

ESTIMAÇÃO DE VOLATILIDADE EM PERÍODOS DE CRISE: MODELOS ADITIVOS SEMI-PARAMÉTRICOS VERSUS MODELOS GARCH

Douglas G. Santos*
Flávio A. Ziegelmann**

RESUMO

A estimação e previsão da volatilidade de ativos são de suma importância para os mercados financeiros. Temas como risco e incerteza na teoria econômica moderna incentivaram a procura por métodos capazes de modelar uma variância condicional que evolui ao longo do tempo. O objetivo deste artigo é comparar alguns métodos de regressão global e local quanto à extração da volatilidade do Índice Bovespa. Para isto, são realizadas estimações e previsões com os modelos GARCH paramétricos e com os modelos aditivos semi-paramétricos. A realização das comparações ocorre em períodos selecionados de alta volatilidade no mercado financeiro internacional (crises), sendo a performance dos modelos medida dentro e fora da amostra. Os resultados encontrados sugerem a capacidade dos modelos semi-paramétricos em estimar e prever a volatilidade dos retornos do índice nos momentos analisados.

Palavras chave: Volatilidade; modelos aditivos; regressão polinomial local; modelos GARCH; crise.

Classificação no JEL: C14; G10.

ANPEC - ÁREA 7: Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças.

ABSTRACT

Volatility estimation and forecasting are very important matters for the financial markets. Themes like risk and uncertainty in modern economic theory have encouraged the search for methods that allow for the modeling of time varying variances. The objective of this paper is to compare global and local regressions in terms of their capacity to extract the volatility of Bovespa Index. To achieve this aim, parametric GARCH and semiparametric additive models estimation and forecasting are performed. Comparisons are made in selected periods of high volatility in the international financial market (crisis), measuring the models' performance inside and outside sample. The results that were found suggest the capacity of semiparametric models to estimate and forecast the index returns' volatility at the analyzed moments.

Keywords: Volatility; additive models; local polynomial regression; GARCH models; crisis.

JEL Classification: C14; G10.

1 Introdução

Em razão da relevância de temas como risco e incerteza na teoria econômica moderna, foram propostos na literatura métodos capazes de modelar uma variância condicional que evolui ao longo do tempo. Neste contexto, o modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedastic*) difundido a partir do artigo seminal de Engle (1982), e sua versão generalizada (GARCH) proposta por Bollerslev (1986), destacam-se por sua ampla utilização. A principal característica apresentada pelos modelos GARCH se encontra na diferenciação entre os momentos de segunda ordem, não condicionais e condicionais. A volatilidade condicional é definida pela variância condicionada ao conjunto de informações disponíveis. Desta maneira, assume-se a variância não condicional como invariante (constante), ao passo que a volatilidade condicional (estocástica) é modelada como uma variável aleatória. Salienta-se que uma forma de obter medidas para o risco e a incerteza (inerentes aos mercados financeiros) costuma se dar a partir da volatilidade dos retornos. Inúmeras pesquisas foram realizadas com os modelos GARCH nos últimos vinte e seis anos, levando a diversas inovações nos mesmos. Estas inovações visam (em sua maioria) a descrever de forma mais apropriada as regularidades empíricas em séries de tempo financeiras.

Em relação aos modelos não paramétricos, a principal motivação para se trabalhar com os mesmos apresenta-se quando o pesquisador não possui conhecimento suficiente sobre o processo gerador

* Programa de Pós-Graduação em Economia (UFRGS)

** Departamento de Estatística e Programa de Pós-Graduação em Economia (UFRGS). Department of Statistics (LSE-UK)

explicativo, permitindo desta forma que os dados “falem por si mesmos”. Assim, parte-se para a análise dos dados supondo-se modelos menos rígidos. A única condição que deve ser especificada para os estimadores não paramétricos está relacionada à definição de um certo grau de suavidade para as funções estimadas. Portanto, pode-se dizer que a principal vantagem dos modelos não paramétricos está relacionada a sua flexibilidade e à conseqüente diminuição do risco de errar na especificação do modelo. Contudo, os custos desta maior flexibilidade se apresentam em taxas de convergência mais lentas, perda do poder de extrapolação e o problema da dimensionalidade (ZIEGELMANN, 2002a).

Sob o enfoque multivariado, onde há a presença de mais de uma variável defasada na regressão, o modelo saturado (ou totalmente não paramétrico) destaca-se como a opção mais flexível na redução do viés de especificação. Todavia, ressalta-se que problemas relacionados a espaços de alta dimensão são freqüentes e recebem o nome de problema da dimensionalidade (*curse of dimensionality*). Este leva à perda da noção de vizinhança local, essencial em modelagem não paramétrica, o que abre espaço para o uso de modelos semi-paramétricos. Os últimos, por sua vez, impõem algum tipo de restrição nas funções estimadas. Por essa razão, são mais rígidos que o modelo não paramétrico saturado, mas substancialmente mais flexíveis que os paramétricos.

O modelo aditivo semi-paramétrico, amplamente discutido em Hastie e Tibshirani (1990), é apresentado como alternativa ao problema da dimensionalidade. Neste, a idéia é modelar funções univariadas de forma aditiva, abandonando-se o pressuposto da linearidade definido no modelo de regressão linear paramétrico. A motivação principal de um modelo aditivo é a de permitir que componentes do modelo de regressão assumam formas não paramétricas. Estes superam o problema em espaços de alta dimensão devido ao sistema de ajuste ser construído a partir de suavizadores univariados. Nota-se ainda que as suposições sobre o erro do modelo são substancialmente relaxadas. Os modelos aditivos podem ser definidos de forma a representar estruturas similares a um modelo ARCH.

O objetivo deste artigo é comparar alguns métodos de regressão global e local quanto à extração da volatilidade do Índice Bovespa (Ibovespa). Para tanto, são realizadas estimações e previsões com os modelos GARCH e com os modelos aditivos semi-paramétricos. Os primeiros são tradicionalmente utilizados na estimação de segundos momentos condicionais, tendo sua capacidade sugerida em diversos trabalhos (ISSLER, 1999; MORAIS; PORTUGAL, 1999; PEREIRA *et al.*, 1999). Já os modelos aditivos provêm alta flexibilidade e descrições visualmente informativas das relações entre as variáveis envolvidas, tais como assimetrias e não linearidades. Dentre as referências que utilizam os modelos aditivos (ou sua versão generalizada) na estimação de volatilidade, pode-se citar Kim e Linton (2004), Levine e Li (2007), e Ziegelmann (2002a). Neste trabalho utiliza-se uma série de retornos diários, representativa do Índice Bovespa. A realização das comparações ocorre em períodos selecionados de alta volatilidade no mercado financeiro internacional (crises), onde a performance dos modelos é medida dentro e fora da amostra. O restante do artigo é estruturado da seguinte forma: a seção 2 engloba o método não paramétrico de estimação via regressão polinomial local e, principalmente, os modelos aditivos; a seção 3 contempla a análise e comparação dos modelos em períodos de crise financeira; e, por fim, as considerações finais são reunidas na seção 4.

2 Métodos Não Paramétricos

A literatura reúne distintos métodos não paramétricos para se modelar as estruturas explicativas, dentre eles, podem ser citados a suavização *kernel* e *splines*. As técnicas de suavização *kernel* podem ser encontradas em referências como Fan e Gijbels (1996), Bowman e Azzalini (1997), Ziegelmann (2002a) e em Fan e Yao (2003).

Dentro do arcabouço de regressão não paramétrica o estimador polinomial local de suavização *kernel* é amplamente utilizado. A partir deste método, estima-se a função de regressão em um ponto particular, ajustando localmente um polinômio de ordem p via mínimos quadrados ponderados. Na apresentação da técnica, considere os dados bivariados (Y_t, X_t) , onde no contexto de séries temporais X_t representa Y_{t-1} e T denota o número disponível de pares na amostra. A esperança condicional e a

variância condicional são definidas respectivamente como $m(x) = E(Y|X = x)$ e $\sigma^2(x) = \text{Var}(Y|X = x) > 0$. Supõe-se um modelo que relaciona as variáveis com a seguinte forma:

$$Y_t = m(X_t) + \sigma(X_t)\varepsilon_t, \quad (2.1)$$

onde $E(\varepsilon_t|X_t) = 0$ e $\text{Var}(\varepsilon_t|X_t) = 1$. Adicionalmente, $m'(z), m''(z), \dots, m^{(p)}(z)$ são as derivadas da função de regressão $m(z)$. Por meio de uma expansão de Taylor, para x na vizinhança local de x_0 , assumindo que a derivada de $m(x_0)$ de ordem $(p+1)$ existe, $m(x)$ pode ser escrita como:

$$m(x) = m(x_0) + m'(x_0)(x - x_0) + \frac{m''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{m^{(p)}(x_0)}{p!}(x - x_0)^p + O\{(x - x_0)^{p+1}\}, \quad (2.2)$$

ou seja, pode-se aproximar a função de regressão desconhecida $m(X_t)$ da equação (2.1) por um polinômio de ordem p . Considerando-se um ponto de interesse x no domínio da variável aleatória X , então pode-se definir o estimador polinomial local de $m(x)$ como $\hat{m}_p(x) = \hat{\beta}_0$, com $\hat{\beta}_0$ dado pela solução do problema de mínimos quadrados ponderados a seguir:

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p) = \arg \min_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p} \sum_{t=1}^T \left\{ Y_t - \sum_{i=0}^p \beta_i (X_t - x)^i \right\}^2 K_h(X_t - x), \quad (2.3)$$

onde $K(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade simétrica em \mathfrak{R} , $K_h(u) = (1/h)K(u/h)$, e $h > 0$ é o parâmetro de suavização ou janela (*bandwidth*). Quando $p=1$ obtém-se o estimador linear local. Ao invés do último, utiliza-se neste estudo (com $p=1$) o suavizador loess (*locally weighted smoother*) de Cleveland (1979), versão não robusta. Em loess, as vizinhanças locais são determinadas por uma janela com base em vizinhos próximos (*nearest neighbour bandwidth*). De forma complementar, $0 < f \leq 1$ exprime uma fração (*span*) dos dados (n) a serem incluídos em cada vizinhança, ao passo que, fn representa uma quantidade de observações. O termo f representa o parâmetro de suavização e deve ser definido pelo pesquisador.

Utilizando-se o estimador polinomial local, destaca-se que algumas escolhas devem ser realizadas, tais como: a ordem p do polinômio, a função peso (*kernel*) K e a janela h . Em relação à janela, a escolha mais importante das três, caso a mesma seja muito grande ($h = \infty$) o ajuste polinomial local se torna um ajuste polinomial global, legando a complexidade do modelo à especificação da ordem p do polinômio. No caso de uma janela igual a zero ($h = 0$), a estimativa obtida será uma interpolação dos dados. Assim, de forma distinta aos modelos paramétricos, a complexidade do ajuste polinomial local é primordialmente controlada pelo parâmetro de suavização (FAN; GIJBELS, 1996).

Os métodos para a escolha da janela podem ser separados em dois grupos. O primeiro é formado por métodos baseados em anexos (*plug-ins*), onde em linhas gerais, o viés de uma estimativa \hat{m} é escrito em termos da função m desconhecida, sendo geralmente aproximada por meio de uma expansão de Taylor. Uma estimativa de m é então anexada (*plugged-in*) para derivar uma estimativa do viés e, uma medida de ajuste, tal como o erro em média quadrática integrado (*MISE*). Desta maneira, escolhe-se uma janela ótima que minimize a medida de ajuste definida (LOADER, 1995). O segundo grupo constitui-se de métodos clássicos, derivados em certa forma dos procedimentos utilizados em regressão paramétrica, onde dentre os mesmos, tem-se: validação cruzada (*cross-validation*) e o critério de informação de Akaike (*AIC*)¹. O último método é utilizado neste trabalho em auxílio na escolha do *span*.

2.1 Estimação de Volatilidade

O método que será utilizado nas aplicações numéricas deste artigo é baseado nos resíduos, cujo nome é estimador residual da variância. Alguns autores como Ruppert, Wand, Holst e Hössjer (1997), Fan e Yao (1998) e Ziegelmann (2002b, 2008) apresentam diversas implementações sobre a

¹ Ver Hastie e Tibshirani (1990) para o critério de informação aproximado de Akaike.

técnica. Resumidamente, pode-se dizer que o método consiste em reescrever o modelo (2.1) como $Y_t - m(X_t) = \sigma(X_t)\varepsilon_t$, tal que tomando-se a esperança condicional dos resíduos ao quadrado, $r_t^2 = [Y_t - m(X_t)]^2 = \sigma^2(X_t)\varepsilon_t^2$, obtém-se $E(r_t^2 | X_t) = \sigma^2(X_t)$. Assim, pode-se estimar $\sigma^2(X_t)$ a partir de uma regressão de \hat{r}_t^2 contra X_t , onde $\hat{r}_t^2 = Y_t - \hat{m}(X_t)$. A prova da normalidade assintótica deste estimador é feita por Fan e Yao (1998), quando o estimador linear local é utilizado para o ajuste tanto de $m(x)$ quanto de $\sigma^2(x)$.

2.2 Regressão Múltipla e o Modelo Saturado

Para trabalhar com regressão múltipla, deve-se focar a atenção na relação estrutural entre a variável resposta Y e o vetor de covariáveis $(X_1, X_2, \dots, X_d)'$. Desta maneira, pode-se estender o modelo (2.1) ao caso multivariado, onde \mathbf{X} passa a ser um vetor de dimensão- d em \mathfrak{R}^d (em séries de tempo $\mathbf{X}_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-d})'$) e Y um escalar em \mathfrak{R} . Também, pode-se representar a esperança e a variância condicionais como $m(\mathbf{x}) = E(Y | \mathbf{X} = \mathbf{x})$ e $\sigma^2(\mathbf{x}) = \text{Var}(Y | \mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0$, respectivamente. O modelo (2.1) assume a forma:

$$Y_t = m(\mathbf{X}_t) + \sigma(\mathbf{X}_t)\varepsilon_t, \quad (2.4)$$

onde $E(\varepsilon_t | \mathbf{X}_t) = 0$ e $\text{Var}(\varepsilon_t | \mathbf{X}_t) = 1$.

Como principal desvantagem da regressão múltipla não paramétrica, pode-se citar o problema da dimensionalidade (*curse of dimensionality*). O problema está relacionado a escassez de dados em espaços de alta dimensão (BELLMAN, 1961), refletindo o fato de que uma vizinhança local em alta dimensão deixa de ser local, necessitando-se de uma vizinhança muito maior para conter um certo número suficiente de dados. Como resultado, necessita-se de muitas observações para somente um número moderado de dimensões (ZIEGELMANN, 2002a). As soluções para este problema costumam estar ligadas a algum mecanismo de redução de dimensão, como será apresentado a seguir com os modelos aditivos semi-paramétricos.

2.3 Modelos Aditivos

Para apresentar o modelo aditivo, considere primeiramente o modelo geral de regressão múltipla discutido em Fan e Gijbels (1996),

$$Y = m(\mathbf{X}) + \varepsilon, \quad (2.5)$$

onde $E(\varepsilon) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$ e ε é independente do vetor de covariáveis \mathbf{X} . No modelo de regressão linear múltipla a função de regressão $m(\cdot)$ é assumida como linear, e portanto, aditiva nas variáveis explicativas. Nos modelos aditivos, o pressuposto de linearidade é abandonado, mas a forma aditiva é mantida. A idéia de um modelo aditivo, como sugerido por Friedman e Stuetzle (1981) e substancialmente desenvolvido por Hastie e Tibshirani (1990), é a de permitir que componentes do modelo de regressão linear assumam formas não paramétricas (BOWMAN; AZZALINI, 1997), o que leva ao modelo:

$$Y = \alpha + \sum_{j=1}^d g_j(X_j) + \varepsilon, \quad (2.6)$$

onde g_1, \dots, g_d são funções univariadas desconhecidas. No sentido de evitar constantes livres nas funções e, para garantir a identificabilidade do modelo, é requerido que

$$E\{g_j(X_j)\} = 0, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.7)$$

Isto implica que $E(Y) = \alpha$ e, este modelo pode ser enquadrado como uma ferramenta de redução de dimensão. Quando o modelo aditivo é válido, tem-se que

$$E \left\{ Y - \alpha - \sum_{j \neq k} g_j(X_j) | X_k \right\} = g_k(X_k), \quad k = 1, \dots, d. \quad (2.8)$$

Surge então um algoritmo iterativo que permite o cálculo de cada função univariada g_1, \dots, g_d . Desta forma, para um dado α e para funções dadas $g_j, j \neq k$, a função g_k pode ser obtida através de uma simples regressão univariada baseada nas observações $\{(X_{ik}, Y_i) : i = 1, \dots, n\}$. O suavizador univariado de g_k é definido por S_k , onde nesta situação, qualquer técnica de suavização univariada pode ser utilizada, tal como *splines*, regressão polinomial local, entre outras. No sentido de respeitar a condição (2.7), a estimativa resultante $\hat{g}_k(\cdot)$ de $g_k(\cdot)$ obtida através do suavizador S_k , é substituída por sua versão centralizada:

$$\hat{g}_k^*(\cdot) = \hat{g}_k(\cdot) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{g}_k(X_{jk}). \quad (2.9)$$

Uma escolha inicial das funções univariadas, g_k^0 , torna-se necessária, tanto quanto o esquema de iteração. Este procedimento leva ao chamado *backfitting algorithm*, que segue os próximos passos:

- **Passo 1-** Inicialização: $\hat{\alpha} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$, $\hat{g}_k = g_k^0, k = 1, \dots, d$.
- **Passo 2-** Para cada $k = 1, \dots, d$, obter $\hat{g}_k = S_k \left\{ Y - \hat{\alpha} - \sum_{j \neq k} \hat{g}_j(X_j) | X_k \right\}$ e obter $\hat{g}_k^*(\cdot)$ como em (2.9).
- **Passo 3-** Manter rodando o passo 2 até convergir.

A idéia básica do algoritmo é a de através da regressão inicial, calcular os resíduos parciais desta, e regredir novamente. O termo *backfitting* se refere a esta ação e foi primeiramente utilizado por Friedman e Stuetzle (1981). O estimador $n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$ de α , no algoritmo acima, segue naturalmente o fato que $E(Y) = \alpha$. Ressalta-se que os modelos aditivos superam o “problema da dimensionalidade” devido ao sistema de ajuste ser construído a partir de suavizadores univariados. Para estimar a volatilidade, o modelo aditivo é construído da seguinte forma:

$$\sigma^2(\mathbf{X}_t) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i(X_{t-i}), \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-d+1})'$ é o vetor de covariáveis. Destaca-se que a última representação do modelo aditivo pode ser utilizada para ajustar de forma não paramétrica uma estrutura ARCH.

3 Aplicação Numérica: Crises de 2001, 2002 e 2007

Nesta seção as técnicas de regressão global e local são confrontadas. Para isto, seleciona-se uma série de tempo composta dos preços de fechamento diários, de um índice do mercado financeiro brasileiro, o Índice Bovespa. A modelagem é realizada a partir da série dos retornos diários do índice, definidos como $y_t = \ln X_t - \ln X_{t-1}$ (onde X_t é o preço do ativo no tempo t). Baseando-se na amostra completa dos retornos, são selecionados os modelos mais adequados para a estimação da volatilidade do Ibovespa. Após a escolha das estruturas, os modelos têm suas estimativas e previsões um passo à frente comparadas em períodos denominados de crise (alta volatilidade) no mercado financeiro internacional.

Para comparar a capacidade de extração da volatilidade dos modelos aditivos semi-paramétricos com os modelos GARCH, foram selecionados três anos com crises no mercado financeiro, sendo a análise delimitada aos momentos de alta volatilidade (crises) mais recentes, 2001, 2002 e 2007. Em uma breve contextualização dos períodos, concentra-se a atenção nos fatores que majoritariamente influenciaram o mercado financeiro.

Em 2001 a economia mundial foi marcada pela recessão nos Estados Unidos (EUA), que influenciou negativamente a dinâmica produtiva nos demais países. A economia norte-americana entrou em recessão a partir de março, segundo os critérios técnicos do National Bureau of Economic Research (NBER). O governo Republicano, em início de mandato, anunciou um programa de cortes de impostos e aumentos de gastos em estímulo à economia. Sob este cenário recessivo, novas propostas de gastos públicos foram enviadas ao Legislativo em decorrência dos atentados de 11 de setembro. Devido ao ataque terrorista, o mercado financeiro ficou fechado por quatro dias. Em sua reabertura, no dia 17 de setembro, os preços das ações caíram abruptamente nas principais bolsas de valores. Nas semanas posteriores ao atentado, observou-se muita volatilidade no mercado financeiro. Em setembro, o Nasdaq apresentou variação negativa de 16,9%, seguido pelo Dow Jones e pelo Standard and Poor's 500 (S&P500) que caíram 11,1% e 8,2%, respectivamente. A partir de outubro, os três índices apresentaram recuperação. Porém, o resultado anual do Dow Jones, do Nasdaq e do S&P500 foi negativo em 7,2%, 21,0% e 11,9%, respectivamente.

Na Bolsa de Valores de São Paulo, refletindo primordialmente os efeitos do atentado terrorista nos EUA, o Índice Bovespa atingiu 10.034 pontos em 14 de setembro. Este foi o menor nível registrado desde agosto de 1999. Neste cenário, o valor de mercado das companhias listadas na Bovespa atingiu US\$142,8 bilhões em setembro, representando uma queda de 36,7% no ano, resultado da combinação de queda nos preços dos papéis e depreciação cambial. Alinhado com o mercado financeiro internacional, o Índice Bovespa registrou variação negativa de 17,2% em setembro. Nos meses seguintes, com o baixo valor das empresas em dólares e a gradual mudança nas expectativas de mercado, os investimentos tornaram-se mais atraentes. Contudo, mesmo com a recuperação do Ibovespa ao final de 2001, o índice terminou o ano com variação negativa de 11,5%, no patamar de 13.509 pontos (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2002).

No ano de 2002 o desempenho da economia mundial esteve condicionado à evolução da economia norte-americana. A recuperação da economia dos Estados Unidos revelou-se menos acentuada do que sugeriam os resultados obtidos no início do ano, sendo que o crescimento real do PIB norte-americano em 2002 foi de 1,6%. Um fator relevante na análise de 2002 diz respeito às denúncias de fraudes contábeis em grandes corporações norte-americanas e européias (atreladas majoritariamente ao setor de alta tecnologia), que conduziram o mercado financeiro a um clima de elevada incerteza. Neste cenário, a trajetória descendente das principais bolsas de valores internacionais foi acentuada. As mesmas apresentaram elevadas quedas entre abril e setembro, com as bolsas norte-americanas registrando perdas de 27% no Dow Jones Industrial Average (DJIA) e 36,5% no National Association of Securities Dealers Automated Quotations (Nasdaq). No Brasil, seguindo a tendência mundial, o Ibovespa registrou queda de 34,9%. Sob este contexto, o movimento de queda prosseguiu na primeira quinzena de outubro nos Estados Unidos, onde os principais índices negociados (S&P500, DJIA e o Nasdaq) registraram os níveis mais baixos desde o final da década de 1990. No ano, o DJIA registrou variação negativa de 17,7%, o Nasdaq decresceu 32,8% e o S&P500 registrou queda de 22,1%.

Na Bolsa de Valores de São Paulo, o Ibovespa atingiu o maior valor do ano no mês de fevereiro (14.033 pontos) finalizando o movimento de alta com início em outubro de 2001. Nos meses subsequentes, alguns fatores como a depreciação cambial, as perspectivas de aceleração inflacionária, o processo eleitoral, além do rebaixamento da classificação dos papéis brasileiros efetuado por agências de risco, foram fundamentais para o comportamento declinante do índice. A partir da segunda metade do mês de outubro, a definição do processo eleitoral brasileiro influenciou de forma positiva o desempenho do Ibovespa, cuja valorização atingiu 30,7% no último trimestre de 2002. Entretanto, o índice Bovespa registrou variação negativa de 16,6% no ano, tendo atingido em dezembro 11.268 pontos (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2003).

O ano de 2007 foi marcado pela crise do setor de crédito hipotecário *subprime* (crédito de alto risco, ligado a clientes com histórico de inadimplência) nos Estados Unidos. O aumento do índice de inadimplência no mercado de crédito *subprime*, observado na última semana de julho, repercutiu em alguns fundos de aplicação que fornecem recursos a bancos operadores neste mercado, provocando restrições à liquidez bancária. Embora a intervenção do Federal Reserve (seguida por bancos centrais europeus) tenha sido imediata, os principais fundos de aplicação financeira sofreram perdas. As perdas se

concretizaram especialmente devido à queda nos índices das principais bolsas de valores. No mês de julho, o Dow Jones, o Nasdaq e o S&P500 recuaram 1,5%, 2,2% e 3,2%, respectivamente. O mercado financeiro internacional continuou com elevada volatilidade nas primeiras semanas de agosto, refletindo as incertezas geradas pela crise no mercado imobiliário norte-americano. A inadimplência nos financiamentos *subprime* exerceu um “efeito cascata” sobre o mercado de crédito mundial, levando a graves problemas de liquidez e aumento do custo do crédito. Devido à alta volatilidade e ao aumento substancial da percepção de risco que se seguiu em agosto, as autoridades monetárias dos Estados Unidos, Canadá e Europa anunciaram a criação de linhas de redesconto de curtíssimo prazo para gerenciar a liquidez bancária e evitar o risco sistêmico. Esta medida foi fundamental para a gradual normalização dos mercados. Sob estas condições, o Dow Jones fechou agosto em alta de 1,1%, o Nasdaq subiu 2,0% e o S&P500 apresentou variação positiva de 1,3%. Nos meses posteriores, o mercado financeiro nos EUA mostrou-se bastante instável, com altas em setembro e outubro e baixas em novembro e dezembro.

Na Bovespa, o volume médio diário negociado em julho situou-se em R\$4,8 bilhões, valor 8,5% inferior ao de junho. Alinhado com o cenário internacional, o Ibovespa registrou recuo mensal de 0,4%, atingindo 54.182 pontos. O mês de agosto refletiu primordialmente o recrudescimento das incertezas quanto à crise imobiliária norte-americana. Porém, após a ação dos principais bancos centrais, o mercado reagiu de forma positiva, com os títulos soberanos brasileiros apresentando valorização. A Bovespa, por sua vez, apresentou resultado positivo em agosto, expresso no aumento de 5,1% no volume médio diário transacionado no mês. O Ibovespa, após registrar queda superior a 10% até a terceira semana do mês, atingiu 54.637 pontos no final de agosto, elevando-se 0,8%. Nos meses seguintes o Índice Bovespa apresentou um comportamento volátil. Contudo, valorizou-se 43,6% no ano, concluindo o ano de 2007 em 63.886 pontos (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2007, 2008).

3.1 Características dos Dados

As estimações e previsões serão efetuadas sobre a série de retornos diários, construída a partir dos preços de fechamento diários do Ibovespa. A amostra completa dos retornos contém 3.212 observações, iniciando em 03/01/1995 e estendendo-se até 28/12/2007. A evolução do índice e seus retornos seguem na FIG. 1.

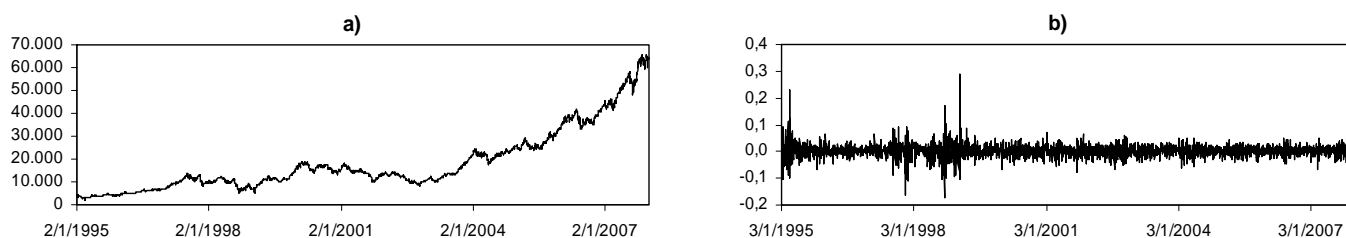


FIGURA 1 - Evolução do Ibovespa e seus retornos: a) Índice Bovespa; b) Retornos do Ibovespa.
Fonte: Dados da Economatica.

A série compreende um período posterior à crise do México (fim de 1994) e atravessa momentos de alta volatilidade, como as crises da Ásia (1997) e da Rússia (1998). A partir de 2001 surgem as turbulências decorrentes do atentado de 11 de setembro nos Estados Unidos, e mais à frente em 2002, os meses de setembro e outubro refletem os desdobramentos da bolha das empresas de alta tecnologia. Para completar o período amostral, nos meses de julho e agosto de 2007, o índice sofre influência da crise no mercado hipotecário *subprime* norte-americano.

Quanto às regularidades empíricas da série em estudo, pode-se visualizar evidências de caudas pesadas em relação à distribuição normal, nos itens (a) e (b) da FIG. 2. Adicionalmente, devido à existência de autocorrelação nos quadrados dos retornos, pode-se notar agrupamentos de volatilidade na série dos retornos diários, na FIG. 1, item (b). A partir do item (d) da FIG. 2, observa-se que a função de autocorrelação dos quadrados dos retornos é significativa. Por outro lado, no item (c) da FIG. 2 aparentemente não há autocorrelação nos retornos.

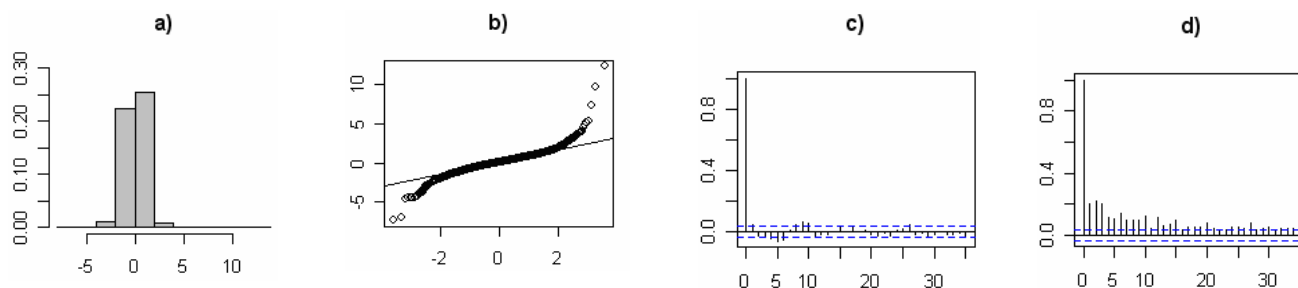


FIGURA 2 – Fatos estilizados dos retornos do Ibovespa: a) Histograma dos retornos padronizados; b) Gráfico QQ-normal dos retornos padronizados; c) Função de autocorrelação dos retornos; d) Função de autocorrelação dos quadrados dos retornos.

A escolha dos modelos aditivos bem como os da família GARCH ocorre sobre a amostra completa dos retornos. Após a escolha das estruturas que melhor se ajustam aos dados, são efetuadas as estimações dos parâmetros em três sub-amostras. As estimativas e previsões um passo à frente atualizadas são calculadas sobre períodos de cem dias de negociação após a última observação de cada sub-amostra. A primeira partição dos dados do Ibovespa compreende os retornos diários de 03/01/1995 até 31/08/2001, ou seja, até o último dia do mês anterior ao ataque terrorista nos Estados Unidos. A segunda sub-amostra engloba os dados de 03/01/1995 até 30/08/2002. Nesta situação o objetivo é mensurar o comportamento dos modelos a partir do mês de setembro de 2002, cuja volatilidade nos mercados financeiros é elevada. Por fim, a terceira partição dos dados inicia em 03/01/1995 e se estende até 29/06/2007. Este período antecede os desdobramentos da crise do mercado hipotecário *subprime* nos EUA, que se intensificam ao final de julho e durante as primeiras semanas de agosto.

Adicionalmente, cabe apresentar no APÊNDICE as principais estatísticas descritivas do índice, para as três partições definidas e também para a amostra completa. A partir da TAB. 1 do APÊNDICE observa-se uma autocorrelação significativa nos retornos, para a amostra completa do Ibovespa, através das estatísticas Q de Ljung e Box (1978). Além disso, as três partições restantes também apresentam autocorrelação. Em relação aos quadrados dos retornos, pode-se dizer que todos os períodos avaliados revelam a existência de autocorrelação.

3.2 Estimação

Iniciar o processo de estimação a partir dos modelos aditivos se deve a necessidade de excluir algumas observações extremas da série analisada. Salienta-se que, ao efetuar intervenções na amostra completa dos retornos do índice, estimou-se tanto os modelos aditivos como os GARCH com os mesmos dados. A eliminação de observações extremas faz-se necessária em decorrência da estrutura bastante flexível dos modelos aditivos que, ajustados localmente, acabam tendo suas estimativas prejudicadas por estas observações (*outliers*).

3.2.1 Modelos Aditivos

Ao iniciar a modelagem, ressalta-se a exclusão de doze observações, dentre elas: cinco mínimas e sete máximas. A série do Ibovespa visualizada na FIG. 1 deixa de apresentar valores exageradamente extremos a partir do ano de 1999. Os dados que foram retirados da estimação dos modelos são observados entre os anos de 1995 e 1999. Mais especificamente, são dados influenciados por desdobramentos das crises do México (fim de 1994), da Ásia (1997) e da Rússia (1998). Os valores extremos de janeiro de 1999 estão relacionados aos efeitos da desvalorização cambial no Brasil. As datas específicas e os valores das observações podem ser encontrados na TAB. 2 do APÊNDICE.

Observando uma autocorrelação significativa nos retornos do Ibovespa, ajustou-se uma estrutura para a esperança condicional. Devido ao método definido para comparação das estimativas e previsões entre os modelos aditivos e os GARCH, ou seja, por meio do quadrado do retorno corrigido pela média, optou-se por utilizar uma estrutura ARMA na equação da média condicional para ambos os modelos. Desta maneira, na medida em que a volatilidade extraída dos últimos é comparada com os quadrados dos resíduos estimados, utiliza-se a mesma técnica de ajuste na média para preservar a base de comparação.

Através dos procedimentos tradicionais de identificação em séries temporais, selecionou-se um modelo $AR(2)$ para filtrar a série dos retornos. Esta decisão foi tomada após a comparação final entre um modelo $AR(1)$ e um $AR(2)$, ambos sem intercepto. O segundo modelo apresentou os melhores resultados, reunidos na TAB. 3 do APÊNDICE. Adicionalmente, a FIG. 3 reúne as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos retornos (sem *outliers*), bem como a função de autocorrelação dos resíduos estimados do modelo $AR(2)$ e seus quadrados.

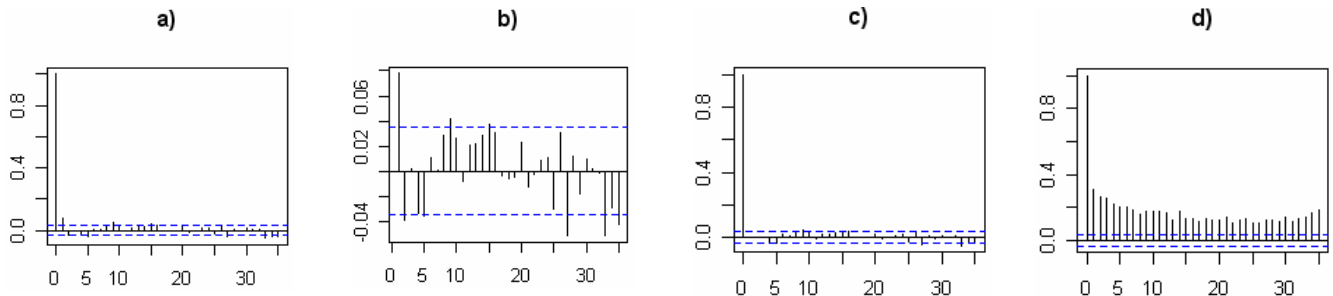


FIGURA 3 – Funções de autocorrelação: a) Autocorrelação dos retornos (sem *outliers*); b) Autocorrelação parcial dos retornos (sem *outliers*); c) Autocorrelação dos resíduos do $AR(2)$; d) Autocorrelação dos quadrados dos resíduos do $AR(2)$.

Pode-se perceber no item (c) da FIG. 3 que a estrutura de autocorrelação dos resíduos estimados é inferior à ilustrada no item (a) para a série dos retornos. Porém, pode ser constatado no item (d) que os quadrados dos resíduos permanecem altamente correlacionados. Sendo assim, os resíduos do modelo $AR(2)$ são utilizados para se obter as estimativas da volatilidade do Ibovespa.

Na estimação da variância condicional através dos modelos aditivos, cabe ressaltar que na ausência de estatísticas não paramétricas com distribuições teóricas desenvolvidas, faz-se necessário levar em consideração diversos resultados, sejam quantitativos ou visuais, ao longo do processo de inferência. Embora o teste F aproximado sirva de guia na escolha entre modelos alternativos, salienta-se que outras formas de inferência são possíveis devendo ser avaliadas em conjunto (HASTIE; TIBSHIRANI, 1990). Neste artigo, por exemplo, a obtenção de estimativas negativas para a volatilidade pode ser considerada como um indicativo da má especificação do modelo. Outra maneira importante de analisar o comportamento dos modelos dá-se a partir da visualização da contribuição individual das variáveis explicativas na construção aditiva da superfície de regressão. Neste caso, descrições visuais das funções univariadas muito distintas do que se espera teoricamente mostram-se como uma indicação da falta (ou excesso) de suavização nas mesmas, ou má especificação. Além das últimas considerações, a análise tradicional dos resíduos padronizados se mostra fundamental.

Explicada de forma geral a maneira como se conduz a seleção dos modelos aditivos neste estudo, parte-se primeiramente ao encontro da defasagem adequada (número de funções univariadas) para o modelo aditivo estruturado como um $ARCH(q)$, mas estimado não parametricamente. Em um segundo momento, após o número de funções aditivas ter sido definido, seleciona-se o parâmetro de suavização (*span*) mais indicado. Deve-se ressaltar que este procedimento em duas etapas foi utilizado após a realização de diversos testes simultâneos. Nestes, constatou-se que a decisão quanto à defasagem adequada não era influenciada pelas modificações no parâmetro de suavização. Neste caso, buscou-se a defasagem apropriada com o uso do teste F aproximado, mantendo-se o *span* constante. O último foi mantido fixo no valor padrão do software² (*span*=0,5), o que indica a utilização de 50% das observações (com pesos distintos) em cada vizinhança local em torno do ponto alvo estimado (ver CLEVELAND, 1979). O teste F aproximado leva em consideração a soma dos quadrados dos resíduos (*deviance*) e os seus graus de liberdade aproximados (número equivalente de parâmetros), sendo utilizado para avaliar a contribuição não linear de cada componente não paramétrico incluído no modelo (HASTIE, 1993).

² Software livre R, Pacote gam.

Desta forma, efetuou-se a comparação de um modelo com apenas uma função em termos dos resíduos em $(t-1)$ (similar a um $ARCH(1)$) na hipótese nula, contra um modelo com duas funções aditivas na hipótese alternativa: a primeira em termos dos resíduos em $(t-1)$ e a segunda agregando em $(t-2)$. No próximo passo, comparou-se o modelo com duas defasagens (como um $ARCH(2)$) contra o de três, e assim sucessivamente até a nona. A inclusão dos componentes funcionais mostrou-se significativa até a nona defasagem. Todavia, a partir da quinta, os modelos passaram a não se comportar adequadamente, levando a escolha de estruturas com um menor número de funções. A TAB. 4 contempla os resultados obtidos a partir do teste F bem como os critérios de informação aproximados de Akaike (AIC) de cada modelo.

TABELA 4
Seleção da defasagem nos modelos aditivos para o Ibovespa

	SQR	df^{res}	Teste F	AIC
Modelo aditivo (1)	0,0023673	3.186,80		-35.992,57
Modelo aditivo (2)	0,0022609	3.181,59	28,75 (0,000)	-36.129,03
Modelo aditivo (3)	0,0021702	3.176,39	25,49 (0,000)	-36.249,36
Modelo aditivo (4)	0,0021350	3.171,18	10,04 (0,000)	-36.291,14
Modelo aditivo (5)	0,0021103	3.165,97	7,12 (0,000)	-36.317,89

Nota (1): Nos modelos aditivos o número entre parênteses indica a ordem de defasagens.

Nota (2): No teste F os números em parênteses indicam os p-valores.

A partir da TAB. 4 percebe-se que a inclusão sucessiva de componentes funcionais se mostra significativa até a quinta defasagem. Os critérios (AIC) reforçam os resultados das estatísticas do teste F aproximado que indicam o modelo de ordem cinco como o mais adequado. Contudo, conforme comentado, as decisões em relação aos modelos não serão tomadas baseando-se somente nos testes apresentados na TAB. 4. Dois critérios adicionais serão avaliados para a escolha da defasagem apropriada. O primeiro será em relação ao comportamento dos três últimos modelos quanto à descrição visual das funções univariadas (aplicadas nos resíduos defasados) na explicação aditiva da variável resposta (volatilidade), e o segundo, irá levar em conta a capacidade (dos três últimos modelos) de redução da autocorrelação nos quadrados dos resíduos padronizados. Destaca-se que os modelos com menos de três funções univariadas reduzem muito pouco a autocorrelação nos quadrados, desta forma, são excluídos das análises. Iniciando com as descrições visuais, a FIG. 4 apresenta as funções componentes do modelo aditivo com três defasagens (como um $ARCH(3)$). Pode-se visualizar abaixo da estimativa de cada função unidimensional (que leva em consideração as demais dimensões) um *rug plot* que indica a região onde ocorre a maior concentração de observações.

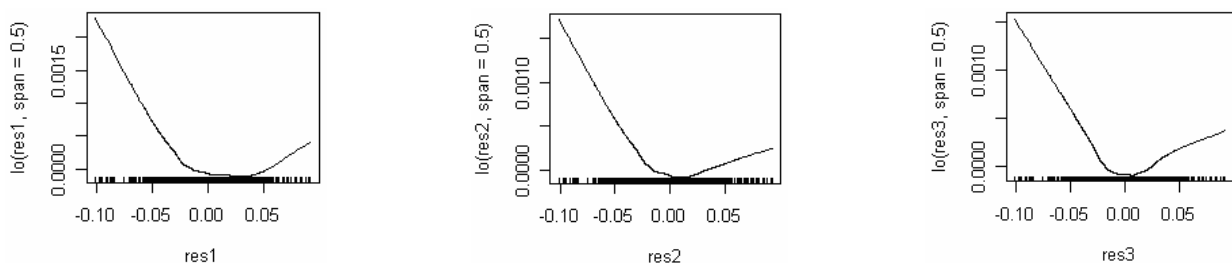


FIGURA 4 – Funções univariadas do Modelo aditivo (3)

Nota (1): Os termos res1, res2 e res3 indicam as defasagens da variável explicativa.

Nota (2): No eixo das ordenadas o termo lo indica o uso do suavizador loess na função.

A partir da FIG. 4 pode-se fazer alguma relação com a curva proposta por Engle e Ng (1993) (*News Impact Curve*) que mede a resposta da volatilidade frente à ocorrência de choques positivos (boas notícias) ou negativos (más notícias) no mercado. Neste sentido, as funções nas duas primeiras defasagens indicam um deslocamento das curvas em relação a zero, sendo centradas (ponto de mínimo)

em um valor positivo dos retornos (neste caso, retornos corrigidos pela média). Contudo, as três funções predictoras indicam uma assimetria em relação à ocorrência de retornos negativos ou positivos de mesma magnitude. Esta pode ser notada pela inclinação mais acentuada das funções quando ocorrem choques negativos. O modelo aditivo (3) oferece descrições visuais condizentes com a teoria dos fatos estilizados. Deve-se, portanto, avaliar o comportamento dos demais modelos frente ao mesmo critério.

Para o modelo aditivo (4), pode-se acompanhar a FIG. 5 que relaciona as funções univariadas aos resíduos defasados até $(t-4)$. Neste modelo, o comportamento dos quatro elementos funcionais não é tão adequado quanto o apresentado na FIG. 4, mas devido às funções serem extremamente flexíveis, as assimetrias e não linearidades podem ser acentuadas na medida em que novos termos são incluídos.

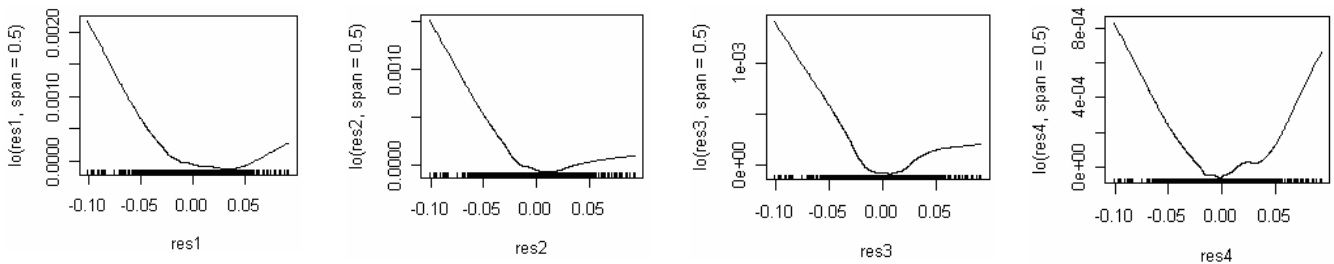


FIGURA 5 – Funções univariadas do Modelo aditivo (4)

Na FIG. 6 surge a primeira restrição quanto a escolha do modelo aditivo (5). Pode-se notar na segunda e terceira defasagens um comportamento pouco provável para a volatilidade frente aos retornos (corrigidos pela média) positivos. Não é razoável supor que na ocorrência de retornos positivos (boas notícias no mercado) a resposta na volatilidade seja constante ou até mesmo negativa.

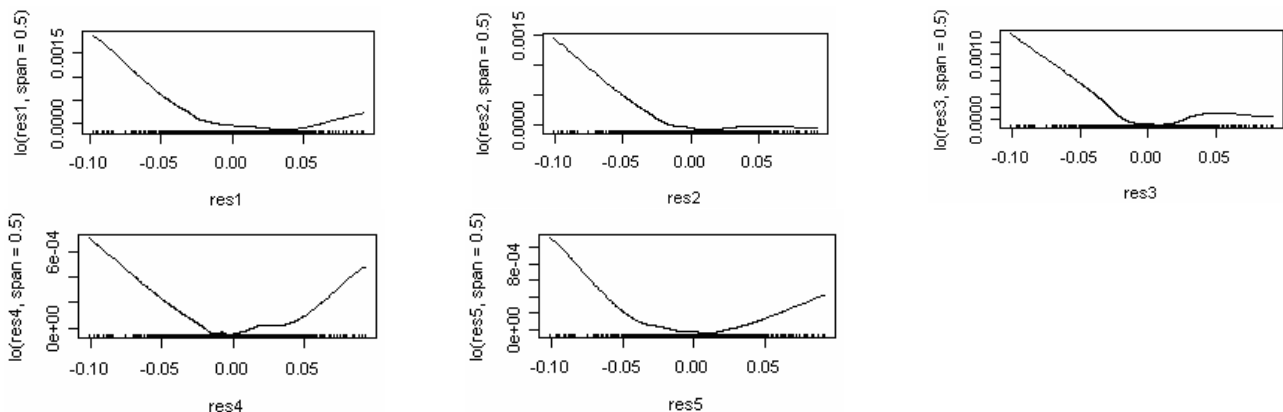


FIGURA 6 – Funções univariadas do Modelo aditivo (5)

Para completar a comparação dos três modelos, a FIG. 7 destaca as funções de autocorrelação dos quadrados dos resíduos padronizados para as três estruturas com distintas defasagens. Pode-se perceber no item (a) uma autocorrelação nos quadrados mais significativa do que a apresentada pelos modelos concorrentes nos itens (b) e (c).

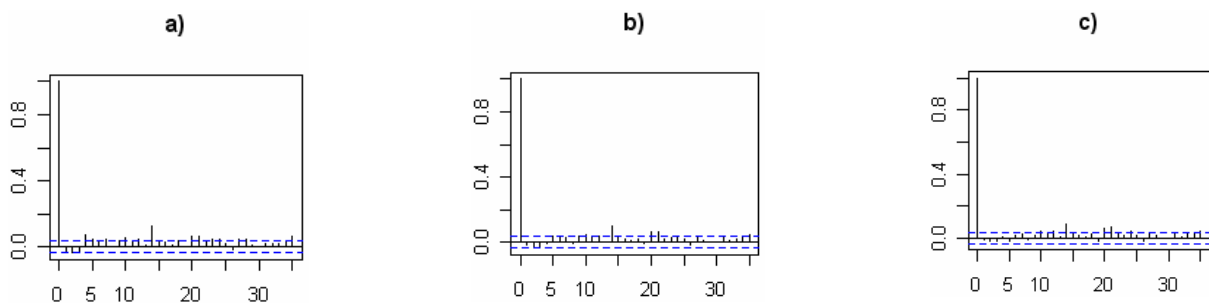


FIGURA 7 – Funções de autocorrelação dos quadrados dos resíduos padronizados: a) Modelo aditivo (3); b) Modelo aditivo (4); c) Modelo aditivo (5).

Analisando de maneira geral os resultados, elegeu-se o modelo aditivo com quatro funções univariadas (modelo aditivo (4)) como o mais adequado para a série do Ibovespa, na medida em que o mesmo apresentou resultados satisfatórios em todos os critérios de escolha. A próxima etapa diz respeito à escolha do *span* no modelo aditivo (4). Para isto, as análises foram efetuadas com o parâmetro de suavização variando de 0,3 até 0,8, com incrementos de 0,1.

A escolha do *span* no suavizador loess é extremamente intuitiva, podendo ser efetuada através dos mesmos critérios utilizados até o momento, dispensando o uso de métodos custosos computacionalmente (HASTIE, 1993). Destaca-se que, a complexidade dos modelos aumenta na medida em que o *span* é reduzido de 0,8 em direção a 0,3. Neste sentido, efetuou-se um teste *F* aproximado, partindo-se de um modelo aditivo (4) com *span*=0,8 sob a hipótese nula, comparando o mesmo com um modelo aditivo (4) com *span*=0,7 sob a hipótese alternativa. Este processo foi repetido até se atingir o *span*=0,3. Definiu-se esta amplitude para o *span* com a intenção de não suavizar demasiadamente as funções (aumentando o viés do estimador), tampouco torná-las exageradamente erráticas (aumentando a variância do estimador). Foram definidos incrementos de 0,1 para o *span*, em cada teste, devido aos resultados terem se mostrado muito similares para incrementos inferiores a 0,1. A TAB. 5 reúne as estatísticas do teste *F* e os valores dos critérios de informação (*AIC*) dos modelos.

TABELA 5
Seleção do *span* no Modelo aditivo (4)

	<i>SQR</i>	df^{res}	Teste <i>F</i>	<i>AIC</i>
<i>span</i> =0,8	0,0021559	3.180,18		-36.288,41
<i>span</i> =0,7	0,0021513	3.178,18	3,36 (0,034)	-36.298,15
<i>span</i> =0,6	0,0021409	3.175,12	5,07 (0,002)	-36.300,59
<i>span</i> =0,5	0,0021373	3.172,17	1,81 (0,144)	-36.300,06
<i>span</i> =0,4	0,0021332	3.168,13	1,50 (0,198)	-36.298,09
<i>span</i> =0,3	0,0021251	3.161,13	1,73 (0,098)	-36.296,30

Nota (1): No teste *F* os números em parênteses indicam os p-valores.

Em face dos resultados da TAB. 5, nota-se que o parâmetro de suavização deve ser definido entre 0,7 e 0,6. Embora o *AIC* do modelo com *span*=0,7 não tenha sido o menor entre as duas opções, decidiu-se em favor do estimador com menor variância e maior viés. Sendo assim, pode-se apresentar na FIG. 8 os termos funcionais univariados do modelo aditivo (4) com *span*=0,7.

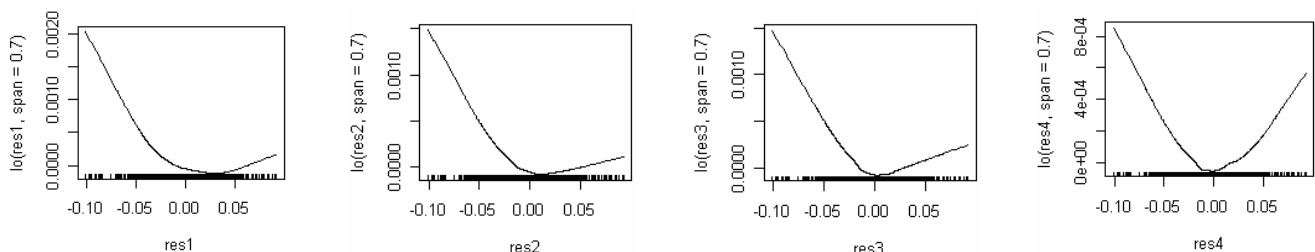


FIGURA 8 – Funções univariadas do Modelo aditivo (4) – *span*=0,7

Fazendo uma comparação da FIG. 5 com a FIG. 8 pode-se perceber que as funções contidas na segunda são mais suaves que as da primeira, apresentando comportamento satisfatório. Além disso, como na FIG. 5, nota-se uma maior resposta da volatilidade (assimetria) frente à ocorrência de más notícias (choques negativos) no mercado.

A FIG. 9 reúne as medidas de ajuste, onde pode-se observar no item (d) que as autocorrelações dos quadrados dos resíduos corrigidos por heterocedasticidade, pelo modelo aditivo (4), apresentam uma substancial redução quando comparadas aos quadrados dos resíduos do *AR*(2), contidos no item (d) da FIG. 3.

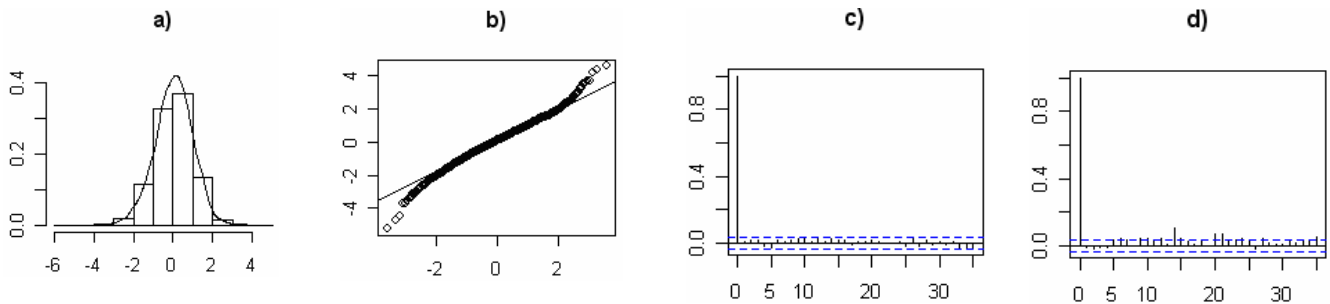


FIGURA 9 – Medidas de ajuste do Modelo aditivo (4) – $span=0,7$: a) Histograma dos resíduos padronizados; b) Gráfico QQ-normal dos resíduos padronizados; c) Função de autocorrelação dos resíduos padronizados; d) Função de autocorrelação dos quadrados dos resíduos padronizados.

Entretanto, percebe-se uma estrutura de autocorrelação remanescente nos quadrados, indicando que nem toda a não-linearidade foi captada pelo modelo. Este fato é confirmado pelo histograma contido no item (a), bem como pelo gráfico QQ-normal do item (b), que mostram a manutenção de caudas pesadas. Após a seleção do modelo aditivo com quatro termos funcionais, pode-se visualizar as estimativas da volatilidade contidas na FIG. 10.

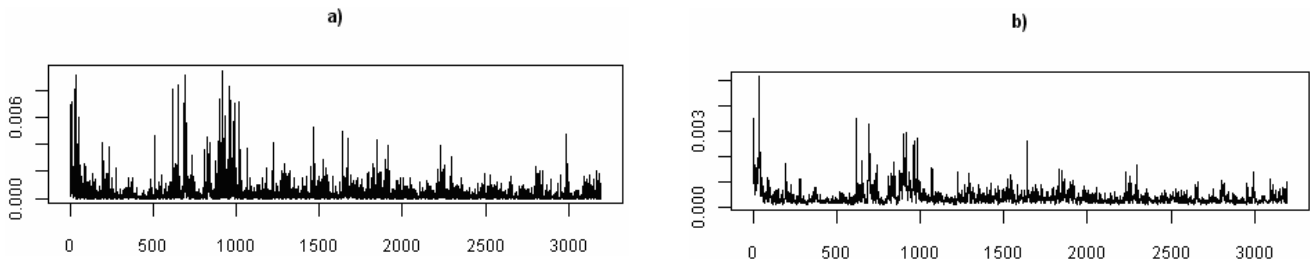


FIGURA 10 – Resíduos ao quadrado e volatilidade estimada do Ibovespa: a) Resíduos estimados do modelo $AR(2)$ ao quadrado; b) Estimativas da variância condicional do Modelo aditivo (4)- $span=0,7$.

3.2.2 Modelos GARCH

Buscou-se selecionar os modelos através dos critérios de informação de Akaike (AIC) e de Schwarz (BIC) e a partir do valor máximo do log-verossimilhança. Na estimação via função de verossimilhança condicional foram supostas duas distribuições condicionais para os erros padronizados, a normal e a t-Student. A TAB. 6 reúne os modelos comparados.

TABELA 6
Seleção dos modelos GARCH para o Ibovespa

Modelo	Normal			t-Student		
	AIC	BIC	Max [Log L]	AIC	BIC	Max [Log L]
ARCH(4)	-5,014547	-5,001260	8.025,26	-5,032479	-5,017294	8.054,94
GARCH(1,1)	-5,053130	-5,043639	8.084,95	-5,066498	-5,055109	8.107,33
GARCH(3,2)	-5,052914	-5,037729	8.087,61	-5,066170	-5,049087	8.109,81
GARCH(3,3)	-5,055011	-5,037927	8.091,96	-5,067778	-5,048797	8.113,38
EGARCH(1,1)	-5,071864	-5,060475	8.115,91	-5,083033	-5,069745	8.134,77
TARCH(1,2)	-5,077988	-5,064701	8.126,70	-5,087981	-5,072796	8.143,68
TARCH(3,2)	-5,078771	-5,061688	8.129,96	-5,088500	-5,069518	8.146,51

Nota (1): Dados em negrito indicam o melhor modelo.

Apresenta-se na TAB. 6 somente os modelos com os parâmetros da equação da variância significativos. Ainda, foram eliminados aqueles cujas estimativas não convergiram. Devido à intenção de comparar os modelos GARCH com os aditivos, optou-se por selecionar um modelo $ARCH(4)$ e outra parametrização entre os GARCH. Desta forma, foram selecionados os modelos $ARCH(4)$ e $TARCH(3,2)$, ambos baseados na função de verossimilhança derivada da distribuição t-Student. As

estimativas dos parâmetros (desvios padrão entre parênteses) seguem nas expressões (3.1) e (3.2), respectivamente.

$$y_t = 0,0584 y_{t-1} - 0,0278 y_{t-2} \quad (3.1)$$

$(0,01837) \quad (0,01788)$

$$\sigma_t^2 = 0,00002 + 0,1023 y_{t-1}^2 + 0,1274 y_{t-2}^2 + 0,1951 y_{t-3}^2 + 0,1446 y_{t-4}^2$$

$(0,00001) \quad (0,02361) \quad (0,02823) \quad (0,03034) \quad (0,03064)$

No modelo $ARCH(4)$, o segundo termo autoregressivo da equação da média condicional, quando estimado conjuntamente aos demais parâmetros da equação da variância, não se mostrou significativo. Contudo, decidiu-se por sua manutenção no modelo para garantir a equidade nas comparações posteriores. Quanto às medidas de ajuste do modelo $ARCH(4)$, nota-se a partir da FIG. 11, item (c), a manutenção de uma estrutura de autocorrelação nos quadrados dos resíduos padronizados. Esta percepção é reforçada pela apresentação do histograma no item (a), cujas caudas permanecem pesadas.

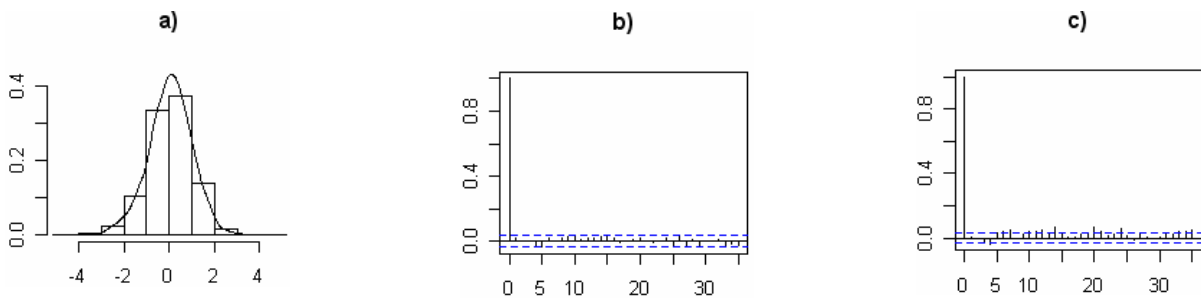


FIGURA 11 – Medidas de ajuste do Modelo $ARCH(4)$: a) Histograma dos resíduos padronizados; b) Função de autocorrelação dos resíduos padronizados; c) Função de autocorrelação dos quadrados dos resíduos padronizados.

$$y_t = 0,0707 y_{t-1} - 0,0199 y_{t-2} \quad (3.2)$$

$(0,01786) \quad (0,01857)$

$$\sigma_t^2 = 0,000002 - 0,0335 y_{t-1}^2 + 0,0501 y_{t-2}^2 + 1,2452 \sigma_{t-1}^2 - 0,7251 \sigma_{t-2}^2 + 0,3579 \sigma_{t-3}^2 + 0,1356 y_{t-1}^2 \gamma_{t-1}$$

$(0,000003) \quad (0,01127) \quad (0,01549) \quad (0,21502) \quad (0,32654) \quad (0,15450) \quad (0,02299)$

O modelo $TARCH(3,2)$ apresentou todos os parâmetros da equação da variância altamente significativos e, de modo similar ao $ARCH(4)$, o segundo coeficiente do $AR(2)$ não se mostrou significativo. Mais uma vez, optou-se por sua manutenção. A assimetria na volatilidade foi captada pelo modelo, onde o parâmetro $(0,1356 > 0)$ indica a presença do efeito *leverage*. Cabe destacar que a evidência de assimetria já havia sido notada no comportamento visual das funções univariadas do modelo aditivo (4), presente na FIG. 8. Sobre as medidas de ajuste do modelo $TARCH(3,2)$, percebe-se na FIG. 12, item (c), uma redução da autocorrelação nos quadrados dos resíduos padronizados superior à apresentada pelo modelo $ARCH(4)$. Porém, o comportamento descrito pelo histograma no item (a) indica a existência de algumas observações extremas remanescentes nas caudas.

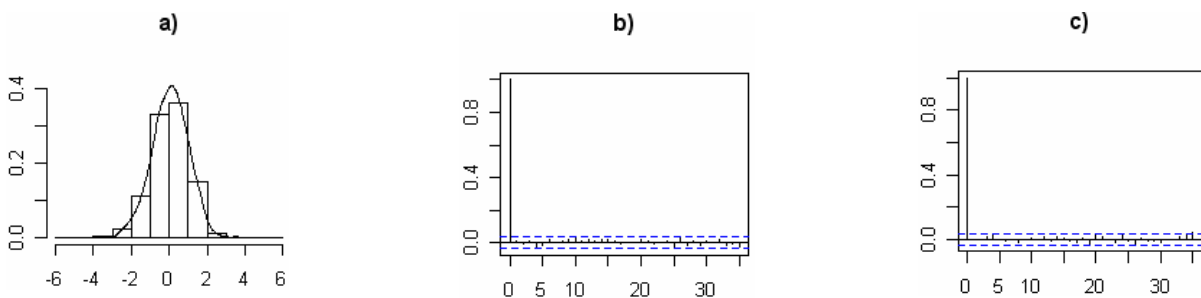


FIGURA 12 – Medidas de ajuste do Modelo $TARCH(3,2)$: a) Histograma dos resíduos padronizados; b) Função de autocorrelação dos resíduos padronizados; c) Função de autocorrelação dos quadrados dos resíduos padronizados.

Para completar a descrição dos modelos GARCH, selecionados para a estimação e previsão da volatilidade dos retornos do Ibovespa, destaca-se na FIG. 13 as estimativas da variância condicional para a amostra completa.

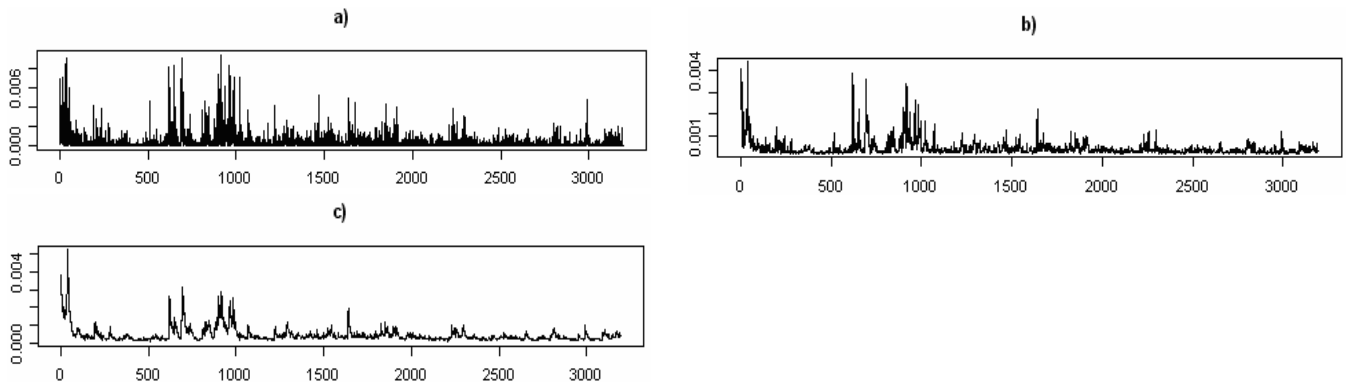


FIGURA 13 – Resíduos ao quadrado e volatilidade estimada do Ibovespa: a) Resíduos estimados do $AR(2)$ ao quadrado; b) Estimativas da variância condicional do $ARCH(4)$; c) Estimativas da variância condicional do $TARCH(3,2)$.

3.3 Comparação entre os Modelos Aditivos e GARCH

As comparações entre os modelos paramétricos e semi-paramétricos são realizadas a partir das três primeiras partições da série dos retornos do Ibovespa, apresentadas na TAB. 1 do APÊNDICE. Para comparar o desempenho dos modelos dentro da amostra, os mesmos são estimados incorporando as observações contidas nos momentos de crise. Para o Ibovespa este período é definido em 2001 de (03.09.2001-04.02.2002), em 2002 de (02.09.2002-24.01.2003) e em 2007 de (02.07.2007-26.11.2007).

As medidas de erro são calculadas somente sobre as estimativas do intervalo de cem dias de negociação. Para a análise fora da amostra, as previsões um passo à frente atualizadas são efetuadas nos mesmos momentos referenciados de cem dias. Sendo assim, os modelos são estimados até o período t , e então são obtidas as previsões para $t+1$. Em $t+1$, os modelos são reestimados e as previsões são obtidas para $t+2$, e assim sucessivamente. As medidas de erro utilizadas são duas: a raiz do erro quadrático médio (REQM) e o erro absoluto médio (EAM). Estas estatísticas avaliam as estimativas e previsões dos modelos em comparação aos quadrados dos retornos corrigidos pela média (estimador da volatilidade latente adotado). As mesmas oferecem um indicativo do quão distantes estão as estimativas e previsões em relação aos quadrados dos resíduos:

$$REQM(x) = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\varepsilon}_t^2)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$EAM(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |x_t - \hat{\varepsilon}_t^2|, \quad (3.4)$$

onde $\{\hat{\varepsilon}_t^2\}_{t=1}^T$ representa a série dos quadrados dos retornos corrigidos pela média, T é o número de dias estimados ou previstos e $\{x_t\}_{t=1}^T$ denota a série de estimativas ou previsões da variância condicional de um determinado modelo.

Iniciando a análise, pode-se apresentar na TAB. 7 o desempenho dentro da amostra dos modelos selecionados para os três momentos definidos de alta volatilidade.

TABELA 7
Desempenho dos modelos (dentro da amostra) para o Ibovespa

	M. Aditivo (4)- <i>span</i> =0,7	ARCH (4) <i>t</i> (·)	TARCH (3,2) <i>t</i> (·)
Crise de 2001			
REQM	0,0008412376	0,0008990026	0,0008741969
EAM	0,0005206397	0,0005725927	0,0005428123
Crise de 2002			
REQM	0,0007112360	0,0006957946	0,0006629027
EAM	0,0004999630	0,0004883705	0,0004564408
Crise de 2007			
REQM	0,0005062302	0,0004984613	0,0004836501
EAM	0,0003785241	0,0003933001	0,0003607623

Nota (1): Valor em negrito denota a melhor medida.

Os resultados da TAB. 7 evidenciam a superioridade do modelo aditivo (4) em estimar a variância condicional no período mais conturbado do ano de 2001. Ambas as medidas indicam o modelo semi-paramétrico como o mais adequado neste cenário, tendo um comportamento substancialmente superior a estrutura ARCH paramétrica com o mesmo número de defasagens. Para a crise de 2002, nota-se um melhor desempenho nas medidas REQM e EAM em favorecimento do modelo *TARCH*(3,2). Neste ano, o modelo aditivo (4) registra os valores mais elevados nas estatísticas de erro. Para completar os anos de crise analisados, em 2007 o modelo *TARCH*(3,2) obtém as menores medidas novamente. O modelo aditivo (4), por sua vez, supera o *ARCH*(4) com distribuição t-Student somente na medida EAM, talvez a estatística mais apropriada para a situação por ser mais robusta a observações extremas. Pode-se perceber que ao se incorporar mais observações da amostra em direção a 2007, o modelo paramétrico e assimétrico respondeu com melhores resultados que o semi-paramétrico.

Na avaliação dos modelos quanto à capacidade preditiva, salienta-se que os resultados são semelhantes aos obtidos dentro da amostra. A TAB. 8 registra os erros de previsão um passo à frente, por modelo, em cada período selecionado.

TABELA 8
Desempenho dos modelos (fora da amostra) para o Ibovespa

	M. Aditivo (4)- <i>span</i> =0,7	ARCH (4) <i>t</i> (·)	TARCH (3,2) <i>t</i> (·)
Crise de 2001			
REQM	0,0008473683	0,0009058024	0,0008761446
EAM	0,0005238287	0,0005774203	0,0005435897
Crise de 2002			
REQM	0,0007181177	0,0007046350	0,0006892591
EAM	0,0005060001	0,0004948852	0,0004756111
Crise de 2007			
REQM	0,0005101338	0,0004997983	0,0004839464
EAM	0,0003817302	0,0003941795	0,0003608995

Nota (1): Valor em negrito denota a melhor medida.

Novamente, nota-se a superioridade do modelo aditivo (4) para o ano de 2001. Esta é evidenciada pelas estatísticas de erro inferiores as registradas pelos modelos concorrentes, especialmente em relação ao ARCH paramétrico de mesma ordem. Para o período seguinte (crise de 2002) o modelo *TARCH*(3,2) com distribuição t-Student destaca-se como o mais indicado, e em 2007, o resultado se repete, com o modelo assimétrico *TARCH*(3,2) sendo o escolhido a partir das duas estatísticas utilizadas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Algumas considerações podem ser realizadas sobre a comparação dos modelos aditivos semi-paramétricos com os GARCH. A eliminação de algumas observações extremas pode ser entendida como um ponto negativo na estimação dos modelos aditivos. Devido às funções univariadas serem bastante flexíveis, a exclusão dos *outliers* fez-se necessária para a obtenção de estimativas apropriadas para a variância condicional dos retornos, visto que estimativas de volatilidade para estes valores extremos seriam prejudicadas pela ausência de vizinhança local. Nota-se que distintos parâmetros de suavização poderiam ser uma alternativa nesta situação. Entretanto, tal abordagem estaria fora do escopo deste estudo. Deve-se ressaltar que em diversas aplicações com modelos paramétricos também se faz uso da redução de peso de valores extremos (*outliers*).

Os modelos aditivos descrevem comportamentos visualmente informativos da dependência (cuja forma não é pré-determinada) da variável resposta frente às variáveis explicativas, sendo esta propriedade um ponto extremamente positivo no processo de inferência. A partir da visualização do ajuste em cada componente funcional pode-se notar a presença de não linearidades, assimetrias etc.

Com a proposição de comparar os modelos distintos em períodos de alta volatilidade, procedeu-se à escolha de três anos com crise no mercado financeiro internacional. Os anos selecionados foram os de 2001 (atentado de 11 de setembro), 2002 (desdobramentos da bolha tecnológica) e 2007 (mercado de crédito *subprime*). Foram utilizadas duas estatísticas, a REQM e o EAM, para medir o desempenho das estimativas e previsões da volatilidade em relação aos quadrados dos retornos (corrigidos pela média).

Para o período de cem dias de negociação, definido como representativo da crise de 2001, observou-se que ambas as medidas de erro apontaram (dentro da amostra) o modelo aditivo com quatro funções univariadas como o mais apropriado. Todavia, o modelo *TARCH* (3,2) registrou estatísticas de erro inferiores aos demais modelos para os anos de 2002 e 2007. Estes mesmos resultados se repetiram nas previsões um passo à frente atualizadas, onde o modelo aditivo foi selecionado em 2001, ao passo que o modelo *TARCH* (3,2) foi indicado como superior em 2002 e 2007. Ressalta-se que somente na crise de 2002 o modelo semi-paramétrico apresentou desempenho inferior para as duas medidas em comparação ao modelo *ARCH* (4).

Os resultados comparativos (de modo geral) revelaram a capacidade do modelo aditivo em estimar e prever adequadamente a volatilidade dos retornos do Ibovespa. Porém, avaliando as medidas de erro obtidas para as três crises, notou-se uma superioridade do modelo paramétrico, especificamente o *TARCH* (3,2), frente ao modelo aditivo composto de quatro elementos funcionais.

Concluindo, os modelos aditivos não devem necessariamente ser entendidos como concorrentes aos paramétricos, mas sim complementares. Por exemplo, suas propriedades visuais informativas podem ser utilizadas em auxílio a parametrizações mais adequadas entre as variáveis envolvidas em determinado problema. Assim, destacam-se como mais uma ferramenta disponível ao pesquisador.

REFERÊNCIAS

- BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Boletim do Banco Central do Brasil*. Relatório Anual 2001, v. 37, set. 2002. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/?BOLETIM2001>>. Acesso em: 03 abr. 2008.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Boletim do Banco Central do Brasil*. Relatório Anual 2002, v. 38, Jul. 2003. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/?BOLETIM2002>>. Acesso em: 05 abr. 2008.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Boletim do Banco Central do Brasil*. Relatório Mensal, v. 43, n. 10. Out. 2007. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/ftp/histbole/Bol200710P.pdf>>. Acesso em: 07 abr. 2008.

- BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Boletim do Banco Central do Brasil*. Relatório Mensal, v. 44, n. 02. Fev. 2008. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/ftp/histbole/Bol200802P.pdf>>. Acesso em: 07 abr. 2008.
- BELLMAN, R. E. *Adaptive Control Processes*. New Jersey: Princeton University Press, 1961.
- BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307-27, 1986.
- BOWMAN, A.; AZZALINI, A. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach with S-Plus Illustrations*. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- CLEVELAND, W. Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, v. 74, p. 829-836, 1979.
- ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variances of U.K. Inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987-1008, 1982.
- ENGLE, R. F.; NG, V. K. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *The Journal of Finance*, v. 48, p. 1749-1778, 1993.
- FAN, J.; GIJBELS, I. *Local Polynomial Modeling and Its Applications*. London: Chapman and Hall, 1996.
- FAN, J.; YAO, Q. Efficient Estimation of Conditional Variance Functions in Stochastic Regression. *Biometrika*, v. 85, p. 645-660, 1998.
- FAN, J.; YAO, Q. *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. New York: Springer-Verlag, 2003.
- FRIEDMAN, J. H.; STUETZLE, W. Projection Pursuit Regression. *Journal of the American Statistical Association*, v. 76, p. 817-823, 1981.
- HASTIE, T. J. Generalized additive models. In: CHAMBERS, J. M.; HASTIE, T. J. *Statistical Models in S*. London: Chapman and Hall, cap. 7, 1993.
- HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. *Generalized Additive Models*. London: Chapman and Hall, 1990.
- ISSLER, J. V. Estimating and Forecasting the Volatility of Brazilian Finance Series Using ARCH Models. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 19, p. 5-56, 1999.
- KIM, W.; LINTON, O.B. The Live Method for Generalized Additive Volatility Models. *Econometric Theory*, v. 20, n. 6, p. 1094-1139, 2004.
- LEVINE, M.; LI, J. Local Instrumental Variable (LIVE) Method for the Generalized Additive-Interactive Nonlinear Volatility Model. Disponível em: <<http://www.stat.purdue.edu/~mlevins/Articles/ch1234ref.pdf>>. Technical Report, 2007. Acesso em: 15 abr. 2008.
- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a Measure of Lag of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, v. 67, p. 297-303, 1978.
- LOADER, Clive. *Old Faithful Erupts: Bandwidth Selection Reviewed*. Working paper, AT&T Bell Laboratory, 1995. Disponível em: <<http://citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/96/http://zSzzSzcm.bell-labs.comzSzcmmSzmszSzdepartmentszSzsiazSzdoczSz95.9.pdf/loader95old.pdf>>. Acesso em: 18 mar. 2008.
- MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do Ibovespa. *Estudos Econômicos*, v. 29, n. 3, p. 303-341, 1999.
- PEREIRA, P. L. V.; HOTTA, L. K.; SOUZA, L. A. R.; ALMEIDA, N. M. C. G. Alternative Models to Extract Asset Volatility: A Comparative Study. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 19, p. 57-109, 1999.
- RUPPERT, D.; WAND, M. P.; HOLST, U.; HÖSSJER, O. Local Polynomial Variance Function Estimation. *Technometrics*, v. 39, p. 262-273, 1997.
- ZIEGELMANN, F. A. *Estimation of Volatility Functions: Nonparametric and Semi-Parametric Methods*. PhD thesis - Department of Statistics, University of Kent at Canterbury (UK), 2002a.
- ZIEGELMANN, F. A. Estimation of Volatility Functions: The Local Exponential Estimator. *Econometric Theory*, v. 18, n. 4, p. 985-992, 2002b.
- ZIEGELMANN, F. A. A Local Linear Least-Absolute-Deviations Estimator of Volatility. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, to appear, 2008.

APÊNDICE

TABELA 1

Estatísticas descritivas dos retornos diários do Ibovespa

	03.01.1995–31.08.2001	03.01.1995–30.08.2002	03.01.1995–29.06.2007	03.01.1995–28.12.2007
Média	0,000663	0,000466	0,000821	0,000840
Mediana	0,001342	0,001070	0,001406	0,001438
Desvio padrão	0,027950	0,027288	0,023675	0,023520
Assimetria	0,745545	0,690969	0,593462	0,572547
Curtose	16,02324	15,58598	17,14970	16,98146
Máximo	0,288325	0,288325	0,288325	0,288325
Mínimo	-0,172082	-0,172082	-0,172082	-0,172082
Observações	1650	1893	3090	3212
Jarque-Bera	11.813,18 (0,000)	12.644,97 (0,000)	25.958,95 (0,000)	26.337,37 (0,000)
$Q_1(1)$	3,98 (0,046)	5,87 (0,015)	7,67 (0,006)	7,42 (0,006)
$Q_1(6)$	31,64 (0,000)	32,46 (0,000)	39,85 (0,000)	39,55 (0,000)
$Q_1(36)$	86,81 (0,000)	84,94 (0,000)	104,20 (0,000)	103,73 (0,000)
$Q_2(1)$	66,18 (0,000)	76,49 (0,000)	131,75 (0,000)	136,32 (0,000)
$Q_2(6)$	262,57 (0,000)	301,34 (0,000)	534,47 (0,000)	555,06 (0,000)
$Q_2(36)$	409,12 (0,000)	475,26 (0,000)	905,52 (0,000)	944,52 (0,000)
ADF	-38,66 (0,000)	-41,15 (0,000)	-52,84 (0,000)	-53,97 (0,000)
Phillips-Perron	-38,62 (0,000)	-41,09 (0,000)	-52,79 (0,000)	-53,93 (0,000)

Nota (1): Os testes ADF e PP também rejeitam a hipótese nula na presença de um termo constante e tendência linear.

Nota (2): Números em parênteses indicam p-valores. $Q_1(k)$ e $Q_2(k)$ referem-se às estatísticas de Ljung-Box nas séries dos retornos e retornos ao quadrado com k defasagens, respectivamente.

TABELA 2

Observações extremas excluídas da série completa dos retornos do Ibovespa

Data do retorno	Mínimas	Máximas
23/02/1995	..	0,113426
10/03/1995	..	0,228116
14/03/1995	..	0,121814
27/10/1997	-0,162137	..
12/11/1997	-0,107646	..
27/08/1998	-0,104786	..
10/09/1998	-0,172082	..
11/09/1998	..	0,125571
15/09/1998	..	0,171289
23/09/1998	..	0,104140
14/01/1999	-0,105024	..
15/01/1999	..	0,288325

TABELA 3
Estimativas do modelo para a média condicional do Ibovespa

	AR(1)	AR(2)
ϕ_1	0,0787 (0,000)	0,0807 (0,000)
ϕ_2	..	-0,0379 (0,032)
<i>AIC</i>	-15.528,21	-15.530,80
$Q(2)$	4,85 (0,089)	..
$Q(3)$	4,86 (0,183)	0,03 (0,998)
$Q(4)$	7,61 (0,107)	3,72 (0,446)
$Q(5)$	12,38 (0,030)	9,00 (0,109)
$Q(6)$	12,73 (0,048)	9,68 (0,134)
$Q(7)$	12,74 (0,079)	9,80 (0,201)
$Q(8)$	14,70 (0,065)	12,28 (0,139)
$Q(9)$	20,88 (0,013)	18,51 (0,030)
$Q(10)$	23,53 (0,009)	21,59 (0,018)
$Q(11)$	23,92 (0,013)	21,99 (0,025)
$Q(12)$	24,64 (0,016)	22,74 (0,030)
$Q(25)$	40,55 (0,026)	39,51 (0,035)

Nota (1): O modelo selecionado $AR(2)$ segue a forma, $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$.

Nota (2): Números em parênteses indicam p-valores. $Q(k)$ refere-se às estatísticas de Ljung-Box na série dos resíduos, com k defasagens.