Bonn Econ Discussion Papers

Discussion Paper 8/2005

Produktdesign und Semi-Statische Absicherung von Turbo-Zertifikaten

by

Antje Mahayni, Michael Suchanecki

April 2005

Bonn Graduate School of Economics
Department of Economics
University of Bonn
Adenauerallee 24 - 42
D-53113 Bonn

The Bonn Graduate School of Economics is
sponsored by the

Deutsche Post World Net

MAIL EXPRESS LOGISTICS FINANCE

PRODUKTDESIGN UND SEMI–STATISCHE ABSICHERUNG VON TURBO–ZERTIFIKATEN

ANTJE B. MAHAYNI* UND MICHAEL SUCHANECKI‡

ZUSAMMENFASSUNG. Turbo–Zertifikate gehören derzeit zu den beliebtesten strukturierten Produkten für Privatanleger. Sie lassen sich als Spezialformen von Barrier–Optionen auffassen. In Bezug auf das Produktdesign ist das Verhältnis von Kursschranke und Basispreis von Bedeutung. Eine geeignete Wahl ermöglicht dem Emittenten eine nahezu statische Überabsicherung in Standard–Optionen. In einem Spezialfall ergibt sich die obere Preisschranke des Turbo–Long–Zertifikates gemäß eines Forward–Vertrages. Entsprechend handelt es sich lediglich um eine untere Preisschranke des Short–Zertifikates. Wird der allgemeine Fall betrachtet, so zeigt sich, dass der Emittent weder bei einer Einzel– noch bei einer Portfoliobetrachtung seine Zahlungsverpflichtung ohne Einbeziehung von Standard–Optionen absichern kann.

1. Einleitung

Strukturierte Produkte werden dem Privatanleger mit dem Argument verkauft, dass sie Auszahlungsprofile ermöglichen, die durch Standardprodukte nicht erreichbar sind. Beispielsweise werden Turbo–Zertifikate[1] und *Mini Futures* in den Verkaufsprospekten der Emittenten mit einem im Vergleich zur Direktinvestition und im Vergleich zu Standard–Optionen hohen Hebel beworben. Es lässt sich jedoch beobachten, dass eine Vielzahl der emittierten strukturierten Zertifikate durch statische bzw. semi–statische Portfoliostrategien in Standardprodukten duplizierbar ist. Die zugrundeliegenden Investitionsstrategien können von den Herausgebern der Zertifikate genutzt werden, sind jedoch für Privatanleger aufgrund der benötigten Volumina in den Standardprodukten sowie den sich hieraus ergebenden Sicherheitsleistungen (z.B. für Futures–Kontrakte) nicht durchführbar. Will der Privatanleger das Auszahlungsprofil des strukturierten Produktes erwerben, so muss er dafür zumeist einen überhöhten Preis zahlen, der sich nicht rechtfertigen lassen würde, wären die Duplikationsstrategien für alle Marktteilnehmer gleichermaßen zugänglich. Auf der anderen Seite bieten sich für die Emittenten der Zertifikate risikolose Gewinne, falls sie einen Preis für ihre Produkte erzielen, der die Investition in die Absicherung übersteigt. Hiermit lässt sich leicht das große Angebot an Turbo–Zertifikaten erklären, das seit erstmaliger Herausgabe der Zertifikate im Jahre 2001 immer weiter angestiegen ist. Im Jahr

Datum: 5. April 2005.
JEL: G10, G13, G21
* Betriebswirtschaftliche Abteilung III, Institut für Gesellschafts– und Wirtschaftswissenschaften, Universität Bonn, Adenauerallee 24–26, 53113 Bonn
e–mail: antje.mahayni@uni-bonn.de
‡ Statistische Abteilung, Institut für Gesellschafts– und Wirtschaftswissenschaften, Universität Bonn, Adenauerallee 24–26, 53113 Bonn
e–mail: michael.suchanecki@uni-bonn.de.
[1]In dieser Arbeit wird weitestgehend der Begriff *Turbo*–Zertifikat verwendet. Dieselben Zertifikate, die zur Klasse der Hebelprodukte gehören, werden in der Praxis je nach Emittent auch unter den Namen *Wave*, *Sprinter*, *Turbo–Optionsschein*, *Bull– bzw. Bear–Zertifikat*, *Mini Future* oder einfach *Knock–Out* gelistet.

2004 variierte die Anzahl der an der EUWAX handelbaren Knock–Out–Produkte zwischen 3.278 (März 2004) und 6.012 (November 2004). Die vier größten Emittenten im Bereich der Knock–Out–Produkte an der EUWAX sind, gemessen am Umsatz in 2004, die ABN AMRO mit einem geschätzten Marktanteil von 30,65%, die Deutsche Bank (26,07%), die Citigroup (15,07%) und die Commerzbank (11,06%). Bei den Neueinführungen im Bereich der Knock–Out–Produkte an der EUWAX war im Jahr 2004 die HSBC Trinkaus & Burkhardt mit 4.835 Neueinführungen vor der Deutschen Bank mit 3.757 vertreten. Insgesamt gab es in 2004 an der EUWAX 17.754 neue Knock–Out–Produkte. Auf das Jahr 2004 gerechnet kann der Gesamtumsatz an Knock–Out–Produkten an der EUWAX auf etwa 5,1 Milliarden Euro geschätzt werden. Nach den überaus erfolgreichen Vorjahren stellt dies eine Stagnation auf hohem Niveau dar. Die Knock–Out–Produkte sind nach wie vor das umsatzstärkste Teilsegment an der EUWAX.[2]

Die in dieser Arbeit betrachteten Knock–Out–Zertifikate stellen Barrier–Versionen von Standard–Optionen dar, deren Underlying ein Index, eine Währung, eine Aktie oder auch ein Rohstoff sein kann. Im Folgenden wird zur Vereinfachung angenommen, dass es sich bei dem zugrundeliegenden Wertpapier um einen Index, z.B. den DAX (Performance–Index), handelt. Turbo–Short–Zertifikate ergeben die Auszahlung einer Put–Option, falls der Index während der Laufzeit nicht eine obere Kursschranke berührt oder überschreitet. Turbo–Long–Zertifikate ergeben die Auszahlung einer Call–Option, falls eine untere Kursschranke während der Laufzeit nicht berührt oder unterschritten wird. Die Grundidee bei der Herausgabe dieser Zertifikate kann wie folgt skizziert werden. Im Gegensatz zu einer Standard–Option, deren Auszahlung alleine auf dem Schlusskurs des Underlyings basiert, wird eine Auszahlung gemäß der Option nur dann gewährt, falls eine vorgegebene Kursschranke während der Laufzeit des Produktes nicht berührt wird. Insbesondere bedeutet dies, dass das betrachtete Produkt im Vergleich zur herkömmlichen Option preiswerter wird, da höchstens die Auszahlung der Option erzielt werden kann. Dementsprechend benötigt das Knock–Out–Zertifikat einen geringeren Kapitaleinsatz als die entsprechende Standard–Option. Diese Eigenschaft wird mit den Worten beworben: *bereits mit kleinem Kapitaleinsatz können überproportionale Gewinne erzielt werden.* Des Weiteren wird ein geringerer Kapitaleinsatz, der die gleichen Gewinne ermöglicht, mit einem höheren Hebel assoziiert, auch wenn diese Gewinne in weniger Fällen eintreten als in dem Vergleichsprodukt.

Bei der Absicherung von Barrier–Optionen kann eine Vielzahl von Problemen auftreten. Diese lassen sich jedoch durch eine spezielle Wahl der Rückvergütung und/oder des Verhältnisses von Kursschranke und Basispreis weitgehend vermeiden. Aus der Perspektive des Herausgebers der Zertifikate ist eine obere Preisgrenze der Produkte interessant. Existiert eine selbstfinanzierende oder überfinanzierende Portfoliostrategie, welche die Auszahlung des Zertifikates dupliziert oder dominiert, so impliziert die Anfangsinvestition in diese Überabsicherungsstrategie (Superhedge) eine obere Preisschranke. Angenommen, es ist dem Herausgeber möglich, das Zertifikat zu einem Preis entsprechend der Anfangsinvestition in diese Strategie zu verkaufen, so kann er einen risikolosen Gewinn erzielen. Von Interesse ist das Design eines Zertifikates, dessen obere Preisschranke sich einfach

[2]Diese Zahlen stammen aus den Monatsberichten der EUWAX für das Jahr 2004, erhältlich unter http://www.euwax.de.

nachbilden lässt. Dies kann durch eine Portfoliostrategie realisiert werden, die aus gehandelten Wertpapieren besteht und weitestgehend unabhängig von den Annahmen über die zukünftige Entwicklung des Indexpreises ist. Letzteres ist bei einem statischen Hedge gewährleistet, da dieser kein Modellrisiko beinhaltet. Ein statischer Hedge besitzt zudem den Vorteil, dass die in der Realität anfallenden Transaktionskosten im Vergleich zu einer dynamischen Portfolioanpassung geringer sind, zumindest falls der Hedge aus einer endlichen Anzahl von Hedge–Instrumenten besteht. Im Rahmen von Barrier–Optionen besitzen semi–statische Absicherungsstrategien eine besondere Bedeutung. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass sie zumindest eine Umschichtung des Portfolios vorsehen, falls die Kursschranke während der Laufzeit des Zertifikates berührt wird. Die hier betrachteten Knock–Out–Zertifikate *beenden* den Vertrag bei Berühren der Schranke, so dass der Hedge als statisch angesehen werden kann, wobei jedoch der Zeitpunkt, zu dem der Hedge aufgelöst werden muss, unbekannt ist.

Eine Erörterung von Turbo–Zertifikaten erfolgte bereits in den Arbeiten von Fischer, Greistorfer und Sommersguter–Reichmann (2002, 2003), Baule, Scholz und Wilkens (2004) und Scholz, Baule und Wilkens (2004). Fischer, Greistorfer und Sommersguter-Reichmann (2002) behandeln die optionspreistheoretische Bewertung von Turbo–Long–Zertifikaten und analysieren neben den üblichen Sensitivitäten auch den Hebel der Zertifikate. In ihrem Folgeartikel werden diese Analysen für Turbo–Short–Zertifikate durchgeführt. In Baule, Scholz und Wilkens (2004) wird erstmals ein Zusammenhang der obigen Zertifikate mit Forward–Positionen aufgezeigt. Es werden normale Short–Zertifikate und Turbo–Short–Zertifikate (Knock–Out–Short–Zertifikate) ohne Rückvergütung betrachtet, deren Barrier dem Ausübungspreis entspricht. In Scholz, Baule und Wilkens (2004) wird die von den Emittenten kommunizierte Preisstellung und die Absicherung von Turbo–Zertifikaten in Long– und Short–Versionen mit einer besonderen Rückvergütung, in der Praxis auch als *Mini Future* bekannt, ausführlich diskutiert.

Ziel dieser Arbeit ist eine Analyse der allgemeinen Struktur von Turbo–Zertifikaten in ihren entsprechenden Long– und Short–Versionen mit Hinblick auf das Produktdesign und den damit verbundenen Absicherungsstrategien. Unser Hauptanliegen ist eine Erörterung der Frage wie, wann und warum eine geeignete Wahl der Vertragsparameter den Herausgebern der Zertifikate eine nahezu modellfreie Überabsicherung ermöglicht. Hinsichtlich einer robusten Absicherung von Barrier–Optionen besitzt die sogenannte *Put–Call–Symmetrie* eine besondere Bedeutung. Dies wurde bereits in Carr, Ellis und Gupta (1998) erkannt. Während die im vorigen Absatz erwähnten Arbeiten auf den grundlegenden Bewertungsformeln von Barrier–Optionen im Black und Scholes (1973)–Modell basieren, werden diese in der vorliegenden Arbeit elegant aus einer Strategie in Standard–Optionen hergeleitet. Dadurch kann eine Bewertung von Barrier–Optionen ausschließlich mit der Kenntnis der Black/Scholes–Formel zur Bewertung von Standard–Optionen durchgeführt werden. Darüber hinaus werden obere und untere Preisschranken bestehend aus Standard–Optionen für Long– und Short–Zertifikate gewonnen, die nahezu modellunabhängig sind. Zudem wird im Rahmen einer Portfoliobetrachtung erörtert, ob eine gemeinsame Betrachtung von Long– und Short–Positionen einen Effekt auf die modellfreie Absicherung besitzt.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Im nächsten Abschnitt wird die allgemeine Auszahlungsstruktur der relevanten Barrier–Versionen analysiert. Schon an dieser Stelle lassen sich Bedingungen an die Wahl der Rückvergütung formulieren, die eine modellunabhängige Überabsicherung erlauben. Zudem zeigt sich, warum die Konstruktion eines Knock–Out–Zertifikates ohne Rückvergütung bzw. einer Rückvergütung von Null eine modellunabhängige (Über–) Absicherung erschwert. Auch eine Portfolioanalyse wird in diesem Abschnitt motiviert. Abschnitt 3 gibt einen kurzen Überblick über die Absicherungsproblematiken von Barrier–Optionen. In Abschnitt 4 wird im Rahmen des Black und Scholes (1973)–Modells eine verallgemeinerte *Put–Call–Symmetrie* hergeleitet. Diese wird dazu benutzt, um semi–statische Sub– und Superhedging–Strategien für Knock–Out–Zertifikate in Standard–Optionen anzugeben. Insbesondere zeigt sich an dieser Stelle, dass eine Forward–Position geeignet ist, um eine Überabsicherung für ein Turbo–Long–Zertifikat zu erzielen. Dementsprechend liefert ein Terminvertrag lediglich eine Unterabsicherung für ein Short–Zertifikat. Vor abschließenden Bemerkungen werden die gewonnenen Ergebnisse in Abschnitt 5 anhand von Marktdaten illustriert.

2. Auszahlung von Turbo–Zertifikaten

Turbo–Zertifikate werden als Long– und Short–Versionen gehandelt. Diese lassen sich als *exotische Optionen* interpretieren, deren Auszahlung nicht alleine auf dem Schlusskurs des zugrundeliegenden Indexes basiert, sondern an zusätzliche Bedingungen an den Kursverlauf gebunden ist. Von Bedeutung sind hierbei insbesondere die Barrier–Versionen in Form von Up–and–Out–Put– und Down–and–Out–Call–Optionen.[3] Short–Zertifikate ergeben die Auszahlung einer Put–Option, falls der Index während der Laufzeit eine obere Kursschranke nicht berührt oder überschreitet. Long–Zertifikate ergeben die Auszahlung einer Call–Option, falls eine untere Kursschranke während der Laufzeit nicht berührt oder unterschritten wird. Zudem besteht grundsätzlich die Möglichkeit, dass bei Berühren der Kursschranke eine Rückvergütung gezahlt wird. Bezeichnet[4]

T	*den Fälligkeitszeitpunkt des Zertifikates,*
t	*einen beliebigen Zeitpunkt zwischen* 0 *und* T,
S_t	*den Indexkurs zum Zeitpunkt* t,
K	*den Basispreis,*
$L(t)$	*eine deterministische Kursschranke (abhängig von der Restlaufzeit* $T-t$*),*
τ	*den Zeitpunkt, an dem die Kursschranke berührt wird,*
$R(t)$	*eine zeitabhängige Rückvergütung,*
r	*die annualisierte konforme Zinsrate,*

[3]Bei den Barrier–Optionen mit einer Schranke gibt es acht verschiedene Typen, die sich durch Lage der Schranke im Verhältnis zum ursprünglichen Kurs des Underlyings („down“ oder „up“), die Art der Schranke („knock-in“ oder „knock-out“) und die an die Schrankenbedingung geknüpfte Standard–Option unterscheiden (Call oder Put). Des Weiteren unterscheidet man reverse und reguläre Barrier–Versionen, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sich die Option zu dem Zeitpunkt, zu dem die Barrier getroffen wird, im Geld (für reverse) bzw. aus dem Geld (für reguläre) befindet. Vgl. auch Rubinstein und Reiner (1991), Rich (1994), Haug (1998) und Tompkins (1999).

[4]In dieser Arbeit wird auf eine explizite Modellierung einer stetigen Dividende verzichtet, auch deswegen, weil es sich beim DAX um einen Performance-Index handelt. Eine Anpassung des Modells und der Aussagen, wenn eine Dividende berücksichtigt werden soll, ist jedoch leicht möglich.

so findet in Abhängigkeit der Kursentwicklung des Indexes entweder eine Auszahlung zum Zeitpunkt T in Höhe der Auszahlung der Option oder zum Zeitpunkt τ eine Auszahlung in Höhe der Rückvergütung statt. Inbesondere lassen sich die Zertifikate hinsichtlich der folgenden Punkte unterscheiden:

(a) begrenzte/ unbegrenzte Laufzeit,
(b) Call/Put (Long/Short–Zertifikat),
(c) Verhältnis von Basispreis und Kursschranke (reguläre/reverse Barrier–Version),
(d) Wahl der Rückvergütung.

Benutzt man den Marktzins r, so kann zur Vergleichbarkeit der Auszahlungen die Auszahlung der Zertifikate zum Zeitpunkt τ auf den Zeitpunkt T aufgezinst werden. Demzufolge kann beispielsweise ein Short–Zertifikat durch ein Produkt beschrieben werden, dessen Auszahlung sich zum Zeitpunkt T formal wie folgt darstellen lässt.

$$\text{Auszahlung} = \begin{cases} \max\{K - S_T, 0\} & \text{falls } S_t < L(t) \text{ für alle } t \in [0,T] \\ R(\tau)e^{r(T-\tau)} & \text{falls } S_t \geq L(t) \text{ für mindestens ein } t \in [0,T]. \end{cases}$$

Spezialfall 1a (Standard–Option): Als Spezialfall ergibt sich für $L(t) = L$ mit $L \to \infty$ gerade die Auszahlung einer Europäischen Put–Option auf den Index mit Fälligkeit T und Basispreis K.

Spezialfall 2a (Barrier–Option): Praxisrelevanter und interessanter ist die Wahl $L(t) = K$, d.h. die Kursschranke L ist konstant und entspricht gerade dem Basispreis der zugrundeliegenden Put–Option, in Kombination mit $R(t) = 0$, d.h., das Zertifikat wird bei Berühren der Barrier wertlos. Für die obige Auszahlung folgt somit

$$\begin{aligned} \text{Auszahlung} &= \begin{cases} \max\{K - S_T, 0\} & \text{falls } S_t < K \text{ für alle } t \in [0,T] \\ 0 & \text{falls } S_t \geq K \text{ für mindestens ein } t \in [0,T] \end{cases} \\ &= \begin{cases} K - S_T & \text{falls } S_t < K \text{ für alle } t \in [0,T] \\ 0 & \text{falls } S_t \geq K \text{ für mindestens ein } t \in [0,T] \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} K - S_T & \text{falls } S_t < Ke^{-r(T-t)} \text{ für alle } t \in [0,T] \\ 0 & \text{falls } S_t \geq Ke^{-r(T-t)} \text{ für mindestens ein } t \in [0,T]. \end{cases} \end{aligned}$$

Eine untere Preisschranke für das betrachtete Short–Zertifikat ergibt sich somit aus dem Preis eines Up–and–Out–Puts mit zeitabhängiger Barrier $\tilde{L}_t = Ke^{-r(T-t)} \leq K$, vgl. Baule, Scholz und Wilkens (2004). Diese kann durch eine Short–Position in einem Forward–Vertrag mit Lieferpreis K semi–statisch abgesichert werden, d.h., die Position wird höchstens einmal während der Laufzeit umgeschichtet. Insbesondere erfolgt hierbei eine Auflösung der Position bei Berühren der Barrier. Zu diesem Zeitpunkt ist der Wert des Forward–Vertrages Null, so dass die Auszahlung des Barrier–Puts dupliziert wird, falls die Barrier berührt wird. Falls die Schranke nicht berührt wird, wird die Position im Forward bis zur Fälligkeit beibehalten, d.h., es ergibt sich die Auszahlung $K - S_T$.

Es ist jedoch zu beachten, dass eine Unterabsicherung bezüglich des betrachteten Short–Zertifikates für den Herausgeber des Zertifikates nicht von Interesse ist. Im Verlaufe dieser Arbeit wird allerdings gezeigt, dass ein einfacher Hedge in Standard–Optionen sowohl für den oben betrachteten Fall ($L = K$) als auch für den allgemeineren Fall einer regulären Barrier–Put–Option ($L \geq K$) eine Überabsicherung erlaubt.

Spezialfall 3a (Barrier–Option mit Rückvergütung): Eine perfekte semi–statische Absicherung in einer Forward–Position wird hingegen ermöglicht, falls ein Turbo–Short–Zertifikat mit $L(t) = L \leq K$ in Kombination mit $R(t) = Ke^{-r(T-t)} - S_t$ betrachtet wird. Die

$$\begin{aligned} \text{Auszahlung} &= \begin{cases} \max\{K - S_T, 0\} & \text{falls } S_t < L \text{ für alle } t \in [0,T] \\ \left(Ke^{-r(T-\tau)} - S_\tau\right) e^{r(T-\tau)} & \text{falls } S_t \geq L \text{ für mindestens ein } t \in [0,T] \end{cases} \\ &= \begin{cases} K - S_T & \text{falls } S_t < L \text{ für alle } t \in [0,T] \\ K - S_\tau e^{r(T-\tau)} & \text{falls } S_t \geq L \text{ für mindestens ein } t \in [0,T] \end{cases} \end{aligned}$$

kann ebenso durch den Eingang eines Terminvertrages mit Lieferpreis K erzeugt werden, falls diese Position zum Zeitpunkt τ aufgelöst wird.

Es ist somit zu beachten, dass unter dem Oberbegriff Turbo–Zertifikate auch teilweise Produkte subsummiert werden, die nicht die wesentlichen Charakteristika einer Barrier–Option aufweisen. Durch eine Wahl der Rückvergütung wie in Spezialfall 3a wird insbesondere eine Abhängigkeit von der Aktienkursvolatilität ausgeschlossen. Da sich die Auszahlung des Vertrages ausschließlich durch eine Position in einem Termingeschäft erzeugen lässt, erweist sich die in der Praxis übliche Bezeichnung *Mini Future* als treffender. Spezialfall 3a charakterisiert die Grundidee des Produktdesigns von *Mini Futures.* In der Praxis wird ausgenutzt, dass der Handel in börsengehandelten Futures–Kontrakten zwar für die Herausgeber der Zertifikate, aufgrund von Sicherheitsleistungen nicht aber für den Privatanleger, möglich ist. In Scholz, Baule und Wilkens (2004) wird ausführlich dargestellt, dass es sich bei der Preisstellung der am Markt gehandelten *Mini Futures* um einen Forward–Preis zuzüglich eines zeitabhängigen Aufschlags handelt. Demzufolge stellt der *Mini Future* zwar prinzipiell einen Forward–Vertrag dar, allerdings wird dieser zu *unfairen* Konditionen angeboten.[5] Der Preisaufschlag verringert sich während der Laufzeit, so dass bei Berühren der Barrier ein geringerer Aufschlag als der aufgezinste Wert des ursprünglichen Aufschlags zurückgezahlt wird. Im Extremfall, d.h., falls die Kursschranke während der Laufzeit nicht berührt wird, verschwindet der Aufschlag vollständig. Die obige Investitionsstrategie ermöglicht demzufolge einen risikolosen Gewinn für den Emittenten.

Analog kann nun ein (Turbo–) Long–Zertifikat durch ein Produkt beschrieben werden, dessen Auszahlung sich zum Zeitpunkt T formal wie folgt darstellen lässt.

$$\text{Auszahlung} = \begin{cases} \max\{S_T - K, 0\} & \text{falls } S_t > L(t) \text{ für alle } t \in [0,T] \\ R(\tau)e^{r(T-\tau)} & \text{falls } S_t \leq L(t) \text{ für mindestens ein } t \in [0,T]. \end{cases}$$

Als **Spezialfall 1b** ergibt sich für $L(t) = L = 0$ die Auszahlung einer Europäischen Call–Option auf den Index mit Fälligkeit T und Basispreis K. Die Wahl von $L(t) = K$ in Kombination mit $R(t) = 0$ führt zu **Spezialfall 2b**. Hierbei resultiert eine obere Preisschranke für das Turbo–Long–Zertifikat aus dem Preis einer Up–and–Out–Call–Option mit

[5]Die Verwendung des Begriffes *Stop–Loss–Level* anstelle von *Barrier* symbolisiert die zur Absicherung geeignete Strategie im Forward. Die Strategie wird beendet, bevor dieser Forward einen negativen Wert erlangen kann.

zeitabhängiger Barrier $\tilde{L}_t = Ke^{-r(T-t)} \leq K$ bzw. einer Long–Position in einem Forward–Vertrag.[6] Ebenso kann ein **Spezialfall 3b** analog zu Spezialfall 3a dargestellt werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll auch die Portfolioabsicherung motiviert werden. Zu diesem Zweck wird unter der Annahme $r = 0$ ein Portfolio betrachtet, das aus jeweils einem Turbo–Short– und einem Turbo–Long–Zertifikat besteht. K_C (K_P) bezeichnet hierbei den Ausübungspreis des Long– (Short)–Zertifikates und L_C (L_P) den jeweiligen Schrankenparameter. Für $L_C = K_C < S_0 < K_P = L_P$ gilt

$$\begin{array}{c}\text{Auszahlung}\\ Put^{UO} + Call^{DO}\end{array} = \begin{cases} K_P - K_C & \text{falls } K_C < S_t < K_P \text{ für alle } t \in [0,T] \\[2ex] K_P - S_T & \text{falls } S_t < K_P \text{ für alle } t \in [0,T] \\ & \quad \text{und } S_t \leq K_C \text{ für mindestens ein } t \in [0,T] \\[2ex] S_T - K_C & \text{falls } S_t > K_C \text{ für alle } t \in [0,T] \\ & \quad \text{und } S_t \geq K_P \text{ für mindestens ein } t \in [0,T] \\[2ex] 0 & \text{falls } S_t \leq K_C \\ & \quad \text{und } S_{\tilde{t}} \geq K_P \text{ für mindestens ein } t, \tilde{t} \in [0,T]. \end{cases}$$

Obige Auszahlung kann ebenso durch eine Long–Position in einem Termingeschäft mit Lieferpreis K_C und einer Short–Position in einem Termingeschäft mit Lieferpreis K_P erzeugt werden. Eine Auflösung der Positionen erfolgt hierbei vorzeitig, falls die entsprechende Schranke berührt wird. Unter Ausschluss von Arbitragemöglichkeiten ergibt sich der heutige Preis des Portfolios zu

$$S_0 - K_C - (S_0 - K_P) = K_P - K_C,$$

d.h., der Preis ist unabhängig vom Preis des Underlyings. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Long– und Short–Position im Forward aufhebt, so dass auch eine Anlage des Betrags $K_P - K_C$ zur Absicherung ausreicht. Es wird später gezeigt, dass dies im Fall $r > 0$ nicht möglich ist.

Im Anschluss an einen kurzen Überblick über die typischen Absicherungsprobleme von Barrier–Optionen soll die Klasse der geeigneten Produkte um reguläre Barrier–Versionen mit $K \neq L$ erweitert werden. Zudem wird auch eine geeignete Absicherungsstrategie für die Short–Produkte vorgestellt.

3. Absicherung von Barrier–Optionen

Für das Risikomanagement von Barrier–Optionen besitzt insbesondere die Unterscheidung zwischen regulären und reversen Barrier–Optionen eine besondere Bedeutung. Reguläre Barrier–Optionen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Optionen bei Entstehen bzw. Vergehen keinen inneren Wert besitzen. Demzufolge handelt es sich um einen regulären Barrier–Put (Call), falls die Kursschranke kleiner (größer) oder gleich dem Basispreis ist. Die reversen Barrier–Optionen besitzen hingegen bei Erreichen der Kursschranke

[6] Es ist intuitiv, dass die untere Preisschranke des Short–Produktes zu einer oberen Preisschranke des nun betrachteten Long–Produktes wird. Somit kann ein Forward–Geschäft nicht gleichzeitig eine obere Preisschranke beider Vertragstypen sein.

einen positiven inneren Wert. Dies hat eine unerwünschte Konsequenz sowohl für dynamischen Delta–Strategien als auch für statische bzw. semi–statische Absicherungsstrategien. Eine dynamische Absicherung von Barrier–Optionen ist im Allgemeinen nicht geeignet, da ein Vorzeichenwechsel im Delta einen Sprung impliziert, der insbesondere zu sehr hohen Gamma–Werten führt, vgl. Tompkins (1999) und Tompkins und Glibitsky (2000).[7] Dieses Problem kann durch eine semi–statische Strategie, die lediglich eine Umschichtung des Portfolios zum Zeitpunkt, an dem die Kursschranke getroffen wird, vermieden werden. Allerdings zeigt es sich, dass lediglich im Fall der regulären Barrier–Optionen ein Portfolio aus gehandelten Produkten, d.h. Standard–Optionen, ausreicht. Im Fall der reversen Barrier–Optionen müssen zusätzlich zu den Standard–Optionen Binär–Optionen benutzt werden. Diese stellen Produkte dar, die zu einer perfekten Absicherung durch ein Kontinuum von Standard–Optionen synthetisiert werden müssen, vgl. Bowie und Carr (1994) und Carr, Ellis und Gupta (1998). Es liegt die Vermutung nahe, dass es sich hierbei gerade um den Grund handelt, warum es sich neben den im letzten Abschnitt erwähnten *Mini Futures* bei den Turbo–Zertifikaten mit begrenzter Laufzeit T und Rückvergütung von Null um reguläre Barrier–Versionen handelt. Im nächsten Abschnitt werden mit Hilfe der *Put–Call–Symmetrie* obere und untere Preisgrenzen für die beiden Turbo–Zertifikatstypen basierend auf semi–statischen Absicherungsstrategien in Standard–Optionen (analog zur semi–statischen Absicherung von Barrier–Optionen) hergeleitet.

4. Semi–statische Absicherung von Barrier–Optionen

Bei den Turbo–Long–Zertifikaten handelt es sich entsprechend den Ausführungen der letzten Abschnitte um reguläre Down–and–Out–Call–Optionen, bei den Turbo–Short–Zertifikaten um reguläre Up–and–Out–Put–Optionen.

Es gilt die folgende Notation:

T	Fälligkeitszeitpunkt der Europäischen Optionen,
t	beliebiger Zeitpunkt zwischen 0 und T,
S_t	Indexkurs zum Zeitpunkt t,
K	Basispreis einer Option,
r	die annualisierte konforme Zinsrate,
$Call(t, S_t; K, T)$	Preis einer Call–Option zum Zeitpunkt t,
$Put(t, S_t; K, T)$	Preis einer Put–Option zum Zeitpunkt t,
L	Kursschranke,
u	Zeitpunkt vor Erreichen der Kursschranke,
$Call^{DO}(u, S_u; K, L, T)$	Preis eines regulären ($L \leq K$) Down–and–Out–Calls z. Ztpkt. u,
$Put^{UO}(u, S_u; K, L, T)$	Preis eines regulären ($L \geq K$) Up–and–Out–Puts z. Ztpkt. u.

Im Folgenden werden Produkte mit fester Fälligkeit T betrachtet. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird deshalb auf eine explizite Angabe der Preisabhängigkeit von T verzichtet. Zum Beispiel wird also nur $Call(t, S_t; K)$ anstelle von $Call(t, S_t; K, T)$ notiert. Zur Bewertung bzw. Absicherung einer Down–and–Out–Call–Option ist es zweckmäßig, zunächst die entsprechende In–Version zu betrachten. Unter Berücksichtigung der Beobachtung, dass

[7] Zum Beispiel ist der Preis einer Down–and–In–Call–Option vor Erreichen der Kursschranke monoton fallend im Kurs des Underlyings, hingegen nach Erreichen der Schranke monoton wachsend.

sich eine Down–and–In–Call–Option vor Berühren der Kursschranke analog zu einer Put–Option verhält, stellt sich die folgende Frage. Welche Anzahl α von Put–Optionen mit welchem Basispreis K_P ist dazu notwendig, eine Wertgleichheit mit einer Call–Option mit Basispreis K_C zu erzielen? Aus der Forderung

$$Call\,(t, S_t; K_C) = \alpha Put\,(t, S_t; K_P)$$

ergibt sich im Rahmen des Black/Scholes–Modells mit[8]

$$\alpha = \frac{K_C}{S_t} e^{-r(T-t)} \tag{1}$$

$$K_P = \frac{\left(S_t e^{r(T-t)}\right)^2}{K_C} \tag{2}$$

die *Put–Call–Symmetrie*. Es ist anzumerken, dass diese Symmetrieeigenschaft auch in einem allgemeineren Kontext ihre Gültigkeit behält.[9] Unter Ausnutzung der Homogenität und des Monotonieverhaltens des Put–Preises in S_t und K ergibt sich, wie im Anhang A.2 dieser Arbeit gezeigt, die folgende Abschätzung für $r \geq 0$:

$$\frac{K_C}{S_t} Put\left(t, S_t; \frac{S_t^2}{K_C}\right) \leq Call\,(t, S_t; K_C) \leq \frac{K_C}{S_t} e^{-rT} Put\left(t, S_t; \frac{\left(S_t e^{rT}\right)^2}{K_C}\right). \tag{3}$$

Da sich eine Down–and–In–Call–Option bei Berühren der Kursschranke L in eine einfache Call–Option umwandelt, muss eine Position in Put–Optionen gewählt werden, so dass sich die oben betrachtete Wertgleichheit für $S_t = L$ ergibt. Für $r = 0$ handelt es sich hierbei um eine statische Position in $\frac{K_C}{L}$ Put–Optionen mit Basispreis $K_P = \frac{L^2}{K_C}$. Im Fall der regulären Barrier–Call–Option, d.h. für $L \leq K$, folgt zudem, dass die Put–Optionen zum Zeitpunkt T wertlos verfallen, falls die Kursschranke nicht während der Laufzeit berührt wird. Es folgt somit, dass das Portfolio aus Put–Optionen die Barrier–Option sowohl für den Fall, dass die zusätzliche Bedingung im Sinne der Barrier erfüllt wird, als auch für den umgekehrten Fall dupliziert. Aus Arbitrageüberlegungen folgt also für alle Zeitpunkte u vor Berühren der Kursschranke

$$Call^{DI}\,(u, S_u; K, L) = \frac{K}{L} Put\left(u, S_u; \frac{L^2}{K}\right) \quad \text{für } r = 0.$$

Somit ist die Kenntnis der Black/Scholes–Formel für Standard–Optionen ausreichend, um (im Fall $r = 0$) die Bewertungsformel der Barrier–Option zu erhalten.[10] Es folgt

$$\begin{aligned}
Call^{DI}\,(u, S_u; K, L) &= L\,\mathcal{N}\left(-\tilde{d}^{(2)}(u, S_u)\right) - \frac{K S_u}{L}\,\mathcal{N}\left(-\tilde{d}^{(1)}(u, S_u)\right) \\
\text{mit } \tilde{d}^{(1)}(u, S_u) &= \frac{\ln\left(\frac{S_u K}{L^2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-u)}{\sigma\sqrt{T-u}} \\
\text{und } \tilde{d}^{(2)}(u, S_u) &= \tilde{d}^{(1)}(u, S_u) - \sigma\sqrt{T-u}.
\end{aligned}$$

Um eine Abschätzung für $r \geq 0$ zu erhalten, wird Gleichung (3) und die folgende Portfolioargumentation benutzt. Es muss eine Position in Put–Optionen gewählt werden, so dass sich für $S_t = L$ aus den Put–Optionen mindestens (bzw. höchstens) soviel ergibt, wie

[8] Vgl. Anhang A Abschnitt A.1.

[9] Für die Bedingungen an die Volatilitätsstruktur siehe Carr, Ellis und Gupta (1998).

[10] Für die allgemeine Bewertungsformel im Fall $r > 0$ siehe Rubinstein und Reiner (1991).

zum Eingang einer Long–Position in der Call–Option benötigt wird. Man erhält folgende Abschätzung

$$\frac{K_C}{L} Put\left(\frac{L^2}{K_C}\right) \leq Call^{DI}\left(K,L\right) \leq \frac{K_C}{L} e^{-rT} Put\left(\frac{\left(Le^{rT}\right)^2}{K_C}\right), \tag{4}$$

wobei die Optionspreise nur noch in Abhängigkeit des Basispreises und eventuell der Schranke notiert sind. Dies wird auch im Folgenden zur Vereinfachung der Lesbarkeit beibehalten.

Ein Turbo–Long–Zertifikat, dessen Barrier kleiner oder gleich dem Ausübungspreis gewählt wurde, entspricht einer regulären Down–and–Out–Call–Option. Unter Beachtung der folgenden In–Out–Parität

$$Call^{DO}\left(K,L\right) \;=\; Call\left(K\right) - Call^{DI}\left(K,L\right)$$

ergeben sich demzufolge für das Turbo–Long–Zertifikat, dargestellt als Down–and–Out–Call, $Call^{DO}$, mit $L \leq K$, die folgenden Abschätzungen:

$$Call^{DO}\left(K,L\right) \leq Call\left(K\right) - \frac{K}{L} Put\left(\frac{L^2}{K}\right), \tag{5}$$

$$Call^{DO}\left(K,L\right) \geq Call\left(K\right) - \frac{K}{L} e^{-rT} Put\left(\frac{\left(Le^{rT}\right)^2}{K}\right). \tag{6}$$

Analoge Überlegungen ermöglichen eine Abschätzung im Falle eines Up–and–Out–Puts mit $K \leq L$. Zusammenfassend lassen sich demzufolge anhand der semi–statischen Absicherungsstrategien die folgenden Preisgrenzen für die Turbo–Zertifikate herleiten:[11]

Preisgrenzen

	untere Preisgrenze	obere Preisgrenze
Long ($K \geq L$)	$Call\left(K\right) - \frac{K}{L} e^{-rT} Put\left(\frac{\left(Le^{rT}\right)^2}{K}\right)$	$Call\left(K\right) - \frac{K}{L} Put\left(\frac{L^2}{K}\right)$
Short ($L \geq K$)	$Put\left(K\right) - \frac{K}{L} Call\left(\frac{L^2}{K}\right)$	$Put\left(K\right) - \frac{K}{L} e^{-rT} Call\left(\frac{\left(Le^{rT}\right)^2}{K}\right)$

Wie schon in Abschnitt 2 gezeigt, ergibt sich in dem Spezialfall $L = K$ die obere (untere) Preisgrenze eines Long– (Short–) Zertifikates aus der Differenz von Call– und Put–Preisen. Dies entspricht dem Wert einer Long– (Short–) Position in einem Forward-Geschäft. Bei dem Long–Forward handelt es sich um eine Überabsicherung (obere Preisschranke) eines Turbo–Long–Zertifikates. Entsprechend handelt es sich bei dem Short–Forward um eine Unterabsicherung (untere Preisschranke) eines Turbo–Short–Zertifikates. Bei den in diesem Abschnitt betrachteten Zertifikaten handelt es sich um reguläre Barrier–Optionen. Ein

[11]Die Risikokennziffern der Preisschranken sind einfach und intuitiv bestimmbar, da sie sich aus denen von Standard–Optionen zusammensetzen.

Preisgrenzen Turbo–Zertifikate

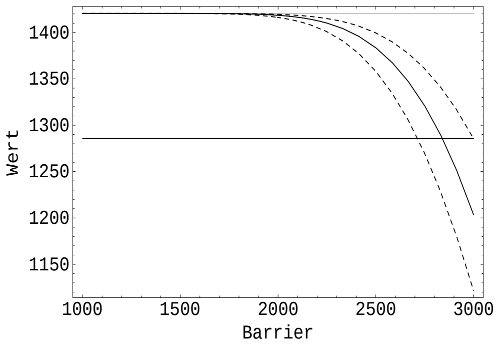

Abbildung 1. Werte und Preisgrenzen eines Long–Zertifikates mit einer Restlaufzeit von 2 Jahren für einen Basispreis von $K = 3.000$ in Abhängigkeit der Kursschranke ($L \leq K$).

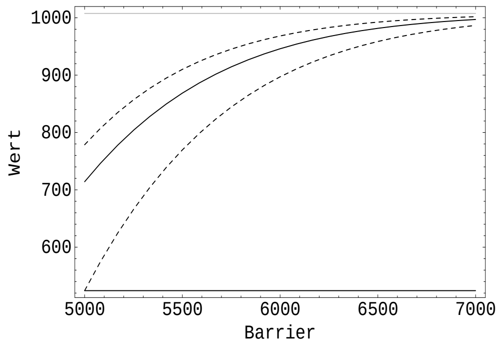

Abbildung 2. Werte und Preisgrenzen eines Short–Zertifikates mit einer Restlaufzeit von 2 Jahren für einen Basispreis von $K = 5.000$ in Abhängigkeit der Kursschranke ($L \geq K$).

regulärer Barrier–Put und ein regulärer Barrier–Call besitzen ein umgekehrtes Verhältnis von Basispreis und Kursschranke, d.h., für ein Long–Zertifikat wird $K_C \geq L_C$ gewählt und bei einem Short–Zertifikat $L_P \geq K_P$. Dies führt dazu, dass im Fall $L \neq K$ keine Symmetrie in dem folgenden Sinne gilt. Der Forward mit Lieferpreis K_P ergibt eine untere Preisschranke des Short–Zertifikates.[12] Hingegen bestimmt der Forward mit Lieferpreis K_C keine obere Preisschranke des Long–Zertifikates.

Die Abbildungen 1 und 2 illustrieren die Preisgrenzen eines Long– (bzw. Short–) Zertifikates. Analog zu Baule, Scholz und Wilkens (2004) wurde $S_0 = 4.000$, $\sigma = 0,3$ und $r = 0,05$ gewählt. Es ist zu beobachten, dass der Forward–Preis (fettgedruckte Gerade) nur für $K = L$ eine obere Preisschranke ergibt, jedoch in diesem Beispiel für $L < K$ niedriger ist als der Black/Scholes–Preis. Hingegen ergibt der Short–Forward im Fall des Short–Zertifikates nicht nur für $L = K$, sondern auch für $L > K$ eine untere Preisschranke. Da es sich bei der Forward–Position lediglich um die untere Preisschranke handelt, stellt dies nicht den für die Emittenten relevanten Fall dar.

Wird die Absicherung eines gesamten Portfolios betrachtet, so kann diese nicht teurer sein, als die Absicherung der einzelnen Positionen. Unter der Annahme eines vollständigen Finanzmarktmodells, wie etwa des Black/Scholes–Modells, handelt es sich bei dem arbitragefreien Preis um eine lineare Preisregel. Insbesondere impliziert dies, dass sich die Absicherungspositionen des gesamten Portfolios aus der Summe der einzelnen Absicherungspositionen ergeben. Im Fall der semi–statischen Absicherung handelt es sich jedoch wie zuvor gezeigt für $r > 0$ um eine Über– bzw. Unterabsicherung. Demzufolge wird anhand von Preisgrenzen argumentiert. Hinsichtlich der oberen Preisgrenze ergibt sich im

[12] Aus $L \geq K$ und dem Monotonieverhalten von Put–Preisen folgt

$$Put\,(K) - \frac{K}{L} Call \left(\frac{L^2}{K}\right) \geq -(S_u - e^{-r(T-u)}K).$$

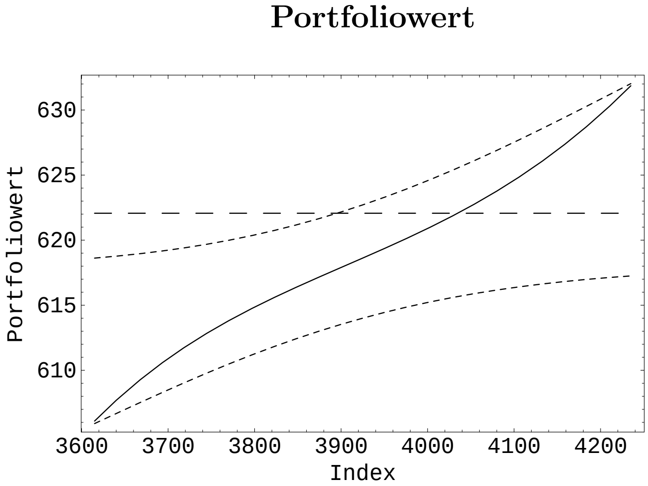

ABBILDUNG 3. Portfolio bestehend aus jeweils einem Long– und Short–Turbo–Zertifikat mit $K_C = L_C = 3.615$ und $K_P = L_P = 4.235$ und Restlaufzeit von 2 Monaten bei einem Zinssatz von 2% und einer Volatilität von 0,2.

Allgemeinen eine Subadditivität der Preisregel. Die kleinste obere Preisschranke des Gesamtportfolios ist geringer als die oder gleich der Summe der kleinsten oberen Preisschranken der einzelnen Positionen.

Folglich stellt sich in Bezug auf die Turbo–Zertifikate die Frage, ob sich die Preisgrenzen bei einer Portfoliobetrachtung, d.h. bei der Betrachtung eines Portfolios aus Turbo–Long– und Turbo–Short–Zertifikaten, verschärfen lassen. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Preisgrenzen aus einer nahezu modellfreien semi–statischen Absicherung ableiten. Im Folgenden wird gezeigt, dass eine Verschärfung der Preisgrenzen nicht aus einer semi–statischen Absicherungsstrategie erfolgen kann. Wird etwa ein Portfolio aus einem Turbo–Long– und einem Turbo–Short–Zertifikat betrachtet, so ist die Auszahlung des Portfolios an das Erreichen von zwei Kursschranken gebunden. Die hieraus resultierende Absicherungsproblematik ist analog zu der Problematik für *Double–Barrier–Optionen*.[13] Insbesondere lassen sich keine semi–statischen Absicherungsstrategien für Double–Barrier–Optionen ausschließlich in Standard–Optionen angeben. Im vorliegenden Fall führt dies dazu, dass sich die semi–statische Absicherung des Portfolios aus der semi–statischen Absicherung der einzelnen Positionen ergibt. Demzufolge kann also keine *Verbesserung* bei einer Portfoliobetrachtung erzielt werden.

Des Weiteren stellt sich die Frage, ob sich zumindest die Absicherungsstrategie in dem Sinne vereinfacht, dass sich Long– und Short– Positionen saldieren. Hinsichtlich einer Long– und Short–Position in einem Forward würde sich hierbei lediglich die Differenz aus den Lieferpreisen ergeben. Erneut tritt an dieser Stelle das Problem auf, dass ein Forward–Geschäft im Allgemeinen lediglich eine untere Preisschranke für das Turbo–Short–Zertifikat impliziert.

[13]Eine Übersicht hierzu wird in Tompkins und Glibitsky (2000) gegeben.

Formal lässt sich eine Portfoliobetrachtung für Turbo–Zertifikate aus Sicht des Emittenten wie folgt durchführen. Bezeichnet im betrachteten Portfolio n die Anzahl der verschiedenen Turbo–Long–Zertifikate, m die Anzahl der verschiedenen Turbo–Short–Zertifikate und α_i und β_i die jeweilige Höhe der i–ten Emission. Dann lässt sich der Wert des Portfolios darstellen als

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; Call^{DO}(K_C^i, L_C^i) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \; Put^{UO}(K_P^i, L_P^i).$$

Für den Spezialfall $r = 0$, $K_P^i = L_P^i$ und $K_C^i = L_C^i$ ergibt sich zum Zeitpunkt u bei einem Indexkurs von S_u anhand der Preisgrenzen aus Abschnitt 4

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; (S_u - K_C^i) - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \; (S_u - K_P^i) \\ = \;\; & S_u \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; K_C^i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \; K_P^i. \end{aligned}$$

Falls die Gesamtanzahl der herausgegebenen Short– und Long–Zertifikate übereinstimmt, d.h. falls

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i,$$

so erübrigt sich der Eingang eines Forwardgeschäfts. Das Portfolio ist risikofrei. Obige Argumentation ist nicht gültig, falls $r > 0$. Es lässt sich leicht zeigen, dass der tatsächliche Black/Scholes–Preis des Gesamtportfolios beliebig nahe an die Summe der Preisschranken heranreichen kann. Dies wird in Abbildung 3 illustriert. Die beiden feiner gestrichelten Linien kennzeichnen die aus der Summe der einzelnen Preisschranken resultierenden Preisschranken des Portfolios. Es ist zu beobachten, dass sich diese Linien beliebig nahe an den tatsächlichen Preis (durchgezogene Linie) annähern. Die aufgezinste Differenz der Ausübungspreise (konstante Linie) ergibt keine Absicherung. Insbesondere wird ersichtlich, dass der oben betrachtete Effekt auch für kurze Laufzeiten (hier 2 Monate) und bei niedrigen Zinsen (hier $r = 0,02$) auftritt. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich bei der semi–statischen Überabsicherung keine Portfolioeffekte erzielen lassen. Für die Preisschranken eines Portfolios aus beiden Typen von Turbo–Zertifikaten gilt eine Additivität der oberen Preisgrenzen und nicht nur eine Subadditivität.

Im nächsten Abschnitt werden Marktdaten benutzt, um die Marktpreise für die Turbo–Zertifikate mit den optionstheoretischen Preisen für die Barrier–Versionen sowie für die aus den semi–statischen Absicherungsportfolios hergeleiteten Preisgrenzen vergleichen zu können.

5. Preisgrenzen im Vergleich zu Marktpreisen

Im Folgenden werden von HSBC Trinkaus & Burkhardt emittierte Turbo–Zertifikate betrachtet. Laut Produktbeschreibung handelt es sich um Knock–Out–Zertifikate mit der

Marktpreise Turbo–Zertifikate

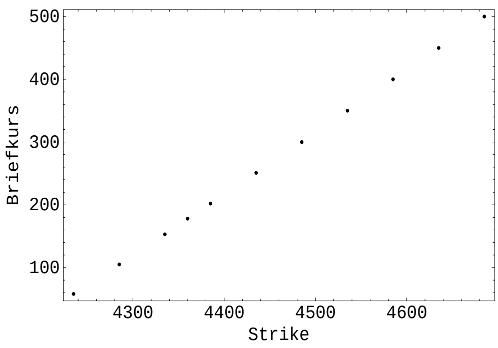

Abbildung 4. Short–Zertifikate.

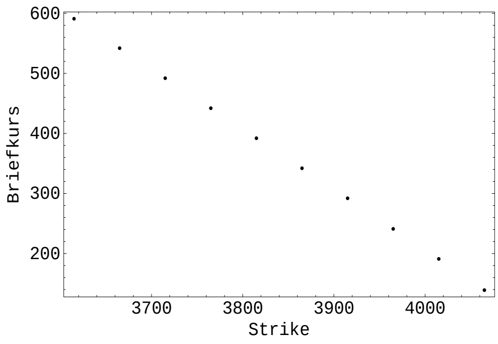

Abbildung 5. Long–Zertifikate.

Marktpreise und Preisschranken von Short–Zertifikaten

Strike = Barrier	Briefkurs ×100	obere Preisschranke	untere Preisschranke = Short–Forward	Black/Scholes–Preis Up–and–Out–Put
4235	58	48,08 (0,206)	35,69 (0,625)	46,80 (0,239)
4285	105	96,41 (0,089)	85,52 (0,228)	94,31 (0,113)
4335	153	144,80 (0,057)	135,35 (0,130)	142,24 (0,076)
4360	178	169,03 (0,053)	160,27 (0,111)	166,34 (0,070)
4385	202	193,28 (0,045)	185,19 (0,091)	190,53 (0,060)
4435	251	241,87 (0,038)	235,02 (0,068)	239,13 (0,050)
4485	300	290,58 (0,032)	284,86 (0,053)	287,98 (0,042)
4535	350	339,41 (0,031)	334,69 (0,046)	337,05 (0,038)
4585	400	388,37 (0,030)	384,52 (0,040)	386,29 (0,036)
4635	450	437,45 (0,029)	434,36 (0,036)	435,66 (0,033)
4685	500	486,65 (0,027)	484,19 (0,033)	485,15 (0,031)

Tabelle 1. Kurse vom 24.01.2005, Ref.–Kurs 4185,220, $r = 0,02$, $\sigma = 0,2$.

Möglichkeit eines Totalverlusts, d.h. die Barrier entspricht dem Ausübungspreis. Es ist festzustellen, dass die Preisstellung der Zertifikate linear im Strike verläuft, vgl. Abbildungen 4 und 5.[14] Eine lineare Regression ergibt bei einem R^2 von nahezu Eins

$$\begin{aligned} Short(K) = -4114,28 + 0,984559K &= \underbrace{K - 4185,22}_{\text{innerer Wert}} + \underbrace{(70,94 - 0,015441K)}_{\text{Aufschlag}} \\ Long(K) = 4220,36 - 1,00364K &= \underbrace{-(K - 4185,22)}_{\text{innerer Wert}} + \underbrace{(35,14 - 0,00364K)}_{\text{Aufschlag}}. \end{aligned}$$

In den letzten Abschnitten wurde gezeigt, dass für einen positiven Zins auch die Preisschranke eines gesamten Portfolios auf einer Absicherung in Standard–Optionen basiert. Dies impliziert eine Abhängigkeit von der Volatilität und kann somit nicht in Einklang mit der in der Praxis verwendeten Preisstellung anhand des Forwards (bzw. inneren Wertes) gebracht werden. Um den theoretischen Preis hinsichtlich aller gehandelten Ausübungspreise

[14] Für eine detaillierte Analyse der in der Praxis üblichen Preisstellung wird auf Scholz, Baule und Wilkens (2004) verwiesen.

Marktpreise und Preisschranken von Long–Zertifikaten

Strike = Barrier	Briefkurs ×100	obere Preisschranke = Long–Forward	untere Preisschranke	Black/Scholes–Preis Down–and–Out–Call
3615	591	582,25 (0,015)	581,31 (0,017)	582,00 (0,015)
3665	542	532,42 (0,018)	531,06 (0,021)	532,02 (0,019)
3715	492	482,58 (0,020)	480,69 (0,024)	481,96 (0,021)
3765	442	432,75 (0,021)	430,17 (0,027)	431,80 (0,024)
3815	392	382,92 (0,024)	379,50 (0,033)	381,50 (0,028)
3865	342	333,08 (0,027)	328,67 (0,041)	331,04 (0,033)
3915	292	283,25 (0,031)	277,68 (0,052)	280,34 (0,042)
3965	241	233,42 (0,032)	226,53 (0,064)	229,38 (0,051)
4015	191	183,58 (0,040)	175,25 (0,090)	178,07 (0,073)
4065	139	133,75 (0,039)	123,85 (0,122)	126,37 (0,100)

TABELLE 2. Kurse vom 24.01.2005, Ref.–Kurs 4185,220, $r = 0,02$, $\sigma = 0,2$.

Gewinnmargen von Turbo–Zertifikaten

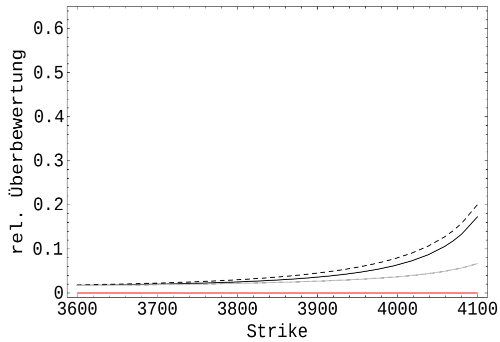

ABBILDUNG 6. Long–Zertifikate.

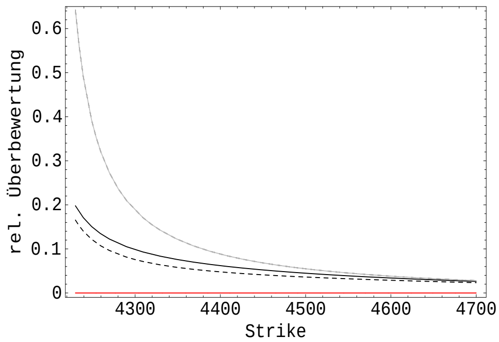

ABBILDUNG 7. Short–Zertifikate.

unabhängig von der Volatilität zu dominieren, muss ein entsprechend hoher (konstanter) Aufschlag gewählt werden. Die Marktpreise unterstützen diese Vermutung. Dies wird in den Abbildungen 6 und 7 illustriert. Hier ist die relative Überbewertung der Zertifikate bezogen auf die Preisschranken sowie den Black/Scholes–Preis abgebildet.

In den Tabellen 1 und 2 werden die beobachteten Marktpreise mit den im letzten Abschnitt erhaltenen theoretischen Preisschranken verglichen.[15] In Klammern wird hierbei die jeweilige prozentuale Überbewertung angegeben, d.h.

$$\frac{\text{Briefkurs-Preisschranke}}{\text{Preisschranke}}.$$

Obwohl die Preisstellung der Turbo–Zertifikate weitgehend unabhängig von der Volatilität ist, gilt dies, wie in den vorherigen Abschnitten gezeigt, in dieser Allgemeinheit nicht für die Absicherung der Zahlungsverpflichtungen.

[15]Es ist anzumerken, dass sich bei den Marktpreisen von Standard–Optionen keine Aufschläge in den hier beobachteten Höhen feststellen lassen.

6. Schlussbetrachtungen

Eines der beliebtesten und umsatzstärksten strukturierten Produkte für Privatanleger am deutschen Markt sind Turbo–Zertifikate in ihren Long– und Short–Versionen. Dahinter verbergen sich jedoch bei genauerer Betrachtung der Auszahlungsprofile nichts anderes als Barrier–Optionen in Form von Up–and–Out–Puts und Down–and–Out–Calls, die sich hinsichtlich des Basispreises, der Schranke und der Rückvergütung unterscheiden. Es wurden diejenigen Zertifikattypen bestimmt, die eine nahezu modellfreie und statische Absicherung in Standard–Optionen bzw. Forward–Verträgen erlauben. Hierzu gehören reverse Barrier–Optionen in Kombination mit einer speziellen Wahl der Rückvergütung. Diese werden in der Praxis als *Mini Futures* gehandelt. Eine statische Absicherung von regulären Barrier–Optionen ist auch ohne spezielle Wahl der Rückvergütung möglich. Diese werden unter dem Namen *Knock–Out–Produkte* gehandelt.

Die Analyse basierte auf einer verallgemeinerten *Put–Call–Symmetrie*, mit deren Hilfe leicht replizierbare obere und untere Preisschranken bestimmt wurden. Aus Sicht der emittierenden Bank sind lediglich obere Preisschranken von Bedeutung, da bei einem Verkauf des Zertifikates und der gleichzeitigen Benutzung der Absicherungsstrategie ein risikoloser Gewinn erzielt wird. In dem Spezialfall, dass Barrier und Ausübungspreis übereinstimmen, ergibt sich die obere Preisschranke des Turbo–Long–Zertifikates gemäß eines Forward–Vertrages. Entsprechend handelt es sich jedoch um eine untere Preisschranke des Short–Zertifikates, so dass dessen Auszahlung nur mit Hilfe von Standard–Optionen dominiert werden kann.

Reguläre Barrier–Optionen sind dadurch gekennzeichnet, dass die entstehenden bzw. vergehenden Optionen bei Berühren der Schranke keinen inneren Wert besitzen. Demzufolge ist das Verhältnis von Barrier und Ausübungspreis der Long– und Short–Zertifikate entgegengesetzt, so dass diese Positionen sich bei einer Portfoliobetrachtung nicht aufheben. Folglich kann auch hier nicht auf die Benutzung von Standard–Optionen verzichtet werden. Es wurde gezeigt, dass bei der Absicherung des Portfolios aus Zertifikaten kein besseres Ergebnis bezüglich einer oberen Preisschranke aus einem statischen Hedge bestimmt werden kann als aus einer Einzelbetrachtung.

Abschließend wurden die theoretisch hergeleiteten Preisschranken mit Marktpreisen verglichen. Eine von der Volatilität unabhängige Preisstellung ermöglicht eine Überbewertung nur durch einen hohen Aufschlag. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass im Gegensatz zu der Preisstellung eine Absicherung der Zahlungsverpflichtungen im Allgemeinen nicht unabhängig von der Volatilität erfolgen kann. Der Emittent der Turbo–Zertifikate erzielt bei der gängigen Preisstellung und gleichzeitigem Eingang der entsprechenden Absicherungsstrategie in Standard–Optionen einen risikolosen Gewinn. Ein Portfolio, das ausschließlich aus Turbo–Zertifikaten und Terminverträgen besteht, ist nicht risikolos. Während das große Angebot an Turbo–Zertifikaten durch Arbitrage zu erklären ist, basiert die Nachfrage auf Spekulationsmotiven. Dem Privatanleger ist es nicht möglich, die Auszahlung der Turbo–Zertifikate anhand von für ihn zugänglichen Produkten nachzubilden.

Anhang A. Put–Call–Symmetrie

A.1. **Beweis von Gleichung (1) und Gleichung (2).**
Unter Annahme des Black/Scholes–Modells gilt für den Wert einer Europäischen Put–Option mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K zum Zeitpunkt t ($t \leq T$)

$$\begin{aligned} Put(t, S_t; K) &= Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(-d^{(2)}(t, S_t; K\right) - S_t\mathcal{N}\left(-d^{(1)}(t, S_t; K)\right) \\ \text{mit } d^{(1)}(t, S_t; K) &:= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ \text{und } d^{(2)}(t, S_t; K) &:= d^{(1)}(t, S_t; K) - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Für den Wert einer sonst identischen Call–Option gilt:

$$Call(t, S_t; K) = S_t\mathcal{N}\left(d^{(1)}(t, S_t; K)\right) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d^{(2)}(t, S_t; K)\right).$$

Die Put–Call–Symmetrie ergibt sich unmittelbar aus der Frage, wieviele Call–Optionen α mit welchem Ausübungspreis K_C benötigt werden, um den Preis einer bis auf den Ausübungspreis K_P identischen Put–Option zu duplizieren. Formal folgt:

$$\begin{aligned} & Put\,(t, S_t; K_P) = \alpha Call\,(t, S_t; K_C) \\ \Leftrightarrow\quad & \alpha\left[S_t\mathcal{N}\left(d^{(1)}(t, S_t; K_C)\right) - K_Ce^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d^{(2)}(t, S_t; K_C)\right)\right] \\ & = K_Pe^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(-d^{(2)}(t, S_t; K_P)\right) - S_t\mathcal{N}\left(-d^{(1)}(t, S_t; K_P)\right). \end{aligned}$$

Offensichtlich ergibt sich als notwendige Bedingung, dass

$$\begin{aligned} \alpha S_t &= e^{-r(T-t)}K_P, \\ \alpha e^{-r(T-t)}K_C &= S_t. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Wahl

$$K_C = \frac{(S_te^{r(T-t)})^2}{K_P} \text{ und } \alpha = \frac{K_P}{S_t}e^{-r(T-t)}$$

die geforderte Gleichheit erfüllt. Insbesondere gilt demzufolge

$$Put\,(t, S_t; K_P) = \frac{K_P}{S_t}e^{-r(T-t)}Call\left(t, S_t; \frac{(S_te^{r(T-t)})^2}{K_P}\right).$$

A.2. **Beweis von Ungleichung (3).** Analog zu Abschnitt A.1 gilt

$$Call(t, S_t; K_C) = \frac{K_C}{S_t}e^{-r(T-t)}Put\left(t, S_t; \frac{\left(S_te^{r(T-t)}\right)^2}{K_C}\right).$$

Eine Ausnutzung der Homogenität des Put–Preises im Preis des Underlyings und im Strike sowie die Preismonotonie ergibt für $r \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{K_C}{S_t}e^{-r(T-t)}Put\left(t, S_t; \frac{\left(S_te^{r(T-t)}\right)^2}{K_C}\right) &= \frac{K_C}{S_t}Put\left(t, e^{-r(T-t)}S_t; \frac{S_t^2e^{r(T-t)}}{K_C}\right) \\ &\leq \frac{K_C}{S_t}Put\left(t, e^{-rT}S_t; \frac{S_t^2e^{rT}}{K_C}\right) \\ &= \frac{K_C}{S_t}e^{-rT}Put\left(t, S_t; \frac{\left(S_te^{rT}\right)^2}{K_C}\right). \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\frac{K_C}{S_t} e^{-r(T-t)} Put\left(t, S_t; \frac{\left(S_t e^{r(T-t)}\right)^2}{K_C}\right) &\geq \frac{K_C}{S_t} Put\left(t, S_t; \frac{S_t^2 e^{r(T-t)}}{K_C}\right) \\ &\geq \frac{K_C}{S_t} Put\left(t, S_t; \frac{S_t^2}{K_C}\right).\end{aligned}$$

Literatur

Baule, R., Scholz, H. und Wilkens, M. (2004), Short-Zertifikate auf Indizes - Bewertung und Analyse eines innovativen Retail-Produktes für Baissephasen, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* **74**(4), 315–338.

Black, F. und Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* **81**, 637–659.

Bowie, J. und Carr, P. (1994), Static Simplicity, *Risk* **7**(8), 45–49.

Carr, P., Ellis, K. und Gupta, V. (1998), Static Hedging of Exotic Options, *Journal of Finance* **53**(3), 1165–1190.

Fischer, E. O., Greistorfer, P. und Sommersguter-Reichmann, M. (2002), Turbo–Zertifikate – Darstellung, Bewertung und Analyse, *Österreichisches Bankarchiv* **50**(12), 995–1005.

Fischer, E. O., Greistorfer, P. und Sommersguter-Reichmann, M. (2003), Short–Zertifikate – Darstellung, Bewertung und Analyse, *Österreichisches Bankarchiv* **51**(2), 119–128.

Haug, E. G. (1998), *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, McGraw-Hill.

Rich, D. R. (1994), The Mathematical Foundations of Barrier-Option Pricing Theory, *Advances in Futures and Options Research* **7**, 267–311.

Rubinstein, M. und Reiner, E. (1991), Breaking Down the Barriers, *Risk* **4**(9), 28–35.

Scholz, H., Baule, R. und Wilkens, M. (2004), Innovative Turbo–Zertifikate am deutschen Kapitalmarkt – Preisstellung, Bewertung, Hedging und Gewinnpotenzial, *Working Paper, Katholische Universität Eichstätt–Ingolstadt.*

Tompkins, R. G. (1999), Exotic Options (Part 3) – Simple Barrier Options, *Österreichisches Bankarchiv* **47**(12), 996–1005.

Tompkins, R. G. und Glibitsky, M. (2000), Exotic Options (Part 4) – Complex Barrier Options, *Österreichisches Bankarchiv* **48**(10), 902–913.

Summary

Turbo–Certificates are one of the most popular structured equity products for private investors in Germany. They can be regarded as special forms of barrier options. The relation between the barrier level and the strike price is especially important for the design of these products. By using a certain choice of these parameters, the issuer is able to obtain an almost static (super–) hedge in standard option contracts. If the barrier level is equal to the strike, the upper price bound of a Turbo–Long–Certificate coincides with the value of a forward contract. Therefore, in the case of a Turbo–Short–Certificate, the forward implies only a lower price bound. It is shown that in general, the issuer can neither hedge a single certificate nor a portfolio of certificates without using standard options.