE LA INFLACIÓN Y EL DESEMPLEO: LA CURVA DE PHILLIPS EN TIEMPO CONTINUO [3]

Sea el modelo dinámico representado por las siguientes ecuaciones:

(1) $\Pi = a - T - bU + h\Pi^e$, $0 < h \leq 1$, $\alpha, \beta > 0$

(2) $\dot{\Pi}^e = j(\Pi - \Pi^e)$, $0 < j \leq 1$,

(3) $\dot{U} = -k(m - \Pi)$, $k > 0$

donde:

Π : inflación efectiva

Π^e : inflación esperada

U: Tasa de desempleo

m: Tasa de crecimiento de la oferta monetaria

1. Utilizando (1) (2) y (3) construya una ecuación diferencial de segundo orden, cuya variable sea la inflación esperada.

Reemplazando la ecuación (1) en (2)

$$\dot{\Pi}^e = j(\alpha - T - \beta U + h\Pi^e - \Pi^e)$$

(4) $\boxed{\dot{\Pi}^e = j(\alpha - T - \beta U) - j(1-h)\Pi^e}$ Ecuación diferencial de orden 1, pero todavía depende de la tasa de desempleo U.

Diferenciando la ecuación (4) un período y reemplazando la ecuación (3) en (4):

$$\ddot{\Pi}^e = -j(\beta\dot{U}) - j(1-h)\dot{\Pi}^e$$

$$\ddot{\Pi}^e = -j\beta(-k(m-\Pi)) - j(1-h)\dot{\Pi}^e$$

(5) $\boxed{\ddot{\Pi}^e = -j\beta km - j\beta k\Pi - j(1-h)\dot{\Pi}^e}$

Como buscamos que Π^e sea la endógena; reemplazamos la ecuación (2) en (5)

Despejamos Π de (2): $\dot{\Pi}^e + j\Pi^e = j\Pi$

En (5): $\dot{\Pi}^e = jbkm - jbk\left(\dfrac{\dot{\Pi}^e + j\Pi^e}{j}\right) - j(1-j)\dot{\Pi}^e$

[3] Chiang, Alpha. Métodos Fundamentales de Economía Matemática. México: Mc Graw Hill

$$\ddot{\Pi}^e = jbkm - [bk + j(1-h)]\dot{\Pi}^e - jbk\,\Pi^e$$

$$\boxed{\ddot{\Pi}^e + [\beta k + j(1-h)]\dot{\Pi}^e + (j\beta k)\Pi^e = j\beta km}$$

Ecuación diferencial de segundo orden.

2. Resuelva la ecuación diferencial y encuentre la trayectoria de la Π^e.

La Solución particular nos muestra el valor al que se converge, tenemos:

Ecuación característica:

$$\begin{aligned}
&r^2 + a_1 r + a_2 = b \\
&y = b: \quad y'' = y' = 0 \\
&y'' + a_1 y' + a_2 y = b \\
&0 + 0 + a_2 y = b \\
&y = \frac{b}{a_2} = \frac{jbkm}{jbk} \\
&\boxed{y^b = m}
\end{aligned}$$

Π^e en el largo plazo va a converger a m; esto quiere decir que la inflación esperada va a ser igual a la tasa de crecimiento del dinero nominal.

Por otro lado, la solución homogénea nos muestra la dinámica de transición, es decir si existe un equilibrio al cual se convergerá.

Las raíces características están dadas por:

$$\boxed{r_1, r_2 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}}$$

$$y = \Pi^e = m + A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

Para que exista una dinámica de transición, la condición es que las raíces sean negativas, ya que a medida que t crece, si la raíz característica es negativa, la solución homogénea $(A_1 e^{r_1 t} \rightarrow 0)$ tenderá a un valor de equilibrio, en este caso particular al valor m.

No sabemos si: $a_1^2 >< 4a_2$, por tanto no sabemos si las raíces son reales e iguales, reales y distintas o complejas. Veamos los 3 casos:

- R. REALES $\neq$ S $\quad a_1^2 > 4a_2 \quad ; \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0$

  $a_1 > \sqrt{a_1^2 - 4_a^2}$

  $\Rightarrow r_1 < 0, \quad r_2 < 0$

  $\therefore$ el equilibrio es dinámicamente estable.

- R. REALES IGUALES: $\quad a_1^2 = 4a_2$

  $r_1 = r_2 = \dfrac{-a_1}{2} \rightarrow$ Equilibrio dinámicamente estable.

- R. COMPLEJAS: Para ver la convergencia, en el caso que tengamos raíces complejas, sólo nos interesa la parte real.

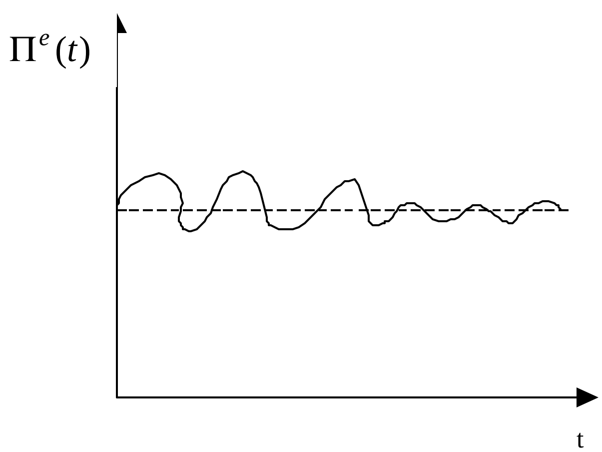
  La parte real es $h = {-a_1}/{2}$ por tanto el equilibrio en este caso, también es estable.

Notemos que la convergencia en este caso oscilante y ondeada porque en la solución tenemos las funciones seno y coseno.

$$Y = \Pi^e = e^{ht} \ (A_1 \cos vt + A_2 \operatorname{sen} vt)$$

donde h: la parte real de la raíz
v: la parte imaginaria de la raíz.

La solución compleja, está replicando bien la economía, por que la trayectoria de una variable en el tiempo es oscilante.



$\therefore$ La trayectoria de Π^e es estable, converge a m.

ECUACIONES EN DIFERENCIA Y OPERADORES DE REZAGO (CAGAN,1956)

Sea el modelo de CAGAN (1956):

$$m_t - P_t = \alpha(P^e_{t+1} - P_t) \quad ; \quad \alpha < 0 \qquad (1)$$

1. Tipos de operadores.

Operador de Rezagos: Rezaga un periodo una variable que dependa del tiempo.

Ej.: $X_t \rightarrow$ Variable que depende del tiempo.

$$LX_t = X_{t-1}$$
$$L(LX_t) = LX_{t-1}$$
$$L^2X_t = X_{t-2}$$
$$\vdots$$
$$L_nX_t = X_{t-n}$$

Operador de adelanto: Adelanta un período una variable que depende de tiempo.

Ej.: $X_t \rightarrow$ Variable que depende del tiempo

$$L^{-1}X_t = X_{t+1}$$
$$L^{-1}L^{-1}X_t = L^{-1}X_{t+1}$$
$$L^{-2}X_t = X_{t+2}$$
$$\vdots$$
$$L^{-n}X_t = X_{t-n}$$

$\rightarrow$

$$X_t = aX_{t-1} + Z_t$$
$$X_t = a(LX_t) + Z_t$$
$$X_t - aLX_t = Z_t$$
$$(1-aL)X_t = Z_t$$
$$X_t = \frac{1}{1-aL}Z_t \quad *$$

2. Propiedades del operador de rezagos.

si $|a| < 1$

$$\frac{1}{1-aL} = 1 + aL + a^2L^2 + a^3L^3 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a^iL^i$$

$$\frac{1}{1-aL}Z_t (1 + aL + a^2L^2 + ...)Z_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^iL^iZ_t$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i L^i Z_t = Z_t + aZ_{t-1} + a^2 Z_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i Z_{t-i}$$

Entonces podemos reexpresar (*):

$$X_t = \frac{1}{1-aL} Z_t$$

$$\boxed{X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i L^i Z_t}$$

3. Encuentre e interprete la solución para P_t, asumiendo expectativas adaptativas. ¿Cuál es la condición que debe cumplirse para que esta solución sea convergente?

Expectativas Adaptativas: $P^e_{t+1} - p_t = \gamma(p_t - p_{t-1})$

(El precio esperado de mañana depende del precio de hoy y de una proporción de la diferencia de precios de hoy y de ayer).

Despejamos P^e_{t+1} de la ecuación de expectativas adaptativas:

$$P^e_{t+1} = P_t + \gamma(P_t - P_{t-1}) \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\begin{aligned} m_t - P_t &= \alpha(P^e_{t+1} - P_t) \\ &= \alpha(P_t + \gamma(P_t - P_{t-1}) - P_t) \\ m_t &= P_t + \alpha\gamma P_t - \alpha\gamma P_{t-1} \\ m_t &= (1+\alpha\gamma)P_t - \alpha\gamma P_{t-1} \end{aligned}$$

Aplicando el operador de rezagos:

$$m_t = (1+\alpha\gamma)P_t - \alpha\gamma L P_t$$
$$m_t = [1+\alpha\gamma - \alpha\gamma L]P_t$$

Dividiendo todo entre: $(1+\alpha\gamma)$:

$$\left[\frac{1+\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} - \frac{\alpha\gamma L}{1+\alpha\gamma}\right] p_t = \frac{mt}{1+\alpha\gamma}$$

$$\left[1 - \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right) L\right] p_t = \frac{m^x_t}{1+\alpha\gamma}$$

$$\boxed{P_t = \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)L} \bullet \left(\frac{m_t^x}{1+\alpha\gamma}\right)} \qquad (3)$$

Esto tiene la forma:

$$\mathrm{P_t} = \frac{1}{1-\mathrm{aL}} \cdot \mathrm{Z_t}$$

tenemos que verificar si: $|\,\mathrm{a}\,| = \left|\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right| \mathrm{X} < 1$

Si $\left|\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right| < 1$, entonces podemos aplicar las propiedades de una expresión como $\frac{1}{1-\mathrm{aL}}$, donde $|\,\mathrm{a}\,| < 1$ para obtener una suma convergente.

La condición para que la solución sea convergente es que:

$$\alpha\gamma \quad \in \quad]-0.5\,,\,0[$$

Para que $\left|\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right| < 1$ es necesario que:

$$-1 < \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} < 1$$

$$-(1+\alpha\gamma) < \alpha\gamma < 1+\alpha\gamma$$

De la primera desigualdad

$$\begin{aligned} &-1-\alpha\gamma < \alpha\gamma \\ &-1 < 2\alpha\gamma \\ &-\frac{1}{2} < \alpha\gamma \end{aligned}$$

y como $\alpha < 0$, tenemos que la condición que debe satisfacer $\alpha\gamma$ para que $\left|\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right| < 1$ es que $\alpha\gamma \in \left]-0.5, 0\right[$. Bajo este supuesto, aplicamos la propiedad de los operadores de regazo:

Reexpresamos (3):

$$\mathrm{P_t} = \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)\mathrm{L}} \cdot \frac{\mathrm{m_t}}{1+\alpha\gamma}$$

$$\boxed{P_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^i m_{t-i} + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)c} \qquad \text{(I)}$$

Esta es la solución del modelo de Cagan con expectativas adaptativas.

Interpretación: Cuando los agentes formulan sus expectativas de manera adaptativa, los precios dependerán de una ponderación de la cantidad de dinero pasada, donde cada vez se le da menos peso a la cantidad de dinero para explicar los precios.

4. Encuentre e interprete la solución para P_t asumiendo expectativas racionales (previsión perfecta).

Expectativas racionales: $P_{t+1}^{e} = P_{t+1}$ (4)

Reemplazamos la hipótesis de expectativas racionales (4) en (1)

$$m_t - P_t = \alpha(P_{t+1}^{e} - P_t) \qquad ; \ \alpha < 0$$

$$m_t = P_t + \alpha P_{t+1} - \alpha P_t$$

$$m_t = \alpha P_{t+1} + (1-\alpha)P_t$$

dividiendo todo entre α:

$$P_{t+1} + \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)P_t = \frac{1}{\alpha}m_t$$

aplicando el operador de rezagos invertido o el operador de adelanto:

$$L^{-1}P_t + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)P_t = \frac{1}{\alpha}m_t$$

Factorizando P_t:

$$\left[L^{-1} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]P_t = \frac{1}{\alpha}m_t$$

Multiplicando todo por L:

$$\left[1 - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)L\right]P_t = \frac{1}{\alpha}Lm_t$$

$$\left[1 - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)L\right]P_t = \frac{1}{\alpha}m_{t-1}$$

$$\boxed{P_t = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)L}\right]m_{t-1} + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^t} \tag{5}$$

Dado que $\frac{1}{1-aL} = \frac{-(aL)^{-1}}{-(aL)^{-1} + aL(aL)^{-1}} = \frac{-(aL)^{-1}}{1-(aL)^{-1}}$

Aplicando esto a (5):

$$P_t = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-1} L^{-1}}{1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-1} L^{-1}}\right]m_{t-1} + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-1}$$

$$P_t = -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)^{-1} L^{-1}}{1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-1} L^{-1}}\right]m_{t-1} + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-1}$$

$$P_t = -\frac{\alpha}{\alpha}(\alpha-1)^{-1}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-1} L^{-1}}\right]L^{-1}m_{t-1} + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{t}$$

$$P_t = \frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)L^{-1}}\right]m_t + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^t \tag{6}$$

pero $\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)L^{-1}}$ tiene la forma $\frac{1}{1-aL^{-1}}$ y esto puede expresarse:

$$\frac{1}{1-aL^{-1}}m_t = (1 + aL^{-1} + a^2L^{-2} + a^3L^{-3} + \ldots)m_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i L^{-i} m_t$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i L^{-i} m = (a^0 L^0 m_t + a^1 L^{-1} m_t + a^2 L^{-2} m_t + \ldots = m_t + a^1 m_{t+1} + a^2 m_{t+2}$$

$$+ a^3 m_{t+3} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i m_{t+i}$$

Aplicando esta propiedad a (6)

$$P_t = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)L^{-1}}\right] m_t + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^t$$

$$\boxed{P_t = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^i m_{t+i} + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^t} \qquad \text{(II)}$$

La solución para los precios asumiendo Expectativas Racionales, nos muestra que los precios dependen de la cantidad de dinero actual y futura.

5. Analice el impacto en t de un incremento de la cantidad de dinero en t-1 en el modelo con expectativas adaptativas.

De (I):

$$P_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^i m_{t-i} + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^t C$$

$$P_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma}\left[m_t + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right) m_{t-i} + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^2 m_{t-2} + \ldots\right] + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^t C$$

Diferenciando totalmente:

$$dP_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma}\left[dm_t + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right) dm_{t-1} + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^2 dm_{t-2} + \ldots\right] + C\, d\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^t$$

haciendo $dm_t = dm_{t\text{-}2} = dm_{t\text{-}3} = \ldots 0 = Cd\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right)^t$

$$dP_t = \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}\right) dm_{t-1}$$

$$dP_t = \frac{\alpha\gamma}{(1+\alpha\gamma)^2} dm_{t-1}$$

Entonces el efecto de un incremento de m_{t-1} en el corto plazo sobre P_t es:

$$\frac{dp_t}{dm_{t-1}} = \frac{\alpha\gamma}{(1+\alpha\gamma)^2} < 0 \qquad \begin{array}{l} \alpha < 0 \\ \gamma > 0 \end{array}$$

5. Analice el impacto de un incremento permanente de la cantidad de dinero en t-1.

En el largo plazo: $m_t = m_{t-1} = m_{t-2} = m^*$

Reemplazando esto en (I):

$$P_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{\alpha} \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)^i m^* + C\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)$$

$$P_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma} m^* \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)^i \right] + \left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right) C$$

Dado que $\left| \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right| < 1$, la sumatoria converge a $\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)}$

Entonces:

$$P_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma} m^* \left[\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)} \right] + C\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)$$

$$P_t = m^* \left(\frac{1}{\cancel{1+\alpha\gamma}} \right) \left(\frac{1}{\frac{1+\cancel{\alpha\gamma}+\cancel{\alpha\gamma}}{\cancel{1+\alpha\gamma}}} \right) + C\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)$$

$$P_t = m^* \left(\frac{1}{1+\alpha\gamma} \right) \left(\frac{1+\alpha\gamma}{1} \right) + C\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)$$

$$P_t = m^* + C\left(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)$$

Diferenciando totalmente:

$$dP_t = dm^*$$

Entonces el efecto de un incremento permanente de m* es:

$$\frac{dp_t}{dm^*} = 1$$

7. Analice el impacto en t de un incremento en la cantidad de dinero ($\uparrow m_{t+1}$) en el modelo con expectativas racionales

De (II): $$P_t = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^i m_{t-i} + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^t$$

$$P_t = \frac{1}{1-\alpha}\left(m_t + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) m_{t+1} + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 m_{t+2} + \ldots. \right) + C\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^t$$

Diferenciemos totalmente, tomando en cuenta

$$dm_t = dm_{t+2} = dm_{t+3} + \ldots = 0 = c \quad d\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^t$$

$$dP_t = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) dm_{t+1}$$

Entonces, el efecto de un incremento de m_{t+1} sobre p_t es:

$$\boxed{\frac{dp_t}{dm_{t+1}} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} > 0} \qquad ;\ \alpha < 0$$

8. Analice el impacto de un incremento permanente de la cantidad de dinero sobre P_t, cuando los agentes forman sus expectativas racionalmente

En el largo plazo; $m_t = m_{t+1} = m_{t+2} = m*$ y reemplazando esto es II

$$P_t = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^i m^*$$

Diferenciando totalmente:

$$P_t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\alpha}{\alpha-1}} \right) m^*$$

$$P_t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{\frac{\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}}{\alpha-1}}\right)m^*$$

$$P_t = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha)\,m*$$

$$\boxed{dp_t = dm*}$$

LA CRÍTICA DE LUCAS

Sea el siguiente modelo con Expectativas racionales:

(1) $y_t = a_0 + a_1(m_t - E_{t-1}(m_t)) + a_2 y_{t-1} + \mu_t$ Curva de Oferta Agregada

(2) $m_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ Regla de Política

donde $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma_E^2)$

$$E_{t-1}(m_t) = E_{t-1}[b_0 + b_1 y_{t-1} + \varepsilon_t]$$

(3) $E_{t-1}(m_t) = b_0 + b_1 y_{t-1}$

Reemplazando (3) en (1):

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 + a_1(m_t - b_0 - b_1 y_{t-1}) + a_2 y_{t-1} + \mu_t \\ &= a_0 + a_1 m_t - a_1 b_0 - a_1 b_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-1} + \mu_t \\ &= a_0 - a_1 b_0 + a_1 m_t + (a_2 - a_1 b_1) y_{t-1} + \mu_t \\ &= \theta_0 + \theta_1 m_t + \theta_2 y_{t-1} + \mu_t \end{aligned}$$

$$\theta_0 = f(a_0, a_1, b_0)$$
$$\theta_1 = f(a_1)$$
$$\theta_2 = f(a_1, a_2, b_1)$$

Notemos que si cambia la regla de política tendría que cambiar b_0 o b_1 y si estos cambian, θ_0 y θ_2 también cambian, por lo que no se puede suponer que θ_0 y θ_1 son constantes (fijos).
Por tanto, este modelo si es compatible con la crítica de Lucas; ya que no se puede hablar del impacto de la política porque los parámetros θ_0 , θ_1 , θ_2 no reflejan los parámetros estructurales.

MODELO CON INFORMACIÓN PERFECTA DE LUCAS

Dadas las siguientes ecuaciones:

(1) $Q_i = L_i$ Es la tecnología individual

(2) $C_i = \dfrac{P_i Q_i}{P}$ Valor real del consumo (individual) deflactado por inflación

(3) $U_i = C_i - \dfrac{1}{\gamma} L_i \gamma$ F_n utilidad dada por el consumo y el trabajo (es un mal)

$\gamma > 1$ elasticidad

1. Encuentre la curva de oferta de trabajo del bien "i" en términos logarítmicos.

Reemplazando (1) en (2) y (2') en (3):

(2') $C_i = \dfrac{P_i L_i}{P}$

(3') $U_i = \dfrac{P_i L_i}{P} - \dfrac{1}{\gamma} L_i^{\gamma}$

Condición de Primer Orden:

$$\frac{\partial U}{\partial L_i} = 0 \qquad = \frac{P_i}{P} - \frac{1}{\gamma} \cdot \gamma L_i^{\gamma-1} \tag{4}$$

$$\boxed{L_i = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = Q_i^s} \tag{5}$$

En términos logarítmicos:

$$\ln L_i = \frac{1}{\gamma-1}[\ln P_i - \ln P] = \ln Q_i^s$$

$$\boxed{l_i = \frac{1}{\gamma-1}[p_i - p] = q_i^s} \tag{6}$$

Esta es la oferta individual (del bien i) en logaritmos la oferta nos muestra la relación entre empleo y precios si los cambios en precios relativos son mayores a los cambios en precios agregados, $\Delta p_i > \Delta p$, se responde contratando más trabajo y produciendo más.

Dadas las ecuaciones de oferta anteriores y las siguientes ecuaciones por el lado de la demanda:

$$Q_i^{\,d} = y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-n} e^{z_i}$$

Tomando logaritmos:

$$q_i^{\,d} = y + z_i - n(p_i - p) \qquad (7)$$

donde: $z_i \sim (0, \sigma^2)$

$n > 0$

$q_i^{\,d}$ es la demanda del bien "i", la cual depende del producto agregado (y), de shocks de demanda (z_i) y de la respuesta de la demanda al precio (n) cuando el cambio en los precios relativos es mayor que el nivel general de precios, asumiendo que la Demanda Agregada esta dada por:

$$y = m - p \quad ; \quad \text{m: instrumentos de Política} \qquad (8)$$

2. Encuentre el precio de equilibrio del bien "i":

En equilibrio: $q_i^{\,s} = q_i^{\,d}$

$$\frac{1}{\gamma-1}(p_i - p) = y + z_i - n(p_i - p)$$

$$\frac{1}{\gamma-1}p_i - \frac{1}{\gamma-1}p = y + z_i - np_i + np$$

$$\left(\frac{1}{\gamma-1} + n\right)p_i = \left(\frac{1}{\gamma-1} + n\right)p + y + z_i$$

$$p_i = p + \left(\frac{\gamma-1}{1+n\gamma-n}\right)(y + z_i) \qquad (9)$$

3. ¿Qué pasa en el equilibrio si trabajamos en términos promedios?

$$E(q_i) = \overline{q}_i = y \qquad (10)$$
$$E(p_i) = \overline{p}_i = p \qquad (11)$$
$$E(z_i) = \overline{z}_i = 0 \qquad (12)$$

Tomando esperanzas a (9)

$$E[p_i] = E[p] + \left(\frac{\gamma-1}{1+n\gamma-n}\right)\left(E(y) + E(z_i)\right)$$

$$p = p + \left(\frac{\gamma - 1}{1 + n\gamma - n} \right)(y + 0) \qquad (13)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g - 1}{1 + ng - n} \right) y = 0 .... \langle \begin{matrix} y = 0 \\ g = 1;\ pero\ g > 1 \end{matrix}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} &y = 0 \qquad (14) \\ &\ln y = 0 \\ &y = e^0 = 1 \\ &y = 1 \end{aligned}$$

De (14) y (8) tenemos:

$$\begin{aligned} &0 = y = m - p \\ &m = p \qquad (15) \\ &\boxed{M = P} \end{aligned}$$

El dinero es neutral (oferta inelástica)

MODELO CON INFORMACIÓN IMPERFECTA DE LUCAS

Sea la siguiente definición del precio relativo del bien i:

$$R_i = \frac{p_i}{P} \qquad (1)$$

R_i : precio relativo del bien "i"
P_i : precio del bien "i"
P : Nivel de precios agregados

- Tomando logaritmos a (1)

$$\ln R_i = \ln P_i - \ln P$$
$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{señal a extraer}}}{r_i} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{observado}}}{p_i} - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ruido aleatorio}}}{p} \qquad (2)$$

- Estimando r_i por MCO:

$$r_i = \beta_0 + \beta_1 p_i - p$$
$$E[r_i / p_i] = b_0 + b_1 p_i$$
$$E[r_i / p_i] = \frac{vr}{vr + vp}[p_i - E(p)] \qquad (3)$$

Los precios relativos (r_i) no son conocidos, por eso los estimamos.

1. Encuentre la curva de oferta del bien "i" y la curva de oferta agregada (o curva de oferta agregada de Lucas), dada la siguiente curva de oferta de trabajo para el individuo "i":

$$l_i^s = \frac{1}{\gamma - 1}(p_i - p) \qquad (4)$$

- Reemplazando (2) en (4)

$$l_i^s = \frac{1}{\gamma - 1}(r_i)$$

$$l_i^s = \frac{1}{\gamma - 1} E[r_i / p_i] \qquad (5)$$

- Reemplazando (3) en (5)

$$l_i^s = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{vr}{vr + vp}\right)[p_i - E(p)] \qquad (6)$$

$$l_i^s = b[p_i - E(p)] = q_i^s \qquad (7)$$

- Promediando (7) entre todos los productores: $q = \overline{q}_i^s$ y dado que $y = \overline{q}_i^s$ y que $p = \overline{p}_i$

$$\boxed{y = b[p - E(p)]}$$ (8) curva de oferta agregada o de Lucas

- $b = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{v_r}{v_r + v_p}\right)$

Si $v_r \to 0 \quad : \quad v_p \to \infty \quad \Rightarrow \quad b \to 0$

y si $b \to 0$, la Curva de Oferta de Lucas es vertical, es decir el producto no respondería ante cambios en precios.

2. Sea la curva de demanda agregada $y^d = m - p$, encuentre los niveles de precio y producto de equilibrio.

En equilibrio: $y^d = y^s$

$$m - p = b[p - E(p)]$$
$$m - p = bp - bE(p)$$
$$p(b+1) = m + bE(p)$$
$$p = \frac{1}{1+b}m + \frac{b}{1+b}E(p) \qquad (9)$$

El precio está dado por una parte política y por otra de los precios esperados.

Reemplazando (9) en (8):

$$y = b\left[\frac{1}{1+b}m + \frac{b}{1+b}E(p) - E(p)\right]$$

$$y = \left(\frac{b}{1+b}\right)m + \left[\frac{b^2}{1+b} - b\right]E(p)$$

$$= \left(\frac{b}{1+b}\right)m - \left(\frac{b^2 - b - b^2}{1+b}\right)E(p)$$

$$\boxed{y = \left(\frac{b}{1+b}\right)m - \left(\frac{b}{1+b}\right)E(p)} \qquad (10)$$

Aplicando esperado a (9)

$$E(p) = \frac{1}{1+b}E(m) + \frac{b}{1+b}E(p)$$

$$\left(1-\frac{b}{1+b}\right)E(p)=\frac{1}{1+b}E(m)$$

$$\frac{1}{1+b}E(p)=\frac{1}{1+b}E(m)$$

$$\boxed{E(p)=E(m)} \qquad (11)$$

Los individuos esperan una inflación igual, en promedio, a la variación de la cantidad de dinero. Es decir, todo cambio de la política afecta solo a precios y no al producto.

Usando (11) y $m = E(m) + [m - E(m)]$

Reescribiendo (9):

$$p=\frac{1}{1+b}\left[E(m)+(m-E(m))\right]+\frac{b}{1+b}E(p)$$

$$p=\left(\frac{1}{1+b}+\frac{b}{1+b}\right)E(m)+\frac{1}{1+b}(m-E(m))$$

$$p=E(m)+\frac{1}{1+b}(m-E(m)) \qquad (12)$$

Reemplazando (11) en (10):

$$y=\left(\frac{b}{1+b}\right)m-\left(\frac{b}{1+b}\right)E(m)$$

$$\boxed{y=\frac{b}{1+b}(m-E(m))} \qquad (13)$$

Sólo los shocks no anticipados de dinero tendrán efecto sobre el producto más no los shocks anticipados ya que y=0 (porque m = E(m)); sin embargo los precios si cambiarían.

v_r está asociado a v_z
v_p está asociado a v_m

$$b=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{v_r}{v_r+v_p}\right)$$

$$b=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{v_z}{v_r+v_m}\right); \text{cuando } n=1$$

3. ¿Se cumple la relación establecida por la curva de Phillips en este modelo?

En este modelo encontramos que la inflación y el producto están correlacionadas positivamente, por lo que podemos decir que el modelo de información imperfecta implica que se cumple la relación establecida por la Curva de Phillips.
Por otro lado podemos decir que shocks inesperados de oferta de dinero afectan tanto al producto como a los precios, en cambio shocks anticipados afectarán solo a precios. En este contexto, podriamos decir que se cumple la curva de Phillips a corto plazo, mas no a largo plazo.

A pesar de que existe una relación estadística entre inflación (Π), y producto (y), no existe un trade-off aprovechable en términos de política económica, ya que si $v_m \to \infty$ o $v_z \to 0 \Rightarrow b \to 0$, el producto no respondería ante cambios en la cantidad de dinero.

4. Explique la Crítica de Lucas

Si los diseñadores de política tratan de aprovechar las relaciones estadísticas, los efectos que operen a través de las experiencias pueden ocasionar el colapso de estas relaciones. Si las autoridades abusan de este trade off, el producto no responderá.

$$P - E(p) \quad V_p \to \infty \quad \wedge \quad b = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{v_r}{v_r + v_p}\right) \to 0; \ \boxed{y = 0}$$

Por tanto, la política monetaria puede afectar a la producción sólo si los diseñadores de política tienen información que no está disponible para los agentes privados.