

Un modello per la dinamica del prezzo a pronti dell'elettricità

Massimiliano Corradini

Università degli Studi Roma Tre
e-mail: m.corradini@uniroma3.it

Sommario

Nel presente articolo si propone un nuovo modello per l'evoluzione del prezzo a pronti dell'elettricità basato sull'ipotesi che esistano due regimi diversi per la sua evoluzione: uno "normale" in cui i prezzi si discostano poco dai fattori che determinano il costo di produzione ed uno "eccezionale" in cui i prezzi subiscono salti improvvisi, assumendo valori molto grandi, affine quindi alla classe degli *switching-model*. Tale comportamento nella dinamica dei prezzi è ottenuto generalizzando opportunamente la nozione di coefficiente di *mean-reversion*: in particolare supponendo che esso sia un processo stocastico dipendente esplicitamente dal livello del prezzo. Ciò consente di ottenere un'evoluzione del prezzo dell'elettricità che, a differenza degli *switching-models*, è markoviana. Inoltre il livello di complessità del modello proposto è analogo ai modelli con coefficiente di *mean-reversion* deterministico.

Indice

1	Introduzione	7
2	Modelli esistenti	8
3	Il modello proposto	11

1 Introduzione

Nelle regioni in cui il mercato dell'elettricità è stato deregolamentato, come ad esempio il Regno Unito, la Scandinavia e, in parte, il Nord America, il prezzo a pronti di tale bene¹ è determinato dall'incontro tra domanda e offerta. A differenza di altri beni commerciati, sia per fini di puro investimento come avviene ad esempio per le azioni o le obbligazioni, sia per fini di consumo, come avviene ad esempio per i prodotti agroalimentari, le caratteristiche fisiche dell'elettricità e degli strumenti attraverso i quali essa viene prodotta e trasportata, determinano un comportamento dell'evoluzione del suo prezzo del tutto singolare, anche se confrontato con quello di altri beni di natura energetica, quali ad esempio il petrolio e il gas. Innanzitutto l'impossibilità di immagazzinare grossi quantitativi di elettricità causa un'essenziale inelasticità dal lato dell'offerta: ad esempio, in una giornata molto calda, in regioni in cui vi è una diffusione capillare di condizionatori d'aria, aumenta notevolmente la domanda di elettricità e la mancanza di elasticità dal lato dell'offerta causa salti improvvisi nel prezzo di tale bene (in California, nell'estate 2000, i prezzi hanno subito fluttuazioni da un valore medio di circa 40\$ fino a ad un valore di circa 750\$: si confronti, ad esempio, Barlow (2002)). La differenza nella capacità ed efficienza delle linee di trasporto in due regioni diverse può causare una sostanziale diversità nei prezzi, anche se tali regioni sono geograficamente molto vicine. Ad esempio, il primo novembre 1999 il prezzo dell'elettricità a Los Angeles era 45\$ mentre a San Francisco era pari a 103.79\$ (si confronti, ad esempio, Barlow (2002)). Ciò comporta una localizzazione dei mercati dell'elettricità che non ha analogo nei beni ordinariamente considerati. Un'altra caratteristica del prezzo dell'elettricità è quella della dipendenza dalle condizioni climatiche che determina un andamento diverso del prezzo a seconda della stagione. A differenza però di altri beni di natura energetica quali il petrolio o il gas che presentano un analogo comportamento stagionale, la stagionalità del prezzo dell'elettricità è da estendere anche a livello giornaliero e settimanale: nell'arco di una giornata i consumi diminuiscono nelle ore serali e notturne mentre nell'arco di una settimana essi sono inferiori nei giorni festivi, riducendosi notevolmente quelli relativi alle imprese. Come per altri tipi di *commodities* il prezzo dell'elettricità presenta, in intervalli temporali in cui non ci sono salti improvvisi, un

¹Qui e in seguito quando si parlerà di prezzo dell'elettricità si intenderà sempre il prezzo di un megawatt per ora (Mwh).

comportamento *mean-reverting* ovvero il valore del prezzo presenta una tendenza all'avvicinamento ad un valore di lungo periodo, vicino al costo di produzione, ma che a sua volta ha un comportamento stagionale.

2 Modelli esistenti

Le caratteristiche menzionate nella sezione precedente rendono impossibile l'applicazione di tecniche standard sia per quanto riguarda il modello di evoluzione del prezzo a pronti sia per quanto riguarda la valutazione di titoli derivati. A quest'ultimo riguardo osserviamo che non essendo l'elettricità un bene commerciato per fini di investimento e, in ogni caso, non essendo essa un bene immagazzinabile, ci si aspetta che il relativo mercato non sia completo (si confrontino, ad esempio, Hull (2000), Barone-Adesi e Gigli (2002) e Geman e Roncoroni (2002)). Un modello matematico per l'evoluzione del prezzo a pronti dell'elettricità, x , deve avere almeno tre termini distinti: un termine dx_{det} che determina l'andamento deterministico dell'evoluzione del prezzo: da quanto detto in precedenza esso deve descrivere l'andamento *mean-reverting* e contenere in sé gli effetti della stagionalità; un termine dx_{diff} che descrive le fluttuazioni del prezzo dall'andamento deterministico ed è dovuto alla momentanea assenza di equilibrio tra domanda ed offerta: esso può essere schematizzato come un processo stocastico gaussiano di media nulla ed opportuna deviazione standard, anch'essa influenzata dagli effetti di stagionalità; un termine dx_{salto} che descrive i salti improvvisi del prezzo: esso può essere schematizzato tramite un processo stocastico discontinuo, quale il processo di Poisson. Occorre tenere presente, comunque, che una volta avvenuto il salto il prezzo non rimane intorno al nuovo valore (come accade nella curva tratteggiata in Fig. 1) ma entro un brevissimo periodo (1-3 giorni in media) esso ritorna a valori normali (come accade nella curva non tratteggiata in Fig. 1): si dice in tal caso che nella dinamica dei prezzi compaiono i cosiddetti *spikes*.

La difficoltà principale nel costruire un modello matematico per l'evoluzione del prezzo a pronti dell'elettricità risiede proprio nella corretta descrizione di tali *spikes*. Osserviamo preliminarmente che, detti $dz(t)$ e $dq(t)$ gli incrementi tra t e $t + dt$ rispettivamente di un processo di Wiener standard e di un processo di Poisson con $Prob[dq = 1] = \lambda dt$ e

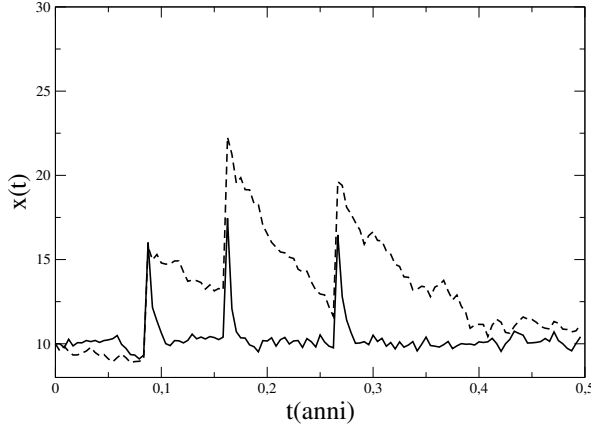


Fig. 1

$Prob[dq = 0] = 1 - \lambda dt$, le curve in Fig. 1 sono ottenute come soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dx = \alpha(\mu - \ln x)xdt + \sigma xdz + uxdq \quad (1)$$

per una particolare realizzazione dei processi di Wiener e di Poisson. σ e u rappresentano, rispettivamente, la volatilità e l'ampiezza del salto, il parametro μ rappresenta il valore di lungo periodo a cui tende il logaritmo del prezzo x mentre il parametro α , detto coefficiente di *mean-reversion* può essere considerato una stima della velocità con cui il logaritmo del prezzo x tende al livello di lungo periodo μ . Più precisamente, se indichiamo con $t_{1/2}$ il tempo di dimezzamento, ovvero il tempo che occorre affinché la distanza tra $\ln x$ e μ sia la metà di quella iniziale, in assenza di *shocks* casuali, si ha (si confronti Clewlow and Strickland (2000))

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

La curva tratteggiata in Fig. 1 è ottenuta scegliendo $\alpha = 11 \text{ anni}^{-1}$, corrispondente ad un tempo di dimezzamento pari a 3 settimane. La curva continua è ottenuta invece scegliendo $\alpha = 100 \text{ anni}^{-1}$, corrispondente ad un tempo di dimezzamento pari a 2.5 giorni.

Tra i primi tentativi di riprodurre un'evoluzione del prezzo dell'elettricità che contemplasse anche la presenza degli *spikes* ricordiamo Deng (1999), il quale assume per l'evoluzione del prezzo dell'elettricità un'equazione simile alla (1). La principale critica rivolta a tale lavoro (si confrontino, ad esempio, Geman e Roncoroni (2002) e Barone-Adesi e Gigli (2002)) consiste nel fatto che per riprodurre gli *spikes*, come visto in precedenza, occorre assumere il coefficiente di *mean-reversion* α piuttosto grande, $\alpha \simeq 100 - 200 \text{ anni}^{-1}$ o, analogamente, un tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ piuttosto piccolo, $t_{1/2} \simeq 1 - 3 \text{ giorni}$. Tuttavia nei periodi in cui non ci sono salti nel prezzo si osserva un coefficiente di *mean-reversion* decisamente più basso, $\alpha \simeq 1 - 10 \text{ anni}^{-1}$, corrispondente ad un tempo di dimezzamento che varia da qualche settimana a qualche mese. Si può concludere quindi che se il termine di *mean-reversion* nell'equazione (1) è utilizzato per descrivere l'evoluzione del prezzo dell'elettricità in un periodo in cui non ci sono salti, esso non può riprodurre anche gli *spikes*; viceversa se tale termine è utilizzato per descrivere gli *spikes* esso riproduce piuttosto male il comportamento dei prezzi in periodi temporali in cui non ci sono salti.

Una soluzione possibile apparsa in letteratura è quella di introdurre un modello che preveda uno *switching* tra due regimi: uno "normale" in cui il prezzo varia relativamente poco intorno ad un valore di lungo periodo, ed uno "eccezionale" in cui il prezzo assume valori molto alti (si confronti ad esempio Barone-Adesi e Gigli (2002)). Sfortunatamente in tali modelli il processo stocastico che descrive l'evoluzione del prezzo non è più markoviano implicando quindi una maggiore difficoltà sia per quanto riguarda il problema della stima dei parametri che compaiono nel modello sia per quanto riguarda la valutazione di titoli derivati. Un altro approccio esistente in letteratura (si confronti, ad esempio, Escribano and Villaplana (2002)) consiste nel supporre che ad un salto positivo del prezzo dell'elettricità ne segua uno negativo. Come osservato in Geman e Roncoroni (2002), tuttavia, se tali salti si susseguono in modo casuale è poco probabile che un salto positivo sia seguito immediatamente dopo da un salto negativo, cosa necessaria per riprodurre la forma degli *spikes*. Geman e Roncoroni introducono invece un modello (si confronti Geman e Roncoroni (2002)) affine agli *switching-models* preservando però la proprietà di Markov nella dinamica dei prezzi. In tale lavoro si suppone infatti un'evoluzione del prezzo dell'elettricità dettata da un'equazione simile all'equazione (1) in cui però l'ampiezza del salto u è positiva se il valore del prezzo è minore di una cer-

ta soglia ma diventa negativa se il valore del prezzo supera tale soglia. In tale modello una scelta opportuna del valore di soglia ed un'alta frequenza di salto rendono possibile la generazione degli *spikes*.

Nel presente articolo si propone un meccanismo per la riproduzione degli *spikes* nella dinamica dei prezzi dell'elettricità, basato sulla supposizione che il coefficiente di *mean-reversion* sia stocastico. Tale meccanismo riesce a conservare la proprietà di Markov del processo che descrive la dinamica del prezzo e non necessita tuttavia di ipotesi aggiuntive sulla natura dei salti (sia in termini di ampiezza che di frequenza del salto).

3 Il modello proposto

Come visto in precedenza, per una descrizione accurata dell'evoluzione del prezzo dell'elettricità, x , occorre considerare a) un termine dx_{det} che descrive l'andamento deterministico del prezzo e deve contemplare sia la proprietà di *mean-reverting* sia gli effetti dovuti alla stagionalità: un termine abbastanza generale, introdotto originariamente in Lucia e Schwartz (2002) è

$$dx_{det} = \partial_t \mu(t) dt + \alpha(\mu(t) - \ln x(t))x(t) dt. \quad (2)$$

La funzione $\mu(t)$ descrive l'andamento stagionale delle variazioni del prezzo x mentre α , come visto in precedenza, descrive la velocità con cui il prezzo tende ad allinearsi al valore di lungo periodo; b) un termine di diffusione, dx_{diff} , che descrive la momentanea assenza di equilibrio tra domanda ed offerta:

$$dx_{diff} = \sigma(t)x(t) dz(t), \quad (3)$$

in cui $dz(t)$ è l'incremento di un processo di Wiener standard mentre $\sigma(t)$ rappresenta la volatilità dei prezzi, anch'essa influenzata da effetti dovuti alla stagionalità (per maggiori dettagli al riguardo si confronti, ad esempio, Clewlow and Strikland (2002)); c) un termine dx_{salto} che descrive i salti improvvisi che subisce il prezzo a causa dell'inelasticità dal lato dell'offerta:

$$dx_{salto} = ux(t) dq(t), \quad (4)$$

in cui $dq(t)$ rappresenta l'incremento di un processo di Poisson elementare, con $Prob[dq(t) = 1] = \lambda(t)dt$ e $Prob[dq(t) = 0] = 1 - \lambda(t)dt$,

essendo la frequenza di salto $\lambda(t)$ anch'essa dipendente dalla stagionalità. Il parametro u rappresenta l'ampiezza del salto ed è, in generale, una variabile casuale la cui densità di probabilità non è nota *a priori*. Una scelta possibile, come in Merton (1976), è una distribuzione log-normale che garantisce la positività del salto.

Usando le relazioni (2)-(4) si ottiene quello che può essere definito lo Stato dell'Arte, nell'attuale letteratura, per l'evoluzione del prezzo a pronti dell'elettricità:

$$dx(t) = \partial_t \mu(t) dt + \alpha(\mu(t) - \ln x(t))x(t)dt + \sigma(t)x(t)dz(t) + ux(t)dq(t), \quad (5)$$

con $t \in [0, T]$ e condizione iniziale $x(0) = x$. Come discusso in precedenza, però, l'equazione (5) non garantisce *a priori* quella che sembra essere una delle caratteristiche più rilevanti nella dinamica dei prezzi dell'elettricità cioè la presenza di *spikes*: salti positivi del prezzo seguiti da una rapida discesa verso valori vicini al livello di lungo periodo.

Poiché lo scopo principale del presente lavoro è quello di proporre un nuovo meccanismo di generazione degli *spikes* nella dinamica del prezzo dell'elettricità, per meglio evidenziarlo trascuriamo la dipendenza dalle condizioni stagionali e consideriamo costante l'ampiezza del salto. In tal caso l'equazione (5) diviene:

$$dx(t) = \alpha(\mu - \ln x(t))x(t)dt + \sigma x(t)dz(t) + ux(t)dq(t), \quad (6)$$

con $Prob[dq = 1] = \lambda dt$ e $Prob[dq = 0] = 1 - \lambda dt$, $t \in [0, T]$ e $x(0) = x$. Discretizzando l'intervallo temporale $[0, T]$ in M sottointervalli e definendo $t_i = \frac{T}{N}i \equiv i\Delta t$, con $i = 0, \dots, N$ e $x(t_i) = x_i$ si ottiene la versione discreta dell'equazione (6):

$$x_{i+1} = x_i + \alpha(\mu - \ln x_i)x_i\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}x_i\epsilon_i + ux_i\Delta q_i, \quad (7)$$

in cui ϵ_i è una variabile casuale distribuita secondo una normale standard, $Prob[\Delta q_i = 1] = \lambda\Delta t$ e $Prob[\Delta q_i = 0] = 1 - \lambda\Delta t$. La discretizzazione (7) dell'equazione (6) non è dettata soltanto da esigenze di natura computazionale: come hanno osservato Barone-Adesi e Gigli (si confronti Barone-Adesi and Gigli (2002)) i prezzi dell'elettricità si mantengono costanti nell'unità di tempo (ora per ora in mercati quali ad esempio quello Olandese, Scandinavo e del Nord America): un modello discreto per l'evoluzione del prezzo sembra perciò preferibile rispetto ad uno continuo.

Come si è detto precedentemente, un coefficiente di *mean-reversion* molto grande è in grado di descrivere gli *spikes* presenti nella dinamica del prezzo dell'elettricità tuttavia una tale scelta comporta una pessima descrizione di tale dinamica nell'intervallo temporale tra due salti, la quale richiede un coefficiente di *mean-reversion* decisamente inferiore. Nel presente articolo si propone di generalizzare la nozione di coefficiente di *mean-reversion* considerandolo come una variabile stocastica dipendente esplicitamente dal valore del prezzo, preservando tuttavia la proprietà markoviana dell'equazione (7) senza rendere eccessivamente complesso il modello. L'idea principale, affine a quella sottostante gli *switching-models*, consiste nel supporre che ci siano due regimi: uno "normale" nel quale il prezzo è vicino al livello di lungo periodo e che presenta un andamento *mean-reverting* con coefficiente α relativamente "piccolo": esso dipende chiaramente dal tipo di mercato in esame ma è tipicamente dell'ordine di $1-10 \text{ anni}^{-1}$ corrispondente ad un tempo di dimezzamento dell'ordine del mese; uno "eccezionale" in cui i prezzi, a causa dei salti subiti, assumono valori molto alti: in tal caso imponiamo ancora che l'andamento deterministico sia *mean-reverting* ma con coefficiente α "grande", tipicamente dell'ordine di 100 anni^{-1} , corrispondente ad un tempo di dimezzamento pari a qualche giorno. Supponiamo quindi che il prezzo dell'elettricità soddisfi l'equazione

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i(x_i)(\mu - \ln x_i)x_i\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}x_i\epsilon_i + ux_i\Delta q_i, \quad (8)$$

e che il coefficiente di *mean-reversion* soddisfi

$$\alpha_{i+1} = \alpha_s\Delta q_i + [(\alpha_s - \alpha)\theta(\alpha_i - \alpha)\theta(x_i - x_s) + \alpha](1 - \Delta q_i), \quad (9)$$

con $\alpha_0 = \alpha$. Nell'equazione (9) α e α_s sono rispettivamente i coefficienti di *mean-reversion* corrispondenti ai due regimi "normale" ed "eccezionale", x_s è un valore del prezzo di cui spiegheremo in seguito il significato e $\theta(\cdot)$ è la funzione a gradino

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} .$$

Analizzando in dettaglio l'equazione (9) è facile mostrare che essa soddisfa le richieste sopra menzionate. Supponiamo infatti che il primo salto

avvenga all'istante t_k : $\Delta q_k = 1$ ma $\Delta q_i = 0 \forall t_i < t_k$. All'istante t_1 si ha $\alpha_1 = \alpha$ essendo $\Delta q_0 = 0$ ed il termine tra parentesi quadrate nell'equazione (9) pari ad $\alpha (\theta(\alpha_0 - \alpha) = \theta(0) = 0)$. Finché $t_i < t_k$ si può ripetere lo stesso ragionamento ed ottenere sempre $\alpha_{i+1} = \alpha$: il sistema si trova sempre nel regime “normale”. All'istante t_k avviene il salto: in tal caso, nell'istante successivo, il sistema entra nel regime “eccezionale”: $\alpha_{k+1} = \alpha_s$, essendo $\Delta q_k = 1$. In seguito il valore del coefficiente di *mean-reversion* rimane pari ad α_s (e quindi il sistema continua a rimanere nel regime “eccezionale”) finché il prezzo x non è sceso a valori “normali”, cioè finché $x > x_s$. Infatti, anche se all'istante t_{k+1} non c'è salto (in caso contrario si avrebbe banalmente $\alpha_{k+1} = \alpha_s$), si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+2} &= [(\alpha_s - \alpha)\theta(\alpha_s - \alpha)\theta(x_{k+1} - x_s) + \alpha] \\ &= [(\alpha_s - \alpha)\theta(x_{k+1} - x_s) + \alpha] \end{aligned} ,$$

essendo $\theta(\alpha_s - \alpha) = 1$. Se $x_{k+1} > x_s$, cioè se il prezzo non è sceso a valori normali, anche $\theta(x_{k+1} - x_s) = 1$ e, quindi, dall'equazione precedente $\alpha_{k+2} = \alpha_s$. Il ragionamento appena fatto si può ripetere finché il prezzo continua ad essere alto, ovvero nel regime “eccezionale”. Nel momento in cui il prezzo raggiunge livelli “normali”, $x \leq x_s$ (sia esso l'istante t_j) il coefficiente di *mean-reversion* ritorna, all'istante successivo, al valore normale:

$$\alpha_{j+1} = [(\alpha_s - \alpha)\theta(\alpha_s - \alpha)\theta(x_j - x_s) + \alpha] = \alpha,$$

essendo $\theta(x_j - x_s) = 0$. La coppia di equazioni (8), (9) è pertanto in grado di descrivere un comportamento del prezzo in un regime “normale” in cui i prezzi sono “bassi”, $x_i < x_s$, ed il coefficiente di *mean-reversion* è “piccolo”, $\alpha_i = \alpha$, ed in un regime “eccezionale” in cui i prezzi hanno subito un salto improvviso e sono “alti”, $x_i \geq x_s$, ed il coefficiente di *mean-reversion* è grande, $\alpha_i = \alpha_s$, in modo da poter riprodurre gli *spikes*. Da quanto detto si deduce che il parametro x_s assume il significato di valore di soglia del prezzo: è chiaro che esso non è noto a priori e varierà da mercato a mercato. È lecito comunque aspettarsi che tale valore di soglia sia vicino al valore di lungo periodo, essendo tale il prezzo in regime “normale”. La Fig. 2 mostra una soluzione dell'equazione (8), per una particolare realizzazione dei processi stocastici di Wiener e di Poisson. Nella curva non tratteggiata il coefficiente di *mean-reversion* α in regime

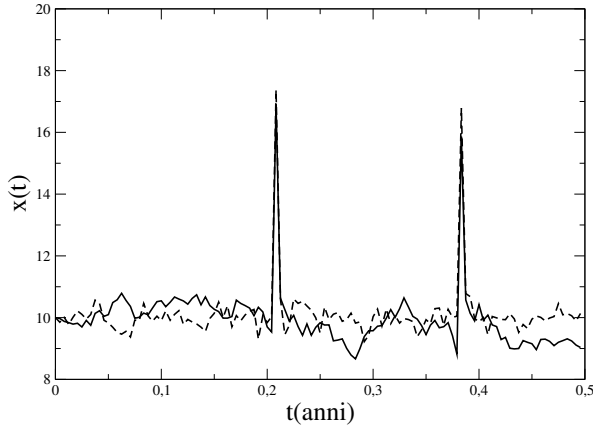


Fig. 2

“normale” è stato scelto pari a 11 (anni^{-1}), quello relativo al regime “eccezionale”, α_s , è stato scelto pari a 166 (anni^{-1}) mentre il parametro di soglia x_s è stato scelto pari a $\ln 10$; per la curva tratteggiata si è scelto $\alpha_i \equiv \alpha_s$, corrispondente al modello di Deng (1999) del quale si è discusso in precedenza. In entrambi i casi per gli altri parametri si è scelto: $\mu = \ln 10$, $\sigma = 0.4$, $u = 0.3$, $\lambda = 10$ (anni^{-1}). Come si può osservare da tale figura, mentre la descrizione degli *spikes* è praticamente identica, nel regime “normale” le due curve differiscono: in particolare la curva non tratteggiata, relativa al modello proposto nel presente articolo, mostra una variabilità maggiore nei prezzi o, più tecnicamente, il termine diffusivo nell’equazione (8) non è soppresso, in regime “normale” da un coefficiente di *mean-reversion* troppo grande, come si riscontra in effetti nella realtà. Osserviamo comunque che il livello di difficoltà insito nella soluzione delle equazioni (8), (9) è all’incirca quello che si avrebbe nella soluzione dell’equazione (8) con un coefficiente di *mean-reversion* deterministico visto che nell’equazione (9) non c’è il termine diffusivo mentre il termine di Poisson è perfettamente correlato con quello relativo all’evoluzione del prezzo.

Ringraziamenti

A conclusione del presente lavoro desidero ringraziare la prof.ssa Marisa Cenci, il dott. Andrea Gheno e il prof. Carlo Mottura per le preziose e stimolanti discussioni e per l’aiuto indispensabile datomi nella stesura dello stesso.

Riferimenti Bibliografici

1. M. Barlow, (2002), *A diffusion model for electricity prices*, *Mathematical Finance* 12, 287-298.
2. G. Barone-Adesi, and A. Gigli, (2002), *Electricity Derivatives*, Working Paper, National Center of Competence in Research, Università della Svizzera Italiana.
3. L. Clewlow, and C. Strikland, (2000), *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*, Lacima, London.
4. S. Deng, (1999), *Stochastic model of energy commodity prices and their application: mean reversion with jumps and spikes*, Working Paper, Georgia Institute of Technology.
5. A. Escribano, and P. Villaplana, (2002), *Modelling electricity prices: international evidence*, Working Paper, Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid.
6. H. Geman, and A. Roncoroni, (2002), *A class of marked point processes for modeling electricity prices*, Working Paper, ESSEC Business School.
7. J. Hull, (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall International Edition.
8. J. Lucia, and E. Schwartz, (2002), *Electricity prices and power derivatives: evidence from the Nordic Power Exchange*, *Review of Derivatives Research* 5, 5-50.
9. R. Merton, (1976), *Option Pricing when Underling Stock Returns are Discontinuous*, *Journal of Financial Economics* 3, 125-144.