Krämer, Jörg W.

Working Paper

Theorie und empirische Bestimmung zinsgewichteter Geldmengenaggregate

Kiel Working Papers, No. 620

Provided in cooperation with:
Institut für Weltwirtschaft (IfW)

Kieler Arbeitspapiere
Kiel Working Papers

Kieler Arbeitspapier Nr. 620

Theorie und empirische Bestimmung zinsgewichteter Geldmengenaggregate

von

Jörg Wilhelm Krämer

Institut für Weltwirtschaft an der Universität Kiel
The Kiel Institute of World Economics

ISSN 0342 - 0787

Institut für Weltwirtschaft
Düsternbrooker Weg 120, D-24105 Kiel

Kieler Arbeitspapier Nr. 620

Theorie und empirische Bestimmung zinsgewichteter Geldmengenaggregate

von

Jörg Wilhelm Krämer

März 1994

Gliederung

1. Einleitung

Das von der Bundesbank gesteuerte Geldmengenaggregat M3 wird durch Addition verschiedener Geldmengenkomponenten berechnet. Dabei wird implizit vollkommene Substitutionalität zwischen den Summanden angenommen. Darüber hinaus wird unterstellt, eine DM Bargeld leiste dieselben Liquiditätsdienste wie beispielsweise eine DM Termineinlagen. Wegen dieser äußerst restriktiven Annahmen werden additive Geldmengenaggregate von zahlreichen Ökonomen als ungeeignet abgelehnt, die von den Bestandteilen dieser Aggregate ausgehenden Liquditätsdienste zu messen.[1]

Als Alternative zu summarischen Geldmengenaggregaten werden in der folgenden Arbeit Geldmengenkomponenten mit Hilfe von Nutzenfunktionen aggregiert, die in Abschnitt 2.1. spezifiziert werden. Die in ein Nutzenmaximierungskalkül einfließenden Kosten der Nutzung einzelner Geldmengenkomponenten werden aus einer intertemporalen Budgetrestriktion heraus bestimmt (Abschnitt 2.2.). Nachdem die Entscheidungssituation formuliert ist, lassen sich Geldmengenaggregate als funktionale Indizes mit im Zeitablauf konstanten Gewichtungsschemata (Abschnitt 2.3.) oder als statistische Indizes mit zeitvariablen Gewichten (Abschnitt 2.4.) theoretisch ableiten. Anschließend werden diese Geldmengenaggregate für Deutschland empirisch bestimmt sowie untereinander und mit den traditionellen Summenaggregaten verglichen (Abschnitt 3). Die Arbeit schließt mit geldpolitischen Implikationen (Abschnitt 4).

2. Theorie zinsgewichteter Geldmengenaggregate

2.1. Die Aggregationsfunktion

Das zentrale Problem dieser Arbeit besteht darin, Zahlungsmittel, die in unterschiedlichem Maße Liquiditätsdiente leisten und somit keine vollkommenen Substitute sind, zu einer Größe zusammenzufassen. Im Fall von Haushalten bietet die mikroökonomische Theorie als Aggregat den von unterschiedlichen Gütern ausgehenden Nutzen an; als Aggregationsfunktion dient die Nutzenfunk-

---

1 Vgl. etwa Barnett, Fisher, Serletis [1992]. Auch die Bundesbank beschäftigt sich mit zinsgewichteten Geldmengenaggregaten. Vgl. Tödter [1993] und Issing, Tödter, Reimers [1993].

tion.[2] Umschichtungen zwischen Zahlungsmittelarten wirken sich somit nur dann auf ein Geldmengenaggregat aus, wenn sich dadurch die insgesamt geleisteten Liquiditätsdienste ändern. Um die Aggregation über die einzelnen Wirtschaftssubjekte zu vereinfachen, wird im folgenden von einem repräsentativen Konsumenten ausgegangen, dessen Präferenzen sich im allgemeinen durch folgende intertemporale Nutzenfunktion beschreiben lassen:

$$(1) \qquad \Phi = \Phi(m_t, \cdots, m_{t+T}, z_t, \cdots, z_{t+T}),$$

wobei m_t der Vektor der $l=1,\cdots,L$ realen Zahlungsmittelbestände[3] in Periode t des T+1-Perioden umfassenden Planungshorizonts ist und der Vektor z_t die Güter abbildet, die nicht Zahlungsmittelbestände, sondern etwa Konsumgüter, Freizeit, Vermögen etc. sind. Da Φ sowohl von Zahlungsmittelbeständen als auch von anderen Gütern abhängt, ist die Nutzenfunktion kein Aggregat nur der Zahlungsmittelbestände, sondern aller Güter. Um jedoch zu einem Geldmengenaggregat zu gelangen, muß gelten:

$$(2) \qquad \Phi(m_t, \cdots, m_{t+T}, z_t, \cdots z_{t+T}) = F(v(m_t), \cdots, v(m_{t+T}), \chi(z_t), \cdots, \chi(z_{t+T})).$$

Die Subnutzenfunktion v, die wiederum Argument der übergeordneten Nutzenfunktion F ist, hängt nur noch von den Zahlungsmittelbeständen einer Periode ab und ist mithin eine Geldmengenaggregationsfunktion. Damit sich Argumente einer Nutzenfunktion zu Subnutzenfunktionen gemäß (2) zusammenfassen lassen und Φ somit schwach separabel bezüglich des realen Zahlungsmittelbestandes und der übrigen Güter einer Periode ist, muß die Grenzrate der Substitution zwischen zwei in einer Subnutzenfunktion auftretenden Argumenten unabhängig von Gütern außerhalb dieser Subnutzenfunktion sein (hinreichende und notwendige Bedingung).[4]

Separabilität ist eine Voraussetzung dafür, Φ nicht in einer, sondern in zwei Stufen zu maximieren. In der ersten Stufe wird die Summe der abdiskontierten Ein-

[2] Die Analyse läßt sich um Unternehmen erweitern. Der die Präferenzen abbildenden Nutzenfunktion eines Haushalts entspräche dann die die Technologie abbildende Produktionsfunktion eines Unternehmens.

[3] Anstelle der von den Beständen ausgehenden Zahlungsmittelleistungen sind die Bestände Argumente der Nutzenfunktion, da die Leistungen annahmegemäß proportional zu den Beständen sind.

[4] Vgl. Theorem 1 bei Green [1964], S. 12.

nahmen auf die Aggregate von F aufgeteilt. In einer zweiten Stufe werden die für die einzelnen Aggregate vorgesehenen Ausgaben als Nebenbedingung betrachtet, unter deren Berücksichtigung die einzelnen Subnutzenfunktionen maximiert werden. Das zweistufige Maximierungsverfahren führt zu dem gleichen Ergebnis wie das einstufige Maximieren und ist mithin konsistent, wenn im Fall von mehr als zwei Subnutzenfunktionen zusätzlich zur Separabilität der übergeordneten Nutzenfunktion die Sub-Nutzenfunktionen linear homogen sind (hinreichende Bedingung).[5]

Ziel dieser Arbeit ist es, Aggregate zu berechnen, die sich von den offiziellen Summenaggregaten SM1, SM2 und SM3[6] nicht durch die Zahl der einbezogenen Zahlungsmittelbestände, sondern durch die Art ihrer Aggregation unterscheiden und somit vergleichbar sind.[7] Deshalb wird angenommen, die Subnutzenfunktion v sei rekursiv-separabel, d.h. es gelte

(3) $v = u_3\left(m_{L2+1,t}, m_{L2+2,t}, \cdots, m_{L3,t}, u_2\right),$

(4) $u_2 = u_2\left(m_{L1+1,t}, m_{L1+2,t}, \cdots, m_{L2,t}, u_1\right),$

(5) $u_1 = u_1\left(m_{1,t}, m_{2,t}, \cdots, m_{L1,t}\right),$

für $l = 1, \cdots, L1, \cdots, L2, \cdots, L3$.

Die durch den tiefergestellten Laufindex $l = 1, \cdots, L1$ gekennzeichneten realen Zahlungsmittelbestände sind als nominale Größen im offiziellen Summenaggregat SM1 enthalten, $L1 + 1, \cdots, L2$ bezeichnet jene Zahlungsmittelbestände, die über SM1 hinaus in das offizielle Summenaggregat SM2 eingehen; $L2 + 1, \cdots, L3$ steht für die zusätzlich in SM3 enthaltenen Gelder.[8]

Die Subnutzenfunktionen u_1, u_2 und u_3 entsprechen folgenden Geldmengenaggregationsfunktionen:

(6) $Xm1 = u_1$

5 Vgl. Theorem 3 bei Green [1964], S. 20-22.

6 Der gebräuchlichen Abkürzung etwa für M1 ist der Buchstabe S vorangestellt, um die Art der Aggregation, nämlich Summation, zu kennzeichnen. M steht im Gegensatz zu m für nominale Geldmenge.

7 Vgl. Barnett [1982], S. 701.

8 Vgl. Serletis [1991], S. 37/38.

(7) $Xm2 = u_2$

(8) $Xm3 = u_3$

Der Buchstabe X steht für das noch zu spezifizierende Aggregationsverfahren, m bedeutet reale Geldmenge, die Zahl dahinter kennzeichnet, mit welchem der drei offiziellen Summenaggregaten das Aggregat vergleichbar ist (Aggregationsniveau).

2.2. *Die Nutzungskosten*

Um die im vorangegangenen Abschnitt spezifizierte Nutzenfunktion maximieren zu können, benötigt man die mit der Nutzung einer realen Zahlungsmittelbestandseinheit verbundenen Kosten. Diese Nutzungskosten werden im folgenden aus der beim Maximieren zu beachtenden intertemporalen Budgetrestriktion abgeleitet.

Wird der Vektor der Güter, die nicht Zahlungsmittelbestände sind, näher spezifiziert, so zeichne sich der repräsentative Konsument durch folgende intertemporale Nutzenfunktion

(9) $$\Phi\left(m_t, \ldots, m_{t+T}, x_t, \ldots, x_{t+T}, {A_{t+T}}\big/{\pi^*_{t+T}}\right)$$

aus.[9] Während jeder Periode s $(t \leq s \leq t+T)$ des $T+1$-Perioden umfassenden Planungshorizonts hat das Wirtschaftssubjekt über den Einsatz folgender Größen zu entscheiden:

— $m'_s = (m_{1,s}, \ldots, m_{l,s}, \ldots, m_{L,s})$ ist der Vektor der L realen Zahlungsmittelbestände in Periode s. Der gesamte reale Zahlungsmittelbestand m_s wird zu Beginn der Periode s erworben und an deren Ende vollständig veräußert. Der während s gehaltene nominale Zahlungsmittelbestand $\pi^*_s\, m_{l,s}$ — π^*_s ist der Preisindex der Konsumgüter — wird mit $r_{l,s}$ verzinst. Bargeld erzielt keine Verzinsung. Ausgezahlt wird der Ertrag zu Beginn der nächsten Periode.

— $x'_s = (x_{1,s}, \ldots, x_{i,s}, \ldots, x_{I,s})$ ist der Vektor der realen Konsumgüter.

9 Soweit nicht anders angegeben, stützt sich der folgende Abschnitt auf Barnett [1978]. Ähnliche Darstellungen finden sich in Barnett [1980] und Barnett/Spindt/Offenbacher [1981].

— $\pi'_s\ (\pi_{1,s}, \ldots, \pi_{i,s}, \ldots, \pi_{I,s})$ ist der entsprechende Preisvektor.

— A_{t+T} / π^*_{t+T} ist der mit dem Preisindex der Konsumgüter deflationierte, am Ende des Planungshorizonts verfügbare Bestand an Anleihen. Innerhalb des Planungshorizonts dienen Anleihen dazu, Vermögen von einer Periode in die nächste zu transferieren. Der gesamte Anleihebestand wird zu Beginn der laufenden Periode erworben und an deren Ende vollständig veräußert. Der während einer Periode gehaltene nominale Anleihebestand A_s wird mit R_s verzinst. In der Rendite sind eventuell vorhandene Kursgewinne bzw. -verluste enthalten, sie wird zu Beginn der nächsten Periode ausgezahlt.

Während der Periode s erzielt das Individuum nominale Arbeitseinkommen L_s, die exogen sind.

Innerhalb von s gilt folgende Budgetgleichung:

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{I} \pi_{i,s}\, x_{i,s} + \sum_{l=1}^{L} \pi^*_s\, m_{l,s} + A_s = L_s + \sum_{l=1}^{L} (1 + r_{l,s-1})\, \pi^*_{s-1}\, m_{l,s-1}$$

$$+ (1 + R_{s-1})\, A_{s-1}.$$

In der Budgetgleichung der Periode t bezeichnet $\sum_{l=1}^{L}(1+r_{l,o})\ \pi^*_o\, m_{l,o} + (1+R_o)\, A_o$ die in die erste Periode des Planungshorizonts übertragenen Zahlungsmittel- bzw. Anleihebestände sowie die darauf gezahlten Erträge, kurz das Anfangsvermögen. In ähnlicher Weise werden durch die Entscheidungen in der letzten Periode des Planungshorizonts Zahlungsmittel- und Anleihebestände in die erste Planungsperiode des kommenden Planungshorizonts verschoben.

Im folgenden werden die $T+1$ Budgetgleichungen zu einer einzigen Restriktion zusammengefaßt. Zunächst wird für jede Periode s $(t \leq s \leq t+T)$ die Budgetgleichung aufgestellt und jeweils — bis auf die in t — nach A_{s-1} aufgelöst. Beginnend mit der Budgetgleichung der letzten Periode des Planungshorizonts, wird A_{s-1} in die Budgetgleichung der vorangehenden Periode eingesetzt. Die Rückwärtssubstitution endet in der ersten Periode des Planungshorizonts. Definiert man

$$(11)\quad \rho_s = \begin{cases} 1, & s=t \\ \prod_{u=t}^{s-1}(1+R_u), & t+1 \le s \le t+T \end{cases}$$

als Diskontierungsfaktor der Periode s, so gilt für die zusammengefaßte Budgetgleichung

$$(12)\quad \sum_{s=t}^{t+T}\sum_{i=1}^{I}\frac{\pi_{i,s}\,x_{i,s}}{\rho_s}+\sum_{s=t}^{t+T}\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\pi_s^*}{\rho_s}-\frac{\pi_s^*\,(1+r_{l,s})}{\rho_{s+1}}\right)m_{l,s}$$

$$+\sum_{l=1}^{L}\frac{\pi_{t+T}^*\,(1+r_{l,t+T})}{\rho_{t+T+1}}\,m_{l,t+T}+\frac{A_{t+T}}{\rho_{t+T}}$$

$$=\sum_{s=t}^{t+T}\frac{L_s}{\rho_s}+\sum_{l=1}^{L}(1+r_{l,o})\,\pi_o^*\,m_{l,o}+(1+R_o)\,A_o.$$

Die Summe der abdiskontierten Ausgaben für Konsumgüter, Zahlungsmitteldienste und für die Übertragung von Zahlungsmitteln und Anleihebeständen in die erste Planungsperiode des kommenden Planungshorizonts entspricht den abdiskontierten Einnahmen aus Arbeit sowie dem nominalen Anfangsvermögen.

Das Wirtschaftssubjekt maximiert seinen Nutzen unter Berücksichtigung der zusammengefaßten Budgetrestriktion. Der Faktor vor $m_{l,s}$ ist somit der Schattenpreis der Nutzung einer Einheit des realen Zahlungsmittelbestandes m_l in s.

Für die Nutzungskosten von $m_{l,t}$ gilt

$$p_{l,t}=\frac{\pi_t^*}{\rho_t}-\frac{\pi_t^*\,(1+r_{l,t})}{\rho_{t+1}}=\pi_t^*-\frac{\pi_t^*\,(1+r_{l,t})}{1+R_t}$$

$$=\frac{\pi_t^*\,(R_t-r_{l,t})}{1+R_t}.$$

Die Nutzungskosten des nominalen Zahlungsmittelbestandes $M_{l,t}=\pi_t^* m_{l,t}$ betragen

$$(13)\quad P_{l,t}=\frac{R_t-r_{l,t}}{1+R_t}.$$

Zum einen spiegeln die Nutzungskosten jenen abdiskontierten Ertrag wider, der dem Wirtschaftssubjekt zusätzlich zugeflossen wäre, wenn anstelle des niedrig verzinsten l-ten Zahlungsmittels mit R_t verzinste Anleihen gehalten worden wären. Zum anderen hängen die Nutzungskosten des realen Zahlungsmittelbestands vom Konsumgüterpreisindex π_t^* ab, da die realen Zahlungsmittelbestände Argumente der Nutzenfunktion sind.

Berücksichtigt man einen Grenzsteuersatz von τ_t, so betragen die Nutzungskosten des realen l-ten Zahlungsmittelbestands

$$(14)\quad p_{l,t} = \frac{\pi_t^* \, (R_t - r_{l,t})\,(1-\tau_t)}{1+R_t(1-\tau_t)}.$$ [10]

2.3. *Funktionale monetäre Indizes*

Um Geldmengenaggregate zu bestimmen, unterstellt man im folgenden für die Aggregationsfunktionen bestimmte Funktionalformen und leitet mit Hilfe eines Optimierungskalküls Gleichungen zur ökonometrischen Bestimmung ihrer Parameter ab. Die Schätzwerte der Parameter bzw. das Gewichtungsschema zur Berechnung der Geldmengenaggregate sind somit im Zeitablauf konstant. Da die mit Hilfe der Aggregationsfunktion berechneten Geldmengenindizes nur von den Zahlungsmittelbeständen und den geschätzten Parametern abhängen, spricht man von funktionalen monetären Indizes.

Im folgenden wird exemplarisch nur die erste Aggregationsstufe betrachtet, d.h. die Aggregation der zum offiziellen Summenaggregat $SM1$ zählenden realen Zahlungsmittelbestände 1 bis $L1$ zu $Xm1$.

2.3.1. *Cobb-Douglas-Aggregationsfunktionen*

Die Aggregationsfunktion $Xm1$ werde im folgenden durch eine linear-homogene Cobb-Douglas-Funktion beschrieben,

---

10 Vgl. Barnett, Spindt, Offenbacher [1981], S. 11.

$$(15)\quad Cm1(m_t) \equiv \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l},\ mit\ \sum_{l=1}^{L1} \alpha_l = 1.$$ [11]

Die Substitutionselastizität der Funktion beträgt eins: Steigt die Grenzrate der Substitution zwischen zwei Zahlungsmitteln um ein Prozent, so steigt das Verhältnis zwischen beiden Zahlungsmitteln ebenfalls um ein Prozent.

Die Zuwachsrate von Cm1 entspricht den mit α_l gewichteten Zuwachsraten der einzelnen Zahlungsmittelbestände. α_l ist um so höher, je größer der Abstand zwischen dem Anleihezins und der Eigenverzinsung von m_l ist. Der in Kauf genommene Zinsverlust wird als Preis für die von m_l ausgehenden Liquiditätsdienste betrachtet. Zinslose Sichteinlagen leisten beispielsweise mehr Liquiditätsdienste als Termineinlagen und gehen deshalb in ein Cobb-Douglas-Geldmengenaggregat mit größerem Gewicht ein.

Das repräsentative Wirtschaftssubjekt maximiere seinen Nutzen unter der Nebenbedingung, daß die Zahlungsmittelausgaben $\sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t}$ den Ausgaben y entsprechen, die im übergeordneten Maximierungsprozeß der Zahlungsmittelgruppe zugeordnet worden waren.

Die zu maximierende Lagrange-Funktion lautet:

$$(16)\quad L = Cm1(m_t) - \lambda\left(\sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t} - y_t\right)$$

Die Bedingung 1. Ordnung für ein Maximum lautet:

$$(17)\quad \frac{\partial L}{\partial m_{l,t}} = \frac{\partial Cm1(m_t)}{\partial m_{l,t}} - \lambda p_{l,t} = 0$$

11 Vgl. Cobb, Douglas [1928], S. 139-65. Tödter [1993, S. 10] bezeichnet die auf Basis von Cobb-Douglas-Funktionen berechneten Geldmengenaggregate als "transaktionsorientiert".

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}}{m_{l,t}} = \lambda\, p_{l,t}$$

$$\Leftrightarrow p_{l,t} = \frac{1}{\lambda}\, \frac{\alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}}{m_{l,t}} .$$

Zur Eliminierung des Lagrange-Multiplikators λ setzt man den Ausdruck für p_l in die Budgetrestriktion ein,

$$y_t = \sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t} = \sum_{l=1}^{L1} \frac{1}{\lambda} \alpha_{l,t} \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum_{l=1}^{L1} \alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}}{\sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t}} .$$

Der Ausdruck für λ wird in die obige Marginalbedingung eingesetzt,

$$(18) \quad p_{l,t} = \frac{\sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t}}{\sum_{l=1}^{L1} \alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}} \; \frac{\alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}}{m_{l,t}} .$$

Der Summenausdruck im Nenner kann bei Anwendung der Eulerschen Identität auf linear-homogene Funktionen umgeformt werden zu:

$$(19) \quad \sum_{l=1}^{L1} \alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l} = \sum_{l=1}^{L1} m_{l,t} \cdot \frac{\alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}}{m_{l,t}} = \sum_{l=1}^{L1} m_{l,t} \cdot \frac{\partial Cm1(m_t)}{\partial m_{l,t}} = Cm1(m_t) .$$

Setzt man dies anstelle des Summenausdrucks in (18) ein, so erhält man

$$(20)\quad p_l = \frac{\sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t}}{Cm1(m_t)} \cdot \frac{\alpha_l \prod_{l=1}^{L1} m_{l,t}^{\alpha_l}}{m_{l,t}}$$

$$= \frac{\sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t}}{Cm1(m_t)} \cdot \frac{\alpha_l\, Cm1(m_t)}{m_{l,t}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_{l,t}\, m_{l,t}}{\sum_{l=1}^{L1} p_{l,t}\, m_{l,t}} \equiv w_{l,t} = \alpha_l \,.$$

Der Exponent α_l der Cobb-Douglas-Funktion entspricht also dem Anteil der Ausgaben für das l-te Zahlungsmittel an den gesamten Zahlungsmittelausgaben. Jedoch dürften die empirisch beobachteten Werte der Ausgabenanteile beispielsweise wegen Meßfehlern im Zeitablauf zufällig von α_l abweichen,

$$(21)\quad w_{l,t} = \alpha_l + u_t \,,$$

wobei u_t eine Störvariable ist. Mit Hilfe ökonometrischer Methoden werden aus Zeitreihen der Ausgabenanteile Schätzwerte für die Exponenten der Cobb-Douglas-Aggregationsfunktion bestimmt.

2.3.2. CES-Aggregationsfunktionen

Eine linear-homogene Aggregationsfunktion $Xm1$ mit konstanten Substitutionselastizitäten besitzt folgende Form

$$(22)\quad CESm1(m_t) = \left[\sum_{l=1}^{L1} \alpha_l\, m_{l,t}^{\beta}\right]^{1/\beta} .$$

Die partielle Substitutionselastizität zwischen zwei beliebigen Zahlungsmitteln i und j beträgt unabhängig vom betrachteten Zahlungsmittelpaar

$$(23) \quad \sigma_{ij} = \frac{d \ln (m_i / m_j)}{d \ln \left(\frac{\partial\, CESm1(m) / \partial\, m_j}{\partial\, CESm1(m) / \partial\, m_i} \right)} = \frac{1}{1-\beta}.$$[12]

Folgende Spezialfälle sind unterscheidbar:

— Die Cobb-Douglas-Funktion mit einer Substitutionselastizität von Eins ergibt sich, wenn β gegen Null strebt.

— Strebt β gegen Eins, so strebt die Substitutionselastizität gegen Unendlich. Dies ist der Fall bei einer linearen Aggregationsfunktion.

— Limitationale Aggregationsfunktionen mit einer Substitutionselastizität von 0 ergeben sich, wenn β gegen minus Unendlich strebt.

Um eine Regressionsgleichung zur Schätzung der Parameter $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\cdots,\alpha_{L1}$ und β abzuleiten, nimmt man an, das repräsentative Wirtschaftssubjekt maximiere seine Aggregationsfunktion unter der Nebenbedingung, daß die Zahlungsmittelausgaben dem entsprechen, was auf der übergeordneten Entscheidungsstufe festgesetzt worden war. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$(24) \quad L = \left(\sum_{l=1}^{L1} \alpha_l\, m_{l,t}^{\beta} \right)^{1/\beta} - \lambda \left(\sum_{l=1}^{L1} m_{l,t}\, p_{l,t} - y_t \right).$$

Differenziert man L nach $m_{1,t},\ldots,m_{l,t},\ldots,m_{L1,t}$, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$(25) \quad \frac{\partial L}{\partial m_{1,t}} = \frac{1}{\beta} \left(\sum_{l=1}^{L1} \alpha_l m_{l,t}^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}-1} \left(\beta\, \alpha_1\, m_{1,t}^{\beta-1} \right) - \lambda\, p_{1,t} = 0$$

$$\vdots$$

12 Vgl. Dhrymes, Kurz [1964], S. 289/90; Uzawa [1962], S. 293/94. Interessanter wäre aus ökonomischer Sicht eine Aggregationsfunktion, deren partielle Substitutionselastizität mit allen betrachteten Zahlungsmittelpaaren variiert. Dies wäre der Fall, wenn β nicht für alle Zahlungsmittel identisch ist. Chetty [1969, S. 276-280] hat einen solchen Ansatz geschätzt. Dann wird allerdings die Annahme linearer Homogenität, die neben der der schwachen Separabilität für konsistentes mehrstufiges Maximieren erforderlich ist, verletzt.

$$(26)\quad \frac{\partial L}{\partial m_{l,t}} = \frac{1}{\beta}\left(\sum_{l=1}^{L1} \alpha_l\, m_{l,t}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \left(\beta\, \alpha_l\, m_{l,t}^{\beta-1}\right) - \lambda\, p_{l,t} = 0$$

$$\vdots$$

$$(27)\quad \frac{\partial L}{\partial m_{L1,t}} = \frac{1}{\beta}\left(\sum_{l=1}^{L1} \alpha_l\, m_{l,t}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \left(\beta\, \alpha_{L1}\, m_{L1,t}^{\beta-1}\right) - \lambda\, p_{L1,t} = 0 .$$

Division der l-ten durch die erste Gleichung führt zu

$$(28)\quad \frac{\alpha_l}{\alpha_1}\left(\frac{m_l}{m_1}\right)^{\beta-1} = \frac{p_{l,t}}{p_{1,t}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha_l}{\alpha_1}\right) + (\beta-1)\ln\left(\frac{m_{l,t}}{m_{1,t}}\right) = \ln\left(\frac{p_{l,t}}{p_{1,t}}\right)$$

$$(29)\quad \Leftrightarrow \ln\left(\frac{m_{l,t}}{m_{1,t}}\right) = \frac{1}{\beta-1}\ln\left(\frac{p_{l,t}}{p_{1,t}}\right) - \frac{1}{\beta-1}\ln\left(\frac{\alpha_l}{\alpha_1}\right).$$

Wird die deterministische Beziehung von einer Störvariable überlagert und schätzt man die Parameter der Beziehung, so lassen sich β und — falls man α_1 auf Eins normiert — α_l bestimmen, da sowohl die Zahlungsmittelbestände als auch deren Nutzungskosten als Zeitreihe zur Verfügung stehen.[13]

Sollen nur zwei Zahlungsmittelbestände aggregiert werden, so ist nur eine einzige Gleichung zu schätzen. Im allgemeinen Fall von mehr als zwei zu aggregierenden Zahlungsmitteln lassen sich für alle $l=1,\cdots,L1$ entsprechende Schätzgleichungen ableiten. Schätzt man diese isoliert, so werden die Koeffizienten vor $\ln\left(p_{l,t}/p_{1,t}\right)$ nur zufällig und nicht immer — wie es die abgeleiteten nicht-stochastischen Gleichungen verlangen — übereinstimmen. Deshalb ist ein Systemschätzungsverfahren anzuwenden mit der Restriktion, daß die Koeffizienten vor $\ln\left(p_{l,t}/p_{1,t}\right)$ übereinstimmen.

[13] Chetty [1969] hat einen ähnlichen Schätzansatz abgeleitet.

2.4. Statistische monetäre Indizes

Die im vorangehenden Abschnitt behandelten funktionalen monetären Indizes hängen zum einen von der Form der gewählten Aggregationsfunktion ab. Zum anderen müssen deren Parameter in bestimmten Zeitabständen neu berechnet werden, da sich die Datenbasis fortwährend erweitert. Nach Ansicht von Barnett [1992, S. 2096] führt dies dazu, daß von Zentralbanken veröffentlichte Werte funktionaler Geldmengenindizes in der Öffentlichkeit auf Akzeptanzprobleme stoßen.

Als Alternative zu der Schätzung von Aggregationsfunktionen propagiert Barnett die Anwendung der Index-Zahlen-Theorie. Diese liefert eine Vielzahl statistischer Mengenindizes, die sich aus bestimmten Aggregationsfunktionen ableiten lassen. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, daß die Parameter der Aggregationsfunktion nicht geschätzt werden müssen. Vielmehr reichen zur Konstruktion statistischer monetärer Indizes Informationen über die einzelnen Zahlungsmittelbsestände m_l sowie über ihre Nutzungspreise p_l aus. Im Gegensatz zu funktionalen monetären Indizes besitzen Geldmengenaggregate, die mit Hilfe statistischer Indizes berechnet werden, zeitvariable Gewichtungsschemata.

2.4.1. Mikroökonomische Mengenindizes

Betrachtet werde ein repräsentativer Haushalt, dessen Subnutzen u_1 eine Funktion der ihm zur Verfügung stehenden Zahlungsmittel m_l ist[14]:

$$(30)\quad u_1 = f(m_1,\cdots,m_l,\cdots,m_{L1}),\ mit\ l = 1,\cdots,L1.$$

Das Wirtschaftssubjekt wähle das Zahlungsmittel-Portfolio nun so, daß ein bestimmtes Nutzenniveau mit minimalen Ausgaben $\sum_{l=1}^{L1} p_l\ m_l$ erreicht wird.

Die Lösung des Minimierungsproblems liefert Hickssche Nachfragefunktionen für die einzelnen Zahlungsmittel, die von den Geldnutzungs-Preisen sowie dem vorgegebenen Nutzenniveau abhängen:

14 Exemplarisch wird im folgenden nur die erste Aggregationsstufe untersucht.

(31) $m_l = h(p_l,\ldots,p_l,\ldots,p_{L1},u_1)$.

Setzt man die Nachfragefunktion in die zu minimierende Funktion ein, so erhält man die Ausgabenfunktion

(32) $c = c(p_l,\ldots,p_l,\ldots,p_{L1},u_1)$.[15]

Die Ausgabenfunktionen werden nun zur Definition eines mikroökonomischen Indexes relativer Mengenänderungen herangezogen, mit dessen Hilfe der Zahlungsmittelvektor $m'^1=(m_1^1,\cdots,m_l^1,\cdots,m_{L1}^1)$ der Periode 1 mit dem Zahlungsmittelvektor $m'^0=(m_1^0,\cdots,m_l^0,\cdots m_{L1}^0)$ der Periode 0 verglichen werden soll[16]:

(33) $Q(u_1^1,u_1^0,p^r) = c(p^r,u_1^1)\,/\,c(p^r,u_1^0)$.[17]

u_1^0 bzw. u_1^1 ist das in Periode 0 bzw. 1 durch m^0 bzw. m^1 erreichte Nutzenniveau, p^r ist der Preisvektor einer Bezugsperiode. Da sich beide Ausgabenfunktionen auf den gleichen Preisvektor beziehen, gehen Unterschiede in den minimalen Ausgaben auf die in den beiden Perioden unterschiedlich hohen Nutzenniveaus zurück. Mit Hilfe der minimalen Ausgaben ist also ein Geldmaß für unterschiedliche Nutzen gefunden worden, über deren quantitatives Verhältnis — legt man das Konzept des ordinalen Nutzens zugrunde — keine direkten Aussagen möglich sind.[18] Ist $Q\left(u_1^1,u_1^0,p^r\right)>1$, liefert der Zahlungsmittelvektor in Periode 1 mehr Liquiditätsdienste als der in Periode 0, die liquiditätswirksame Geldmenge ist somit gestiegen.

Der Geldmengenindex $Q\left(u_1^1,u_1^0,p^r\right)$ bezieht sich auf ein bestimmtes Preisniveau p^r. Im folgenden wird gezeigt, daß der Geldmengenindex unabhängig vom Referenzpreisniveau ist, wenn die Nutzenfunktion homothetisch ist, also gilt

(34) $u_1(\lambda m) = \lambda\, u_1(m)$.

15 Vgl. Schumann [1987], S. 38-44.

16 Da Daten nur von zwei Perioden miteinander verglichen werden, befindet man sich im Bereich der bilateralen Index-Zahlen-Theorie, vgl. Diewert [1987], S. 767. Um dies zu kennzeichnen, wird der Periodenindex im Gegensatz zu Abschnitt 2.3. hochgestellt.

17 Vgl. Samuelson [1974], S. 568.

18 Vgl. Allen [1949], S. 199.

Wird für einen gegebenen Preisvektor der Nutzen verdoppelt, so müssen die eingesetzten Mengen und damit die minimalen Ausgaben verdoppelt werden. Die Ausgabenfunktion ist somit proportional zum Subnutzenniveau, es gilt

(35) $c(p,u_1) = u_1\ b(p)$.[19]

Die unit cost function *b(p)* repräsentiert die zur Erlangung eines Nutzenniveaus von 1 mindestens notwendigen Ausgaben.

Mit Hilfe der Ausgabenfunktion (35) wird der Geldmengenindex umgeformt zu:

(36) $Q(u_1^1,u_1^0,p^r) = \dfrac{c(p^r,u_1^1)}{c(p^r,u_1^0)} = \dfrac{u_1^1\ b(p^r)}{u_1^0\ b(p^r)} = \dfrac{u_1^1}{u_1^0} = \dfrac{Xm1(m^1)}{Xm1(m^0)} = Q(u_1^1,u_1^0)$.[20]

Wie gefordert, ist der Geldmengenindex im Fall homothetischer Präferenzen unabhängig vom Referenzpreisniveau. Die Linear-Homogenität der Nutzenfunktion ist deshalb von Bedeutung, da sie zusammen mit der Annahme der schwachen Separabilität hinreichende Bedingung für konsistentes mehrstufiges Maximieren ist.

2.4.2. Exakte und superlativische Indizes

Gegeben sei eine Aggregationsfunktion *Xm1(m)*. Entspricht der mit Hilfe eines Optimierungskalküls daraus ableitbare mikroökonomische Mengenindex einem ad-hoc definierten Mengenindex, so ist letzterer exakt bezüglich der Aggregationsfunktion *Xm1(m)*.[21] Umgekehrt ist nachzuweisen, daß sich der ad-hoc definierte Mengenindex im allgemeinen Fall auf Gleichung (33) oder im Fall homothetischer Präferenzen auf Gleichung (36) zurückführen läßt. Ist ein Mengenindex exakt, so kann man mit dessen Hilfe Veränderungsraten eines Mengenaggregates berechnen, ohne die Parameter der zugehörigen Aggregationsfunktion bestimmen zu müssen.

---

19 Vgl. Deaton, Muellbauer [1980], S. 173.

20 Vgl. Samuelson [1974], S. 569/70.

21 Vgl. Diewert [1976], S. 116/7.

Für empirische Zwecke ist ein Mengenindex nur anwendbar, wenn die Aggregationsfunktion, in bezug auf diese der Mengenindex exakt ist, die tatsächliche Aggregationstechnologie hinreichend gut beschreiben kann. Beobachtet man beispielsweise zwischen einzelnen Zahlungsmitteln starke Substitutionsbeziehungen, so ist die Verwendung einer limitationalen Aggregationsfunktion unzulässig. Solche Probleme treten nicht auf, wenn man eine Aggregationsfunktion wählt, deren Parameter so gewählt werden können, daß sie approximativ allen denkbaren, theoretisch konsistenten Aggregationsfunktionen entspricht, mithin flexibel ist.[22] Im Sinne von Diewert [1974, S. 125] ist eine Aggregationsfunktion $Xm1(m)$ flexibel, wenn sie an der Stelle m^* eine Approximation zweiter Ordnung an eine beliebige zweifach stetig differenzierbare Funktion $Xm1^*$ ist, wenn gilt:

(37) $Xm1(m^*,\alpha) = Xm1^*(m^*)$

(38) $\nabla Xm1(m^*,\alpha) = \nabla Xm1^*(m^*)$

(39) $\nabla^2 Xm1(m^*,\alpha) = \nabla^2 Xm1^*(m^*)$.

$\nabla Xm1(m^*,\alpha)$ ist der Vektor der partiellen ersten Ableitungen der Funktion $Xm1$ an der Stelle m^* (Gradient). $\nabla^2 Xm1(m^*,\alpha)$ ist die Matrix der partiellen zweiten Ableitungen, also die Hesse-Matrix. Für jeden Zahlungsmittelvektor m^* müssen die Parameter α von $Xm1$ so gewählt werden können, daß die einzelnen Funktionswerte, die ersten und die zweiten partiellen Ableitungen von $Xm1$ beliebige in $Xm1^*(m^*), \nabla Xm1^*(m^*), \nabla^2 Xm1^*(m^*)$ aufgeführte Werte annehmen können. Allerdings müssen sowohl $Xm1$ als auch $Xm1^*$ linear-homogen sein, nichtnegative partielle erste Ableitungen und eine negativ-semidefinite Hesse-Matrix besitzen.[23] Die erste Annahme ist erforderlich für konsistentes mehrstufiges Maximieren, die beiden anderen stellen sicher, daß die Bedingungen für ein Nutzenmaximum erfüllt sind. Zusammen gewährleisten die Annahmen die theoretische Konsistenz der Aggregationsfunktionen.

Ein Mengenindex ist superlativisch, wenn er exakt bezüglich einer flexiblen Aggregationsfunktion ist.[24] Für empirische Zwecke ist ein superlativischer Index interessant, da er approximativ dem "wahren", aus allen möglichen in der

---

22 Vgl. Deaton, Muellbauer [1980], S. 73/4.

23 Vgl. Lau [1986], S. 1539-1545, Lau [1974], S. 183.

24 Vgl. Diewert [1976], S. 117. Fisher [1922, S. 247] hat das Adjektiv "superlativisch" benutzt, um eine Klasse besonders geeigneter Indizes zu benennen.

Realität zu beobachtbaren Aggreationsfunktionen ableitbaren mikroökonomischen Mengenindex entspricht.

Im folgenden wird untersucht, ob einige der in der Literatur vorgeschlagenen Mengenindizes exakt und superlativisch sind.

2.4.3. Der Törnqvist-Index

Der Törnqvist-Mengenindex[25] ist definiert als

$$(40) \quad Q_T = \prod_{l=1}^{L1} \left[m_l^1 / m_l^0 \right]^{\frac{1}{2}\left[s_l^1 + s_l^0\right]},$$

mit $s_l^r = \dfrac{m_l^r \; p_l^r}{\sum_{l=1}^{L1} m_l^r \; p_l^r}$, $r = 0,1$. s_l^r ist also der Anteil der Ausgaben für das l-te Zahlungsmittel an den gesamten Zahlungsmittelausgaben der Periode r. Logarithmiert man Q_T

$$(41) \quad \ln Q_T = \sum_{l=1}^{L1} \left[\ln m_l^1 - \ln m_l^0 \right] \frac{1}{2} \left[s_l^1 + s_l^0 \right],$$

so erkennt man, daß der logarithmierte Törnqvist-Index bzw. die Zuwachsrate des Geldmengenaggregats ein mit den in den beiden Perioden durchschnittlich zu beobachtenden Ausgabenanteilen gewichtetes Mittel der Zuwachsraten der einzelnen Zahlungsmittel ist. Werden die Zahlungsmittelbestände zweier anderer Perioden miteinander verglichen, so dürften sich die durchschnittlichen Ausgabenanteile bzw. das Gewichtungsschema ändern. Im Gegensatz dazu werden beim Cobb-Douglas-Geldmengenindex die Zuwachsraten der einzelnen Zahlungsmittel mit ökonometrisch geschätzten und somit im Zeitablaub konstanten Ausgabenanteilen gewichtet.

---

25 Den entsprechenden Preisindex hat Törnqvist [1936, S. 28] zur Berechnung eines Lebenshaltungskostenindexes in Finnland benutzt.

Im folgenden wird gezeigt, daß der Törnqvist-Index exakt ist bezüglich der linear-homogenen transzendenten logarithmischen (kurz: translog) Aggregations-Funktion

$$(42)\quad \ln TLm1(m) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{L1} \alpha_n \ln m_n + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L1}\sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_j \ln m_k$$

mit $\sum_{n=1}^{L1} \alpha_n = 1,\ \gamma_{jk} = \gamma_{kj},\ \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} = 0 \ \text{für } j = 1, 2, \cdots, L1.$[26]

Die Restriktionen für α, γ stellen sicher, daß die Aggregationsfunktion linear homogen ist.[27]

Die Richtung der Beweisführung ist derart, daß ausgehend von der translog-Aggregationsfunktion die Definitionsgleichung des Törnqvist-Indexes abgeleitet wird.

Um das quadratische Approximations-Lemma anwenden zu können, muß (42) vereinfacht werden zu

$$(43)\quad TLm1^*(z) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{L1} \alpha_n z_n + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L1}\sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} z_j z_k,$$

mit $z_n = \ln m_n$ *und* $TLm1^*(z) = \ln TLm1(m)$.

Entsprechend dem quadratischen Approximations-Lemma gilt

$$(44)\quad TLm1^*(z^1) - TLm1^*(z^0) = \frac{1}{2}\left[\nabla TLm1^*(z^1) + \nabla TLm1^*(z^0)\right]'_{1xL1} (z^1 - z^0)_{L1x1},$$

wobei die hochgestellten Ziffern Periodenindizes darstellen und

26 Zur Funktionalform vgl. Christensen, Jorgenson, Lau [1971, S. 255/6]. Zum nachfolgenden Beweis vgl. Diewert [1976, S. 119/20].

27 Vgl. Diewert [1980], S. 187.

(45) $\nabla TLm1^*(z^r) = \left(\frac{\partial TLm1^*(z^r)}{\partial z_1^r}, \dots, \frac{\partial TLm1^*(z^r)}{\partial z_j^r}, \dots, \frac{\partial TLm1^*(z^r)}{\partial z_{L1}^r} \right),$

(46) $\frac{\partial TLm1^*(z^r)}{\partial z_j^r} = \frac{\partial \ln TLm1(m^r)}{\partial \ln m_j^r} = \left(\frac{\partial TLm1(m^r)}{\partial m_j^r} \right) \left(\frac{m_j^r}{TLm1(m^r)} \right),$

mit $r = 0,1$.

Substitutionen in (44) liefern

(47) $\ln TLm1(m^1) - \ln TLm1(m^0) =$

$$= \frac{1}{2} \left[\hat{m}^1 \frac{\nabla TLm1(m^1)}{TLm1(m^1)} + \hat{m}^0 \frac{\nabla TLm1(m^0)}{TLm1(m^0)} \right]_{1xL1} (\ln m^1 - \ln m^0)_{L1x1},$$

mit $\hat{m}^r = \begin{bmatrix} m_1^r & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & m_l^r & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & m_L^r \end{bmatrix}_{L1xL1}$, *mit* $r = 0,1$.

Die Elemente des Vektors $\frac{\nabla TLm1(m^1)}{TLm1(m^r)}$ lassen sich mit Hilfe der sogenannten Hotelling-Beziehung[28] als Funktion von Preisen und Mengen darstellen, so daß (47) nur von Preisen und Mengen und nicht von den Parametern der Aggregationsfunktion abhängt. An dieser Stelle der Ableitung vollzieht sich der Übergang von der parametrisierten Aggregationsfunktion zum parameterfreien Index.

Im folgenden wird die Hotelling-Beziehung aus einem Maximierungsproblem abgeleitet:

(48) $\max TLm1(m^r), s.t. \sum_{l=1}^{L1} p_l^r \cdot m_l^r = p^{r'} m^r = y^r$,

[28] Vgl. Hotelling [1935], S. 70/71 und Pearce [1964], S. 58.

wobei p^r der in Periode r gültige Vektor der Nutzungskosten und y^r das für den Erwerb von Liquiditätsdiensten zur Verfügung stehende Budget darstellen. Der repräsentative Konsument bzw. Produzent wählt sein Zahlungsmittelportfolio so, daß seine Nutzen- bzw. Produktionsfunktion — oder allgemein: seine Aggregationsfunktion — bei gegebenem Budget maximiert wird. Die zu maximierende Lagrange-Funktion lautet:

$$(49)\quad L = TLm\,1(m^r) - \lambda\left(\sum_{l=1}^{L1} p_l^r \cdot m_l^r - y^r\right)$$

Die Bedingung 1. Ordnung für ein Maximum lautet:

$$\frac{\partial L}{\partial m_l^r} = \frac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_l^r} - \lambda\, p_l^r = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_1^r} = \lambda\, p_l^r \quad \Leftrightarrow \quad p_l^r = \frac{\dfrac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_l^r}}{\lambda}.$$

Einsetzen von p_l^r in die Budgetrestriktion liefert:

$$(50)\quad y^r = \sum_{l=1}^{L1} p_l^r \cdot m_l^r = \sum_{l=1}^{L1} \frac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_l^r} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot m_l$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum_{l=1}^{L1} \dfrac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_l^r} \cdot m_l}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^r \cdot m_l^r}.$$

Einsetzen in $\dfrac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_l^r} = \lambda\, p_1^r$ führt zu

$$(51)\quad \frac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_l^r} = \frac{p_l^r \cdot \sum_{l=1}^{L1} \dfrac{\partial TLm\,1(m^r)}{\partial m_l^r} \cdot m_l}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^r \cdot m_l^r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p_l^r}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^r \, m_l^r} = \frac{\dfrac{\partial TLm1(m^r)}{\partial m_l^r}}{\sum_{l=1}^{L1} \dfrac{\partial f(m^r)}{\partial m_l^r} \cdot m_l}.$$

Da *TLm1* linear homogen ist, kann der Nenner auf der rechten Seite gemäß der Eulerschen Identität ersetzt werden durch $TLm1(m^r)$:

$$(52) \quad \frac{p_l^r}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^r \cdot m_l^r} = \frac{\dfrac{\partial TLm1(m^r)}{\partial m_l^r}}{TLm1(m^r)}, \text{ für } l=1,\cdots,L1.$$

Damit ist die Hotelling-Beziehung abgeleitet. Festzuhalten ist, daß in dieser Beziehung sowohl die Annahme maximierenden Verhaltens als auch die der Linear-Homogenität der Aggregationsfunktion enthalten ist.

Werden für $l=1,\cdots,L1$ die Hotelling-Beziehungen als Elemente des Vektors $\dfrac{\nabla TLm1(m^r)}{TLm1(m^r)}$ in (...) eingesetzt, so ergibt sich

$$(53) \quad \ln TLm1(m^1) - \ln TLm1(m^0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{m}^1 p^1}{p^{1'} m^1} + \frac{\hat{m}^0 p^0}{p^{0'} m^0}\right]_{1xL1} \left[\ln m^1 - \ln m^0\right]_{L1x1}$$

$$= \sum_{l=1}^{L1} \frac{1}{2}\left[\frac{m_l^1 \, p_l^1}{\sum_{l=1}^{L} m_l^1 \, p_l^1} + \frac{m_l^0 \cdot p_l^0}{\sum_{l=1}^{L} m_l^0 \, p_l^0}\right] \ln\left(\frac{m_l^1}{m_l^0}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{L1} \frac{1}{2}(s_l^1 + s_l^0) \cdot \ln\left(\frac{m_l^1}{m_l^0}\right) = \ln Q_T.$$

Die Ableitung zeigt, daß der Mengenindex Q_T bezüglich einer linear-homogenen translog-Aggregationsfunktion exakt ist.

Um nachzuweisen, daß Q_T superlativisch ist, wird im folgenden bewiesen, daß die linear homogene translog-Aggregationsfunktion

$$(54)\quad \ln TLm1(m) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{L1} \alpha_n \ln m_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{L1} \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_j \ln m_k$$

an der Stelle m^* eine Approximation zweiter Ordnung an eine beliebige, linearhomogene, zweifach stetig differenzierbare Funktion $TLm1^*$ und somit flexibel ist.[29]

Die Gleichung

$$TLm1(m^*) = e^{\ln TLm1(m^*)} = e^{\alpha_0} \cdot e^{\sum_{n=1}^{L1} \alpha_n \ln m_n^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{L1} \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_j^* \ln m_k^*} = TLm1^*(m^*)$$

wird durch eine geeignete Wahl von α_0 immer erfüllt.

Im folgenden wird nachgewiesen, daß $\nabla TLm1(m^*) = \nabla TLm1^*(m^*)$ gilt. Die erste partielle Ableitung von $TLm1(m^*)$ lautet:

$$\frac{\partial TLm1(m^*)}{\partial m_j^*} = TLm1(m^*) \frac{\partial \ln TLm1(m^*)}{\partial m_j^*} = TLm1(m^*) \left(\alpha_j \frac{1}{m_j^*} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \frac{\ln m_k^*}{m_j^*} \right)$$

$$= TLm1(m^*) \frac{\alpha_j + \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_k^*}{m_j^*}.$$

Umformen ergibt die Elastizität der Aggregationsfunktion in bezug auf Zahlungsmittel j, $\frac{\partial TLm1(m^*)}{\partial m_j^*} \frac{m_j^*}{TLm1(m^*)} \equiv \frac{\partial \ln TLm1(m^*)}{\partial \ln m_j^*} = \alpha_j + \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_k^*.$

Da sowohl $TLm1(m^*)$ als auch die zu approximierende, beliebige Funktion $TLm1^*(m^*)$ homogen vom Grade 1 sein sollen und somit die Summe der Elastizitäten beider Funktionen gleich eins ist, können die Elastizitäten und — da

29 Zur folgenden Ableitung vgl. Lau [1986], S. 1542/3.

$TLm1(m^*) = TLm1^*(m^*)$ gilt — die ersten partiellen Ableitungen durch entsprechende Wahl von α_j bei Geltung von $\sum_{j=1}^{L1} \alpha_j = 1$ beliebige, in

$\nabla TLm1^*(m^*)$ aufgeführte Werte annehmen. Der zweite Summand $\sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_k^*$

beeinflußt die allgemeine Gültigkeit der Beziehung nicht, da wegen $\sum_{j=1}^{L1} \gamma_{jk} = 0$

gilt, daß $\sum_{j=1}^{L1} \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_k^* = 0$.

Im folgenden wird gezeigt, daß $\nabla^2 TLm1(m^*) = \nabla^2 TLm1^*(m^*)$ gilt.

Die zweite partielle Ableitung für $k \neq j$ wird mit Hilfe der Produktregel berechnet:

$$\frac{\partial^2 TLm1(m^*)}{\partial m_j^* \, \partial m_k^*} = TLm1(m^*) \frac{1}{m_j^*} \frac{\gamma_{jk}}{m_k^*} + \frac{1}{m_j^*} \left(\alpha_j + \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_k^* \right) \frac{\partial TLm1(m^*)}{\partial m_k^*}.$$

Verwendet man die Ergebnisse für die erste partielle Ableitung, so folgt

$$(55) \quad \frac{\partial^2 TLm1(m^*)}{\partial m_j^* \partial m_k^*} = TLm1(m^*) \frac{1}{m_j^*} \frac{\gamma_{jk}}{m_k^*}$$

$$+ \frac{1}{m_j^*} \left(\alpha_j + \sum_{k=1}^{N} \gamma_{jk} \ln m_k^* \right) TLm1(m^*) \frac{1}{m_k^*} \left(\alpha_k + \sum_{j=1}^{L1} \gamma_{jk} \ln m_j^* \right)$$

$$= \frac{TLm1(m^*)}{m_j^* \, m_k^*} \left(\gamma_{kj} + \frac{\partial \ln TLm1(m^*)}{\partial \ln m_j^*} \cdot \frac{\partial \ln TLm1(m^*)}{\partial \ln m_k^*} \right).$$

Die zweiten partiellen Ableitungen für $k = j$ lauten bei Anwendung der Kettenregel

$$(56) \quad \frac{\partial^2 TLm1(m^*)}{\partial m_j^* \, \partial m_j^*} = TLm1(m^*) \left[-\frac{1}{m_j^{*2}} \left(\alpha_j + \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{ij} \ln m_k^* \right) + \frac{1}{m_j^*} \frac{\gamma_{ij}}{m_j^*} \right]$$

$$+\frac{1}{m_j^*}\left(\alpha_j+\sum_{k=1}^{L1}\gamma_{jk}\ln m_k^*\right)\cdot TLm1(m^*)\frac{1}{m_j^*}\left(\alpha_j+\sum_{k=1}^{L1}\gamma_{jk}\ln m_k^*\right)$$

$$=\frac{TLm1(m^*)}{m_j^{*2}}\left[\gamma_{jj}-\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*}+\left(\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*}\right)^2\right].$$

Um die Gleichungen (55) und (56) in einer Matrix zusammenzufassen, wurden beide umgeformt zu

$$(57)\quad \frac{1}{TLm1(m^*)}m_j^*\frac{\partial^2 TLm1(m^*)}{\partial m_j^*\partial m_k^*}m_k^*=\gamma_{jk}+\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*}\cdot\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_k^*},$$

für $k \neq j$,

$$(58)\quad \frac{1}{TLm1(m^*)}m_j^*\frac{\partial^2 TLm1(m^*)}{\partial m_j^*\partial m_j^*}m_j^*=$$

$$=\gamma_{jj}+\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*}\cdot\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*}-\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*}$$

für $k = j$.

Man definiere folgende Matrizen,

$$w'=\left[\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_1^*},\dots,\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*},\dots,\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_{L1}^*}\right],$$

$$\hat{w}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_1^*} & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_j^*} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{\partial\ln TLm1(m^*)}{\partial\ln m_{L1}^*}\end{bmatrix}_{L1xL1},$$

$$\hat{m}^* = \begin{bmatrix} m_1^* & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & m_j^* & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & m_{L1}^* \end{bmatrix}_{L1xL1},$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{1L1} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \gamma_{jj} & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \gamma_{L1} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{L1L1} \end{bmatrix}_{L1xL1}.$$

Mit Hilfe der Definitionen kann man (57) und (58) zu folgender Matrix-Gleichung zusammenfassen:

$$(59) \quad \frac{1}{TLm1(m^*)} \hat{m}^*_{L1xL1} \nabla^2 TLm1(m^*)_{L1xL1} \hat{m}^*_{L1xL1} = \gamma_{L1xL1} + w_{L1x1} w'_{1xL1} - \hat{w}_{L1xL1}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{L1xL1} = \frac{1}{TLm1(m^*)} (\hat{m})^*_{L1xL1} \nabla^2 TLm1(m^*)_{L1xL1} \hat{m}^*_{L1xL1} - w_{L1x1} w'_{1xL1} + \hat{w}_{L1xL1}.$$

Ersetzt man die Elemente des Gradienten $\nabla TLm1(m^*)$ durch die von $\nabla TLm1^*(m^*)$ und $\nabla^2 TLm1(m^*)$ durch $\nabla^2 TLm1^*(m^*)$, der Hesse-Matrix der zu approximierenden Funktion, so erfüllt γ bei Beachtung der Restriktionen $\sum_{j=1}^{L1} \gamma_{jk} = \sum_{k=1}^{L1} \gamma_{jk} = 0$ die Gleichung. Dies ist der Fall, da sowohl $TLm1(m^*)$ als auch die zu approximierende, beliebige Funktion $TLm1^*(m^*)$ linear-homogen sowie die Hesse-Matrizen $\nabla^2 TLm1(m^*)$ und $\nabla 2TLm1^*(m^*)$ negativ semidefinit sind.

2.4.4. Der Fisher-Index

Der Fisher-Index ist definiert als geometrisches Mittel aus Laspeyres-Mengenindex $Q_L \equiv \frac{\sum_{l=1}^{L1} p_l^0 m_l^1}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^0 m_l^0}$ und Paasche-Mengenindex $Q_P \equiv \frac{\sum_{l=1}^{L1} p_l^1 m_l^1}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^1 m_l^0}$:

$$(60) \quad Q_F \equiv \sqrt{Q_L\, Q_P} = \left[\frac{\sum_{l=1}^{L1} p_l^0 m_l^1 \; \sum_{l=1}^{L1} p_l^1 m_l^1}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^0 m_l^0 \; \sum_{l=1}^{L1} p_l^1 m_l^0} \right]^{1/2} .$$ [30]

Wie alle statistischen Indizes vergleicht auch der Fisher-Index die Zahlungsmittelbestände nur zweier Perioden miteinander. Werden Zahlungsmittelbestände anderer Perioden miteinander verglichen, so ändert sich das Gewichtungsschema.

Im folgenden wird nachgewiesen, daß Q_F exakt ist bezüglich der linear-homogenen quadratischen Aggregationsfunktion

$$(61) \quad Qm1(m) \equiv \left(\sum_{j=1}^{L1} m_j \sum_{k=1}^{L1} a_{jk} m_k \right)^{1/2},$$

mit $a_{jk} = a_{kj}$ (symmetrische Koeffizientenmatrix).[31]

Im Vergleich zum Exaktheitsbeweis für den Törnqvist-Index ist die Richtung der Beweisführung umgekehrt, d.h. ausgehend von der Definitionsgleichung des Fisher-Indexes wird bewiesen, daß diese dem Verhältnis der Aggregate der beiden Perioden entspricht.

Umformen der Definitionsgleichung liefert

---

30 Vgl. Allen [1975], S. 45.

31 Diewert [1980, S. 184] führt den Beweis in Matrixschreibweise. Zur besseren Nachvollziehbarkeit wird im folgenden die Summenschreibweise gewählt.

(62) $$Q_F = \left[\left(\sum_{l=1}^{L1} m_l^1 \left(\frac{p_l^0}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^0 m_l^0} \right) \right) \Bigg/ \left(\sum_{l=1}^{L1} m_l^0 \left(\frac{p_l^1}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^1 m_l^1} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Die Ausdrücke $\frac{p_l^r}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^r m_l^r}$ für r=0,1 stellen die linke Seite der Hotelling-Beziehung dar[32]:

(63) $$\frac{p_l^r}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^r m_l^r} = \frac{\frac{\partial Qm1(m^r)}{\partial m_l^r}}{Qm1(m^r)}.$$

Durch Berechnung der 1. Ableitung der Aggregationsfunktion werden die Parameter der linear-homogenen quadratischen Aggregationsfunktion in die Definitionsgleichung des Fisher-Indexes eingeführt:

(64) $$\frac{\partial Qm1(m^r)}{\partial m_l^r} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{L1} m_j^r \sum_{k=1}^{L1} a_{jk} m_k^r \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \sum_{j=1}^{L1} a_{jl} m_j^r.$$ [33]

Einsetzen in die Hotelling-Beziehung ergibt:

(65) $$\frac{p_l^r}{\sum_{l=1}^{L1} p_l^r m_l^r} = \frac{\sum_{j=1}^{L1} a_{jl} m_j^r}{\sum_{j=1}^{L1} m_j^r \sum_{k=1}^{L1} a_{jk} m_k^r}.$$

Fügt man diesen Ausdruck in die umgeformte Gleichung des Fisher-Indexes (62) ein, so erhält man:

32 Vgl. S. 21.

33 Der Faktor 2 vor dem Summenzeichen folgt aus der Symmetrie der Koeffizientenmatrix.

(66) $$Q_F = \left(\sum_{l=1}^{L1} \frac{m_l^1 \sum_{j=1}^{L1} a_{jl} m_j^0}{\sum_{j=1}^{L1} m_j^0 \sum_{k=1}^{L1} a_{jk} m_k^0} \Bigg/ \sum_{l=1}^{L1} \frac{m_l^0 \sum_{j=1}^{L1} a_{jl} m_j^1}{\sum_{j=1}^{L1} m_j^1 \sum_{k=1}^{L1} a_{jk} m_k^1} \right)^{1/2}$$

Da $\sum_{l=1}^{L1} m_l^1 \sum_{j=1}^{L1} a_{jl} m_j^0 = \sum_{l=1}^{L1} m_l^0 \sum_{j=1}^{L1} a_{lj} m_j^1$, gilt

(67) $$Q_F = \left(\frac{\sum_{j=1}^{L1} m_j^1 \sum_{k=1}^{L1} a_{jk} m_k^1}{\sum_{j=1}^{L1} m_j^0 \sum_{k=1}^{L1} a_{jk} m_k^0} \right)^{1/2} = \frac{Qm1(m^1)}{Qm1(m^0)}.$$

Q_F ist mithin exakt bezüglich $Qm1$(m). Da $Qm1(m)$ flexibel ist,[34] ist der Fisher-Geldmengenindex ebenso wie der Törnqvist-Index superlativisch. Darüber hinaus erfüllt Q_F zahlreiche von Fisher geforderte Eigenschaften bzw. Tests, die im Rahmen des Test-Ansatzes der Index-Zahlen-Theorie in Analogie zum Ein-Güter-Fall aufgestellt wurden[35]:

(i) Commodity reversal test: Q_F ist unabhängig von der Reihenfolge, mit der die einzelnen Geldmengen in den Index eingehen. Diese Forderung wäre beispielsweise nicht erfüllt, wenn die erste Hälfte der Geldmengen arithmetisch und die zweite geometrisch gemittelt würde.[36]

(ii) Identity test: Q_F verändert sich nicht, wenn die Mengen in beiden Perioden übereinstimmen.[37]

(iii) Commensurability test: Q_F wird nicht davon beeinflußt, daß die Mengen in einer anderen Einheit gemessen werden:
$Q_F(p^0,p^1,\alpha\, m^0,\alpha\, m^1) = Q_F(p^0,p^1,m^0,m^1)$.[38]

---

34 Diewert [1976, S. 140/1] beweist dies für eine Aggregationsfunktion, die die linear-homogene quadratische Aggregationsfunktion als Spezialfall enthält.

35 Vgl. Samuelson, Swamy [1974], S. 566/7.

36 Vgl. Fisher [1923], S. 63.

37 Vgl. Diewert [1976], S. 131.

38 Vgl. Fisher [1923], S. 420.

(iv) Determinateness test: Q_F strebt nicht gegen Unendlich, nimmt nicht den Wert Null an oder ist nicht definiert, wenn eine einzige Menge den Wert Null annimmt.[39] Diese Eigenschaft erfüllt der Törnqvist-Index wegen der Verwendung von logarithmierten Mengen nicht. Das Vorliegen dieser Eigenschaft hat den Vorteil, daß ein Geldmengenindex um einzelne Zahlungsmittel erweitert werden kann, wenn diese beispielsweise durch Finanzinnovationen zwischenzeitlich neu entstanden sind.

(v) Proportionality test: Werden alle Mengen in Periode 1 verdoppelt, so verdoppelt sich auch der Index: $Q_F(p^0,p^1,m^0,\lambda\, m^0) = \lambda$.[40]

(vi) Time reverval test: Vergleicht man die Mengen von Periode 1 mit denen von Periode 0 und nimmt Q_F den Wert 2 an, so beträgt Q_F 1/2, wenn man umgekehrt die Mengen der Periode 0 mit denen von 1 vergleicht, d.h. $Q_F(p^0,p^1,m^0,m^1) \cdot Q_F(p^1,p^0,m^1,m^0) = 1$.[41]

(vii) Circularity test: Man verläßt den Bereich der bilateralen Index-Theorie und vergleicht die Mengen dreier Zeitpunkte miteinander. Dann soll gelten: $Q(p^0,p^1,m^0,m^1)\ Q(p^1,p^2,m^1,m^2) = Q(p^0,p^2,m^0,m^2)$. Dies ist für Q_F erfüllt:

$$Q_F(p^0,p^1,m^0,m^1)\,Q_F(p^1,p^2,m^1,m^2) = \frac{Qm1(m^1)\,Qm1(m^2)}{Qm1(m^0)\,Qm1(m^1)}$$

$$= \frac{Qm1(m^2)}{Qm1(m^0)} = Q_r(p^0,p^2,m^0,m^2)\ .^{42}$$

Diewert [1976, S. 136-138] empfiehlt die Verwendung des Fisher-Indexes, weil die dahinterstehende Aggregationsfunktion den Fall vollkommener Substitutionalität ebenso einschließt wie den der Limitationalität.

[39] Vgl. ebenda.

[40] Vgl. ebenda.

[41] Vgl. ebenda, S. 64/5.

[42] Vgl. Diewert [1976], S. 132.

2.4.5. Das Prinzip der festen Basis und das Verkettungsprinzip

Bisher wurden nur die Geldmengen zweier Perioden miteinander verglichen. Um die Mengen mehrerer Perioden aufeinander zu beziehen, kann man das Prinzip der festen Basis oder das Verkettungsprinzip anwenden.

Bei der erstgenannten Vorgehensweise erklärt man eine Periode, meist die erste Beobachtung einer Zeitreihe, zur Basis. Für die nachfolgenden Perioden werden die jeweiligen Mengenindizes in bezug auf die Basisperiode berechnet.[43] Normiert man die Geldmenge der Basisperiode auf 1, so bilden die Mengenindizes eine Zeitreihe der Geldmenge. Nachteil dieses in offiziellen Statistiken häufig angewendeten Prinzips ist, daß sich zwischen laufender und Basis-Periode oft große Zeitabstände auftun. Deshalb können sich beispielsweise bei Laspeyres-Indizes beträchtliche Unterschiede zwischen dem aktuellen und dem Warenkorb der Basisperiode bilden, so daß der Laspeyres-Preisindex die Preisentwicklung gemessen am "wahren" mikroökonomischen Preisindex überzeichnet. Die Anwendung des Prinzips der festen Basis schafft auch bei mikroökonomischen Indizes Probleme, da sich Präferenzen in längeren Zeitabschnitten ändern können.

Hinter dem Verkettungsprinzip steht die Vorstellung, alle zwischen der Basis- und der laufenden Periode liegenden Informationen auszunutzen. Sind Nutzungskosten und Zahlungsmittelbestände kontinuierlich beobachtbar[44], so stellt

$$(68) \quad y(t) = p_1(t)\, m_1(t) + \ldots + p_l(t)\, m_l(t) + \ldots + p_{L1}(t)\, m_{L1}(t)$$

die gesamten Zahlungsmittelausgaben zum Zeitpunkt t dar.

Bildet man das totale Differential und dividiert durch $y(t)$, wobei "." die Veränderung einer Funktion in der Zeit kennzeichnet, so erhält man:

$$(69) \quad \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \sum_{l=1}^{L1} \frac{m_l(t)}{y(t)}\, \dot{p}_l(t) + \sum_{l=1}^{L1} \frac{p_l(t)}{y(t)}\, \dot{m}_l(t)\ .$$

43 Vgl. Diewert [1987], S. 773.

44 Im Unterschied zum zeitdiskreten Fall wird der Zeitindex in Klammern gesetzt.

Der zweite Summand stellt die Veränderungsrate des Mengenaggregats in der Zeit, $\frac{X\dot{m}1(t)}{Xm1(t)}$, dar, die näherungsweise der logarithmischen Veränderungsrate entspricht:

$$(70)\quad \frac{X\dot{m}1(t)}{Xm1(t)} \approx (\ln X\dot{m}1(t)).$$

Integrieren führt zu $\ln Xm1(t) = \int_0^t (\ln X\dot{m}1(t)) \cdot dt$, mit $\ln Xm1(0) = 0$, wobei $\ln Xm1(t)$ der Divisia-Integral Index ist. Dessen Veränderungsrate im Zeitpunkt t gegenüber 0 entspricht den zwischen 0 und 1 kumulierten Indexänderungen.

Sind Nutzungskosten und Zahlungsmittelbestände nicht kontinuierlich, sondern nur in bestimmten Zeitabständen beobachtbar und betrachtet man anstelle von Zuwachsraten Vervielfältigungsfaktoren, so gilt:

$$Q(p^0, p^t, m^0, m^t) = Q(p^0, p^1, m^0, m^1) \cdot Q(p^1, p^2, m^1, m^2) \ldots Q(p^{t-1}, p^t, m^{t-1}, m^t).$$

Der Geldmengenindex bezüglich Periode 0 und t, also der Vervielfachungsfaktor des Geldmengenaggregats, entspricht dem Produkt der jeweils zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten berechneten Geldmengenindizes.[45] Verkettete Indizes kann man auch rekursiv definieren,

$$Q(p^0, p^t, m^0, m^t) = Q(p^0, p^{t-1}, m^0, m^{t-1}) \cdot Q(p^{t-1}, p^t, m^{t-1}, m^t).$$

3. Empirische Bestimmung zinsgewichteter Geldmengenaggregate

Im bisherigen Teil der Arbeit wurden die theoretischen Grundlagen zinsgewichteter Geldmengenaggregate beleuchtet. Der Nachfragetheorie folgend wurden reale Zahlungsmittelbestände aggregiert. Im folgenden sollen Geldmengenaggregate empirisch bestimmt und miteinander verglichen werden. Da Notenbanken üblicherweise nominale Aggregate beobachten, werden im folgenden Aggregationsfunktionen gewählt, deren Argumente nominale Zahlungsmittelbestände sind.

---

[45] Vgl. Allen [1975], S. 177-182; Hulten [1987], S. 899/900.

3.1. Die verwendeten Daten

Zur Berechnung zinsgewichteter Geldmengenaggregate benötigt man Daten über Geldmengen sowie über Zinsen.

3.1.1. Geldmengen

Aus der Vielzahl möglicher nominaler Zahlungsmittelabgrenzungen M_l werden im folgenden die Komponenten des offiziellen Summenaggregats 3 der Bundesbank verwandt. Dieses Vorgehen folgt dem Ziel, den offiziellen Summenaggregaten vergleichbare Aggregate zu entwickeln. Eine Differenzierung der Zahlungsmittelarten nach Einlegern — private Haushalte, öffentliche Haushalte, Unternehmen — sowie im Fall von Termineinlagen nach unterschiedlichen Fristigkeiten ist möglich. Da entsprechend differenzierte Zinssätze $r_{l,t}$ nicht als lange Reihen verfügbar sind, wird im folgenden auf eine Differenzierung der Zahlungsmittel nach Anlegern verzichtet.

Beim nominalen Zahlungsmittelbestand M_1 handelt es sich zum einen um im In- und Ausland umlaufende DM-Noten und -Münzen ohne die Kassenbestände inländischer Geschäftsbanken. Zum anderen zählen zu M_1 die Sichteinlagen inländischer Nichtbanken bei inländischen Geschäftsbanken und der Bundesbank. Ausgenommen sind allerdings die Zentralbankguthaben der öffentlichen Haushalte sowie die gem. § 17 Bbk-Gesetz vorübergehend zu den Geschäftsbanken verlagerten Guthaben öffentlicher Haushalte. Bargeldumlauf und Sichteinlagen werden addiert, da für Sichteinlagen eine Verzinsung von 0 vH angenommen wurde und Bargeld und Sichteinlagen somit vollkommene Substitute sind. M_1 entspricht also dem offiziellen Summenaggregat $SM1$.

Beim nominalen Zahlungsmittelbestand M_2 handelt es sich um die Termineinlagen inländischer Nichtbanken bei inländischen Geschäftsbanken mit einer Befristung von einem Monat bis unter vier Jahren.

Der nominale Zahlungsmittelbestand M_3 umfaßt die Spareinlagen inländischer Nichtbanken bei inländischen Geschäftsbanken mit dreimonatiger Kündigungsfrist, bis Juni 1993 handelte es sich um Spareinlagen mit gesetzlicher Kündigungsfrist. Alle Daten sind nicht-saisonbereinigte Monatsendbestände.[46] Um näherungsweise Monatsdurchschnitte zu erhalten, gehen in die folgenden Berechnungen arithmetische Mittel jeweils zweier aufeinanderfolgender Monatsendbestände ein.

Der Effekt der Gebietsstandserweiterung im Zuge der deutschen Wiedervereinigung wird ausgeschaltet, indem alle Werte vor dem Januar 1991 um die 1990 nach Ostdeutschland geflossenen DM-Zahlungsmittel erhöht werden.

3.1.2. Zinsen

Um die Nutzungskosten des nominalen Zahlungsmittelbestandes zu berechnen, verwendet man als Anleiherendite R nicht-saisonbereinigte Werte der Umlaufsrendite festverzinslicher Wertpapiere. Dieses Maß wird zwar von der Laufzeitstruktur der Anleihen mitbeeinflußt, andererseits zeichnet es sich durch einen hohen Repräsentationsgrad aus. Die Monatszahlen der Umlaufrenditen werden aus den Renditen aller Geschäftstage eines Monats berechnet.

Für die Eigenverzinsung, r_1, von in M_1 enthaltenen Zahlungsmitteln wurde in Ermangelung statistischer Erhebungen ein Wert von Null angesetzt.

Für die Termineinlagen, M_2, wurde der Bundesbank folgend[47] als Maß für r_2 Habenzinsen für Festgelder mit vereinbarter Laufzeit von einem Monat bis drei Monate einschließlich und einem Anlagebetrag von 100 000 DM bis unter 1 Mill. DM gewählt. Die Habenzinsen r_3 von Spareinlagen mit dreimonatiger Kündigungsfrist, M_3, werden unmittelbar erhoben. Beide Habensätze sind nicht saisonbereinigt, sie werden seit Februar 1975 in den beiden mittleren Wochen der angegebenen Monate erhoben. Die beiden Reihen sind ein ungewichtetes arithmetisches Mittel aus den innerhalb der Streubreite liegenden Zinsmeldungen. Die Streubreite gibt an, in welchem Bereich 90 vH der gemeldeten Zins-

---

46 Auf der Datenbank der Bundesbank werden folgende Kennungen verwandt: Bargeldumlauf = TU 0048, Sichteinlagen = TU 0049, Termineinlagen unter vier Jahre = TU 0813, Spareinlagen = OU 0226.

47 Vgl. Tödter [1993].

sätze fallen, wenn jeweils 5 vH der Meldungen mit den höchsten und niedrigsten Zinssätzen ausgesondert wurden.[48]

In einzelnen Monaten übersteigt der Termin-Geldsatz die Umlaufsrendite, wodurch die Nutzungskosten negativ werden. Um dies auszuschließen, könnte man die Nutzungskosten in solchen Monaten zum einen auf Null setzen, $P_{l,t}^{korr.} = \max(0, P_{l,t})$.[49] Eine andere Möglichkeit besteht darin, zu der Umlaufsrendite eine Konstante zu addieren, so daß die Nutzungskosten in allen Perioden gerade größer als Null sind. Im Zeitraum ab Februar 1975 ist dies bei einem Aufschlag in Höhe von 0,5 Prozentpunkten gewährleistet. Das letztere Verfahren zur Sicherstellung nicht-negativer Nutzungskosten hat gegenüber dem ersten den Vorteil, daß weniger stark in die relativen Nutzungskosten eingegriffen wird. Im folgenden wird die erhöhte Umlaufrendite verwendet.

3.2. Die Nutzungskosten

Die Nutzungskosten P_l des nominalen Zahlungsmittelbestandes M_l werden gemäß (13) mit Hilfe der zuvor beschriebenen Daten berechnet (vgl. Schaubild 1). Die Nutzungskosten von M_1 liegen immer über denen für M_2 und M_3, da Bargeld und Sichteinlagen annahmegemäß keine Eigenverzinsung erzielen. Die Nutzungskosten von M_2 sinken zu Beginn der 80er Jahre und in den Jahren 1989 bis 1992, da der Habenzins für Termineinlagen stärker zunimmt als die Umlaufsrendite. Im Gegensatz zu P_2 steigen P_1 und P_3 in solchen Phasen tendenziell an, und zwar weitgehend gleichförmig, da P_1 vollständig und P_3 weitgehend von dem Anstieg der Umlaufsrendite geprägt sind. Letzteres liegt an der geringen Volatilität der Habenzinsen auf Spareinlagen.

3.3. Der Summen-Geldmengenindex

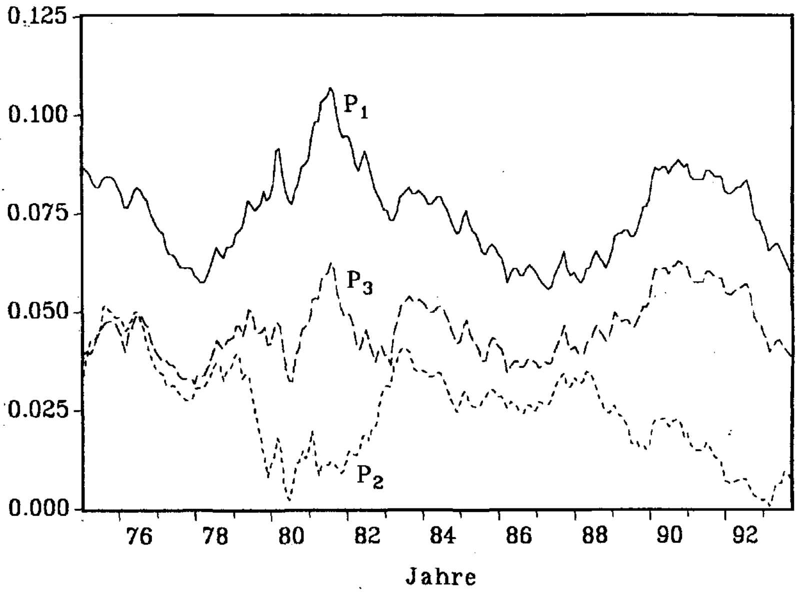
Die von der Bundesbank bisher berechneten Geldmengenaggregate entsprechen der Summe einzelner Zahlungsmittelbestände M_l,

---

48 Die verwendeten Reihen tragen auf der Datenbank der Bundesbank folgende Kennungen: Umlaufsrendite = WU 0017, Habenzins Termineinlagen = SU 0016, Habenzins Spareinlagen = SU 0022.

49 Vgl. Tödter [1993], S. 7.

Schaubild 1: Die Nutzungskosten der Zahlungsmittel M_1, M_2 und M_3



$$SML_t = \sum_{l=1}^{L} M_{l,t}$$ [50]

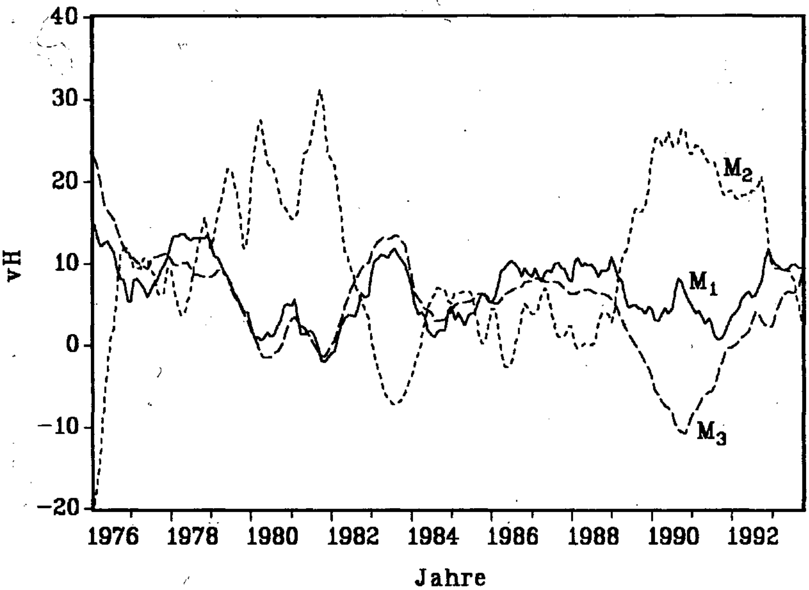
Die Zuwachsrate des Summenindexes entspricht den mit den Anteilen einzelner Zahlungsmittelbestände an dem Summenaggregat der Vorperiode gewichteten Zuwachsraten der M_l.

Wie Schaubild 2 zeigt, schwankt die Zuwachsrate von M_2 am stärksten. Auffällig ist weiter die gegenläufige Entwicklung von M_2 auf der einen sowie von M_1 und M_3 auf der anderen Seite in Phasen betont restriktiver oder expansiver Geldpolitik. Die Termineinlagen expandieren beispielsweise von 1979 bis 1981 äußerst stark, was in erster Linie auf den Rückgang der Nutzungskosten P_2 zurückgehen dürfte. Demgegenüber sanken in dieser Phase die Zuwachsraten von M_1 und M_3. Wegen dieser gegenläufigen Entwicklung schwankt die Zuwachsrate von $SM3$ deutlich geringer als die von $SM1$.

---

50 Zur Notation vgl. Abschnitt 2.1.

Schaubild 2: Zahlungsmittelbestände M_1, M_2 und M_3 (Veränderung gegenüber Vorjahr in vH)



3.4. Der Cobb-Douglas-Geldmengenindex

Wegen der Annahme rekursiv-separabler Nutzenfunktionen[51] schätzt man zunächst die Parameter eines Cobb-Douglas-$M2$-Geldmengenindex ($CM2$) gemäß (21). Als Schätzgleichungen erhält man (Schätzzeitraum 75:02 bis 93:10, Methode der kleinsten Quadrate):

$$\frac{P_{1,t}M_{1,t}}{\sum_{l=1}^{2} P_{l,t}M_{l,t}} = \underset{(203{,}41)}{0{,}8378} \quad , \mathrm{DW} = 0{,}043 \qquad \frac{P_{2,t}M_{2,t}}{\sum_{l=1}^{2} P_{l,t}M_{l,t}} = \underset{(39{,}37)}{0{,}1622} \quad , \mathrm{DW} = 0{,}043,$$

t-Werte in Klammern.

51 Vgl. Abschnitt 2.1.

Die *KQ*-Schätzwerte entsprechen dem arithmetischen Mittel der Ausgabenanteile von M_1 bzw. M_2. Obwohl die Ausgabenanteile nicht zufällig um ihre Mittelwerte schwanken und somit Autokorrelation vorliegt (niedriger DW-Wert), sind die *KQ*-Schätzwerte unverzerrt und konsistent. Sie werden deshalb als Parameter der Cobb-Douglas-Aggregationsfunktion verwendet:

$$CM2_t = M_{1,t}^{0,8378}\, M_{2,t}^{0,1622}.$$

Um *CM*2 mit *SM*2 vergleichen zu können, wird *CM*2 im Februar 1975 auf den Wert von *SM*2 normiert. Nachfolgende Werte für *CM*2 werden mit Hilfe der Zuwachsraten der nicht normalisierten Reihe berechnet.

Für den impliziten Index der Nutzungskosten von *CM*2 gilt:

$$CP2 = \left(\sum_{l=1}^{2} P_{l,t} M_{l,t}\right) \Big/ CM2.$$

Weil die Nutzenfunktionen annahmegemäß rekursiv-separabel sind, werden die Werte für *CM*2 und *CP*2 als Instrumentvariable zur Berechnung der Parameter eines Cobb-Douglas-M3-Geldmengenindex, *CM*3, benutzt. Für den Zeitraum 75:02 bis 93:10 ergeben sich folgende Schätzgleichungen:

$$\frac{CP2_t CM2_t}{CP2_t CM2_t + P_{3,t} M_{3,t}} = 0,6335, \quad DW = 0,124 \quad \text{und}$$

$$\frac{P_{3,t} M_{3,t}}{CP2_t CM2_t + P_{3,t} M_{3,t}} = 0,3665, \quad DW = 0,124.$$

Für *CM*3 gilt:

$$CM3_t = CM2_t^{0,6335}\, M_{3,t}^{0,3665}.$$

3.5. Der CES-Geldmengenindex

Ausgangspunkt der Schätzung ist (29). Wegen der Annahme der rekursiven Separabilität werden nur jeweils zwei Zahlungsmittelbestände aggregiert; Systemschätzungsverfahren müssen also nicht angewandt werden. Die *KQ*-

Schätzgleichung zur Berechnung des *CES-M2*-Indexes (*CESM2*) lautet (Schätzzeitraum: 75:2 bis 93:10):

$$\ln\left(\frac{M_{2,t}}{M_{1,t}}\right) = \underset{(-36{,}92)}{-0{,}7242} \quad \underset{(-14{,}30)}{-0{,}1895} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$

$R^2 = 0{,}4784$, DW = 0,134, t-Werte in Klammern.

Mit Blick auf (29) läßt sich β, der Krümmungsparameter der *CES*-Aggregationsfunktion, aus dem geschätzten Koeffizienten von $\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ bestimmen:

$$\beta = \frac{1-0{,}1895}{-0{,}1895} = -4{,}2775.$$

Für die Substitutionselastizität gilt gemäß (23): $\sigma_{M_1,M_2} = \frac{1}{1+4{,}2775} = 0{,}1895.$

Normiert man α_1 auf Eins, so errechnet sich α_2 als:

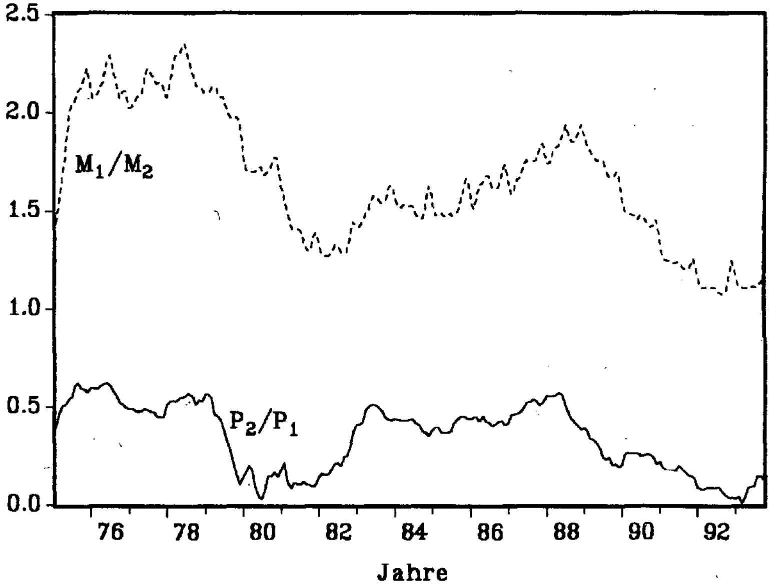
$$\alpha_2 = e^{(+0{,}7242(-4{,}2775-1))} = 0{,}0219.$$

$\sigma_{M1\,M2}$ besitzt das von der Theorie geforderte nicht-negative Vorzeichen. Der Wert liegt jedoch deutlich unter Eins. Steigt das Verhältnis gebildet aus den Opportunitätskosten für $M2$ und $M1$, $\frac{P_2}{P_1}$ — etwa durch einen Rückgang der Habenzinsen für Termineinlagen — um 1 vH, so steigt das Verhältnis von $M1$ und $M2$ um 0,19 vH. Daß eine positive Substitutionselastizität zwischen $M1$ und $M2$ existiert, zeigt auch der graphische Befund (Schaubild 3). Allerdings scheinen die Wirtschaftssubjekte leicht verzögert auf Opportunitätskostenveränderungen zu reagieren.

Die Formel für den *CES-M2*-Index lautet:

$$CESM2_t = \left[M_{1,t}^{-4{,}2775} + 0{,}022 \cdot M_{2,t}^{-4{,}2775}\right]^{-0{,}2338}.$$

Schaubild 3: Opportunitätskostenverhältnis P_2/P_1 und Zahlungsmittelverhältnis M_1/M_2



Um *CESM*2 mit *SM*2 vergleichbar zu machen, wird *CESM*2 im Februar 1975 gleich *SM*2 gesetzt. Nachfolgende Werte für *CESM*2 werden mit Hilfe der Zuwachsraten der nicht normalisierten Reihe berechnet.

Für den impliziten Index der Nutzungspreise von *CESM*2 gilt:

$$CESP2_t = \left(\sum_{l=1}^{2} M_{l,t} P_{l,t} \right) \Big/ CESM2_t .$$

Die Werte für *CESM*2 und *CESP*2 wurden benutzt, um die Parameter eines *CESM*3-Indexes nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate zu schätzen (Schätzzeitraum 75:2 bis 93:10):

$$\ln\left(\frac{M_{3,t}}{CESM2_t}\right) = \underset{(-52{,}97)}{-0{,}5070} \quad \underset{(-18{,}32)}{-0{,}7633} \ \ln\left(\frac{P_{3,t}}{CESP2_t}\right).$$

$R^2 = 0{,}6007$, DW = 0,1056.

Die trotz Autokorrelation unverzerrten und konsistenten Parameterschätzwerte werden zur Ableitung der Parameter der *CES*-Aggregationsfunktion herangezogen:

$$\beta = \frac{1-0,7633}{-0,7633} = -0,3101.$$

Die Substitutionselastizität läßt sich bestimmen als

$$\sigma_{CESM2,M_3} = \frac{1}{1+0,3101} = 0,7633.$$

Setzt man α_{CESM2} auf Eins, so ergibt sich für $\alpha_3 = e^{[+0,5070(-0,3101-1)]} = 0,5147.$

Es ergibt sich folgende Formel für *CES-M*2:

$$CESM3_t = \left[CESM2_t^{-0,3101} + 0,5147 \cdot M_{3,t}^{-0,3101}\right]^{-3,2246}.$$

Der Startwert wird wiederum auf *SM*3 normiert.

3.6. Der Törnqvist-Geldmengenindex

In Abschnitt 2.4.3. wurden nur die Zahlungsmittel zweier Perioden miteinander verglichen. Eine Zeitreihe eines Törnqvist-Geldmengen-Index (TML) läßt sich gemäß des Verkettungsprinzips berechnen als

$$TML_t = TML_{t-1} \prod_{l=1}^{L} \left[M_{l,t} / M_{l,t-1}\right]^{\frac{1}{2}\left[s_{l,t}+s_{l,t-1}\right]}, \text{ mit } s_{l,t} = \frac{M_{l,t}P_{l,t}}{\sum_{l=1}^{L} M_{l,t}P_{l,t}}.$$

Wegen der unterstellten rekursiven Separabilität wird zunächst $TM2_t$ bestimmt als

$$TM2_t = TM2_{t-1} \prod_{l=1}^{2} \left[M_{l,t} / M_{l,t-1}\right]^{\frac{1}{2}\left[s_{l,t}+s_{l,t-1}\right]},$$

mit $s_{l,t} = \dfrac{M_{l,t}\, P_{l,t}}{\sum\limits_{l=t}^{2} M_{l,t}\, P_{l,t}}$.

Um den Törnqvist-Index mit dem offiziellen Summenaggregat *SM*2 vergleichen zu können, wird der Startwert von *TM*2 im Februar 1975 dem Wert des entsprechenden Summenaggegats *SM*2 gleichgesetzt. Ist *TM*2 bestimmt, läßt sich der implizite Index der Nutzungskosten von *TM*2 berechnen:

$$TP2_t = \left(\sum_{l=1}^{2} M_{l,t}\, P_{l,t} \right) \Big/ TM2_t .$$

Mit Hilfe von *TM*2 und *TP*2 wird *TM*3 berechnet:

$$TM3_t = TM3_{t-1} \left[\frac{TM2_t}{TM2_{t-1}} \right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{TM2_t\, TP2_t}{TM2_t\, TP2_t + M_{3,t} P_{3,t}} + \frac{TM2_{t-1} TP2_{t-1}}{TM2_{t-1} TP2_{t-1} + M_{3,t-1} P_{3,t-1}} \right]}$$

$$\left[\frac{M_{3,t}}{M_{3,t-1}} \right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{M_{3,t} P_{3,t}}{TM2_t TP2_t + M_{3,t} P_{3,t}} + \frac{M_{3,t-1} P_{3,t-1}}{TM2_{t-1} TP2_{t-1} + M_{3,t-1} P_{3,t-1}} \right]},$$

wobei der Startwert von *TM*3 auf den entsprechenden Wert von *SM*3 normiert wird.

3.7. Der Fisher-Geldmengenindex

Der Fisher-*M*2-Geldmengenindex läßt sich bei Anwendung des Verkettungsprinzips berechnen als

$$FM2_t = FM2_{t-1} \left(\frac{\left(\sum\limits_{l=1}^{2} P_{l,t-1} M_{l,t} \right) \left(\sum\limits_{l=1}^{2} P_{l,t} M_{l,t} \right)}{\left(\sum\limits_{l=1}^{2} P_{l,t-1} M_{l,t-1} \right) \left(\sum\limits_{l=1}^{2} P_{l,t} M_{l,t-1} \right)} \right)^{1/2},$$

wobei der Wert des Fisher-Indizes im Februar 1975 auf den des $M2$-Summenindex normiert ist.

Für den impliziten Index der Nutzungskosten von $FM2$ gilt:

$$FP2_t = \left(\sum_{l=1}^{2} P_{l,t} M_{l,t} \right) \Big/ FM2_t .$$

Die Formel für den Fisher-$M3$-Geldmengenindex lautet:

$$FM3_t = FM3_{t-1} \left(\frac{\left(FP2_{t-1} FM2_t + P_{3,t-1} M_{3,t}\right)\left(FP2_t FM2_t + P_{3,t} M_{3,t}\right)}{\left(FP2_{t-1} FM2_{t-1} + P_{3,t-1} M_{3,t-1}\right)\left(FP2_t FM2_{t-1} + P_{3,t} M_{3,t-1}\right)} \right).$$

3.8. Vergleich alternativer Geldmengenaggregate

Zunächst werden die zinsgewichteten Geldmengenaggregate miteinander verglichen. Dazu werden getrennt für beide Aggregationsniveaus Korrelationskoeffizienten zwischen den Zuwachsraten je zweier zinsgewichteter Geldmengenaggregate berechnet (Tabellen 1 und 2). Auf beiden Aggregationsniveaus ergibt sich zwischen den Zuwachsraten des Törnqvist- und des Fisher-Indexes ein Korrelationskoeffizient von 1. In den einzelnen Monaten unterscheiden sich die Werte der Niveaus der beiden statistischen monetären Indizes nur im Nachkomma-Bereich. Dies liegt daran, daß beide Indizes superlativisch sind. Für empirische Zwecke ist es also unerheblich, welchen superlativischen Index man im einzelnen wählt.

Tabelle 1 — Korrelationskoeffizienten zwischen den Zuwachsraten (Vorjahresvergleich) je zweier Geldmengenaggregate – Aggregationsniveau 2 (Berechnungszeitraum 76:2–93:10)

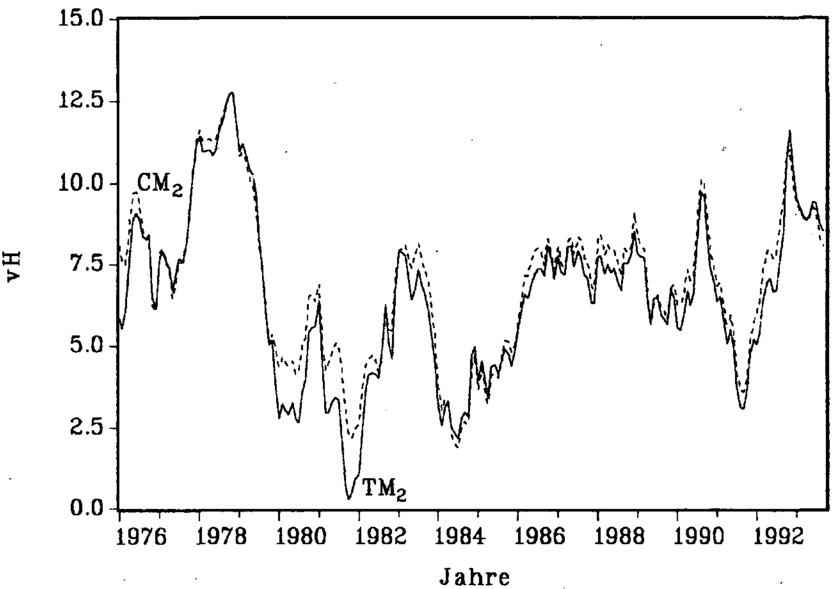
	TM2	FM2	CM2	CESM2
TM2	1,00			
FM2	1,00	1,00		
CM2	0,98	0,98	1,00	
CESM2	0,92	0,92	0,92	1,00

Tabelle 2 — Korrelationskoeffizienten zwischen den Zuwachsraten (Vorjahresvergleich) je zweier Geldmengenaggregate – Aggregationsniveau 3 (Berechnungszeitraum 76:2–93:10)

	TM3	FM3	CM3	CESM3
TM3	1,00			
FM3	1,00	1,00		
CM3	0,99	0,99	1,00	
CESM3	0,97	0,97	0,98	1,00

Der zweithöchste Korrelationskoeffizient ist zwischen dem Cobb-Douglas-Aggregat auf der einen sowie dem Törnqvist- und dem Fisher-Index auf der anderen Seite zu beobachten. Auf dem Aggregationsniveau 2 ist die Beziehung nicht ganz so eng. Vor allem in den Jahren 1980 und 1981 lag die Zuwachsrate von *TM*2 deutlich unterhalb der von *CM*2 (Schaubild 4). Dies läßt sich folgen-

Schaubild 4: Cobb-Douglas-*M*2 und Törnqvist-*M*2 (Veränderung gegenüber Vorjahr in vH)



dermaßen erklären: Bedingt durch eine kontraktive Geldpolitik stiegen in dieser Periode die Termingeldsätze im Verhältnis zur Umlaufsrendite stark an, sanken die Nutzungskoten P_2, so daß Termineinlagen M_2 kräftig expandierten. Deren Zuwachs wird nun im Törnqvist-Index u.a. mit den Nutzungskosten der einzelnen Monate gewogen, die in dieser Periode sehr niedrig waren. Deshalb wirkt sich der Anstieg der Termineinlagen im Törnqvist-Index geringer aus als im Cobb-Douglas-Index, bei dem die Zuwachsrate der Termineinlagen u.a. mit den über den gesamten Beobachtungszeitraum arithmetisch gemittelten Nutzungskosten, die oberhalb der in den Jahren 1980/81 beobachtbaren lagen, gewogen wurde. Der Törnqvist-Index reagiert wegen seiner zeitvariablen Gewichte also etwas stärker auf geldpolitische Kursänderungen als Aggregate mit im Zeitablauf konstanten Gewichten.

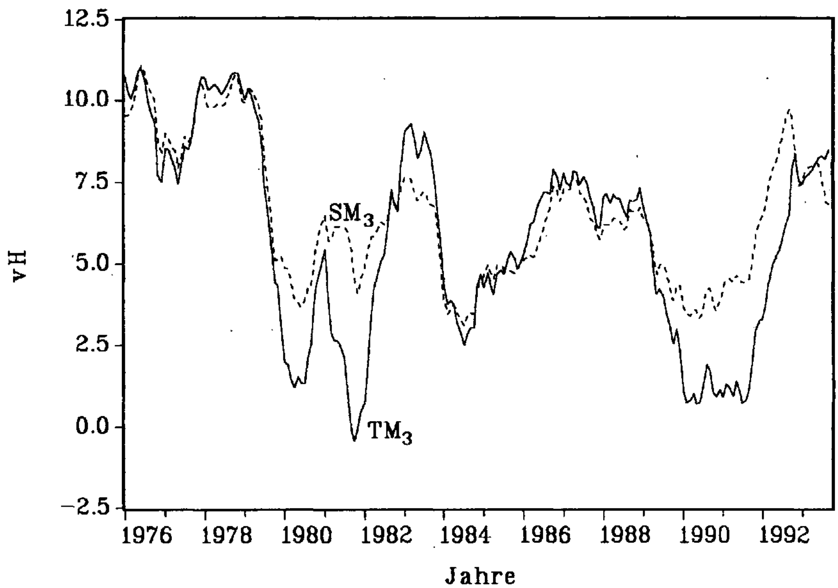
Geringere Korrelationskoeffizienten als zwischen den bisher besprochenen Aggregaten wurden zwischen dem *CES*-Aggregat auf der einen sowie dem Törnqvist- und dem Cobb-Douglas-Aggregat gemessen. Wegen der starken Variabilität der Termineinlagen sind die Unterschiede wiederum auf der zweiten Aggregationsebene am sichtbarsten. Zu erwarten wäre gewesen, daß *CES*-Aggregate eine engere Beziehung zu Törnqvist- bzw. Fisher-Indizes aufweisen als Cobb-Douglas-Aggregate, weil die bei der Verwendung von Cobb-Douglas-Funktionen getroffene Annahme konstanter Substitutionselastizitäten von 1 im Vergleich zur flexiblen Aggregationsfunktion, aus der sich der Törnqvist- bzw. Fisher-Index ableiten läßt, restriktiver ist als die Annahme konstanter Substitutionselastizitäten beliebiger Höhe im Fall von *CES*-Aggregaten.

Vergleicht man die zinsgewichteten Geldmengen mit den Summenaggregaten (Tabelle 3), so fällt auf, daß die Zuwachsraten der zinsgewichteten Aggregate mit denen von *SM*2 gering korreliert sind. Dagegen weisen sie sowohl bezüglich *SM*1 als auch bezüglich *SM*3 einen deutlich engeren Zusammenhang auf. Dabei sind die Korrelationskoeffizienten zwischen den Zuwachsraten von *SM*1 und *SM*3 auf der einen und denen der zinsgewichteten Aggregate des Aggregationsniveaus 3 auf der anderen Seite höher als im Fall zinsgewichteter Aggregate des Niveaus 2. Am Beispiel des Törnqvist-Index wird im folgenden beschrieben, wie der Zusammenhang mit den Zuwachsraten von *SM*1 und *SM*3 in unterschiedlichen geldpolitischen Phasen aussieht. In Phasen, in denen sich die Nutzungskosten wenig ändern, stimmen die Zuwachsraten von *TM*3 und *SM*3 weitgehend überein (Schaubild 5). In geldpolitischen Restriktionsphasen wie

Tabelle 3 — Korrelationskoeffizienten zwischen den Zuwachsraten (Vorjahresvergleich) von Summen- und zinsgewichteten Geldmengenaggregaten (Berechnungszeitraum 76:2–93:10)

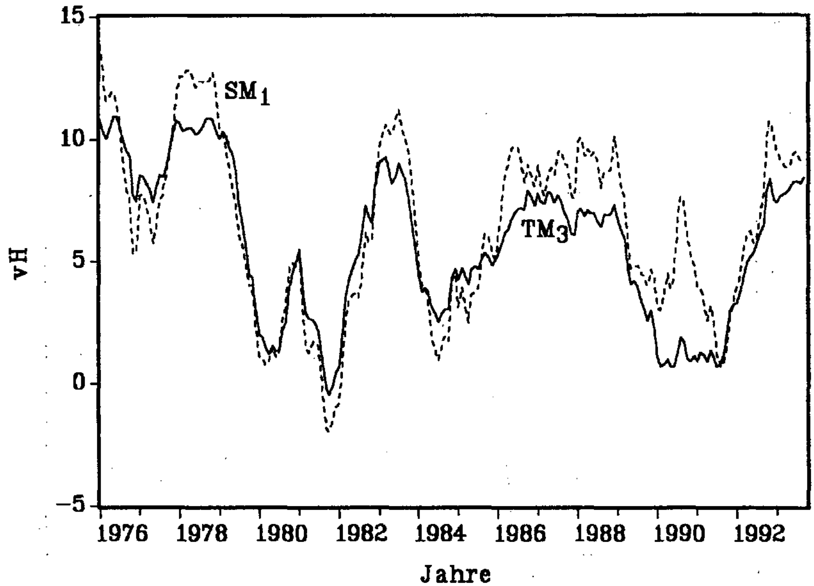
	SM1	SM2	SM3
SM2	0,02	1,00	0,27
TM2	0,87	0,45	0,74
FM2	0,87	0,45	0,74
CM2	0,88	0,50	0,76
CESM2	0,82	0,38	0,67
SM3	0,74	0,27	1,00
TM3	0,90	–0,10	0,88
FM3	0,90	–0,10	0,88
CM3	0,90	–0,10	0,89
CESM3	0,86	–0,14	0,83

Schaubild 5: Törnqvist-M3 und Summen-M3 (Veränderung gegenüber Vorjahr in vH)



1980/81 und zu Beginn der 90er Jahre, in denen die Nutzungskosten der Termineinlagen stark sinken, liegen die Zuwachsraten von *TM*3 deutlich unter denen von *SM*3. In solchen geldpolitischen Umbruchphasen stimmen die Zuwachsraten von *TM*3 eher mit denen von *SM*1 überein (Schaubild 6). Insbesondere die zinsgewichteten Geldmengenaggregate auf dem Aggregationsniveau 3 vereinigen also Eigenschaften von *SM*1 und *SM*3 miteinander. Erklären läßt sich dies damit, daß die in geldpolitischen Restriktionsphasen starken Zuwächse der Termineinlagen bei der Berechnung zinsgewichteter Geldmengenaggregate im Gegensatz zu der bei Summenaggregaten mit geringem Gewicht eingehen und somit vor allem Bargeld und Sichteinlagen den Verlauf zinsgewichteter Geldmengenaggregate bestimmen. Zinsgewichtete Aggregate reagieren somit deutlich stärker auf eine restriktive Notenbankpolitik als *SM*3.

Schaubild 6: Törnqvist-*M*3 und Summen-*M*1 (Veränderung gegenüber Vorjahr in vH)



4. Geldpolitische Implikationen

Zinsgewichtete Geldmgenenaggregate expandieren in geldpolitischen Restriktionsphasen deutlich langsamer als Summenaggregate. Dies könnte zu folgendem Schluß verleiten: Würde die Bundesbank im Rahmen einer potentialorientierten Geldpolitik anstelle von *SM*3 zinsgewichtete Aggregate steuern, so reichten in Phasen, in denen *SM*3 über sein potentialgerechtes Niveau zu steigen droht, niedrigere Zinsanhebungen aus. Eine an zinsgewichteten Geldmengenaggregaten orientierte Geldpolitik setzt allerdings voraus, daß diese Aggregate — wie es im Falle von *SM*3 als erwiesen gilt[52] — das Preisniveau in der Grundtendenz erklären können und somit als geldpolitisches Zwischenziel geeignet sind.

52 Vgl. etwa Scheide [1993].

Literaturverzeichnis

ALLEN, R.G.D. [1949]: The economic theory of index numbers. Economica, Vol. 16, S. 197 - 203.

ALLEN, R.G.D. [1975]: Index numbers in theory and practice. London.

BARNETT, W.A. [1978]: The user cost of money. Economics Letters, Vol. 1, S. 145 - 149.

BARNETT, W.A. [1980]: Economic monetary aggregates, an application of index number and aggregation theory. Journal of Econometrics, Vol. 14, S. 11 - 48.

BARNETT, W.A. [1982]: The optimal level of monetary aggregation. Journal of Money, Credit, and Banking, Vol. 14, S. 687 - 710.

BARNETT, W.A., SPINDT, P.A., OFFENBACHER, E.K. [1981]: Empirical comparisions of divisia and simple sum monetary aggregates. Special studies paper, division of research and statistics, Federal Reserve Board, Washington DC, Nr. 158.

BARNETT, W.A., FISHER, D., SERLETIS, A. [1992]: Consumer theory and the demand for money. Journal of Economic Literature, Vol. 30, S. 2086 - 2119.

CHETTY, V.K. [1969]: On measuring the nearness of near-monies. American Economic Review, Vol. 59. S. 270 - 281.

CHRISTENSEN, L.R., JORGENSON, D.W., LAU, L.J. [1971]: Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function, Econometrica, Vol. 39, S. 255 - 256.

COBB, C.W., DOUGLAS, P.H. [1928]: A theory of production. American Economic Review, Papers and Proceedings, Vol. 18. S. 139 - 165.

DEATON, A., MUELLBAUER, J. [1980]: Economics and consumer behavior. Cambridge, Mass.

DIEWERT, W.E. [1974]: Functional forms for revenue and factor requirements functions. International Economic Review, Vol. 15, S. 119 - 130.

DIEWERT, W.E. [1976]: Exact and superlative index numbers. Journal of Econometrics, Vol. 4, S. 115 - 145.

DIEWERT, W.E. [1980]: The economic theory of index numbers, a survey. In: Deaton, A.S. (ed): Essays in the theory and measurement of consumer behavior. Cambridge, S. 163 - 208.

DIEWERT, W.E. [1987]: Index numbers. In: Eatwell, J. et al (eds): The new palgrave, a dictionary of economics. Vol. 2, S. 767 - 780.

DHRYMES, P.J., KURZ, M. [1964]: Technology and scale in electricity generation. Econometrica, Vol 32, S. 287 - 315.

FISHER, I. [1923]: The making of index numbers, a study of their varieties, tests, and reliability. 2nd ed. rev., Cambridge, Mass.

GREEN, H.A.J. [1964]: Aggregation in economic analysis. Princeton.

HOTELLING, H. [1935]: Demand functions with limited budgets. Econometrica, Vol 3, S. 66 - 78.

HULTEN, C.R. [1987]: Divisia index. In: Eatwell, J. et al (eds): The new palgrave, a dictionary of economics. Vol. 1, S. 899 - 901.

ISSING, O., TÖDTER, K.H., REIMERS, H.E. [1993]: Zinsgewichtete Geldmengenaggregate und M3 - ein Vergleich. Kredit und Kapital, Vol. 26, S. 1 - 21.

LAU, L.J. [1974]: Applications of duality theory, comments. In: Intriligator, M.D., Kendrick, D.A. (eds): Frontiers of Quantitative Economics, Vol. 2, S. 176 - 199.

LAU, L.J. [1986]: Functional forms in econometric model building. In: Griliches, Z., Intriligator, M.D. (eds): Handbook of Econometrics, Vol. III, S. 1515 - 1566.

PEARCE, I.F. [1964]: A contribution to demand analysis. London.

SAMUELSON, P.A., SWAMY, S. [1974]: Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis. American Economic Review, Vol. 64, S. 566 - 593.

SCHEIDE, J. [1993]: Geldmenge, Einkommen und Preisniveau: Wie stabil ist der Zusammenhang nach der deutschen Wiedervereinigung?. Institut für Weltwirtschaft, Kieler Arbeitspapier Nr. 582.

SCHUMANN, J. [1987]: Grundzüge der mikroökonomischen Theorie. 5. Aufl., Berlin etc.

SERLETIS, A. [1991]: The demand for divisia money in the United States: A dynamic flexible demand system. Journal of Money, Credit, and Banking, Vol. 23, S. 35 - 52.

TÖDTER, K.H. [1993]: Eine transaktionsorientierte Geldmenge. Diskussionspapier anläßlich des Symposiums zur "Geldnachfrage nach der deutschen Vereinigung", Frankfurt.

TÖRNQVIST, L. [1936]: The bank of Finland's consumption price index. Bank of Finland, monthly bulletin, Nr. 10, S. 27 - 34. Wiederabgedruckt in: Törnqvist, L. [1981]: Collected scientific papers of Leo Törnqvist, Helsinki, S. 113 - 120.

UZAWA, H. [1962]: Production functions with constant elasticities of substitution. Review of Economic studies, Vol. 29, S. 291 - 299.