


ISBN 88-7999-752-1



9 788879 997522

•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•


ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•

 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE  
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

ESTENSIONE DELLA TECNICA DEGLI ALBERI  
BI/TRI–NOMIALI AD ALBERI N–NOMIALI.  
APPLICAZIONE AI PROCESSI DIFFUSIVI CON SALTO

Massimiliano Corradini

Working paper n. 39  
2004

 ARACNE

•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•ROMATRE•







UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE  
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

ESTENSIONE DELLA TECNICA DEGLI ALBERI  
BI/TRI-NOMIALI AD ALBERI N-NOMIALI.  
APPLICAZIONE AI PROCESSI DIFFUSIVI CON SALTO

Massimiliano Corradini

Working paper n. 39  
2004



*I Working Papers del Dipartimento di Economia svolgono la funzione di divulgare tempestivamente, in forma definitiva o provvisoria, i risultati di ricerche scientifiche originali. La loro pubblicazione è soggetta all'approvazione del Comitato Scientifico.*

*Per ciascuna pubblicazione vengono soddisfatti gli obblighi previsti dall'art.1 del D.L.L. 31.8.1945, n. 660 e successive modifiche.*

*Copie della presente pubblicazione possono essere richieste alla Redazione*

Università degli Studi di Roma Tre – Dipartimento di Economia  
Via Ostiense, 139 – 00154 Roma  
Tel. 06-57374003 Fax 06-57374093 E-mail: dip\_eco@uniroma3.it

### *Comitato scientifico*

Alessandra Carleo  
Marisa Cenci  
Valentina Guizzi  
Loretta Mastroeni  
Carlo Mottura

Copyright © MMIII ARACNE EDITRICE S.R.L.  
00173 Roma, via Raffaele Garofalo, 133 A/B  
(06) 72672222 – (06) 93781065  
telefax (06) 72672233

[www.aracne-editrice.it](http://www.aracne-editrice.it)  
[info@aracne-editrice.it](mailto:info@aracne-editrice.it)

ISBN 88-7999-752-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

I edizione: maggio 2004

# **Estensione della tecnica degli alberi bi/tri-nomiali ad alberi N-nomiali. Applicazione ai processi diffusivi con salto.**

**Massimiliano Corradini**

Università degli Studi Roma Tre  
e-mail: m.corradini@uniroma3.it

## **Sommario**

Nel presente articolo è proposta un'estensione della tecnica degli alberi bi/tri-nomiali, largamente usata per la valutazione di titoli derivati, ad una tecnica basata sulla costruzione di alberi N-nomiali, con N intero arbitrario. Il vantaggio di tale tecnica consiste essenzialmente in 1) utilizzo di probabilità di transizione da un nodo ad un altro deducibili direttamente dall'evoluzione del sottostante in ambito *risk-neutral*; 2) facilità di realizzazione del codice per il calcolo numerico e notevole precisione di calcolo in tempi brevi; 3) agevole trattazione dei processi diffusivi con salto. I risultati ottenuti nel presente articolo sono simili a quelli ottenibili tramite uno schema di calcolo basato sull'integrazione in spazi di dimensione infinita (integrali di cammino di Feynmann). Si confrontino, relativamente al caso di processi stocastici puramente diffusivi, i riferimenti bibliografici [1, 2, 3].



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Il metodo degli alberi N-nomiali</b>	<b>13</b>
2.1	Processi di diffusione . . . . .	13
2.2	Processi diffusivi con salto . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Risultati</b>	<b>18</b>





# 1 Introduzione

Nella teoria moderna del *pricing* di titoli derivati sono comunemente usate, laddove non esistano soluzioni analitiche in forma chiusa, tecniche numeriche basate sulla costruzione di alberi binomiali o trinomiali. Più in particolare, si supponga di dover determinare il valore all'istante  $t_0$  di un titolo derivato  $\mathcal{F}$  su un sottostante  $S(t)$ , con *maturity*  $T$  e valore a scadenza  $\phi(S_T)$ . Si ricorda che, se il valore del sottostante  $S(t)$  soddisfa l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dS(t) = \mu(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dz(t) \\ S(t_0) = S \end{cases}, \quad (1)$$

dove  $\mu(S(t), t)$  e  $\sigma(S(t), t)$  sono, rispettivamente, il *drift* e la volatilità del processo  $S(t)$ ,  $dz(t)$  è un processo di Wiener standard e  $t \in [t_0, T]$ , il valore  $\mathcal{F}(S(t), t)$  di un generico titolo derivato che dipenda soltanto dal tempo  $t$  e dal sottostante  $S(t)$ , e il cui valore a scadenza sia  $\mathcal{F}(S_T, T) = \phi(S_T)$ , deve soddisfare, *in condizioni di assenza di arbitraggio*, l'equazione differenziale ( si confronti, per maggiori dettagli, il riferimento bibliografico [4]).

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}(S, t)}{\partial t} + (\mu(S, t) - q(S, t)\sigma(S, t))\frac{\partial \mathcal{F}(S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S, t)\frac{\partial^2 \mathcal{F}(S, t)}{\partial S^2} = \\ = r\mathcal{F}(S, t) \\ \mathcal{F}(S, T) = \phi(S) \end{cases}. \quad (2)$$

Nell'equazione (2),  $r$  rappresenta l'intensità istantanea di interesse priva di rischio, considerata per semplicità costante, mentre  $q(S, t)$  è il valore di mercato del rischio associato al sottostante  $S(t)$ .

La soluzione dell'equazione (2) può essere ottenuta utilizzando il teorema di Feynmann-Kač, il quale asserisce che (per maggiori dettagli si confronti ad esempio il riferimento bibliografico [5]), data un'equazione alle derivate parziali in forma parabolica,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \alpha(x, t)\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta^2(x, t)\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = r(x, t)f(x, t),$$

con  $t \in [t_0, T]$  e con condizione al contorno  $f(x, T) = g(x)$ , e dato il processo stocastico

$$dx(t) = \alpha(x(t), t)dt + \beta(x(t), t)dz(t), \quad (3)$$

con  $t \in [t_0, T]$  e condizione al contorno  $x(t_0) = x$ , sussiste la seguente identità:

$$f(x, t) = E^{\mathcal{M}}[e^{-\int_{t_0}^T r(x(s), s)ds} g(x(T)) | x(t_0) = x], \quad (4)$$

in cui la media va calcolata secondo la misura  $\mathcal{M}$  generata dal processo (3). Applicando tale teorema all'equazione (2), tenendo conto che  $r$  è costante e, quindi,

$$e^{-\int_{t_0}^T r(x(s), s)ds} = e^{-r(T-t_0)},$$

si ottiene:

$$\mathcal{F}(S, t_0) = e^{-r(T-t_0)} E^{\mathcal{Q}}[\phi(S_T) | S(t_0) = S], \quad (5)$$

ovvero il valore attuale del derivato,  $\mathcal{F}(S, t_0)$ , può essere ottenuto scontando il valore atteso del suo valore a scadenza, calcolato rispetto la misura  $\mathcal{Q}$  (la cosiddetta misura *risk-neutral* generalizzata) generata dal processo stocastico

$$\begin{cases} dS(t) = \bar{\mu}(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dz(t) \\ S(t_0) = S \end{cases}, \quad (6)$$

dove

$$\bar{\mu}(S(t), t) = \mu(S(t), t) - q(S(t), t)\sigma(S(t), t). \quad (7)$$

Si osservi che, detta  $\mathcal{P}$  la misura generata dall'evoluzione reale del processo, data dall'equazione (1), il passaggio dall'ambiente reale a quello *risk-neutral* o, equivalentemente, il passaggio dalla misura  $\mathcal{P}$  alla misura  $\mathcal{Q}$ , modifica soltanto il termine di *drift* del processo in esame mentre la volatilità rimane invariata: tale risultato può essere visto come caso particolare di un teorema molto più generale dovuto a Girsanov. Si può osservare ancora che se il sottostante  $S(t)$  è esso stesso un bene di investimento deve valere (si confronti il riferimento bibliografico [4])

$$\bar{\mu}(S(t), t) = rS(t) :$$

in tal caso la misura  $\mathcal{Q}$  è nota come misura *risk-neutral* tradizionale.

Per effettuare numericamente il calcolo del valore del titolo derivato dato dall'equazione (5), è opportuno dapprima suddividere l'intervallo temporale  $[t_0, T]$  in  $M$  sottointervalli, ciascuno di ampiezza  $\Delta t = \frac{T-t_0}{M}$ , cosicché la variabile temporale  $t$  possa assumere solo i valori discreti

$t_i = t_0 + i\Delta t$ ,  $i = 0, \dots, M$ . In tal modo è possibile approssimare l'evoluzione del processo in ambiente *risk-neutral* data dall'equazione (6) con il processo discreto

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i + \bar{\mu}(S_i, t_i)\Delta t + \sigma(S_i, t_i)\sqrt{\Delta t}\epsilon_i \\ S_0 = S \end{cases}, \quad (8)$$

dove  $S_i = S(t_i)$  e  $\epsilon_i$  è una variabile casuale con distribuzione gaussiana standard.

L'essenza del metodo degli alberi binomiali o trinomiali consiste nell'approssimare l'evoluzione del processo dato dall'equazione (8) supponendo che ad un dato istante temporale  $t_{i+1}$  la variabile stocastica  $S_{i+1}$  possa assumere soltanto i valori

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i + \alpha\Delta S \\ \alpha = \{-1, 0, 1\} \end{cases}, \quad (9)$$

dove la variabile aleatoria  $\alpha$  è definita da  $\text{Prob}(\alpha = 1) = p_u$ ,  $\text{Prob}(\alpha = 0) = 0$  e  $\text{Prob}(\alpha = -1) = p_d$  nel caso di alberi binomiali e da  $\text{Prob}(\alpha = 1) = p_u$ ,  $\text{Prob}(\alpha = 0) = p_m$  e  $\text{Prob}(\alpha = -1) = p_d$  nel caso di alberi trinomiali. In entrambi i casi le probabilità  $p_u$ ,  $p_d$  e  $p_m$  possono essere definite in base a considerazioni di consistenza interna del metodo mentre il passo "spaziale"  $\Delta S$  deve dipendere dal passo temporale  $\Delta t$  secondo una relazione ben definita come ad esempio, nel caso di alberi trinomiali,  $\Delta S \simeq \sigma\sqrt{3\Delta t}$  (si confronti il riferimento bibliografico [6]). Dalla conoscenza della struttura degli alberi binomiali o trinomiali si può poi calcolare il valore del derivato (5) (per maggiori dettagli si confrontino i riferimenti bibliografici [7, 8]).

Nel presente articolo si propone un metodo di calcolo che elimini la restrizione presente nella relazione (9) in modo tale che, se il processo continuo  $S(t)$  definito dall'equazione (6) è a valori in un determinato intervallo  $\mathcal{I} = [S_{min}, S_{max}]$ , allora il processo discreto  $S_i$  definito dall'equazione (8) assume gli  $N$  valori

$$\{S_{min}, S_{min} + \Delta S, S_{min} + 2\Delta S, \dots, S_{min} + (N - 2)\Delta S,$$

$$S_{min} + (N - 1)\Delta S = S_{max}\},$$

dove  $\Delta S = \frac{S_{max} - S_{min}}{N-1}$ . Nella Fig. 1 si mostra la costruzione di un albero pentanomiale con 2 passi temporali.

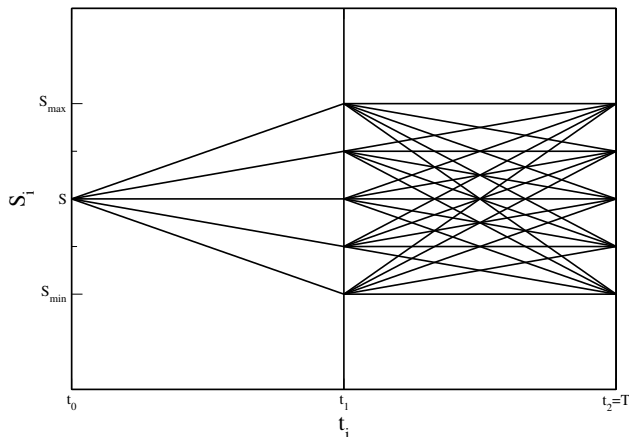


Figura 1

Nel metodo proposto nel presente articolo, inoltre, la probabilità di transizione da un nodo  $(t_i, S_i)$  al nodo  $(t_{i+1}, S_{i+1})$  può, essere calcolata direttamente a partire dall'evoluzione del processo  $S(t)$  in ambito *risk-neutral*, a meno di infinitesimi di ordine superiore a  $\Delta t$ . Infine, come si discuterà più in dettaglio nel seguito, la trattazione di processi stocastici con salti, rilevanti ad esempio nello studio dei titoli derivati energetici (elettricità, petrolio o gas), si può effettuare attraverso una semplice modifica del formalismo relativo a processi stocastici puramente diffusivi.

I risultati ottenuti nel presente articolo sono simili a quelli ottenibili tramite uno schema di calcolo del valore dell'opzione (5) basato sull'integrazione in spazi di dimensione infinita (integrali di cammino di Feynmann). Si confrontino, relativamente al caso di processi stocastici puramente diffusivi, i riferimenti bibliografici [1, 2, 3].

## 2 Il metodo degli alberi $N$ -nomiali

### 2.1 Processi di diffusione

Nel calcolo del valore del titolo derivato  $\mathcal{F}$  definito dall'equazione (5), che di seguito riscriviamo per comodità,

$$\mathcal{F}(S, t_0) = e^{-r(T-t_0)} E^{\mathcal{Q}}[\phi(S_T) | S(t_0) = S], \quad (10)$$

occorre calcolare la media del valore a scadenza  $\phi(S_T)$ , con condizione iniziale  $S(t_0) = S$ , relativamente alla probabilità  $\mathcal{Q}$  associata all'evoluzione del processo stocastico in ambito *risk-neutral*, definito dall'equazione (6),

$$\begin{cases} dS(t) = \bar{\mu}(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dz(t) \\ S(t_0) = S \end{cases} . \quad (11)$$

Tale media può essere calcolata attraverso la relazione

$$\mathcal{F}(S, t_0) = e^{-r(T-t_0)} \int dS_T \phi(S_T) f(T, S_T; t_0, S), \quad (12)$$

essendo  $f(T, S_T; t_0, S)$  la densità della probabilità che il processo  $S(t)$  assuma all'istante  $T$  il valore  $S_T$ , posto che all'istante  $t_0$  esso aveva assunto il valore  $S$ . Discretizzando l'intervallo temporale  $[t_0, T]$ , secondo quanto visto nel paragrafo 1,  $t_i = t_0 + i\Delta t$ , con  $i = 0, \dots, M$  e  $\Delta t = \frac{T-t_0}{M}$ , è possibile approssimare l'equazione differenziale stocastica (11) attraverso il seguente processo discreto:

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i + \bar{\mu}(S_i, t_i)\Delta t + \sigma(S_i, t_i)\sqrt{\Delta t}\epsilon_i \\ S_0 = S \end{cases} , \quad (13)$$

ed approssimare di conseguenza la densità della probabilità di transizione  $f(T, S_T; t_0, S_0)$ .

Si osservi infatti che detta  $f(t_2, S_2; t_0, S_0)$  la densità della probabilità che  $S(t)$  assuma all'istante  $t_2$  il valore  $S_2$ , posto che all'istante  $t_0$  aveva assunto il valore  $S_0$ , essa può essere riscritta come ( $t_0 < t_1 < t_2$ )

$$f(t_2, S_2; t_0, S_0) = \sum_{S_1} f(t_2, S_2; t_1, S_1) f(t_1, S_1; t_0, S_0) \Delta S, \quad (14)$$

cioè<sup>1</sup> la probabilità che, dato il valore del sottostante in  $t_0$  pari a  $S_0$  esso assuma il valore  $S_2$  al tempo  $t_2$ , è pari alla probabilità che dal valore  $S_0$  al tempo  $t_0$  esso assuma il valore  $S_1$  al tempo  $t_1$ , per la probabilità che dal valore  $S_1$  al tempo  $t_1$  esso assuma il valore  $S_2$  al tempo  $t_2$ , som-

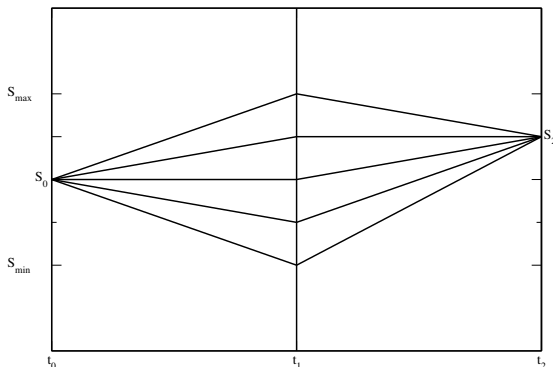


Figura 2

mando poi su tutti i possibili valori  $S_1 = S_{min} + k_1 \Delta S$ ,  $k_1 = 0, \dots, N - 1$  (si confronti la Fig. 2 relativamente al caso  $N = 5$ ).

Applicando ripetutamente  $M - 1$  volte la relazione (14), otteniamo:

$$\begin{aligned}
 f(T, S_T; t_0, S_0) &= \sum_{S_{M-1} \dots S_1} (\Delta S)^{M-1} f(T, S_T; t_{M-1}, S_{M-1}) \times \dots \\
 &\dots \times f(t_{M-1}, S_{M-1}; t_{M-2}, S_{M-2}) \dots \times \\
 &\times f(t_2, S_2; t_1, S_1) f(t_1, S_1; t_0, S_0) >
 \end{aligned} \tag{15}$$

ovvero,

$$f(T, S_T; t_0, S_0) = \frac{1}{\Delta S} \sum_{S_{M-1} \dots S_2, S_1} \prod_{i=0}^{M-1} f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i) \Delta S, \tag{16}$$

avendo posto  $S_M = S_T$ . Scegliendo  $M$  sufficientemente grande, in modo che  $\Delta t = \frac{T-t_0}{M} \rightarrow 0$ , si può porre, a meno di infinitesimi di ordine superiore a  $\Delta t$ ,

<sup>1</sup>Tale relazione è nota in teoria della probabilità come equazione di Chapman-Kolmogorov.

$$f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i, S_i)\Delta t}} e^{-\frac{(S_{i+1}-S_i-\bar{\mu}(t_i, S_i)\Delta t)^2}{2\sigma^2(t_i, S_i)\Delta t}}, \quad (17)$$

essendo la variabile casuale  $S_{i+1}$  distribuita secondo una gaussiana di media  $S_i + \bar{\mu}(t_i, S_i)\Delta t$  e varianza  $\sigma^2(t_i, S_i)\Delta t$ , come si può evincere dall'equazione (13). Dalla relazione (16) e dalla relazione (12), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S_0, t_0) &\simeq e^{-r(T-t_0)} \int dS_T \phi(S_T) \frac{1}{\Delta S} \sum_{S_{M-1}, \dots, S_2, S_1} \times \quad (18) \\ &\times \prod_{i=0}^{M-1} f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i) \Delta S. \end{aligned}$$

Calcolando in modo approssimato l'integrale nell'equazione (18) tramite la relazione

$$\int dS_T g(S_T) \simeq \sum_{S_M} g(S_M) \Delta S,$$

si ottiene, infine,

$$\mathcal{F}(t_0, S_0) \simeq e^{-r(T-t_0)} \sum_{S_M} \phi(S_M) \sum_{S_{M-1}, \dots, S_2, S_1} \prod_{i=0}^{M-1} f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i) \Delta S, \quad (19)$$

ovvero<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t_0, S_0) &\simeq e^{-r(T-t_0)} \sum_{S_1} f(t_1, S_1; t_0, S_0) \sum_{S_2} f(t_2, S_2; t_1, S_1) \dots \times \\ &\times \sum_{S_{M-1}} f(t_{M-1}, S_{M-1}; t_{M-2}, S_{M-2}) \times \\ &\times \sum_{S_M} f(t_M, S_M; t_{M-1}, S_{M-1}) \phi(S_M) \end{aligned} \quad (20)$$

con  $f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i)$  data dall'equazione (17).

---

<sup>2</sup>Per un confronto tra il risultato ottenuto nel presente articolo e quello ottenibile tramite una formulazione del problema basata sugli integrali di cammino di Feynmann, si confronti l'equazione (19) del presente testo con l'equazione (42) del riferimento bibliografico [2].



Dalle relazioni (19) o (20) si evince che il calcolo del valore  $\mathcal{F}$  di un titolo derivato può essere ricondotto al calcolo di  $M$  somme, corrispondenti al numero di passi temporali in cui si suddivide l'intervallo di tempo  $[t_0, T]$ , che non presenta, in generale, particolari difficoltà sia dal punto di vista della stesura del codice sia dal punto di vista del tempo di calcolo.

## 2.2 Processi diffusivi con salto

Si consideri ora il problema del calcolo del valore  $\mathcal{F}$  di un titolo derivato su un sottostante  $S(t)$ , nel caso in cui il valore di quest'ultimo possa subire salti improvvisi<sup>3</sup>. Si supponga che l'evoluzione del valore del sottostante  $S(t)$  sia definita dall'equazione differenziale stocastica ( $t \in [t_0, T]$ )

$$\begin{cases} dS(t) = \mu(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dz(t) + u(S(t), t)dq(t) \\ S(t_0) = S \end{cases}, \quad (21)$$

in cui  $dq$  è un processo di Poisson:

$$\begin{cases} \text{Prob}(dq = 1) = \lambda dt \\ \text{Prob}(dq = 0) = 1 - \lambda dt \end{cases}.$$

Tale processo, in effetti, è in grado di simulare la presenza di salti improvvisi: tra  $t$  e  $t + dt$ , con probabilità pari a  $\lambda dt$ , il processo  $S(t)$  subisce un salto di ampiezza pari a  $u(S(t), t)$ .

Il valore  $\mathcal{F}$  di un titolo derivato con *maturity*  $T$  e valore a scadenza  $\phi(S_T)$ , è dato, in completa analogia con quanto visto nel paragrafo precedente, dalla relazione

$$\mathcal{F}(S, t_0) = e^{-r(T-t_0)} E^{\mathcal{Q}}[\phi(S_T) | S(t_0) = S], \quad (22)$$

in cui  $\mathcal{Q}$  è la misura generata dall'evoluzione del processo  $S(t)$  in ambiente *risk-neutral*, data dall'equazione (per maggiori dettagli si confronti il riferimento bibliografico [9])

$$\begin{cases} dS(t) = \bar{\mu}(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dz(t) + u(S(t), t)dq(t) \\ S(t_0) = S \end{cases}, \quad (23)$$

---

<sup>3</sup>Tale comportamento è particolarmente rilevante, ad esempio, nel caso in cui il sottostante  $S(t)$  rappresenti un bene di natura energetica, come l'elettricità, il petrolio o il gas (si confrontino i riferimenti bibliografici [9, 10] per maggiori dettagli in proposito)

in cui

$$\bar{\mu}(S(t), t) = \mu(S(t), t) - \sigma(S(t), t)q(S(t), t), \quad (24)$$

essendo  $q(S(t), t)$  il valore di mercato del rischio associato a  $S(t)$ .

Per il calcolo della media nell'equazione (22) si può utilizzare un procedimento simile a quello proposto nel paragrafo precedente (equazioni (15), (16) e (18)-(20)). In questo caso però la densità della probabilità di transizione dal nodo  $(t_i, S_i)$  al nodo  $(t_{i+1}, S_{i+1})$ ,  $f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i)$ , non è più una semplice funzione gaussiana. Si osservi tuttavia che, per definizione stessa di processo di Poisson, tra  $t_i$  e  $t_i + \Delta t$  il processo  $S_i$ , risultante dalla discretizzazione del processo dato nell'equazione (23), può subire, al più, un salto e, quindi,

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i, S_i)\Delta t}} e^{-\frac{(S_{i+1}-S_i-\bar{\mu}(t_i, S_i)\Delta t)^2}{2\sigma^2(t_i, S_i)\Delta t}} (1 - \lambda\Delta t) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i, S_i)\Delta t}} e^{-\frac{(S_{i+1}-S_i-\bar{\mu}(t_i, S_i)\Delta t-u(t_i, S_i))^2}{2\sigma^2(t_i, S_i)\Delta t}} \lambda\Delta t \end{aligned} \quad (25)$$

In conclusione, nel caso in cui il processo  $S(t)$  subisca salti improvvisi e tali salti possano essere descritti tramite un processo di Poisson, come supposto nell'equazione (21), è possibile utilizzare per il calcolo del valore di un titolo derivato ancora l'approssimazione (20) trovata nel caso di processo puramente diffusivo, in cui però la densità della probabilità di transizione  $f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i)$  è data dalla somma di due distribuzioni gaussiane con opportuni pesi (equazione (25)). Si osservi pertanto che nell'ambito dello schema di calcolo proposto nel presente articolo l'inclusione di un termine di Poisson nell'evoluzione del sottostante non aumenta né la difficoltà della stesura del codice né tantomeno il tempo necessario per il calcolo numerico. In particolare gli alberi  $N$ -nomiali qui presentati non subiscono alcuno *shift* nel momento in cui il sottostante  $S(t)$  subisce un salto, contrariamente a quanto avviene nel caso degli alberi bi/trinomiali ordinariamente considerati in letteratura, essendo l'effetto del salto incorporato direttamente nelle probabilità (25) associate ai vari valori del sottostante.

### 3 Risultati

Nel presente paragrafo applichiamo il metodo di calcolo dedotto in precedenza per ottenere il valore di un'opzione europea di tipo *call*, con *maturity*  $T$  e *strike-price*  $K$ ,

$$\mathcal{O}(S, t_0) = e^{-r(T-t_0)} E^{\mathcal{Q}}[\max(S_T - K, 0) | S(t_0) = S], \quad (26)$$

nel caso in cui il valore del sottostante  $S(t)$ , che si suppone non essere un bene di investimento, evolva (in ambiente *risk-neutral*) secondo l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dS(t) = \bar{\mu}(S(t), t)dt + \sigma S(t)dz(t) + udq(t) \\ S(t_0) = S \end{cases}, \quad (27)$$

con

$$\bar{\mu}(S(t), t) = \mu S(t),$$

cioè secondo un moto geometrico *browniano* con salto (in Fig. 3, per evidenziare la rilevanza del salto, si rappresentano due soluzioni tipiche di tale equazione, una in presenza di salto, l'altra senza);

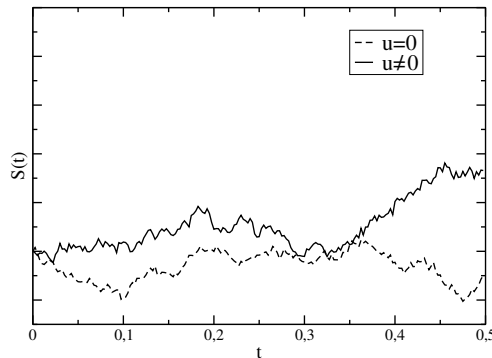


Figura 3

oppure secondo un'evoluzione stocastica (in ambiente *risk-neutral*) data da

$$\begin{cases} dS(t) = \bar{\mu}(S(t), t)dt + \sigma S(t)dz(t) + udq(t) \\ S(t_0) = S \end{cases}, \quad (28)$$

con

$$\bar{\mu}(S(t), t) = \alpha(\beta - \ln S(t))S(t)$$

cioè un processo *mean-reverting* con salto (in Fig. 4, per evidenziare la rilevanza del salto, si rappresentano due soluzioni tipiche di tale equazione, una in presenza di salto, l'altra senza), rilevante nella descrizione dell'evoluzione dei beni di natura energetica (si confronti il riferimento bibliografico[9] per maggiori dettagli al riguardo).

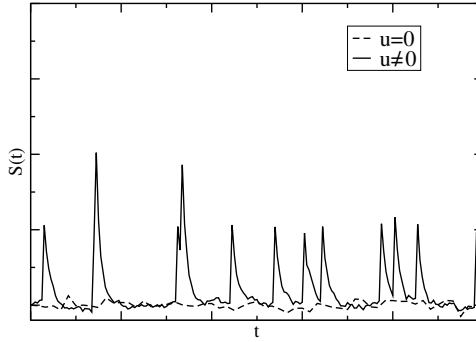


Figura 4

Il calcolo del valore dell'opzione (26) può essere effettuato utilizzando la relazione (20), con densità della probabilità di transizione data da

$$f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} e^{-\frac{(S_{i+1} - S_i - \mu S_i \Delta t)^2}{2\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} (1 - \lambda \Delta t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} e^{-\frac{(S_{i+1} - S_i - \mu S_i \Delta t - u)^2}{2\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} \lambda \Delta t ,$$

nel caso di moto geometrico *browniano* con salto e da

$$f(t_{i+1}, S_{i+1}; t_i, S_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} e^{-\frac{(S_{i+1} - S_i - \alpha(\beta - \ln S_i) S_i \Delta t)^2}{2\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} (1 - \lambda \Delta t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} e^{-\frac{(S_{i+1} - S_i - \alpha(\beta - \ln S_i) S_i \Delta t - u)^2}{2\sigma^2 S_i^2 \Delta t}} \lambda \Delta t$$

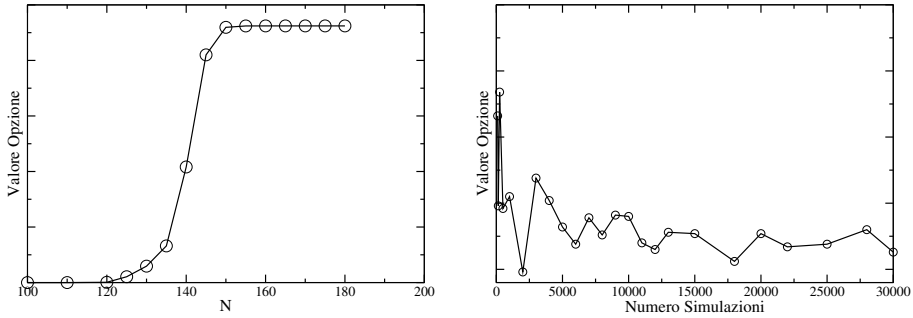


Figura 5

nel caso di processo *mean-reverting* con salto.

Nella Tabella 1 si rappresentano i risultati ottenuti nel caso in cui il sottostante evolve, in ambito *risk-neutral*, secondo un moto geometrico *browniano* con salto mentre nella Tabella 2 si rappresentano i risultati ottenuti nel caso in cui esso evolve, sempre in ambito *risk-neutral*, secondo un processo *mean-reverting* con salto.

$S$	Monte Carlo	Errore Monte Carlo	Albero $N$ -Nomiale
6.0	0.0576	0.0066	0.05799
8.0	0.479	0.022	0.4916
10.0	1.579	0.040	1.5846
12.0	3.234	0.058	3.2210
14.0	5.193	0.073	5.1518

**Tabella 1:**  $r = 0.02$  (anni) $^{-1}$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $u = 0.01$ ,  $\lambda = 10$  (anni) $^{-1}$ ,  $T = 0.5$  anni,  $K = 10$ ,  $N = 160$ ,  $M = 60$ . La simulazione Monte Carlo è stata effettuata generando 30000 traiettorie casuali.

$S$	Monte Carlo	Errore Monte Carlo	Albero $N$ -Nomiale
6.0	0.924	0.020	0.9243
8.0	0.923	0.028	0.9250
10.0	0.926	0.035	0.9273
12.0	0.925	0.040	0.9303
14.0	0.933	0.045	0.9310

**Tabella 2:**  $r = 0.02$  (anni) $^{-1}$ ,  $\alpha = 120$ ,  $\beta = \ln 10$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $u = 0.3$ ,  $\lambda = 10$  (anni) $^{-1}$ ,  $T = 0.5$  anni,  $K = 10$ ,  $N = 160$ ,  $M = 60$ . La simulazione Monte Carlo è stata effettuata generando 30000 traiettorie casuali.

Nella prima colonna di tali tabelle si riporta il valore iniziale del sottostante,  $S(t_0) = S$ ; nella seconda colonna il valore medio dell'opzione  $\bar{\mathcal{O}}$  ottenuto tramite simulazione Monte Carlo generando 30000 traiettorie casuali; nella terza colonna si riporta invece l'errore  $E$  relativo alla simulazione Monte Carlo, scelto pari a tre volte l'errore Monte Carlo standard, in modo tale da ottenere una probabilità del 98% che il valore medio ottenuto cada nell'intervallo  $(\bar{\mathcal{O}} - E, \bar{\mathcal{O}} + E)$ ; nella quarta colonna si rappresenta il valore dell'opzione ottenuto tramite la tecnica degli alberi  $N$ -nomiali, con  $N = 160$  (nella Fig. 5 si rappresenta lo studio della convergenza del valore simulato dell'opzione  $\mathcal{O}$  al variare di  $N$  e del numero di traiettorie casuali generate nella simulazione Monte Carlo, relativamente al processo *mean-reverting* con salto, per  $S = 6$ ). Come si può osservare, l'accordo tra i risultati ottenuti col metodo degli alberi  $N$ -nomiali e col metodo Monte Carlo è, entro l'errore Monte Carlo, completo.

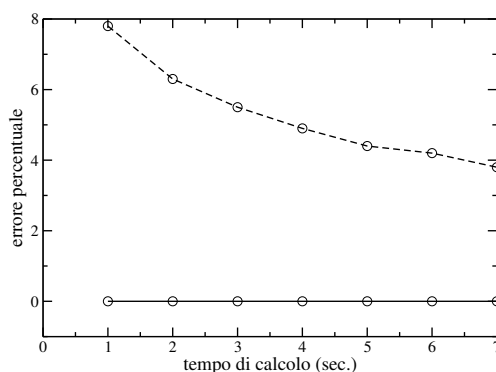


Figura 6: La linea tratteggiata rappresenta la precisione del calcolo Monte Carlo mentre quella continua la precisione del metodo degli alberi  $N$ -nomiali, che risulta essere sempre  $\sim 10^{-3}\%$ .

Si osservi comunque che, a parità di tempi di calcolo, la precisione del Monte Carlo è molto più bassa rispetto a quella ottenibile attraverso il metodo degli alberi  $N$ -nomiali: se, tipicamente, per ottenere una precisione del 2 – 4% tramite lo schema Monte Carlo occorrono all'incirca 6 – 10 secondi di tempo macchina, il metodo degli alberi  $N$ -nomiali fornisce una precisione del  $\sim 10^{-3}\%$  in meno di un secondo. Si confronti la Fig. 6 per uno studio della dipendenza della precisione del calcolo dal tempo di calcolo stesso.

In conclusione, il metodo proposto nel presente articolo può essere fecondamente utilizzato ogni qualvolta a) non risulti sufficiente la precisione del calcolo Monte Carlo; b) laddove si desideri ridurre considerevolmente la durata del tempo di calcolo associata alla simulazione Monte Carlo; c) in alternativa al metodo degli alberi bi/trinomiali, avendo tale metodo il considerevole vantaggio di non dover ricorrere ad alcun tipo di *shift* degli alberi, essendo eventuali salti del sottostante già inclusi nella densità di probabilità di transizione da un nodo ad un altro.

## Ringraziamenti

A conclusione del presente lavoro desidero ringraziare la prof.ssa Marisa Cenci, il dott. Andrea Gheno e il prof. Carlo Mottura per le preziose e stimolanti discussioni e per l'aiuto indispensabile datomi nella stesura dello stesso.

## Riferimenti bibliografici

- [1] M. Rosa-Clot and S. Taddei, 1999, *A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: I. Formalism and Analytical Result*, arxiv.org/ps/cond-mat/9901277.
- [2] M. Rosa-Clot and S. Taddei, 1999, *A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: II. Numerical Methods*, arxiv.org/ps/cond-mat/9901279.
- [3] M. Otto, 1998, *Using path integrals to price interest rate derivatives*, arxiv.org/ps/cond-mat/9812318.
- [4] J. Hull, 2003, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [5] N.H. Bingham and R. Kiesel, 2000, *Risk-Neutral Valuation*, Springer, London.
- [6] P. P. Boyle, *Option valuation using a three jump process*, International Option Journal, 3, 7-12.
- [7] J. C. Cox , S. A. Ross and M. Rubinstein, 1979, *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, pp. 229-263.
- [8] L. Clewlow and C. Strickland, 1998, *Implementing Derivatives Models*, John Wiley, London.
- [9] L. Clewlow and C. Strickland, 2000, *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*, Lacima, London.
- [10] D. Pilipovic, 1998, *Energy Risk*, McGraw-Hill, New York.





# WORKING PAPER PUBBLICATI

1997

1. M. D'ANTONIO, M. SCARLATO  
*Struttura economica e commercio estero: un'analisi per le province italiane*
2. P. GAREGNANI, A. PALUMBO  
*Accumulation of capital*
3. E. CERRITO  
*Crisi di cambio e problemi di politica monetaria nell'Italia di fine Ottocento.  
Appunti su alcune evidenze empiriche*

1998

4. F. MANNI  
*Struttura delle fonti di finanziamento:  
un'indagine sulle principali società italiane produttrici di bevande*
5. J.O. BERGER, J. MORTERA  
*Default Bayes factors for one-sided hypothesis testing*
6. A. TREZZINI  
*Capacity utilisation in the log run: a reply to Serrano*
7. A.M. FERRAGINA  
*Quality product differentiation in CEE-EU Intra-Industry trade*
8. M.F. RENZI, L. CAPPELLI, G. SALERNO  
*Outsourcing: opportunità e limiti per le aziende che operano  
con sistemi di qualità conformi alle norme ISO 9000*
9. M. SCARLATO  
*The impact of international trade on employment and wage differentials:  
some evidence from the italian macro-regions*
10. A. TREZZINI  
*Some notes on long-run capacity utilisation,  
steady state and induced investment*

1999

11. S. MONNI  
*A convergence analysis of human development*
12. G. M. REY  
*Informazione e politiche pubbliche: non è mai troppo tardi*

2000

13. M.M. BARBIERI, C. CONIGLIANI  
*Fractional bayes factors for the analysis of autoregressive models with possible unit roots*
14. M. SCARLATO  
*Capitale sociale e Sviluppo Economico*
15. A.M. FERRAGINA  
*Price versus quality competition in Italy's trade with Central and Eastern Europe over Transition*
16. M. D'ANTONIO, M. SCARLATO  
*Capitale umano e sviluppo economico. Un modello di equilibrio economico generale per il Centro-Nord ed il Mezzogiorno d'Italia*
17. M. CENCI, L. POFFO CIUCCI  
*Gli effetti della regolamentazione sull'attività di Insider Trading*
18. A. GHENO  
*Alberi binomiali e struttura della volatilità*
19. M. CENCI  
*Modelli per la struttura a termine con volatilità stocastica (una rassegna critica)*
20. M. CENCI, A. GHENO  
*Metodologie per la valutazione delle obbligazioni convertibili in ipotesi di evoluzione stocastica della struttura per scadenza*

2001

21. M. D'ANTONIO  
*L'interdipendenza tra economia ed ambiente: un'analisi applicata all'Italia*
22. A. NACCARATO  
*Uno studio sulla diffusione di fenomeni metereologici mediante particolari modelli spazio-temporali*
23. M. CENCI, M. SCARLATO  
*Settore sommerso e politiche di emersione: un approccio stocastico*
24. S. FADDA  
*Per un nuovo sostegno allo sviluppo locale: patti territoriali e servizi al territorio nel nuovo scenario economico*

2002

25. F. DE FILIPPIS, D. STORTI  
*Le politiche di sviluppo rurale nell'Unione Europea: un "secondo pilastro" tutto da inventare*
26. F. DE FILIPPIS, L. SALVATICI  
*The eastwards Enlargement of the European Union and the Common Agricultural Policy*
27. S. FIUMARA, E. BELLISARIO  
*La rilevanza della certificazione di qualità nella responsabilità del produttore di giocattoli*

28. S. FADDA  
*Does the change of Economic institutions require a change in values?*
29. A. CORESE  
*La mediateca: approcci gestionali*
30. S.M. FRATINI  
*Il teorema dell'indice e l'unicità dell'equilibrio con produzione:  
una discussione dei limiti di procedimento*
31. C. CONIGLIANI, F. SPEZZAFERRI  
*An alternative Bayes factor for testing for unit autoregressive roots*
32. M. CIURLIA  
*Applicazione di tecniche di simulazione alla valutazione delle opzioni russe*

2003

33. C. D'APICE  
*La distribuzione del reddito in Italia nell' ultimo trentennio*
34. C. CONIGLIANI, A. TANCREDI  
*Semi-parametric modelling for costs of health care technologies*
35. M. CENCI, M. SCARLATO  
*Innovazione tecnologica e offerta di skills: una simulazione del ruolo della storia  
e delle aspettative in un'area in via di sviluppo*

2004

36. S. FRATINI  
*Il ritorno delle tecniche in un modello di equilibrio intertemporale  
con generazioni sovrapposte*
37. V. GUIZZI  
*Selezione di portafogli ottimi con vincolo di shortfall*
38. A. LAMBERTI, A. NACCARATO  
*Il problema delle stime preliminari nelle indagini congiunturali:  
una breve rassegna ed una proposta*
39. M. CORRADINI  
*Estensione della tecnica degli alberi bi/tri-nomiali ad alberi N-nomiali. Applicazione ai  
processi diffusivi con salto*

Finito di stampare nel mese di maggio del 2004  
dalla tipografia «Grafica Editrice Romana S.r.l.» di Roma  
per conto della «Aracne editrice S.r.l.» di Roma