LEVENSDUUR IN EEN JAARGANGMODEL

door

P. VERHEYEN en J. VAN LIESHOUT *

§ 1. **Inleiding**

In vele algemeen economische beschouwingen wordt expliciet of impliciet uitgegaan van bedrijfseconomische wetmatigheden. Dit geldt zowel voor theoretische studies als voor beleidsvoorstellen van de regering.
Zo wordt bijvoorbeeld over de gevolgen van de dalende winst van bedrijven gezegd. dat "de rendementserosie . . . . . aanvankelijk prikkelt tot arbeidsplaatsen besparende investeringen, maar . . . . . een zware domper zet op arbeidsplaatsen creërende investeringen" [1, p. 12]. Tevens vormt "de winstpositie . . . . . een duidelijke voorwaarde . . . . . voor het investeren" [2, pag. 72] en zullen dan "externe financiers een grotere mate van terughoudendheid aan de dag leggen" [3, pag. 89]. De oplossing wordt gevonden door "dat pakket van beleidsmaatregelen te kiezen, dat het structurele financieringstekort zo beperkt mogelijk houdt" [4, pag. 23], "door de rendementsverwachtingen en de financiering te beïnvloeden" [4, pag. 9] of door de daling van de arbiedsplaatsen in de industrie te aanvaarden daar "sterk rekening gehouden moet worden met de verschuivende verhouding tussen de produktiefactoren ten nadele van de factor arbeid. Dit heeft een vermindering van de arbeidsplaatsen tot gevolg" [6, pag. 94].
De voorafgaande citaten hadden betrekking op het aanschaffen van investeringsgoederen. Over het tijdstip van afstoten wordt bijna altijd gesteld dat de levensduur van de oudste machine bepaald wordt door het moment dat de variabele kosten gelijk zijn aan de opbrengst van de machine [7, pag. 55; 8 pag. 382]. Deze stelling wordt ook in de practisch geöriënteerde adviezen overgenomen [6 pag. 24; 9 pag. 20].

Als men als bedrijfseconoom deze macro-economische beschouwingen leest, vergelijkt men deze met soortgelijke conclusies uit de bedrijfseconomie. Het doel van dit artikel is voor het laatst gesignaleerde probleem d.i. de bepaling van de levensduur van machines, een vergelijking te maken van de bedrijfseconomische theorie met de in de algemene economie opgenomen hypothesen. In deze vergelijking zullen tevens de in dit Maandschrift beschreven modellen van Den

* De auteurs zijn hoogleraar, respectievelijk wetenschappelijk hoofdmedewerker aan de subfaculteit der econometrie van de Katholieke Hogeschool, Tilburg.

Butter [10] en van Den Hartog, Van de Klundert en Tjan [10] worden meegenomen. De conclusie zal dan zijn, dat Den Butter uitgaat van een oneindige keten machines en Den Hartog c.s. geen rekening houden met "opvolgers".

§ 2. **De klassieke bedrijfseconomische theorie** [11]

We definiëren:

K = kapitaalwaarde

t = tijd

T = tijdstip van vervanging

I = investeringsuitgaven

r = rentefactor

C(t) = kasstroom (excl. investeringsuitgave) ten gevolge van I op moment t.

Als de machine geen restwaarde heeft, is de kapitaalwaarde gelijk aan de contante waarde van de kasstroom verminderd met de investeringsuitgave dus

$$K = \int_0^T C(t)\, e^{-rt} dt - I \tag{1}$$

Indien als doelstelling maximalisering van de kapitaalwaarde gekozen wordt, is het beste moment van afstoten van de machine het moment waarop de kapitaalwaarde niet meer toeneemt, ofwel $\frac{dK}{dT} = 0$, dus

$$C(T)e^{-rT} = 0 \tag{2}$$

Omdat $e^{-rT} > 0$ moet gelden $C(T) = 0$, zodat "de machine vervangen wordt op het moment dat de exploitatieoverschotten nihil zijn geworden: de machine is economisch gezien totaal versleten" [11, pag. 30].

Normaal gesproken zal een bedrijfsactiviteit niet gekoppeld zijn aan één machine: de machine zal worden gevolgd door een nieuwe. Als we onderstellen dat alle opeenvolgende machines in economisch opzicht volledig identiek zijn, dan geldt voor de kapitaalwaarde voor de oneindige keten van identieke machines (J):

$$J = K + e^{-rT}K + e^{-2rT}K + \ldots = \frac{1}{1-e^{-rT}} K =$$

$$\frac{1}{1-e^{-rT}} \{\int_0^T C(t)e^{-rt}\, dt - I\} \tag{4}$$

De optimale levensduur is nu te bepalen uit:

$$\frac{dJ}{dT} = \frac{1}{1-e^{-rT}} C(T)e^{-rT} - \frac{re^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2} \{\int_0^T C(t)e^{-rt}\, dt - I\} = 0$$

dus

$$C(T) - \frac{r}{1-e^{-rT}} K = 0 \tag{5}$$

of

$$C(T) = rJ \tag{6}$$

Door de opvolgers in de beschouwing te betrekken wordt de levensduur verkort. Men wacht niet met vervanging totdat de exploitatieoverschotten nul zijn, maar gaat eerder tot vervanging over. De nieuwe machine concurreert, gegeven een positieve kapitaalwaarde, de oude machine uit de markt. De oude is dus niet versleten, maar de nieuwe heeft voordelen. De voordelen zijn de vermogens-"opbrengsten" van de kapitaalwaarde (rJ).
Door te vervangen komt de positieve kapitaalwaarde (J) eerder beschikbaar, hetgeen een "renteopbrengst" tot gevolg heeft. Bij vervangen valt daartegenover C(T) af. Het evenwicht ligt bij de gelijkheid van voordeel en nadeel.

§ 3. **Een model à la Malcomson**

Door Malcomson is in "Journal of Economic Theory" [12] een artikel gepubliceerd over het vervangen in een jaargangen-model. Als we zijn algemene model speciferen in navolging van Den Hartog c.s. en Den Butter [10] ontstaat een jaargangen-model met constante technische vooruitgang.
We definiëren:

- κ : kapitaalcoëfficiënt
- $m(\nu)$: aantal machines van jaargang ν
- $\zeta(t)$: leeftijd van de oudste machine op tijdstip t
- $\eta(t)$: optimale leeftijd van de op t aangeschafte machine
- $y(t)$: totale afzet op t
- φ : opbrengst per arbeidsplaats op t = 0
- μ : groeivoet van de geïncorporeerde arbeidsbesparende technische vooruitgang
- $l(0)$: loonkosten per arbeidsplaats in het basisjaar
- λ : groeivoet van de loonkosten
- r : rentefactor
- $p(t)$: prijs van het produkt op tijdstip t
- $q(t)$: prijs van de machine op tijdstip t.

Het model is te formuleren als *):

$$\max J = \int_0^\infty \{e^{-rt}(p(t)).y(t)-m(t)\ q(t)-\int_{t-\zeta(t)}^{t}\frac{l(0)}{\kappa\varphi}\ m(\nu)e^{\lambda t}e^{-\mu\nu}d\nu)\}dt \quad (7)$$

waarin

$$\int_{t-\zeta(t)}^{t}\frac{1}{\kappa}\ m(\nu)d\nu = y(t) \quad (8)$$

De doelfunctie (7) is dus het maximaliseren van de kapitaalwaarde. Deze waarde wordt bepaald door de rentefactor e^{-rt} , de ontvangsten, zijnde het produkt van de prijs en hoeveelheid, de uitgaven voor de machines, en de totale arbeidskosten. In voorwaarde (8) wordt weergegeven dat de geproduceerde

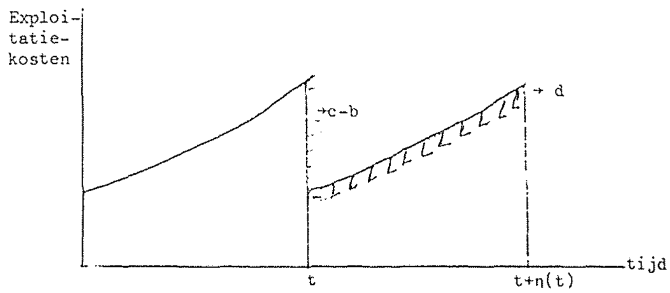
*) Voor een exacte formulering: zie Bijlage 1.

hoeveelheid produkt gelijk is aan de produktiecapaciteit van de aanwezige machines, en dat deze gelijk is aan de afzet.
In dit model spelen vier variabelen een essentiële rol nl. de totale produktie ($y(t)$), het aantal machines van een bepaalde jaargang ($m(v)$), de leeftijd van de oudste machine ($\zeta(t)$) en de optimale leeftijd van de aan te schaffen machine ($\eta(t)$).
Het aantal aan te schaffen machines is te bepalen als we aannemen dat de totale produktie een eindige waarde aanneemt. Dit laatste kan veroorzaakt worden door het dalend verloop van de prijs-afzetcurve of omdat de afzet exogeen bepaald is. Uitgaande van een vaste prijs van de machine ($q(t) = q$) geldt nu voor de bepaling van de levensduren (zie bijlage 1):

$$\underbrace{rq}_{a} + \underbrace{\frac{l(0)}{\kappa\varphi} e^{\lambda t} e^{-\mu t}}_{b} = \underbrace{\frac{l(0)}{\kappa\varphi} e^{\lambda t} e^{-\mu(t-\zeta(t))}}_{c}$$

$$\underbrace{- \mu \int_t^{t+\eta(t)} \frac{l(0)}{\kappa\varphi} e^{\lambda v} e^{-\mu t} e^{-r(v-t)} dv}_{-\ d} \qquad (9)$$

In tekening:



De machine wordt vervangen als de voor- en nadelen van vervangen (a+b) gelijk zijn aan die van later vervangen (c+d).
Het vervangen heeft tot gevolg dat de investeringsuitgaven eerder vallen met dienovereenkomstige vermogensnadelen (a). Het voordeel van de nieuwe is de lage exploitatieuitgave (b). Het later vervangen geeft nu de hoge exploitatieuitgave van de oude machine (c), maar heeft als voordeel dat later een machine wordt aangeschaft met een hogere geïncorporeerde arbeidsbesparende technische vooruitgang van μ. Gedurende de volledige leeftijd van deze nieuwe machine, dus van t tot $t + \eta(t)$ heeft deze verbetering lagere arbeidskosten tot gevolg (d).
In het artikel van Malcomson wordt uitgegaan van een oneindige keten van machines (zie de grenzen van de integraal in (7)). Het gevolg is dat de conclusies synoniem zijn met die uit de klassieke theorie van § 2 (zie (6)).

§ 4. De beschouwingen van Den Butter en Den Hartog c.s.

Zoals in de bijlage wordt aangegeven is het model van Den Butter, onder aanname dat de prijs van de machines gelijk is aan één ($q(t) = 1$), gelijk aan het in de vorige paragraaf ontwikkelde model.
Het model van Den Hartog c.s. gaat uit van de grondstelling dat levensduur van de oudste machine wordt bepaald door het moment dat de loonkosten gelijk zijn aan de opbrengst van die machine:

$$p(t)\ y(i) = \frac{l(0)}{\kappa\varphi}\, e^{\lambda t}\, e^{-\mu(t-\zeta(t))} \tag{10}$$

$$y(i) = \frac{1}{\kappa} \tag{11}$$

$$p(t) = 1 \tag{12}$$

De produktie op machine i, vermenigvuldigd met de prijs van het produkt is de opbrengst van machine i. Op het moment van de vervanging is de opbrengst gelijk aan de loonkosten (10). Door de vaste kapitaalcoëfficiënt is de produktie van machine i bepaald (11). De prijs van de afzet wordt gelijk gesteld aan 1. (12)
Zo geldt:

$$\frac{l(0)}{\varphi}\, e^{\lambda t}\, e^{-\mu(t-\zeta(t))} = 1 \tag{13}$$

of

$$\zeta(t) = \frac{\ln\varphi - \ln l(0) + (\mu-\lambda)t}{\mu} \tag{14}$$

De formule (14) is in overeenstemming met de uitkomsten van Den Hartog c.s. [10, pag 398].

Vergelijkt men de analyses van deze paragraaf met de bedrijfseconomische theorie van § 2 dan is het duidelijk dat Den Butter, analoog aan Malcomson, uitgaat van de oneindige keten. De theorie van Den Hartog c.s. is niet zo eenvoudig te plaatsen. De kern van de macro-economische redenering is dat er sprake is van volledige mededinging in een onbegrensde markt. In dat geval is vanwege de vaste technische coëfficiënten het aantal aan te schaffen machines ($m(\nu)$) niet bepaald. Voor de bepaling van de levensduur geldt dientengevolge dat de kapitaalwaarde van de keten gelijk aan nul is. Past men dan de bedrijfseconomische formule $C(T) = rJ$ (zie (6)) toe dan geldt dat $J = 0$ en dus $C(T) = 0$. De machine wordt gebruikt totdat de netto-opbrengsten nul zijn. Dit geldt niet omdat er geen keten is, maar omdat de keten geen positief resultaat heeft.
De bedrijfseconomische redenering is, dat de produktie van elk bedrijf beperkt is. Van deze onderstelling uitgaande zijn de resultaten van Den Hartog c.s. te interpreteren in het één-machine-model van de formules (1) en (2) en worden "de jaargangen onafhankelijk van elkaar beschouwd" [13, pag. 213].

BIJLAGE 1: **Oplossing van het stuurmodel**

De volledige formulering van het in § 3 gehanteerd model

Het model is te formuleren als:

maximaliseer:

$$(1) \qquad J = \int_0^\infty e^{-rt} \{p(t)y(t)-q(t)m(t)-\int_{t-\zeta(t)}^{t} \frac{l(0)}{\kappa\varphi} m(\nu)e^{\lambda t}e^{-\mu\nu}d\nu\}dt$$

onder de voorwaarden:

$$(2) \qquad \int_{t-\zeta(t)}^{t} \frac{1}{\kappa} m(\nu)d\nu = y(t)$$

$$(3) \qquad \frac{\partial\zeta(t)}{\partial t} \equiv \dot{\zeta}(t) = d(t)$$

$$(4) \qquad d(t) \leqq 1$$

$$(5) \qquad m(t) \geqq 0$$

$$(6) \qquad \zeta(t) \geqq 0$$

$$(7) \qquad y(t) \geqq 0$$

In dit model zijn aan het model van § 3 de voorwaarden (3) t/m (7) toegevoegd. De voorwaarden (3) en (4) geven aan dat oudere machines niet later buiten gebruik gesteld worden dan nieuwere. De overige voorwaarden geven aan dat het niet mogelijk is een negatief aantal machines aan te schaffen, zomin als er negatieve levensduur en afzet mogelijk is.
In het bovenstaande besturingsmodel zijn de variabelen d(t), m(t) en y(t) de stuurvariabelen en de $\zeta(t)$ de toestandsvariabelen.
De variabelen m(j) (j > 0) en $\zeta(0)$ zijn gegeven, dat wil zeggen dat de historie bekend is. (zie [14])
De Hamiltoniaan van het bovenstaande probleem is te definiëren als:

$$H_1(t) = \varphi_1(t) \left(\int_{t-\zeta(t)}^{t} \frac{1}{\kappa} m(\nu)d\nu - y(t)\right) + \varphi_2(t)\, d(t) +$$

$$e^{-rt}\left(p(t)y(t)-q(t)m(t) - \int_{t-\zeta(t)}^{t} \frac{l(0)}{\kappa\varphi} m(\nu)e^{\lambda t}e^{-\mu\nu}d\nu\right), \quad (t \in [0,\infty))$$

zodat de doelfunctie van het te optimaliseren model te beschrijven is als:

$\int_0^\infty H_1(t)dt.$

Aangezien vanwege de uniforme convergenten van de integralen, verwisseling van de integralen-volgorde is toegestaan, is de Hamiltoniaan te herschrijven tot:

$$J(t) = m(t) \int_t^{t+\eta(t)} (\varphi_1(\nu) . \frac{1}{\kappa} - e^{-r\nu} \frac{1(0)}{\kappa\varphi} e^{-\mu t} e^{\lambda\nu}) d\nu \quad t \in [-\zeta(t), 0]$$

en

$$J(t) = e^{-rt}(p(t)\, y(t) - q(t)\, m(t)) +$$

$$+ m(t) \int_t^{t+\eta(t)} (\varphi_1(\nu) \frac{1}{\kappa} - e^{-r\nu} \frac{1(0)}{\kappa\varphi} e^{-\mu t} e^{\lambda\nu}) d\nu +$$

$$+ \varphi_2(t)\, u(t), \qquad t \in [0, \infty)$$

waarin $\eta(t) = \zeta(t+\eta(t))$ en $u(t) = \dot{\eta}(t) \geqq -1$

Door deze herformulering van de doelfunktie geeft de Hamiltoniaan niet langer de "opbrengst" op ieder tijdstip, maar de "opbrengst" van een investering gedurende de levensduur.
Toepassing van het Pontryagin - maximum principe geeft noodzakelijke - en indien de doelfunktie concaaf is ook voldoende - voorwaarden.
De door Malcomson gestelde eis dat de prijsafzetfunktie een dalende funktie van de afzet is, is dan ook te sterk. Het is voldoende te eisen dat de prijsafzetfunktie een niet-toenemende funktie van de afzet is. Indien we slechts condities na willen gaan waaraan een optimale oplossing van het model moet voldoen kunnen we zelfs deze eis laten vallen.
De voorwaarden van Pontryagin zijn:

(1)	$\frac{\partial J_1(t)}{\partial y(t)} + \nu(t) = 0$	$\nu(t)\, y(t) = 0$	$\nu(t) \geqq 0$
(2)	$\frac{\partial J_1(t)}{\partial m(t)} + \gamma(t) = 0$	$\gamma(t)\, m(t) = 0$	$\gamma(t) \geqq 0$
(3)	$\frac{\partial J_1(t)}{\partial u(t)} + \mu_1(t) = 0$	$\mu_1(t)\, (1+u(t)) = 0$	$\mu_1(t) \geqq 0$
(4)	$\frac{\partial J_1(t)}{\partial \eta(t)} - \mu_2(t) = -\dot{\varphi}_2(t)$	$\mu_2(0) = 0$	$\mu_2(t)$ is een niet dalende, rechtscontinue funktie in t en $\mu_2(t)$ is constant als $\eta(t) > 0$.

We passen deze voorwaarden toe voor $t \geqq 0$.

Indien $u(t) > -1$, dat wil zeggen dat oudere machines eerder buiten gebruik gesteld worden dan nieuwere, dan geldt $\varphi_2(t) = \dot{\varphi}_2(t) = 0$.
Indien we onderstellen dat de afzet op ieder moment positief is ($y(t) > 0$) volgt uit (1):

$$\varphi_1(t) = e^{-rt} p(t).$$

Dat wil zeggen dat de waardering van een marginale eenheid capaciteit gelijk is aan de contant gemaakte opbrengst van de met die marginale eenheid geproduceerde eindprodukten.
Indien $\eta(t)$ én $m(t)$ beiden positief zijn dan volgt uit (4):

$$\varphi_1(t+\eta(t)) = e^{-r(t+\eta(t))} \frac{l_0}{\varphi} e^{-\mu t} e^{(t+\eta(t))\lambda}$$

en uit (2):

$$-e^{-rt}q(t) + \int_t^{t+\eta(t)} (\varphi_1(\nu) \frac{1}{\kappa} - e^{-r\nu} \frac{l(0)}{\kappa\varphi} e^{-\mu t} e^{\lambda\nu}) d\nu = 0.$$

Aangezien deze gelijkheid voor alle t geldt en alle funkties differentieerbaar in t zijn geldt:

$$-re^{-rt}q(t)+e^{-rt}\dot{q}(t) = \int_t^{t+\eta(t)} \mu\, e^{-\mu t} e^{(\lambda-r)\nu} \frac{l_0}{\kappa\varphi} d\nu +$$

$$+ e^{-rt} \frac{l_0}{\kappa\varphi} e^{(\lambda-\mu)t} - \varphi_1(t) \frac{1}{\kappa}$$

Indien we gebruik maken van de eigenschap dat op het optimale pad geldt dat $\zeta(t) = \eta(t-\zeta(t)$ dan geldt $\varphi_1(t-\zeta(t)+\eta(t-\zeta(t))) = \varphi_1(t)$ zodat de bovenstaande gelijkheid herschreven kan worden tot:

$$e^{-rt} \frac{l_0}{\kappa\varphi} e^{-\mu(t-\zeta(t))} e^{\lambda t} = re^{rt}q(t)-e^{-rt}\dot{q}(t) +$$

$$+ (1-\frac{\mu}{\lambda-r}) e^{-rt} \frac{l_0}{\kappa\varphi} e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda-r} e^{(\lambda-\mu)t} e^{(\lambda-r)\eta(t)} e^{-rt} \frac{l_0}{\kappa\varphi}$$

welke gelijkheid herschreven kan worden tot:

$$\frac{l_0}{\kappa\varphi} e^{-\mu(t-\zeta(t))} e^{\lambda t} = rq(t)-\dot{q}(t) + e^{(\lambda-\mu)t} \frac{l_0}{\kappa\varphi}$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda-r} e^{(\lambda-\mu)t} \frac{l_0}{\kappa\varphi} (e^{(\lambda-r)\eta(t)} - 1).$$

Bij constante $q(t)$, dus $\dot{q}(t) = 0$, geldt dus:

$$rq(t) + \frac{l(0)}{\kappa\varphi} e^{\lambda t} e^{-\mu t} = \frac{l(0)}{\kappa\varphi} e^{\lambda t} e^{-\mu(t-\zeta(t))} - \mu \int_t^{t+\eta(t)} \frac{l(0)}{\kappa\varphi} e^{\lambda\nu} e^{-\mu t} e^{-r(\nu-t)} d\nu$$

Indien verder $q(t) = 1$ dan kan de formule worden herschreven tot de basisformule van Den Butter [10, pag. 401, formule 9].

BIJLAGE 2. **Literatuurlijst**

[1] De Nederlandsche Bank n.v., Verslag over 1976.
[2] Centraal Planbureau, Centraal Economisch Plan 1977, Staatsuitgeverij 's Gravenhage 1977.
[3] Centraal Planbureau, Macro Economische Verkenningen 1978, Staatsuitgeverij 's-Gravenhage 1977.
[4] Nota inzake de selectieve groei, 2e kamer 1975/'76, nr. 13955.

[5] Regeling ter stimulering en sturing van de investeringen (Wet Investeringsrekening), 2e kamer 1976/'77, nr. 14.377; nr. 3.
[6] Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid, Maken wij er werk van? Rapporten aan de Regering 1977, nr. 13.
[7] H. den Hartog, Th. C. M. J. van de Klundert en H. S. Tjan, De structurele ontwikkeling van de werkgelegenheid in macro economisch perspectief, in Werkloosheid, Praeadviezen van de Vereniging voor Staatshuishoudkunde, 's Gravenhage 1975, pag. 49-110.
[8] A. H. J. Kolnaar, Lange termijn doelstellingen en investeringscriteria of de tegenstellingen in het kapitalisme, Maandschrift Economie, 37, 8-9, mei/juni, 1973, pag. 370-434.
[9] Nota inzake de werkgelegenheid, 2e kamer 1974/75, nr. 13318.
[10] F. A. G. den Butter, De optimale economische levensduur van kapitaalgoederen in een jaargangenmodel met een vaste kapitaalcoëfficiënt, Maandschrift Economie, 20, 7, april 1976, pag. 396-405.
H. den Hartog, Th. van de Klundert en H. S. Tjan, Winstmaximalisatie, marktvorm en economische levensduur van kapitaalgoederen: een antwoord aan Den Butter, Maandschrift Economie, 40, 7, april 1976, pag. 406-413.
[11] W. v. Hulst. De vervanging van duurzame produktiemiddelen, H. E. Stenfert Kroese N.V., Leiden 1973.
[12] J. M. Malcomson. Replacement and the rental value of capital equipment subject to obsolescence, Journal of Economic Theory, 10, 1975, pag. 24-41.
[13] F. A. G. den Butter, De economische levensduur van kapitaalgoederen in een clay-clay jaargangen model, Maandschrift Economie, 41, 5, juli 1977, p. 205-231.
[14] A. Bensoussan, E. G. Hurst, B. Näslund, Management applications of modern control theory, North Holland Publ. Comp., A'dam 1974.