

ARBITRAGEM ESTATÍSTICA E ESTRATÉGIA LONG-SHORT PAIRS TRADING, ABORDAGEM DA COINTEGRAÇÃO APLIACADA A DADOS DO MERCADO BRASILEIRO

JOÃO F. CALDEIRA¹

Julho, 2010

Resumo. A motivação para este artigo é aplicar os testes de cointegração de Johansen e Engle-Granger para identificar pares de ações a serem usados numa estratégia de *pairs trading*. Estratégias *pairs trading* são um tipo de arbitragem estatística de valor relativo que busca explorar desvios temporários de relações de equilíbrio de longo prazo entre pares de ações. Além de estimar uma relação de equilíbrio de longo prazo para identificar os pares e modelar os resíduos resultantes, com característica de reversão à média, empregamos um indicador de rentabilidade em simulações dentro da amostra para selecionar pares de ações para compor uma carteira *pairs trading* em testes fora da amostra. Nós analisamos a rentabilidade da estratégia de investimento *pairs trading* com dados diários do mercado de ações brasileiro no período de janeiro de 2005 a dezembro de 2009. Aplicando regras de *trading* simples obtivemos rentabilidade média de 17,49% ao ano para uma carteira de pares de ações que se auto financia. Apresentando índice de Sharpe de 1.29 e baixa correlação com o mercado, os resultados reforçam o uso do conceito de cointegração na gestão quantitativa de fundos.

Palavras chave. *pairs trading*; arbitragem estatística; cointegração; estratégia neutra ao mercado.

Abstract. The motivation for this paper is to apply Johansen and Engle-Granger cointegration tests to identify pairs of shares to be used in pairs trading strategy. Pairs trading is a statistical arbitrage hedge fund strategy designed to exploit temporary deviations of long-term equilibrium relationships between two stocks. In addition to estimating a long-term equilibrium to identify the pairs and model the resulting mean-reverting residual series, we used an indicator of profitability in in-sample simulations to select trading pairs to compose a pairs trading portfolio in out-of-sample tests. We assessed the profitability of pairs trading investment strategy with daily data from Brazilian stock market from January 2005 to December 2009. By applying simple rules of trading we obtained an average return of 17.49% per year for a pairs trading portfolio that is self financing. Reaching the Sharpe index of 1.29 and a low correlation with the market, the results reinforce the use of concept of cointegration in the quantitative management funds.

Keywords and phrases. pairs trading; statistical arbitrage; cointegration; market neutral strategy.

JEL Classifications. C32, C52, G11

Área ANPEC: Área 7 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

¹Departamento de Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul e Sicedri Asset Management, Porto Alegre, RS 90040-000, Brazil, email: joao@ppge.ufrgs.br

1 Introdução

Pairs trading é um tipo de arbitragem estatística muito usada por *hedge-funds*, que buscam explorar desvios de curto prazo das relações de equilíbrio de longo prazo entre os preços de dois ativos. O termo arbitragem estatística engloba uma variedade de estratégias de investimento, as quais tem como características principais o uso de ferramentas estatísticas para gerar excessos de retornos. Uma das características desejáveis da estratégia é a neutralidade ao mercado, no sentido que tem beta zero com o mercado; e os sinais para *trading* são sistemáticos, ou baseados em regras ao invés de fundamentos. Segundo Avellaneda and Lee: (2008), estratégias de *pairs trading* é o antecessor da arbitragem estatística.

Os métodos tradicionais de *pairs trading* com ações buscam identificar os pares com base em correlação e outras regras de decisão não-paramétricas. Neste artigo propomos selecionar pares de ações para *pairs trading* com base na presença de relação de cointegração entre duas séries de preços de ações. A presença de cointegração possibilita obter uma combinação linear de duas ações de tal forma que o portfólio combinado seja um processo estacionário. O portfólio é formado comprando (*longing*) a ação relativamente sub-valorizada e vendendo (*shorting*) a ação relativamente sobrevalorizada. Se as séries de preços de duas ações apresentam uma relação de equilíbrio de longo prazo, então os desvios desse equilíbrio devem ser temporários e espera-se que retornem para zero, assegurando reversão à média.

Algumas questões típicas são analisadas no desenvolvimento de estratégias *pairs trading*, por exemplo, (1) como identificar os pares, (2) quando o portfólio combinado se distancia suficientemente da relação de equilíbrio para abrir uma posição de *pairs trading*, e (3) quando a posição deve ser encerrada. Da perspectiva de gerenciamento de risco, é também importante especificar um período de tempo máximo que se pode manter a posição aberta, nível máximo de valor em risco permitido (VaR), e ainda, se possível, definir medidas de redução de risco, como *triggers* de *stop* de perda.

Existem algumas abordagens empregadas no desenvolvimento de estratégias de *pairs trading*. Gatev et al. (2006), usam uma abordagem baseada na distância, em que o co-movimento em um par é medido pela *distância*, ou a soma do quadrado das diferenças entre duas séries de preços normalizadas. Seguem na mesma linha, Nath (2006) e Do and Hamza (2006). Elliott et al. (2005) delineiam uma abordagem estocástica do *spread* para *pairs trading*, a qual modela o comportamento de reversão à média do *spread* em tempo contínuo. Sendo o *spread* definido como a diferença entre os preços das duas ações. Do and Hamza (2006), propõem uma estratégia de *pairs trading* modelando os desvios dos retornos, ao invés de trabalhar diretamente com os preços em nível. Avellaneda and Lee: (2008) empregam análise de componentes principais (PCA) e ETFs (Exchange Trade Funds) setoriais num contexto de estratégias de arbitragem estatística, onde os componentes de retornos residuais ou idiossincráticos são modelados como processos com reversão à média.

A abordagem de cointegração apresentada em Vidyamurthy (2004), busca parametrizar es-

estratégias de *pairs trading*, explorando a possibilidade de cointegração entre pares de ações (ver Engle and Granger, 1987; Engle and Yoo, 1987). Cointegração incorpora reversão à média em uma estrutura de *pairs trading*, a qual é a mais importante relação estatística requerida para o sucesso no contexto de estratégias de *pairs trading*. Outros exemplos da abordagem de cointegração no contexto de estratégias *pairs trading* são Enders and Granger (1998), Alexander and Dimitriu (2005), Herlemont (2000) e Lin et al. (2006).

Existem também muitas aplicações da metodologia de cointegração para otimização de carteiras no contexto de estratégias *index tracking* e estratégias *long-short* com carteiras de ações, por exemplo, em Caldeira and Portugal (2009), Alexander and Dimitriu (2002) e Dunis and Ho (2005). Aplicações para estratégias envolvendo dados de alta frequência são encontradas em Burges (2003), Lin et al. (2006), Galenko et al. (2007).

Estratégias neutras ao mercado são geralmente conhecidas por ser uma modalidade de investimento que apresenta propriedades atrativas, tais como baixa exposição ao mercado de ações e relativamente baixa volatilidade, ver Capocci (2006). Recentemente a rentabilidade destas estratégias apresentou alguma deterioração, ver Gatev et al. (2006) e Khandani and Lo (2007). Na mesma linha o *Hedge Fund Equity Market Neutral Index* (Índice HFRXEMN na Bloomberg), que iniciou em 2003, não mostra as supostas qualidades pelas quais as estratégias neutras ao mercado são atrativas, isto é, crescimento estável e baixa volatilidade.

A proposta deste artigo é usar o conceito de cointegração para derivar uma definição dinâmica de equilíbrio de longo prazo das séries de preços, que inerentemente implique em reversão à média nas séries componentes. Assim, empregar o método para identificar e implementar uma estratégia de *pairs trading* e conseqüentemente verificar sua lucratividade, aplicada às ações constituintes do índice Ibovespa. Inicialmente nós ilustramos um método para identificação de pares de ações a serem usados na estratégia de *pairs trading* através dos testes de cointegração de Johansen e Engle-Granger. A série dos resíduos da equação de cointegração, ou *spread* que descreve a dinâmica do portfólio com reversão à média é usada para modelar, via VECM (*Vector Error Correction Model*) e equação de Ornstein-Uhlenbeck, a meia vida¹ do processo, utilizada nas regras de *trading*. Empregamos também um indicador de rentabilidade em simulações dentro da amostra no processo de seleção dos pares. Posteriormente é calculado o *spread* padronizado, que é usado como critério para definir os momentos de abertura e encerramento das posições.

¹Half-life, no termo em inglês

2 A abordagem da cointegração: *pairs trading* e arbitragem estatística

2.1 Contextualização histórica

O pioneirismo na utilização de estratégias *pairs trading* estritamente estatísticas é atribuído ao *quant* de Wall Street Nunzio Tartaglia, que trabalhava no banco Morgan Stanley em meados da década de 1980. Ele montou um grupo de matemáticos, físicos e cientistas da computação com o objetivo de desenvolver estratégias de arbitragem estatística usando o estado da arte das técnicas estatísticas. As estratégias desenvolvidas pelo grupo foram automatizadas a tal ponto que poderiam gerar operações de forma mecanizada, se necessário, executá-las perfeitamente através de sistemas de negociação automatizados.

Uma das técnicas de negociação empregadas envolvia *tradings* com pares de ações. O processo envolvia identificar pares de ações em que os preços moviam juntos. Quando era identificada uma anomalia na relação, o par era negociado com a idéia de que a anomalia se corrigiria. Isto veio a ser conhecido como *pairs trading*. Tartaglia e seu grupo empregaram a estratégia de *pairs trading* com grande sucesso ao longo de 1987. Apesar do grupo ter sido desmontado em 1989, após dois anos de resultados ruins, a estratégia de *pairs trading* se tornou cada vez mais popular entre *traders* individuais, investidores institucionais e *hedge-funds*.

Em decorrência da crise dos mercados financeiros, foi amplamente divulgado na mídia especializada que o ano de 2007 foi especialmente desafiador para os *hedge-funds* quantitativos, (ver Khandani and Lo, 2007; Avellaneda and Lee, 2008), sobretudo para as estratégias de arbitragem estatística. A estratégia proposta aqui é analisada no período em questão e os resultados encontrados corroboram com os encontrados por outros autores.

2.2 *Pairs trading* e arbitragem estatística

Jacobs et al. (1993) definem estratégia *long-short* com ações como sendo neutras ao mercado. Estratégias neutras ao mercado mantêm posições compradas e vendidas com equivalentes exposições a risco de mercado em todo o tempo. Isso é alcançado igualando os betas ponderados das posições comprada e vendida dentro do portfólio. Esta abordagem elimina exposição a risco direcional do mercado, tal que o retorno obtido não deve apresentar correlação com o índice de referência do mercado, o que é equivalente a um portfólio beta-zero. Os retornos do portfólio são gerados pelo isolamento de alfa, ajustado pelo risco. Os recursos obtidos com a posição vendida geralmente são usados para financiar a parte comprada. Segundo Fund and Hsieh (1999), uma estratégia é dita ser neutra ao mercado se seu retorno é independente do retorno do mercado relevante. Fundos neutros ao mercado buscam ativamente evitar fatores de risco, apostando em movimentos dos preços relativos. Um portfólio neutro ao mercado exhibe risco sistemático igual a zero e é praticamente interpretado como tendo beta de mercado igual a

zero. Já Alexander and Dimitriu (2002) afirmam que estratégias *long-short* com ações, apesar de serem naturalmente vistas como neutras ao mercado, se não forem desenhadas especificamente para ter beta de mercado igual a zero, não necessariamente são neutras ao mercado.

Pairs trading envolve a venda de uma ação relativamente sobrevalorizada e a compra de outra ação subvalorizada, com a idéia de que a distorção nos preços irá se corrigir no futuro. A distorção mútua entre os preços das duas ações é capturada pelo *spread*. Quanto maior o *spread*, maior a magnitude da distorção nos preços e maior o lucro potencial. Assim, uma posição *long-short* com duas ações é construída de forma a ter um beta mínimo, e, portanto, mínima exposição ao mercado. Consequentemente, os retornos da operação são não correlacionados com os retornos do mercado, uma característica típica de estratégias neutras ao mercado. Uma extensão natural de *pairs trading* consiste em operar um grupo de ações contra outro grupo de ações, ou *pairs trading* generalizado, (ver Alexander and Dimitriu, 2002; Dunis and Ho, 2005; Avellaneda and Lee., 2008; Caldeira and Portugal, 2009).

O processo de precificação de ativos pode ser visto em termos absolutos ou relativos. Em termos absolutos a precificação dos ativos se dá através de fundamentos, como fluxo de caixa futuro descontado, por exemplo. Precificação relativa significa que dois ativos que são substitutos próximos um do outro deveriam ser negociados a preços parecidos - não diz qual deve ser o preço. Assim, precificação em termos relativos admite a ocorrência de bolhas na economia. Em mercados eficientes, a precificação com base em no modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e a lei do preço único requer preços próximos para ativos equivalentes ao longo do tempo. O *spread* de preços entre ativos substitutos próximos deve obedecer a um equilíbrio estável de longo prazo ao longo do tempo. Hendry and Juselius (2001) usam este princípio para mostrar que os desvios de curto prazo da condição de preços equivalentes pode criar oportunidades de arbitragem dependendo da duração do desvio dos preços.

Quando é identificado um desvio suficientemente grande no *spread* da relação de equilíbrio de longo prazo dos preços, uma posição é aberta simultaneamente comprando a ação relativamente subvalorizada e vendendo a ação relativamente sobrevalorizada. A posição é encerrada quando os preços retornam para o nível de *spread* de equilíbrio de longo prazo. O lucro líquido da operação é a soma dos lucros das partes comprada e vendida, calculado como a diferença entre os preços de abertura e preços de fechamento (descontados os custos envolvidos na operação).

Com base na discussão acima, nota-se que parte decisiva para obter sucesso com estratégias *pairs trading* consiste na identificação dos pares de ações. Gatev et al. (2006) utilizam um abordagem puramente empírica para atingir esse objetivo. A metodologia de escolha dos pares se baseia inteiramente nos movimentos históricos dos preços das ações e compararam como *pairs trading* se saíram em relação a um estudo cego. Além do conjunto de pares definidos com base nos preços históricos, um outro conjunto de pares foi obtido definindo aleatoriamente os pares de ações. Os resultados dos *pairs tradings* executados com base na abordagem empírica dos pares foram, então, comparados com os resultados dos *pairs tradings* com os pares definidos

aleatoriamente. A diferença entre os retornos dos dois grupos foi estatisticamente significativa, e o retorno alcançado com a estratégia que empregou pares definidos metodologicamente foi superior à situação onde os pares foram definidos aleatoriamente.

2.3 A abordagem da cointegração

A partir dos trabalhos seminais de Markowitz (1959), Sharpe (1964), Lintner (1965) e Black (1972), a ferramenta estatística fundamental para otimização de portfólios é a análise da correlação dos retornos dos ativos. Os modelos de otimização para construção de portfólio, em sua maioria, focam em minimizar a variância de uma carteira de ativos, para um dado nível de retorno, com restrições adicionais a respeito dos investimentos permitidos, restrições quanto a venda a descoberto (*short-sale*) e os custos de transação associados ao rebalanceamento do portfólio.

Na última década o conceito de cointegração foi amplamente aplicado em econometria financeira, em conexão com análise de séries temporais e macroeconomia. Tem se colocado, portanto, como uma técnica estatística extremamente poderosa, dada a possibilidade de se aplicar métodos de estimação simples (tais como mínimos quadrados e máxima verossimilhança) a séries não-estacionárias. A observação fundamental que justifica a aplicação do conceito de cointegração na análise de preços de ações é que um sistema envolvendo preços de ações não-estacionários em nível, pode ter uma tendência estocástica comum, Stock and Watson (1988).

Quando comparado ao conceito de correlação, a principal vantagem da cointegração está na possibilidade de usar integralmente o conjunto de informações contidas nas séries financeiras em nível. Alexander and Dimitriu (2002) demonstram que o lucro potencial da arbitragem entre duas ações depende necessariamente da presença de um *spread* de equilíbrio de longo prazo entre os preços das ações e da ocorrência de desvios de curto prazo e a convergência para o equilíbrio. Nesta situação, a técnica estatística usada para *pairs trading* deve ser capaz de fornecer um efetivo modelo para o comportamento do preço relativo ao longo do tempo; detectar os valores da relação de equilíbrio e uma medida dos desvios de curto prazo da relação de equilíbrio. (Alexander and Dimitriu, 2002, 2005; Gatev et al., 2006; Caldeira and Portugal, 2009), sugerem que a metodologia de cointegração oferece uma estrutura mais adequada para estratégias de arbitragem estatística que as demais.

A abordagem de cointegração descrita em Vidyamurthy (2004) é uma tentativa de parametrizar *pairs trading* explorando a possibilidade de cointegração. Cointegração é uma relação estatística onde duas séries de tempo que são integradas de mesma ordem, d , podem ser combinadas linearmente para produzir uma única série de tempo a qual é integrada de ordem $d - b$, onde ($d > b > 0$). Nas aplicações a *pairs trading*, nos referimos aos casos onde séries de preços $I(1)$ são combinadas para produzir séries temporais estacionárias de um portfólio, ou $I(0)$.

DEFINIÇÃO 2. 1. Uma série de tempo X_t é dita uma série $I(1)$ se a primeira diferença da série é estacionária, denotada por $I(0)$.

Muitas séries de preços de ações são $I(1)$. Portanto, a seguinte definição de cointegração é baseada em séries $I(1)$.

DEFINIÇÃO 2. 2. Seja $X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{k,t}$ uma sequência de séries de tempo $I(1)$. Se existem números reais $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, diferentes de zero, tal que:

$$\beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \dots + \beta_k X_{k,t} \quad (1)$$

forme uma série $I(0)$, então $X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{k,t}$ são ditas cointegradas.

Em outras palavras, um conjunto de séries $I(1)$ são ditas cointegradas se existe uma combinação linear dessas séries que é estacionária. Séries de preços de ações cointegradas possuem uma estável relação de equilíbrio de longo prazo, com a propriedade de reversão à média. Por definição, alguma combinação linear de séries de preços cointegradas é estacionária e sempre reverte para a média de longo prazo da série estacionária. Para mais detalhes a respeito da análise de cointegração, ver Hamilton (1994), Enders (2002), Hendry and Juselius (2000) e Hendry and Juselius (2001).

Séries de tempo cointegradas podem ser representadas em um modelo de vetor de correção de erros (*VECM* - Teorema da Representação de Granger), no qual a dinâmica das séries de tempo é modelada como função de seus valores defasados, os valores defasados de seu par cointegrado e um componente de correção de erro, o qual corrige os desvios da relação de equilíbrio nos períodos anteriores. Neste artigo, o modelo *VEC* é empregado para calcular a meia vida dos pares utilizados na estratégia *pairs trading*, que é usado para definir o período em que a operação é mantida em aberto.

A idéia por traz da correção de erros é que sistemas cointegrados tem um equilíbrio de longo-prazo, isto é, a média de longo prazo da combinação linear das duas séries. Se ocorre um desvio em relação ao equilíbrio de longo prazo, uma ou as duas séries ajustam para restaurar o equilíbrio de longo-prazo. Seja ε_t o erro correspondente à equação de cointegração de $X_{1,t}$ em $X_{2,t}$. A representação de correção de erros é:

$$\Delta X_{1,t} = \alpha (X_{1,t-1} - \beta X_{2,t-1}) + \varepsilon_t \quad (2)$$

O termo $\alpha (X_{1,t-1} - \beta X_{2,t-1})$ é a parte da correção de erros, onde $(X_{1,t-1} - \beta X_{2,t-1})$ representa o desvio do equilíbrio de longo prazo e β é o coeficiente de cointegração. α é a taxa de correção de erro, indicando a velocidade à qual as séries se ajustam para manter o equilíbrio, que é usado para determinar o período ótimo para se manter uma estratégia baseada em reversão à média.

Note que a reversão à média de uma série de tempo pode ser modelada também pela equação chamada fórmula de Ornstein-Uhlenbeck (ver Uhlenbeck and Ornstein, 1930; Gillespie, 1996; Mudchanatongsuk et al., 2008). Seja z_t o *spread*, com propriedade de reversão à média, de um par de ações. Então, podemos escrever:

$$dz_t = \theta (\mu - z_t) dt + \sigma \Delta W_t + \varepsilon_t \quad (3)$$

onde μ é a média de longo prazo do *spread* entre os preços, z_t é o valor do *spread* em um dado ponto do tempo, θ a força de reversão à média, σ o desvio padrão, W_t o processo de Wiener e ε_t o resíduo da regressão. Matematicamente se diz que o valor médio de z_t segue um decaimento exponencial para sua média μ , e a meia-vida do decaimento exponencial é igual a $\ln(2)/\theta$, que é tempo esperado que o *spread* leve para reverter a metade do desvio inicial em relação à média. Esta meia-vida pode ser usada para determinar o período ótimo de manutenção de uma posição baseada em reversão à média.

3 Modelo de *pairs trading*, dados e análise dos resultados

A estratégia de investimento que queremos implementar é uma estratégia neutra ao mercado. Nesse sentido, buscamos identificar pares de ações que apresentam uma relação de preços de equilíbrio de longo prazo. Assumindo simultaneamente posição comprada e vendida, o beta de mercado do par deve ser próximo a zero e o resultado obtido é igual ao alfa. O desafio nesta estratégia é identificar ações que tendem a andar juntas, e, portanto, são pares potenciais.

3.1 Estratégias *pairs trading* baseadas em cointegração

É claro que se a série de preços de uma ação é estacionária, ela é uma grande candidata para estratégias baseadas em reversão a média. Porém, a maioria das séries de preços de ações são não estacionárias. Portanto, é possível encontrar pares de ações tais que assumindo posição comprada em uma delas e vendida na outra, o valor de mercado do par é estacionário. Neste caso, as duas séries individuais são ditas *cointegradas*. Se as séries de preços (de uma ação, um par de ações, ou, um portfólio de ações) é estacionária, então uma estratégia baseada em reversão à média é seguramente rentável, enquanto a estacionariedade persistir no futuro (o que não é garantido). Geralmente, duas ações que formam um par cointegrado pertencem a um mesmo setor.

A primeira parte do desenvolvimento da estratégia *pairs trading* consiste em identificar potenciais pares de ações. Definido o universo considerado de ações considerado (seção 3.2), o primeiro passo é checar se todas as séries são integradas de mesma ordem, $I(1)$. Isto é feito através do teste ADF (*Augmented Dickey Fuller Test*). Passado o teste ADF, são realizados testes de cointegração em todas as combinações de pares da amostra. Os métodos de cointegração utilizados são o teste de cointegração de Dickey-Fuller aumentado (*Cointegrating augmented Dickey-Fuller test*) e teste de Johansen².

Definidos os pares a serem empregados na estratégia é estimada a relação linear entre as duas séries de preços das ações através da regressão por mínimos quadrados, de onde se obtém

²São empregadas as funções *cadf* e *johansen*, disponíveis em www.spatial-econometrics.com. Uma descrição detalhada do método pode ser encontrada no manual, também disponível no mesmo site.

o *hedge-ratio* (o beta da regressão):

$$P_{x,t} - \beta P_{y,t} = z_t \quad (4)$$

onde o termo do lado esquerdo representa a combinação linear das duas séries³ e β é o coeficiente de cointegração. z_t é o valor do *spread* no tempo t , $P_{x,t}$ e $P_{y,t}$ são os preços das ações x e y em t . Assim, o *spread*, dado que as séries são cointegradas, tem a propriedade de reversão à média. Esta característica é de fundamental importância, pois *pairs trading* é uma aposta em que a série dos resíduos irá reverter para sua média, ou, equilíbrio de longo prazo. Nesta etapa calcula-se também a meia-vida, que basicamente nos diz a metade do tempo necessário para o *spread* reverter para a média de longo prazo.

Primeiro é estimado o *spread* da série com base na equação 4. O *spread* é então normalizado subtraindo sua média e dividindo pelo desvio padrão. A média e o desvio padrão são calculados com base no período dentro da amostra e são usados para normalizar *spread* tanto no período dentro da amostra quanto fora da amostra. Nesta etapa uma alternativa é usar algum critério de suavização exponencial para a média e desvio padrão, de tal forma que as duas medidas possam variar ao longo do tempo. O critério para abrir uma posição consistem vender (comprar) o *spread* quando está a dois desvios padrões acima (abaixo) da média, a posição é liquidada quando o *spread* está a menos de 0.5 desvios da sua média, ou, decorrido o período de meia vida do *spread*.

Como critério para selecionar os 20 pares a serem utilizados, usando os mesmos critérios empregados no período fora da amostra, é calculado o índice de Sharpe (*IR*) para simulações dentro da amostra e os pares são ranqueados com base no *IR*.

$$IR = \frac{R^A}{\sigma^A} \quad (5)$$

onde R^A é o retorno anualizado e σ^A é a volatilidade anualizada da estratégia A . Os 20 pares que apresentam maior *IR* nas simulações dentro da amostra são utilizados para compor uma carteira *pairs trading* a ser empregada nos testes da estratégia fora da amostra.

A estratégia adotada aqui busca ser beta-neutra, assim os valores financeiros alocados nas partes *long* e *short* podem não ser iguais⁴. Uma vez que o *spread* se distancia da sua média de longo prazo, aposta-se que o *spread* retornará para sua média de longo prazo, porém não sabemos se iremos ganhar mais nas posições *long* ou *short*⁵. Uma vez iniciada uma operação,

³O modelo é estimado sem a inclusão de termo constante. Intuitivamente falando, quando o preço de uma ação cai vai para zero, porque deveria existir um preço mínimo a partir do qual o preço da segunda ação não poderia cair? Além disso, não incluindo constante temos um modelo com menos parâmetros para serem estimados.

⁴Uma alternativa é definir o investimento como financeiro-neutro, assumindo volumes financeiros iguais nas partes *long* e *short*. Entretanto, na prática isto nem sempre é possível, uma vez que o investidor não pode comprar frações de uma ação.

⁵Não sabemos qual dos casos ocorrerá primeiro: se as ações retornam para seu equilíbrio de longo prazo porque a ação sobrevalorizada cai mais ou porque o preço da ação subvalorizada sobe mais, ou ambos apresentam a mesma performance.

o portfólio não é rebalanceado. Portanto, depois de aberta uma posição com o mesmo beta, mesmo quando os preços se movimentam e a posição pode deixar de ser neutra, o portfólio não é rebalanceado. Apenas dois tipos de transações são admitidos pela metodologia da estratégia, entrar numa nova posição, ou a liquidação total de uma posição aberta previamente.

3.2 Base de dados

Os dados utilizados no estudo consistem dos preços diários de fechamento das 50 ações com maior participação na composição do índice Ibovespa no último quadrimestre do período empregado para formação. Todas as ações utilizadas são listadas no Ibovespa, o que significa que estão entre as maiores e mais ativamente negociadas no mercado brasileiro. Esta característica é importante para *pairs trading*, desde que a falta de liquidez nas partes *long* e *short* é um risco fundamental quando se implementa esta estratégia de *trading*. Os dados foram obtidos da Bloomberg, compreendendo o período de janeiro de 2005 a dezembro de 2009. Os dados são ajustados para pagamentos de dividendos e *splits* nos preços das ações⁶.

O objetivo ao usar apenas as 50 ações com maior participação no Ibovespa é trabalhar com ações que apresentam elevada liquidez e que são negociadas em todos os dias do período amostral, assegurando que sejamos "tomadores de preços". Utilizar ações com baixa liquidez podem implicar em maiores custos operacionais (*bid and ask spread*) e dificuldade para se obter o aluguel de alguma ação quando a posição for mantida em aberto por período superior a três dias úteis, quando ocorrem as liquidações das operações na CBLC⁷.

A figura 1 ilustra o período de formação e período de *trading*. Temos um total de doze períodos de *trading*, para um total de 1250 dias de negociação na amostra, sendo que as primeiras 250 observações são usadas para período inicial de estimação. A partir disso, a cada quadrimestre os parâmetros são reestimados, para coincidir com o período de recomposição do Ibovespa, e os pares escolhidos são testados fora da amostra nos quatro meses seguintes, conforme figura 1.

É comum em estratégias *pairs trading* restringir que as ações do par pertençam ao mesmo setor, por exemplo em Chan (2009) e Dunis et al. (2010), aqui não impomos esta restrição. Portanto, pares de ações de empresas pertencentes a diferentes setores podem ser negociados, desde que satisfaçam os critérios estabelecidos.

3.3 Resultados fora da amostra

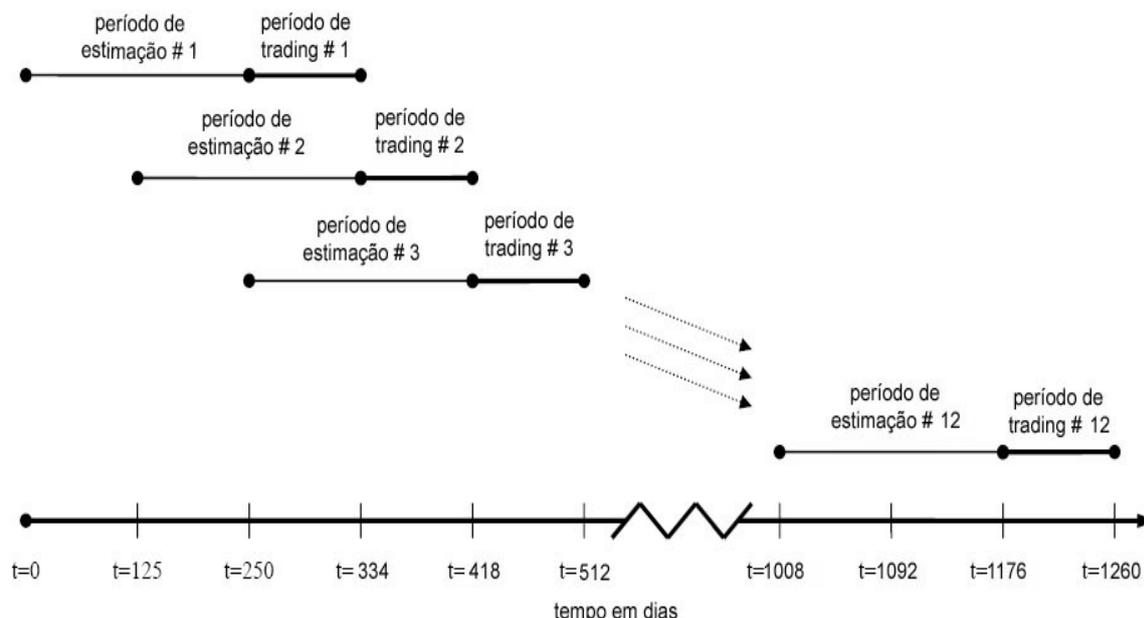
O primeiro ano⁸ da amostra é usado como período de formação, com essa base de dados são definidos os primeiros pares. Uma vez que são empregadas as séries de preços das 50 ações com maior liquidez, existem 1225 pares possíveis. São realizados testes de cointegração em

⁶Dados diários são automaticamente ajustados pela Bloomberg.

⁷Câmara Brasileira de Liquidação e Custódia.

⁸Ao longo deste artigo, definimos um ano como 250 dias de negociação e quatro meses como 84 dias de negociação.

Figura 1: Tempo para Estimação e Período de Trading .



Nota: A figura mostra o período de estimação e período de trading. Nós definimos um ano como 250 dias de negociação e um período de 4 meses para *trading*. O período amostral vai de jan-2005 a dez-2009. Assim, temos 12 períodos de *trading* não sobrepostos, perdendo 250 dias para o primeiro período de estimação.

todos os pares, posteriormente calcula-se o *IR* em simulações dentro da amostra e meia-vida de todos os pares cointegrados. Dos 1250 pares possíveis, em média foram obtidos 91 pares cointegrados em cada período. Em seguida os pares que passaram nos testes de cointegração são ranqueados com base no *IR* para simulações dentro da amostra. Seguindo Gatev et al. (2006) e Andrade et al. (2005), a estratégia é analisada com base numa carteira composta por 20 pares, sendo esses pares definidos como aqueles que apresentaram maior *IR* para o período dentro da amostra. Após o período de formação dos 20 pares, são performados quatro meses de *pairs trading*. A estratégia de *pairs trading* consiste dos passos definidos na seção 3.1. No final de cada período de *trading* as operações que estiverem abertas são encerradas, todos os parâmetros são reestimados e pares podem ser substituídos.

O retorno em cada período é calculado como:

$$Ret_t = \ln(P_{x,t}/P_{x,t-1}) - \ln(P_{y,t}/P_{y,t-1}) \quad (6)$$

onde $P_{x,t}$ e $P_{x,t-1}$ são os preços da ação comprada nos períodos t e $t - 1$, $P_{y,t}$ e $P_{y,t-1}$ são os preços da ação vendida em t e $t - 1$. São considerados custos de transação de 0.5% no total para as duas ações (compostos de taxas de corretagem, emolumentos e *bid and ask spread* de 0.05%).

A tabela 1 apresenta os pares empregados na estratégia no período referente ao último

quadrimestre da amostra, setembro a dezembro de 2009. De 1250 pares possíveis para o período, 97 passaram nos testes de cointegração de Johansen e Engle-Granger, dos quais foram selecionados os 20 pares que apresentaram maior *IR* nas simulações dentro da amostra para serem empregados na estratégia para o período fora da amostra. Apesar de não haver restrição a que os ativos do par se refiram a empresas de um mesmo setor, nota-se que a maioria dos pares são formados por ações de empresas com algum tipo de relação, sejam do mesmo ramo de atividade ou participantes de um mesmo segmento do mercado. Nota-se também que a maioria dos pares apresentam meia vida inferior a 10 dias, reforçando a característica de reversão á média, o que é desejável para a estratégia. Todos os pares passam nos testes de cointegração de Johansen (λ_{trao}) e Engle-Granger (*ADF*) a 95% (os valores críticos a 95% de confiança são 13.43 e 3.38, respectivamente). Nota-se que todos os pares apresentam *IR* positivo nas simulações dentro da amostra, mesmo assim, nem todos obtiveram rentabilidades positivas no período de *trading* fora da amostra. No período em questão, 6 dos 20 pares que compunham a carteira apresentaram resultados negativos, em média foi obtida rentabilidade líquida de 3.82% por par no período.

Tabela 1: Estatísticas dos pares utilizados no último quadrimestre (setembro a dezembro de 2009).

Ativo A	Ativo B	EG (<i>ADF</i>)	JH (λ_{trao})	<i>IR</i> (<i>in-sample</i>)	Meia Vida	Rent. Liq.
ITUB4	ITSA4	-3.67	18.32	4.33	4.58	6.60
USIM5	USIM3	-3.47	18.00	3.29	16.82	9.03
VALE3	BRAP4	-4.25	24.23	3.13	12.19	7.96
AMBV4	NATU3	-4.27	19.42	2.69	6.00	10.19
AMBV4	JBSS3	-4.35	20.63	2.57	9.01	4.00
CSNA3	BRAP4	-3.78	19.27	2.39	11.62	10.10
BBAS3	LREN3	-3.47	16.86	1.90	6.31	-19.68
CYRE3	GFSA3	-4.17	18.20	1.70	4.81	24.19
VALE3	CCRO3	-3.39	14.24	1.61	10.87	-4.00
BBAS3	USIM3	-3.69	19.58	1.60	8.61	-10.69
BRFS3	PCAR5	-4.15	19.20	1.59	6.41	-6.59
NETC4	JBSS3	-3.87	17.23	1.58	8.39	-8.28
CPLE6	PCAR5	-4.05	17.26	1.57	12.22	13.78
CPLE6	CCRO3	-3.58	15.97	1.56	13.25	5.37
LAME4	AMBV4	-3.85	17.06	1.46	14.85	8.91
ITUB4	CCRO3	-3.92	17.60	1.45	6.18	13.45
USIM5	BBAS3	-4.39	22.13	1.40	6.51	0.40
AMBV4	CCRO3	-3.82	18.76	1.24	6.98	22.09
BRFS3	CPLE6	-3.55	19.38	1.15	7.04	-14.38
BVMF3	NETC4	-3.98	19.39	1.10	17.01	4.02

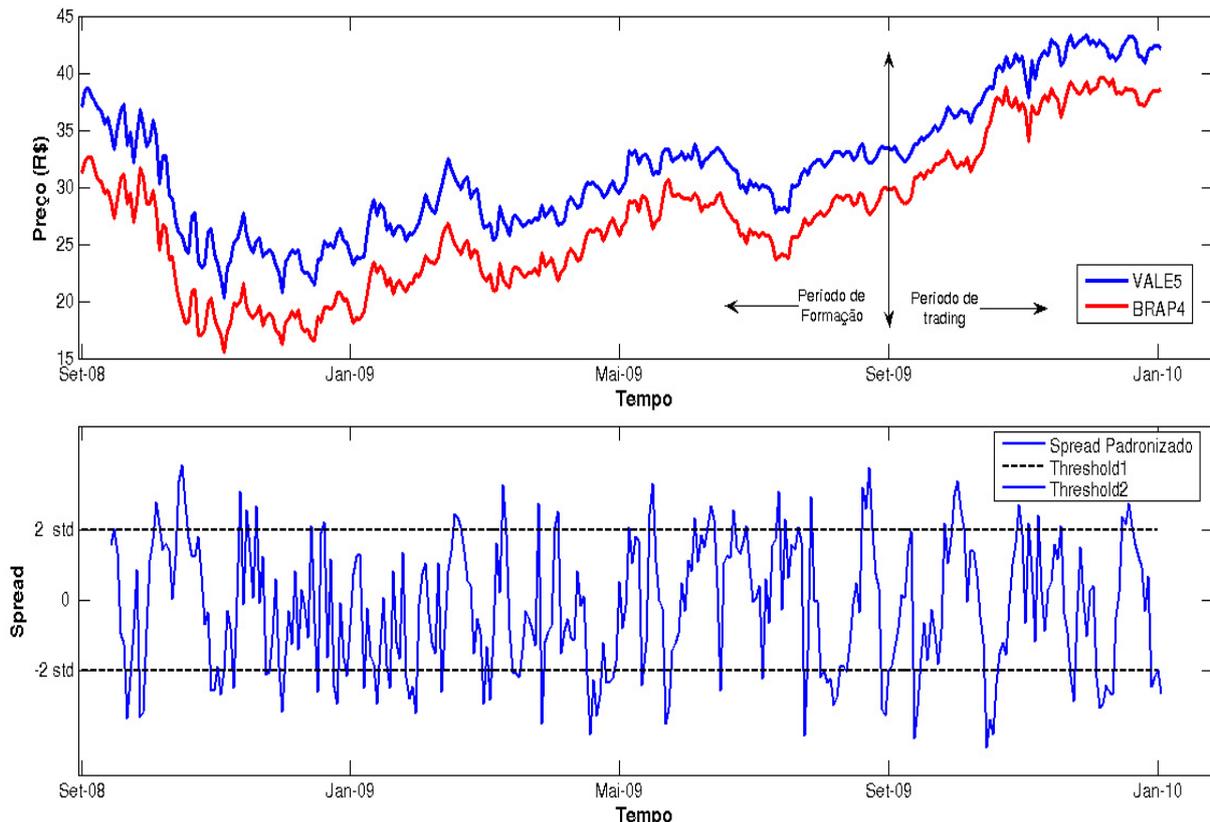
Nota: Rentabilidade líquida apurada para o período fora da amostra, expressa em %. Meia vida expressa em dias úteis.

A figura 2 ilustra o comportamento de um par⁹ específico e de seu *spread*. O par é formado

⁹O par VALE5 e BRAP4 foi escolhido apenas para ilustrar a forma de implementação da estratégia.

pelos preços diários das ações *VALE5* e *BRAP4*, que formam um dos pares utilizados no período de setembro a dezembro de 2009. Também é mostrada a série do *spread* padronizado que define os momentos de abrir e encerrar as operações. Conforme pode ser observado na tabela 3, este par apresenta meia vida de aproximadamente 12 dias e acumulou retorno líquido de 7.96% no período fora da amostra analisado.

Figura 2: Séries de preços de *VALE5* e *BRAP4* e *spread* padronizado do par.



Nota: Par empregado na estratégia no período setembro a dezembro de 2009.

A tabela 3.3 resume algumas estatísticas relativas aos resultados da estratégia *pairs trading* implementada. Os resultados apresentados se referem a análise fora da amostra, para o período de janeiro de 2006 a dezembro de 2009. As rentabilidades apresentadas já estão descontadas dos custos de transação¹⁰. Em média foram obtidos 91 pares cointegrados por período, porém os resultados apresentados referem-se a uma carteira composta com pesos iguais, pelos 20 pares selecionados. A rentabilidade acumulada é de 89.78%, com *IR* anualizado de 1.29. Nota-se também que a estratégia apresenta volatilidade relativamente baixa, 12.49% em termos anualizados, e coeficiente de correlação com o mercado de 0.079, indicando que a estratégia pode ser considerada neutra ao mercado. Optamos por empregar o coeficiente de correlação de Spearman¹¹ levando-se em conta é uma medida não-paramétrica que não pressupõe que as séries de

¹⁰Os custos considerados são de 0.5% na entrada e 0.5% no encerramento da posição, totalizando 0.10% por operação.

¹¹O coeficiente de correlação de Spearman é uma medida não paramétrica, não sensível a assimetrias nas dis-

dados provenham de uma distribuição normal bivariada. Isso se justifica uma vez que estratégias com ações que assumem posições compradas e vendidas geralmente apresentam retornos leptocúrticos.

Tabela 2: Estatísticas da Estratégia *Pairs Trading* (Jan-2006 a Dez-2009)

Descrição dos Dados	
Total de dias na amostra	1250
Dias em cada período de formação	250
Dias em cada período de trading	84
Número de períodos de trading na amostra	12
Número de pares em cada período de trading	20
Resumo da Rentabilidade da <i>Estratégia Pairs Trading</i>	
Retorno médio diário da carteira	0.069%
Maior rentabilidade em um dia	6.25%
Menor rentabilidade em um dia	-4.80%
Desvio padrão do retorno diário	0.853%
Índice de Sharpe dos retornos diários	0.081
Rentabilidade acumulada no período	89.78%
Rentabilidade média anual da carteira	17.37%
Desvio padrão do retorno (anualizado)	12.49%
Índice de Sharpe dos retornos (anualizado)	1.29
Coefficiente de correlação (Spearman)	0.079
Assimetria	0.269
Curtose	4.546
Máximo <i>Drawdown</i>	24.49%

Nota: Esta tabela apresenta estatísticas descritivas da estratégia de arbitragem estatística, *pairs trading*, que implementamos. O período amostral vai de janeiro de 2005 a dezembro de 2009.

Apresentamos também o máximo *drawdown* da estratégia no período analisado, que foi de 24.49%. Máximo *drawdown* é a diferença entre o máximo global e o mínimo global da curva de rentabilidade acumulada, (neste caso o mínimo global deve ocorrer depois do máximo global). Em outras palavras, é simplesmente uma medida da queda, em termos percentuais, em relação ao pico do retorno acumulado, pode ser usada como uma medida de quão agressivamente pode-se aumentar a alavancagem da estratégia. Pode-se observar na figura 3, que traz a rentabilidade

tribuições nem à presença de *outliers*, não exigindo que os dados provenham de duas populações normais. O coeficiente de correlação de Spearman é definido por:

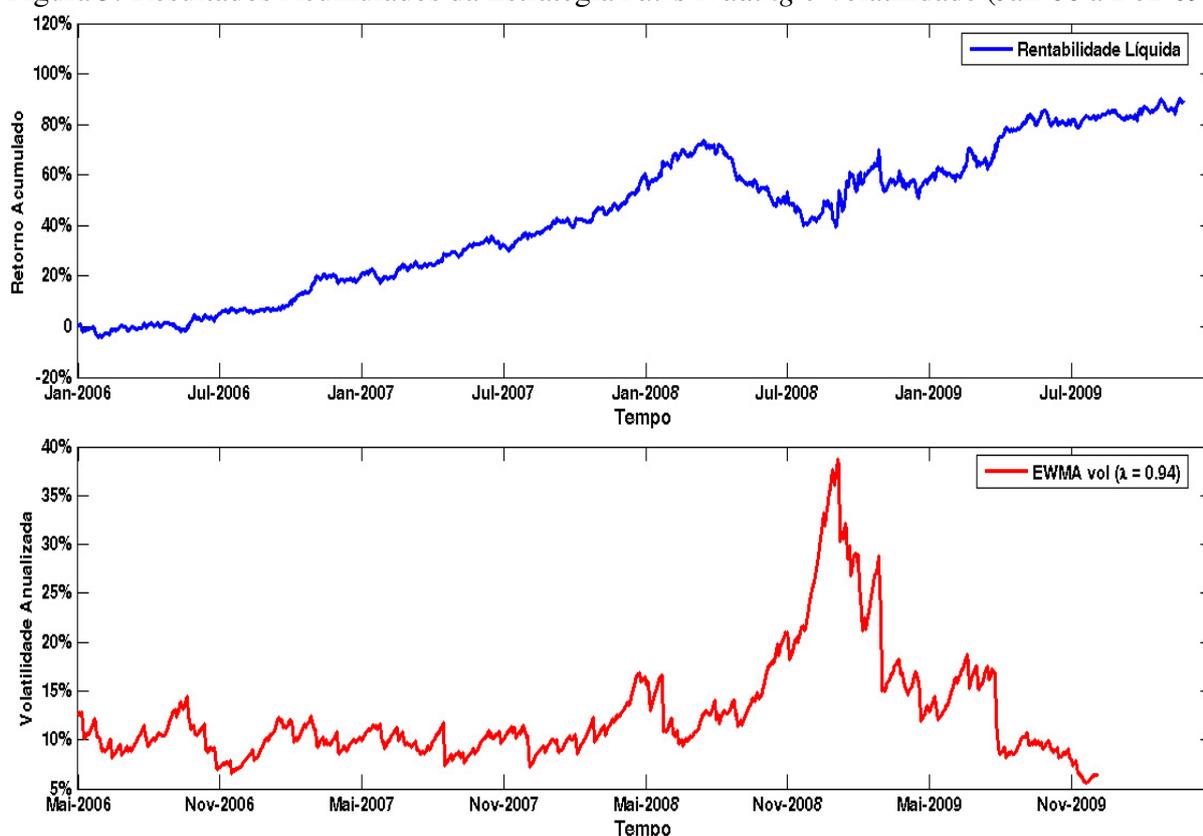
$$\rho = \frac{\left(1 - 6 \sum_{i=1}^n d_i^2\right)}{n^3 - n}$$

Onde d_i é a diferença entre os *ranks* dos correspondentes valores de X_i e Y_i , e n é o número de valores em cada conjunto.

acumulada da estratégia e a volatilidade, que o máximo *drawdown* ocorreu no primeiro semestre de 2008, período em que o mercado financeiro nacional foi mais afetado pela crise internacional, com os principais ativos negociados apresentando expressivas perdas e níveis de volatilidade nunca antes observados.

Nota-se na figura 3, segundo painel, que a estratégia *pairs trading* apresentou níveis de volatilidade relativamente baixo para praticamente todo o período analisado, ficando em patamares inferiores a 15%, em termos anualizados, para praticamente todo o período analisado. Mesmo no período mais forte da crise financeira internacional, quando a volatilidade no mercado de ações doméstico ultrapassou 120%, a volatilidade da estratégia não chegou a 40%.

Figura 3: Resultados Acumulados da Estratégia *Pairs Trading* e Volatilidade (Jan-06 a Dez-09).

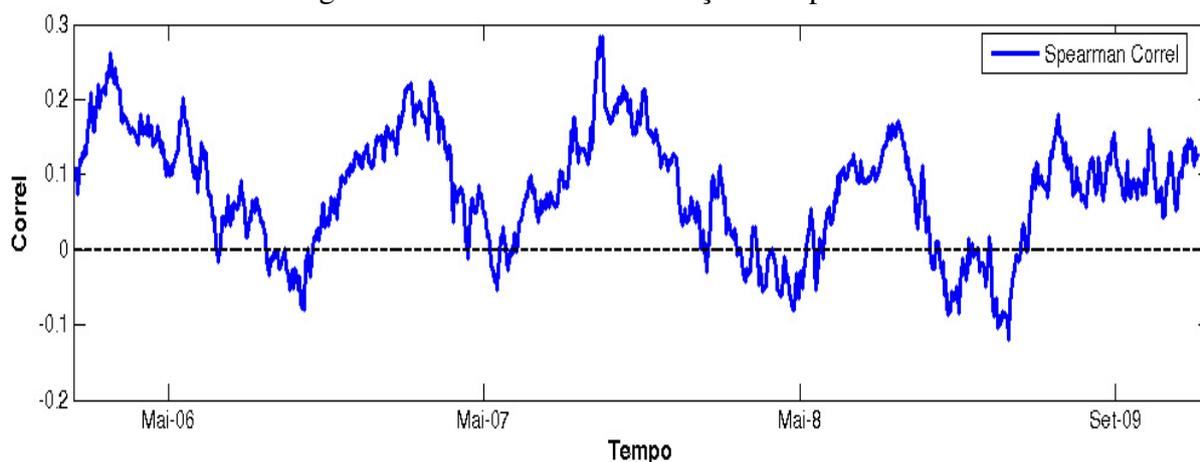


Nota: No primeiro painel rentabilidade acumulada da estratégia *pairs trading* e no segundo volatilidade anualizada (EWMA Vol com $\lambda = 0.94$).

Parte relevante na avaliação da estratégia *pairs trading* é análise da correlação com algum índice de referência do mercado, já que um dos objetivos da estratégia é neutralidade ao mercado. Nesse sentido pode-se dizer que o objetivo foi alcançado, uma vez que a estratégia exibiu correlação com o Ibovespa inferior a 0.30 em todo o período analisado, sendo que na maior parte do tempo foi inferior a 0.10, como pode ser observado na figura 4.

A tabela 3 resume estatísticas anuais da estratégia *pairs trading*. Pode-se observar que o ano de 2008 foi quando a estratégia apresentou pior performance, acumulando rentabilidade líquida

Figura 4: Coeficiente de correlação de Spearman.



Nota: Coeficiente de correlação de Spearman calculado com base numa janela móvel de 84 observações.

de 2.85% e volatilidade levemente superior aos demais anos. Conforme destacado em Khandani and Lo (2007) e Avellaneda and Lee: (2008), o segundo semestre de 2007 e primeiro semestre de 2008 foram bastante complicados para fundos de investimentos quantitativos. Particularmente para estratégias de arbitragem estatística, que experimentaram expressivas perdas no período, com posterior recuperação em alguns casos. Muitos gestores sofreram perdas de tal forma que tiveram que desalavancar suas carteiras, não se beneficiando da subsequente recuperação. Os resultados encontrados nos nossos *back testing* corroboram com aqueles encontrados por Avellaneda and Lee: (2008) e Khandani and Lo (2007).

Nota-se na figura 3 que nossa estratégia apresentou expressivas perdas no primeiro semestre de 2008, vindo a se recuperar no segundo semestre. Khandani and Lo (2007) e Avellaneda and Lee: (2008) sugerem que os eventos de 2007-2008 poderiam ser consequência de falta de liquidez, causada por fundos que tiveram que desfazer suas posições.

Tabela 3: Estatísticas anuais da estratégia *pairs trading* - 2006 a 2009.

	2006	2007	2008	2009
Rentabilidade Líquida	17.31	24.94	2.850	21.25
Volatilidade	0.125	0.099	0.139	0.117
Correlação Ibovespa	0.125	0.117	0.143	0.042
Índice de Sharpe	1.717	2.623	0.147	1.859
Curtose	3.507	3.682	6.911	4.808
Assimetria	0.039	0.229	0.684	0.340
Correlação Serial	-0.035	-0.096	0.004	-0.090
Máximo <i>Drawdown</i>	5.568	4.741	24.498	5.244
Número Médio de Pares	48	97	59	155

Nota: Resultados da análise fora da amostra. Rentabilidade líquida e Máximo *Drawdown* expressos em %.

Estratégias desta natureza resultam em carteiras alavancadas, que assumem centenas de posições compradas e vendidas em ações. Mesmo cada posição sendo relativamente pequena em relação ao mercado como um todo, o efeito agregado das várias posições podem potencializar as perdas. Deve-se considerar também que estratégias de arbitragem estatística, como *pairs trading*, baseadas em cointegração podem sofrer em momentos de quebras estruturais nos mercados, como pode ser o caso do período em questão. Nestes casos a alternativa seria o uso de metodologias que permitam identificar eventuais quebras, por exemplo, estimar os parâmetros através do filtro de Kalman.

4 Conclusão

Neste artigo propusemos a implementação de uma estratégia de arbitragem estatística conhecida como *pairs trading* aplicada às ações constituintes do índice Ibovespa. A estratégia é implementada com base em cointegração, explorando a característica de reversão à média dos pares de ações cointegrados. Assim, o primeiro objetivo é desenvolver um método para identificar pares os quais poderiam ser usados na estratégia *pairs trading*. Após identificados os pares é conduzida uma análise dos co-movimentos entre as ações buscando identificar a força de reversão à média através da estimação da meia-vida, a qual é relevante para aplicação da estratégia.

Empregando as séries de preços das ações constituintes do Ibovespa no último quadrimestre de cada período de estimação, primeiramente são realizados testes de cointegração de Johansen e Engle-Granger em todas as combinações de pares possíveis, para identificar pares de ações que compartilham uma relação de equilíbrio de longo prazo. Posteriormente, para os pares que passam nos testes de cointegração, é calculada a meia-vida, através da equação de Ornstein-Uhlenbeck. Subsequentemente, calculamos o *spread* padronizado entre as ações e simulamos *tradings* no período dentro da amostra com base em três regras simples. Uma posição é aberta sempre que o *spread* se distancia por mais que dois desvios da sua média de longo prazo. Todas as posições são liquidadas quando o *spread* retorna para sua média de longo prazo¹², ou a posição está aberta por um período igual à meia vida do par. A partir disso, é montada uma carteira composta com os 20 pares que apresentaram maior *IR* para o período simulado dentro da amostra.

De 1250 pares possíveis, em média foram obtidos 91 pares cointegrados em cada período de formação. A carteira diversificada, montada com os 20 pares que apresentaram os melhores indicadores dentro da amostra (com pesos iguais), alcançou índice de Sharpe de 1.29 no período de *trading* fora da amostra. A rentabilidade líquida acumulada no período de testes fora da amostra de quatro anos foi de 89.79%, média de 17.37% anuais. Além disso, a estratégia *pairs trading* aqui implementada apresentou níveis de volatilidade relativamente baixos e correlação com o índice Ibovespa inferior a 0.10, em termos absolutos, na maior parte do período analisado,

¹²Define-se retornar para a média de longo prazo quando a distância do *spread* em relação à média de longo prazo é menor que 0.5 desvios.

corroborando com o objetivo de neutralidade ao mercado da estratégia. Os resultados são atra-
tivos quando comparados a outras estratégias empregadas por *hedge funds*, principalmente se
levarmos em conta que é uma estratégia que praticamente não envolve desembolso de recursos,
se resumindo basicamente às margens de garantia, permitindo maior nível de alavancagem e a
rentabilização dos recursos envolvidos em ativos livres de risco. Existem algumas direções a
serem seguidas em trabalhos futuros com o objetivo de potencializar a rentabilidade e mitigar
riscos, entre elas, o emprego de algum método para identificar estabilidade dos parâmetros, es-
timação por filtro de Kalman, por exemplo. Outra alternativa é aplicar a metodologia proposta
a dados de alta frequência. Portanto, os resultados encontrados reforçam o uso do conceito de
cointegração como importante ferramenta na gestão quantitativa de fundos.

Referências

- Alexander, C. and Dimitriu, A. (2002). The cointegration alpha: Enhanced index tracking and long-short equity market neutral strategies. Isma working papers, ISMA Center of the University of Reading.
- Alexander, C. and Dimitriu, A. (2005). Index and statistical arbitrage: Tracking error or cointegration? Isma working papers, ISMA Center of the University of Reading.
- Andrade, S. C., Pietro, V., and Seasholes, M. S. (2005). Understanding the profitability of pairs trading. Uc berkeley working papers, UC Berkeley.
- Avellaneda, M. and Lee, J. (2008). Statistical arbitrage in the u.s. equities markets. Working papers, SSRN.
- Black, F. (1972). Capital market equilibrium and restricted borrowing. *Journal of Business*, 45:444–454.
- Burges, A. N. (2003). Using cointegration to hedge and trade international equities. In Sons, J. W. ., editor, *Applied Quantitative Methods for Trading and Investment*, pages 41–69.
- Caldeira, J. F. and Portugal, M. S. (2009). Estratégia long-short, neutra ao mercado, e index tracking baseadas em portfólios cointegrados. Textos para discussão, UFRGS.
- Capocci, D. P. (2006). The neutrality of market neutral funds. *Global Finance Journal*, 17:309–333.
- Chan, E. P. (2009). *Quantitative Trading: How to Build Your Own Algorithmic Trading Business*. Wiley trading series, New Jersey.
- Do, B., R. F. and Hamza, K. (2006). A new approach to modeling and estimation for pairs trading. Working paper series, Monash University.
- Dunis, C. L., Giorgioni, G., Laws, J., and Rudy, J. (2010). Statistical arbitrage and high-frequency data with an application to eurostoxx 50 equities. Cibef working papers, CIBEF.
- Dunis, C. L. and Ho, R. (2005). Cointegration portfolios of european equities for index tracking and market neutral strategies. *Journal of Asset Management*, 1:33–52.
- Elliott, R., der Hoe, J. V., and Malcolm, W. (2005). Pairs trading,. *Quantitative Finance*, 5:271–276.
- Enders, W. (2002). *Applied Econometric Times Series*. John Wiley & sons, New York.

- Enders, W. and Granger, C. W. J. (1998). Unit-root tests and asymmetric adjustment with an example using the term structure of interest rates. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16:304–311.
- Engle, R. and Granger, C. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica*, 2:251–76.
- Engle, R. and Yoo, B. (1987). Forecasting and testing in co-integrated systems. *Journal of Econometrics*, 35:143–159.
- Fund, W. and Hsieh, D. (1999). A primer of hedge funds. *Journal of Empirical Finance*, 6:309–331.
- Galenko, A., Popova, E., and Popova, I. (2007). Trading in presence of cointegration. SSRN eLibrary, SSRN.
- Gatev, E., Goetzmann, G. W., and Rouwenhorst, K. (2006). Pairs trading: Performance of a relative value arbitrage rule. *The Review of Financial Studies*, 19:797–827.
- Gillespie, D. T. (1996). Exact numerical simulation of the ornstein-uhlenbeck process and its integral. *Physical Review E*, 54:2084–91.
- Hamilton, J. D. (1994). *Times Series Analysis*. IE-Princeton, New Jersey.
- Hendry, D. and Juselius, K. (2001). Explaining cointegration analysis: part ii. *Energy Journal*, 22:75120.
- Hendry, D. F. and Juselius, K. (2000). Explaining cointegration analysis: Part i. *Energy Journal*, 21:1–42.
- Herlemont, D. (2000). Pairs trading, convergence trading, cointegration. Yats working papers, YATS Finances & Technologies.
- Jacobs, B., Levy, K., and Starer, D. (1993). Long-short equity investing. *Journal of Portfolio Management*, 1:52–64.
- Khandani, A. E. and Lo, A. W. (2007). What happened to the quants in august 2007? *Journal of Investment Management*, 5:5–54.
- Lin, Y., McRae, M., and Gulati, C. (2006). Loss protection in pairs trading through minimum profit bounds: A cointegration approach. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, 6:1–14.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risk investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 4:13–37.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, New York.
- Mudchanatongsuk, S., Primbs, J. A., and Wong, W. (2008). Optimal pairs trading: A stochastic control approach. In *Proceedings of American Control Conference*. American Control Conference.
- Nath, P. (2006). High frequency pairs trading with u.s treasury securities: Risks and rewards for hedge funds. Working paper series, London Business School.
- Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19:425–442.
- Stock, J. and Watson, M. (1988). Testing for common trends. *Journal of the American Statistical Association*, 83:1097–1107.

Uhlenbeck, G. and Ornstein, L. (1930). On the theory of brownian motion. *Physical Review*, 36:823–841.

Vidyamurthy, G. (2004). *Pairs Trading, Quantitative Methods and Analysis*. John Wiley & Sons, Canada.