RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE MODELOS MACROECONÓMICOS COM EXPECTATIVAS RACIONAIS

Paulo Beleza de Vasconcelos*

2000

* Faculdade de Economia do Porto
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-464 Porto
Tel: 225571100; Fax: 225505050
E-mail: pjv@fep.up.pt

INVESTIGAÇÃO - TRABALHOS EM CURSO, N^{o}101, Dezembro 2000

ISSN 0870-8541

Resolução numérica de modelos macroeconómicos com expectativas racionais

Paulo Beleza de Vasconcelos[1]
Faculdade Economia da Universidade do Porto
e
Centro de Matemática Aplicada da
Universidade do Porto

Resumo

A simulação de modelos macroeconómicos contendo variáveis "forward-looking" e utilizando métodos tipo Newton, conduz a sistemas lineares de grande dimensão cuja resolução numérica só é possível e eficiente com a utilização de técnicas avançadas de álgebra linear numérica.

O objectivo deste trabalho é descrever alguns dos códigos para a simulação de modelos com expectativas racionais e divulgar algumas das mais recentes metodologias disponíveis para a resolução de sistemas de equações lineares de grande dimensão. Será feita referência à utilização de núcleos computacionais de álgebra linear, à manipulação de estruturas esparsas, ao uso de algoritmos iterativos não estacionários precondicionados e ao recurso à computação paralela.

[1] O autor agradece os valiosos comentários e sugestões recebidos da Prof.a Dr.a Filomena Dias d'Almeida e do Prof. Dr. António Brandão.

Numerical solution of rational expectation macroeconomic models

Paulo Beleza de Vasconcelos[2]
Faculdade Economia da Universidade do Porto
e
Centro de Matemática Aplicada da
Universidade do Porto

Abstract

Simulation of macroeconomic models with forward-looking variables by Newton-type methods leads to very large system of equations. The numerical solution of such systems is only possible with the use of high performance linear algebra techniques.

The aim of this work is to present some codes for the simulation of rational expectation models and to describe some of the most recent methodologies for the solution of large linear systems. Linear algebra computational kernels, sparse storage structures, nonstationary iterative algorithms, preconditioners and parallel computation will be mentioned.

[2]The author is grateful to Prof.a Dr.a Filomena Dias d'Almeida and Prof. Dr. António Brandão for their valuable comments and suggestions.

1 Introdução

> *"While the central idea of rational expectations is extremally simple, the technical analysis often seems forbidding to the non-mathematicians since the solution procedure typically requires the consideration of the whole future path of the economy."*
> David Begg, [2].

O advento das novas arquitecturas de computadores e os avanços conseguidos na construção de códigos especialmente adaptados às novas características de computação facilitaram o avanço da modelação econométrica.
Hoje em dia, na tentativa de procurarem orientação para a manutenção da estabilidade macroeconómica, os decisores políticos baseiam-se cada vez mais em modelos macroeconómicos, de grande dimensão, como fonte previligiada de obtenção da indispensável informação.
As características destes modelos macroeconómicos têm evoluído ao longo do tempo. Nomeadamente, à medida que foi sendo aceite que os agentes económicos se comportam de forma racional, os modelos baseados só em informação do passado, "backward-looking", têm vindo a ser substituídos por modelos ditos "forward-looking", pois consideram também as expectativas futuras. A formação de expectativas é um assunto central em macroeconomia [2], assentando as expectativas racionais num princípio de optimização: os agentes não devem cometer erros sistemáticos na previsão do futuro.
O desenvolvimento de modelos "forward-looking" tem no entanto esbarrado com a complexidade numérica da sua resolução[3]. Fruto do grande desenvolvimento que a chamada matemática computacional tem tido nesta última década, é hoje possível resolver de forma eficiente modelos macroeconómicos com expectativas racionais.

O modelo econométrico que irá servir de base a este trabalho vem escrito em notação matricial num dado período t por

$$F_t(y, z) = 0, \qquad (1)$$

[3] A complexidade numérica em resolver um modelo com expectativas racionais de pequena escala é equivalente à da resolução de um modelo "backward-looking" de média ou grande dimensão, [14].

sendo F_t um vector de n funções f_i, $F_t : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável num aberto U, y um vector de n variáveis endógenas e z um vector de m variáveis exógenas[4].
As duas técnicas principais de resolução de (1) são o uso de métodos iterativos estacionários como Jacobi não linear ou Gauss-Seidel não linear, e o uso de métodos tipo Newton.

O trabalho está dividido em três secções. Na primeira será formalizado um modelo geral com expectativas racionais. Na secção seguinte são apresentados dois procedimentos numéricos para a resolução de modelos com expectativas racionais. Por fim serão apresentados, de forma sucinta, alguns dos processos numéricos para a resolução de sistemas de equações lineares de muito grande dimensão.

2 Modelos com expectativas racionais

Hoje muitos modelos macroeconómicos incluem variáveis de expectativas racionais, respondendo assim à critica[5] de Lucas [16]. A introdução destas variáveis "forward-looking" faz intervir sistemas de equações lineares de muito grande dimensão por comparação aos resultantes de modelos mais clássicos.

Antes das expectativas racionais, os modelos baseavam-se em informação do passado para prever o futuro. Esta abordagem, *hipótese adaptativa*, introduzida por Cagan em 1956 [2], pode explicar bem determinados comportamentos económicos desde que a forma como as pessoas formam as suas expectativas não seja alterada. Nesta hipótese, as expectativas individuais reagem à diferença entre os valores actuais e os esperados, usando os agentes o erro de previsão para actualizar as suas expectativas em relação ao período seguinte. Sendo y_t^e o valor esperado da variável y no período t, então

$$y_t^e - y_{t-1}^e = \lambda \left(y_{t-1} - y_{t-1}^e \right), \quad 0 < \lambda < 1;$$

ou seja,

$$y_t^e = \lambda y_{t-1} + (1 - \lambda) \, y_{t-1}^e, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{2}$$

[4]Para simplificação omite-se o índice t: $F_t \left(y_t, z_t \right) = 0$.

[5]Lucas mostrou que a taxa de desemprego não muda com políticas governamentais mais ou menos inflacionistas. Isto ocorre porque quando o governo opta por uma política inflacionista os agentes antecipam maior inflação; os trabalhadores exigem aumentos salariais para contrabalançar a inflação sem que haja alteração nem do desemprego nem do PIB.

O valor esperado é pois a média ponderada entre o verdadeiro valor de y em $t-1$ e o esperado no mesmo período.
A relação em (2) tem de se verificar período atrás de período, resultando por substituição recursiva

$$y_t^e = \lambda y_{t-1} + \lambda(1-\lambda)y_{t-2} + ... + \lambda(1-\lambda)^{n-1} y_{t-n} + (1-\lambda)^n y_{t-n}^e,$$

sendo todos os termos observáveis excepto o último; como $0 < \lambda < 1$ então $(1-\lambda)^n$ será cada vez menor para valores crescentes de n. Desde que o valor y_{t-n}^e seja finito e considerando n suficientemente grande pode considerar-se desprezável a sua influência sobre a expectativa corrente; então

$$y_t^e = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (1-\lambda)^{i-1} y_{t-i}$$

e a hipótese adaptativa permite modelar as expectativas só à custa das observações passadas. Este modelo é considerado não racional pois os agentes executam constantemente o mesmo erro na previsão de y, prevendo sempre por baixo o valor de uma variável que cresca de forma constante.

O termo *expectativa racional* foi introduzido em 1961 num trabalho de Muth, conforme referido em [17]. As expectativas racionais são as expectativas matemáticas das variáveis futuras e actuais condicionadas à informação disponível pelos agentes.
Em termos simples, esta hipótese sustenta que os agentes decidem tendo em conta toda a informação disponível bem como as consequencias futuras dessas decisões; deste modo tendem a usar a informação de modo a não repetir os erros passados.
Lucas recebeu o prémio Nobel em Economia em 1995[6] fruto de toda uma obra mas, em particular, devido aos artigos [15] e [16], conforme explicado em [4].

Um modelo dinâmico com expectativas racionais pode ser descrito [9] no período de tempo t por

$$f_i(y_t, y_{t-1}, ..., y_{t-r}, y_{t+1|t-1}, ..., y_{t+h|t-1}, z_t) = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{3}$$

onde $y_{t+j|t-1}$ é a expectativa de y_{t+j} condicionada à informação disponível no fim do período $t-1$, z_t representa as variáveis exógenas e aleatórias. Para que

[6] Talvez pouco conhecido, Lucas tentou que o seu artigo [15] fosse publicado em 1970 na *American Economic Review*, mas este foi rejeitado por ser demasiadamente técnico. O artigo só foi publicado dois anos depois no *Journal of Economic Theory*.

as expectativas sejam consistentes, as expectativas $y_{t+j|t-1}$ têm de coincidir com as previsões nos mesmos períodos quando o modelo for resolvido de forma condicionada à informação disponível no fim do período $t-1$; logo estas expectativas estão ligadas para a frente no tempo e portanto (3) é resolvido para cada y_t em termos de uma condição inicial e a uma condição final.

Muitas são as questões económicas levantadas pela *hipótese de expectativa racional* e que se encontram sumariadas e referênciadas em [18]; em [9] pode encontrar-se um estudo sobre as propriedades dinâmicas de modelos com expectativas racionais, em particular questões de unicidade e estabilidade.

3 Resolução de modelos com expectativas racionais

Os dois métodos mais conhecidos para resolver este tipo de problemas são: o algoritmo "*extended path*", o mais clássico, de Fair e Taylor [8], 1983, e o algoritmo "*stacked-time*", inicialmente proposto por Laffargue [13] em 1990, e melhorado por Boucekkine [3] e Juillard [11] em 1995; foi implementado no sistema TROLL[7] por Hollinger [10] em 1996, e em 1997 Paulleto [18] considerou pela primeira vez a resolução da parte linear usando métodos iterativos não estacionários precondicionados.

3.1 Método "extended path"

A primeira abordagem para a resolução de modelos dinâmicos com expectativas racionais foi feita por Fair e Taylor [8] com o método "extended path". Este método resolve (3) separarando o problema em três tipos de iterações.

Algoritmo: método "extended path"

dado $k > 0$ e valores iniciais y^i_{t+r}, $r = 1, ..., k+2h$, $i =$ I, II, III
repetir até $\left[y_t^{\mathrm{III}}\ y_{t+1}^{\mathrm{III}} ...\ y_{t+h}^{\mathrm{III}}\right]$ convergir
  repetir até $\left[y_t^{\mathrm{II}}\ y_{t+1}^{\mathrm{II}} ...\ y_{t+h}^{\mathrm{II}}\right]$ convergir
    para $i = t, t+1, ..., t+h+k$
      repetir até y_i^{I} convergir
      $y_i^{\mathrm{II}} = y_i^{\mathrm{I}}$
    fim (iterações tipo I)
  fim (iterações tipo II)

[7] O "Portable TROLL" é um sistema de "software" integrado para a modelação econométrica e análise estatística (Intex Solutions, Inc., Massachusetts, USA).

$\left[y_t^{III}\ y_{t+1}^{III} \cdots\ y_{t+h}^{III}\right] = \left[y_t^{II}\ y_{t+1}^{II} \cdots\ y_{t+h}^{II}\right]$
$k = k + 1$
fim (iterações tipo III)

O algoritmo procede do modo que se passa a detalhar. O método resolve o modelo período a período num horizonte temporal usando valores iniciais (mas não necessita de valores finais). As iterações de tipo I são responsáveis pela resolução do modelo não linear em cada período de tempo; a solução, usando o método iterativo Gauss-Seidel, secção 4.1, conforme proposto por Fair e Taylor, produz novos valores para as variáveis "lead". As iterações, de tipo II, geram o passo futuro das variáveis endógenas esperadas e são responsáveis pela consistência das expectativas. As iterações de tipo III servem para aumentar o horizonte temporal de forma a que a solução não seja afectada dentro do período de tempo em estudo.
Os problemas deste algoritmo são os elevados tempos de execução e a não garantia de encontrar a solução, [3].

3.2 Método "stacked-time"

O desenho e a implementação de métodos mais robustos para resolver este tipo de modelos tornou-se possível com o surgimento das novas tecnologias de computação e com o desenvolvimento de algoritmos numéricos a elas especialmente adaptados [21].
A abordagem "stacked-time" agrupa[8] as equações para sucessivos períodos de tempo.
Um modelo com várias ligações para a frente, "leads", e vários atrasos, "lags", pode ser transformado, através do uso de variáveis auxiliares, num modelo equivalente com uma só "lead" e uma só "lag". Deste modo e para simplificar a apresentação, vamos considerar um só atraso, $r = 1$, uma só ligação para a frente, $h = 1$, e $y_{t+1} = y_{t+1|t-1}$. Como para uma simulação particular as variáveis exógenas e os parâmetros são dados, vamos reescrever as equações do modelo fazendo apenas intervir as variáveis dependentes numa representação mais compacta,

$$f_i(y_{t-1}, y_t, y_{t+1}) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{4}$$

Seja

$$F_t\left(Y_t\right) = \begin{bmatrix} f_1(y_{t-1}, y_t, y_{t+1}) \\ \cdots \\ f_n(y_{t-1}, y_t, y_{t+1}) \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

[8] A tradução directa seria "empilha".

o sistema de equações no tempo t, $y_t = (y_{1t}, ..., y_{nt})^T$ o vector das variáveis endógenas no tempo t, e $Y_t = \left(y_{t-1}^T, y_t^T, y_{t+1}^T\right)^T$. Pretende-se então resolver (5) especificado um horizonte temporal $t = 1, ..., T$, dada a condição inicial $y_{t-1} = y_0$ e a condição final $y_{t+1} = y_{T+1}$. Agrupando as variáveis dependentes para todos os períodos resulta um sistema com $(T+2) \times n$ equações e $(T+2) \times n$ incógnitas da forma

$$F(Y) = \begin{bmatrix} F_0(Y_0) \\ F_1(Y_1) \\ \vdots \\ F_T(Y_T) \\ F_{T+1}(Y_{T+1}) \end{bmatrix} = 0, \text{ com } Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_T \\ Y_{T+1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

O sistema (6) pode, sobe certas condições [12], ser resolvido pelo método de Newton[9].

O método de Newton aproxima iterativamente a solução exacta Y^* de $F(Y) = 0$ por uma sequência $\left\{Y^{(k)}\right\}_{k=0,1,...}$. A construção das aproximações baseia-se na observação de que numa vizinhança de $Y^{(k)}$, $F(Y)$ pode ser aproximada por

$$F(Y) \approx F(Y^{(k)}) + F'(Y^{(k)})\left(Y - Y^{(k)}\right),$$

conduzindo à seguinte expressão para os iterados

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - F'(Y^{(k)})^{-1}F(Y^{(k)}),\ F'(Y^{(k)}) = \frac{\partial F}{\partial Y}|_{Y^{(k)}}. \tag{7}$$

Algoritmo: método de Newton

dado $Y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
para $k = 0, 1, ...$ até convergir
  calcula $F'(Y^{(k)})$
  resolve $F'(Y^{(k)}).s^{(k)} = -F(Y^{(k)})$
  $Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + s^{(k)}$
fim ciclo k

Assim, o problema passa a ser o de resolver $F'(Y^{(k)}).s^{(k)} = -F(Y^{(k)})$. Sendo $J_{t,0} = \frac{\partial F_t}{\partial y_t^T}$, $J_{t,-1} = \frac{\partial F_t}{\partial y_{t-1}^T}$, e $J_{t,1} = \frac{\partial F_t}{\partial y_{t+1}^T}$, $F'(Y^{(k)})$ é uma matriz Jacobiana da forma tridiagonal por blocos

[9] Podem usar-se variantes [12] do método de Newton computacionalmente mais económicas.

$$
\left[\begin{matrix} J_{1,-1} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\;
\underbrace{\boxed{\begin{matrix} J_{1,0} & J_{1,1} & & & & \\ J_{2,-1} & J_{2,0} & J_{2,1} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & J_{T-1,-1} & J_{T-1,0} & J_{T-1,1} \\ & & & J_{T,-1} & J_{T,0} \end{matrix}}}_{J}\;
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ J_{T,1} \end{matrix}\right]
\left[\begin{matrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_T \\ s_{T+1} \end{matrix}\right] = -\left[\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{T-1} \\ F_T \end{matrix}\right],
$$

ou seja,

$$
Js = b, \tag{8}
$$

onde $s = (s_1, \cdots, s_T)^T$ e

$$
b = -\left[\begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_T \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} -J_{1,-1} \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right] s_0 + \left[\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ -J_{T,1} \end{matrix}\right] s_{T+1}.
$$

Atendendo à estrutura não é eficiente resolver (8) recorrendo a um método directo (eliminação de Gauss ou factorização LU). Uma alternativa passa por explorar a estrutura tridiagonal por blocos da matriz dos coeficientes, *abordagem por blocos*. Outra solução passa por aproveitar o carácter esparso da matriz J e utilizar métodos iterativos não estacionários, *abordagem esparsa.*

A linearização resultante da aplicação do método de Newton pode ser também conseguida utilizando um método iterativo como o Gauss-Seidel não linear. Neste caso, esta técnica é idêntica à de Fair e Taylor sem considerar as iterações de tipo III, ou seja, caso a dimensão do sistema seja mantida fixa e o horizonte da solução não seja prolongado[10].

3.2.1 Abordagem por blocos

Considerando a matriz completa do sistema, $[J \;,\; b]$, a ideia é triangularizar o sistema período a período (bloco de n linhas), obtendo um sistema bidiagonal superior por blocos[11].

[10] A tradução directa seria "estendido".

[11] Por uma questão de clareza de exposição vamos considerar blocos formados pela matriz identidade ao longo da diagonal da matriz bidiagonal resultante. Este procedimento não é numericamente eficiente, devendo na implementação considerar-se a resolução de sistemas de equações lineares em detrimento da inversão dos blocos diagonais.

Na primeira linha-bloco, multiplicando o bloco diagonal por $J_{1,0}^{-1}$ vem

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} I & C_{1,1} & & & & & d_1 \\ J_{2,-1} & J_{2,0} & J_{2,1} & & & & b_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & J_{T-1,-1} & J_{T-1,0} & J_{T-1,1} & & b_{T-1} \\ & & & J_{T,-1} & J_{T,0} & & b_T \end{array}\right], \text{ com}$$

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= J_{1,0}^{-1} J_{1,1}, \\ d_1 &= J_{1,0}^{-1} b_1. \end{aligned}$$

Na segunda linha-bloco, eliminando o bloco da 1^{a}coluna e multiplicando o bloco diagonal por $(J_{2,0} - J_{2,-1}C_{1,1})^{-1}$ vem

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} I & C_{1,1} & & & & & d_1 \\ & I & C_{2,1} & & & & d_2 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & J_{T-1,-1} & J_{T-1,0} & J_{T-1,1} & & b_{T-1} \\ & & & J_{T,-1} & J_{T,0} & & b_T \end{array}\right], \text{ com}$$

$$\begin{aligned} C_{2,1} &= (J_{2,0} - J_{2,-1}C_{1,1})^{-1} J_{2,1}, \\ d_2 &= (J_{2,0} - J_{2,-1}C_{1,1})^{-1} (b_2 - J_{2,-1} d_1). \end{aligned}$$

Procedendo de forma semalhante nos passos seguintes, resultará

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} I & C_{1,1} & & & & & d_1 \\ & I & C_{2,1} & & & & d_2 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & I & C_{T-1,1} & & d_{T-1} \\ & & & & I & & d_T \end{array}\right], \text{ com}$$

$$\begin{aligned} C_{t,1} &= (J_{t,0} - J_{t,-1}C_{t-1,1})^{-1} J_{t,1}, \\ d_t &= (J_{t,0} - J_{t,-1}C_{t-1,1})^{-1} (b_t - J_{t,-1} d_{t-1}), \quad t = 2, ..., T. \end{aligned} \tag{9}$$

O sistema é agora resolvido para trás

$$\begin{aligned} s_T &= d_T \\ s_t &= d_t - C_{t,1} s_{t+1}, \quad t = T-1, ..., 1. \end{aligned} \tag{10}$$

A generalização do método de resolução anterior para $r > 1$ e/ou $h > 1$ não é difícil embora conduza a expressões mais complicadas[12].
Esta é a metodologia usada no sistema de modelação econométrica TROLL [10] e no MULTIMOD mark III do FMI [14].

Se os blocos forem armazenados numa estrutura de dados densa ou banda, existem núcleos computacionais de álgebra linear que permitem efectuar os cálculos envolvidos em (9) e (10) de forma eficiente explorando de modo transparente para o utilizador as características de "hardware" dos novos sistemas de computação, nomeadamente a hierarquia de memória. Esses núcleos são, por exemplo, os núcleos BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) para as operações envolvendo matrizes e vectores, e as rotinas da biblioteca LAPACK (Linear Algebra PACKage) para a factorização LU e resolução dos sistemas triangulares resultantes, [1].

3.2.2 Abordagem esparsa

Tendo em atenção que os blocos podem ser esparsos, uma implementação cuidada tendo em vista poupar em requisitos de memória e em tempo de cálculo passa pelo uso de estruturas esparsas[13] para armazenar as matrizes-bloco C e para calcular mais economicamente $C_{t,1} = \left(J_{t,0} - J_{t,-1}C_{t-1,1}\right)^{-1} J_{t,1}$, i.e., resolver $\left(J_{t,0} - J_{t,-1}C_{t-1,1}\right) C_{t,1} = J_{t,1}$, usando factorização LU esparsa e multiplicações matriz-matriz e matriz-vector esparsas, [7].
Também poderão resolver-se estes sistemas parcelares usando métodos iterativos com a vantagem de só necessitarem de multiplicações esparsas matriz-vector.

Outra possibilidade consiste em resolver (8) globalmente usando métodos iterativos não estacionários precondicionados e estruturas esparsas para armazenamento e manipulação dos dados.

[12]Note-se que a matriz Jacobiana deixa de ser tridiagonal por blocos para ter uma estrutura em forma de banda.

[13]Só armazenam os valores das entradas não nulas de uma matriz e os apontadores para a localização na matriz dessas entradas, [20] e [6].

4 Métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares

4.1 Métodos iterativos estacionários

Os métodos iterativos estacionários para a resolução de um sistema de equações lineares $Js = b$, sendo J a matriz dos coeficientes, s o vector solução e b o vector dos termos independentes, baseiam-se em partições da forma $J = M - (M - J) = M - R$. Estas partições conduzem à iteração de ponto fixo

$$\begin{aligned} s^{(k)} &= (I - M^{-1}J)s^{(k-1)} + M^{-1}b \\ &= M^{-1}Rs^{(k-1)} + M^{-1}b \end{aligned} \tag{11}$$

com a matriz M regular. Estes métodos iterativos dizem-se *estacionários* pois a chamada *matriz de iteração*, $M^{-1}R$, não depende de k. Os métodos iterativos clássicos de Richardson, Jacobi, Gauss-Seidel e SOR (Sucessive OverRelaxation) estão nesta categoria, e resultam, respectivamente das partições

$$\begin{array}{lcl} M_R = I & , & R_R = I - J \\ M_J = D & , & R_J = -E - F \\ M_{GS} = D + E & , & R_{GS} = -F \\ M_{SOR} = D + wE & , & R_{SOR} = (1-w)D - wF \end{array} \tag{12}$$

sendo $D = diag(J)$, $-E$ e $-F$, respectivamente, as partes triangulares inferior e superior de J. Estes métodos são em geral menos eficientes que os não estacionários, sendo por vezes os primeiros usados como precondicionadores dos segundos.

4.2 Métodos iterativos não estacionários

Nos métodos iterativos *não estacionários* os cálculos na passagem da aproximação actual à seguinte envolvem informação que muda a cada iteração, i.e, não têm uma matriz de iteração. Dentro destes apresenta-se um sumário dos métodos baseados em subespaços de Krylov.
A ideia dos métodos baseados em subespaços de Krylov é a de procurar uma solução aproximada do sistema num espaço de menor dimensão, subespaço de $\mathbb{R}^n$. Dada uma aproximação inicial x_0 para o sistema $Js = b$, um *método tipo Krylov* procura uma solução aproximada de um subespaço

afim $s^{(0)} + K_m$[14] de dimensão m com $K_m = K_m(J, r_0)$ o *subespaço de Krylov* gerado por $\{r_0, Jr_0, ..., J^{m-1}r_0\}$,

$$K_m(J, r_0) = \left\langle r_0, Jr_0, ..., J^{m-1}r_0 \right\rangle \tag{13}$$

sendo $r_0 = b - Js^{(0)}$ o resíduo inicial.

As diferentes versões dos métodos tipo Krylov resultam de diferentes escolhas para os subespaços K_m e das condições que impõem ao resíduo para determinar a solução.

1. Abordagem de *resíduo mínimo*: encontrar a aproximação $s^{(m)}$ que minimiza a norma euclidiana do resíduo, $\|b - Js\|_2$, sobre todos os candidatos em $s^{(0)} + K_m(J, r_0)$, o que é equivalente a impor

$$\left(b - Js^{(m)}, v\right) = 0, \quad \forall v \in JK_m,\ v = Jz \text{ e } z \in K_m.$$

2. Abordagem de *resíduo ortogonal*, (*Ritz-Galerkin*): encontrar o iterado $s^{(m)} \in s^{(0)} + K_m(J, r_0)$ para o qual o resíduo é ortogonal ao subespaço de Krylov, i.e,

$$\left(b - Js^{(m)}, v\right) = 0, \quad \forall v \in K_m(J, r_0).$$

3. Abordagem de *Petrov-Galerkin*: encontrar um $s^{(m)} \in s^{(0)} + K_m(J, r_0)$ de modo que o resíduo $b - Js^{(m)}$ seja ortogonal a outro subespaço de dimensão m que é $K_m(J^T, \overline{r}_0)$ sendo $\overline{r}_0 = b - J^T s^{(0)}$, i.e,

$$\left(b - Js^{(m)}, v\right) = 0, \quad \forall v \in K_m(J^T, \overline{r}_0).$$

Fazem parte da primeira categoria métodos como o GMRES (Generalized Minimum RESidual) e o MINRES (MINimum RESidual).
Quando é usada uma abordagem de Ritz-Galerkin surgem os métodos CG (Conjugate Gradient) e FOM (Full Orthogonalization Method). Estes procedimentos são também designados métodos de *resíduo ortogonal* pois o resíduo final é ortogonal ao subespaço de Krylov. Têm a propriedade de minimizar a norma-J do erro sobre $s^{(0)} + K_m$ quando a matriz J é simétrica definida positiva.
No terceiro caso surgem os chamados algoritmos de biconjugação. Sendo J simétrica esta categoria reduz-se ao segundo caso. Para J não simétrica

[14] Notação: se $v \in s^{(0)} + K_m$ então $v = s^{(0)} + \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j J^j r_0$.

obtém-se os métodos BiCG (BiConjugate Gradient) e o QMR (Quasi Minimal Residual).
Métodos híbridos têm sido propostos, como o CGS (Conjugate Gradient Squared), TFQMR (Transpose-Free QMR) e BiCGSTAB (BiCG STABilized).
Para estabelecer a relação entre a solução de $Js = b$ e $K_m(J, b)$ ($K_m(J, b) = K_m(J, r_0)$ para $s^{(0)} = 0$), considere-se o *polinómio mínimo* de J, $P(J)$, (polinómio mónico único de grau mínimo e tal que $P(J) = 0$) para representar a inversa da matriz J, não singular, em termos de potências de J,

$$0 = P(J) = \alpha_0 I + \alpha_1 J + ... + \alpha_m J^m.$$

E portanto

$$J^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{j+1} J^j$$

pois $\alpha_0 \neq 0$ dado que J é não singular. Da representação para J^{-1} facilmente se conclui que $s = J^{-1}b$ está em $K_m(J, b)$. Logo, a dimensão do menor espaço de Krylov contendo s será m, grau do polinómio mínimo de J; se m é pequeno então um método baseado em subespaço de Krylov será rápido a convergir.

Para que estes métodos sejam eficientes é necessário melhorar as propriedades espectrais da matriz de iteração J, o que se consegue através de técnicas de precondicionamento [19] e [22]. As técnicas de precondicionamento transformam o sistema linear noutro equivalente mas com melhores características de convergência. Em vez de se resolver $Js = b$ resolve-se, por exemplo, $M^{-1}Js = M^{-1}b$, sendo a matriz M chamada *precondicionador*. Para ser eficiente, M deve ser computacionalmente económica de obter e o mais próxima possível de J. Na prática a aplicação de precondicionadores em métodos tipo Krylov não envolve o cálculo explícito de $M^{-1}J$, reduzindo-se a sua aplicação a relações vectoriais.
Se os sistemas a resolver forem de muito grande dimensão, mesmo após o recurso a técnicas esparsas, é necessário o recurso ao processamento paralelo [5].
Todos estes assuntos estão estudados em [21], e atendendo à extensa bibliografia lá facultada pode ser um bom elemento de estudo em português.

Referências

[1] E. Anderson, Z. Bai, C. H. Bischof, J. W. Demmel, J. J. Dongarra, A. McKenny, S. Ostrouchov, and D. C. Sorensen. *LAPACK users guide*. SIAM, Philadelphia, 1992.

[2] David K. H. Begg. *The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics: Theory and Evidence*. Philip Allan Publishers Limited, 1988.

[3] R. Boucekkine. An alternative methodology for solving nonlinear forward-looking models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19:711–734, 1995.

[4] V. V. Chari. Nobel Laureate Robert E. Lucas, Jr.: Architect of Modern Macroeconomics. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quartely Review*, 23, n. 2:2–12, 1999.

[5] Filomena Dias D'Almeida and Paulo Beleza Vasconcelos. *Parallelization of an implicit algorithm for fluid flow problems*, chapter 17, pages 300–314. Saxe-Coburg Publications, 1999.

[6] I. S. Duff. Sparse numerical linear algebra: direct methods and preconditioning. In I. S. Duff and G. A. Watson, editors, *State of the Art in Numerical Analysis*. Oxford University Press, 1997.

[7] I. S. Duff, A. M. Erisman, and J. K. Reid. *Direct methods for sparse matrices*. Oxford University Press, 1986.

[8] R. C. Fair and J. B. Taylor. Solution and maximum likeliwood estimation of dynamic nonlinear rational expectations models. *Econometrica*, 51(4):1169–1185, 1983.

[9] P. G. Fischer. *Rational Expectations in Macroeconomic Models*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[10] P. Hollinger. The stacked-time simulator in TROLL: A robust algorithm for solving forward-looking models. In *Paper Presented at the Second International Conference in Economics and Finance, Genebra, Suiça, 26-28 Junho*, 1996.

[11] M. Juillard. DYNARE: A progam for the resolution and simulation of dynamic models with forward variables through the use of a relaxation algorithm. Technical Report 9602, CEPREMAP, Paris, 1996.

[12] C. T. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations.* SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.

[13] J. P. Laffargue. Résolution d'un modèle macroéconomique avec anticipations rationnelles. *Annales d'Economie et de Statistique, Institut National de la Statistique et des Études*, 17:97–119, 1990.

[14] D. Laxton, P. Isard, H. Faruqee, E. Prasad, and B. Turtelboom. MULTIMOD Mark III, the core dynamic and steady-state models. Technical report, 1998.

[15] R. E. Lucas. Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory*, 41:103–24, 1972.

[16] R. E. Lucas. *Econometric Policy Evaluation: A Critique*, volume 1, chapter The Phillips curve and labor markets, pages 16–46. North Holland, 1976.

[17] R. E. Lucas and T. J. Sargent. *Rational Expectations and Econometric Practice.* George Allen and Unwin, London, 1981.

[18] Giorgio Pauletto. *Solution of Large-Scale Macroeconometric Models*, volume 7, Advances in Computational Economics Series. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[19] Youcef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems.* PWS Publishing Company, 1996.

[20] Paulo Beleza Vasconcelos. Matrizes esparsas: resolução de sistemas por métodos directos e aplicação a problemas macroeconómicos. Master's thesis, Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Fac. Economia da Universidade do Porto, 1991.

[21] Paulo Beleza Vasconcelos. *Paralelização de Algoritmos de Álgebra Linear Numérica com Aplicação a Mecânica de Fluidos Computacional.* PhD thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1998.

[22] Paulo Beleza Vasconcelos and Filomena Dias D'Almeida. Preconditioning iterative methods in coupled discretization of fluid flow problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 18:1–13, 1998. CERFACS Technical Report TR/PA/96/04.