CONSUMIDORES CON PREFERENCIAS NO ORDENADAS

Pedro Uribe
Universidad de Guadalajara

Resumen: La investigación teórica sobre la demanda de los consumidores con preferencias no ordenadas se ha concentrado en las consecuencias que la supresión de los supuestos de transitividad y totalidad (completez) pueden tener sobre la teoría del equilibrio general. En este trabajo se considera al consumidor *per se,* tratando de llegar a proposiciones sustantivas eventualmente refutables por la vía empírica. Este artículo explora el uso de la *calibradora exterior* de los conjuntos de nivel de la relación de preferencias, que Shephard introdujo en microeconomía con el nombre de "función distancia", con notable éxito en el análisis de las tecnologías convexas con n insumos y $m > 1$ productos. Su uso en este artículo se orienta a la obtención de ecuaciones de estática comparada a partir de la optimización de una preferencia no ordenada.

Abstract: Theoretical research on consumer demand with nonordered and not necessarily convex preferences has been centered in the study of the equilibrium. This paper looks back at consumer as such, trying to reach substantive propositions, eventually refutable by empirical evidence. This paper explores the use of the *outer gauge* of preference sets, a "distance function", with considerable success in the analysis of convex multiproduct technologies. In this paper, the gauge function is used to obtain comparative statistics equations based on the optimization of nonordered preference.

1. Introducción

La investigación teórica sobre la demanda de los consumidores, sin suponer completez (totalidad) o transitividad de sus preferencias, se ha concentrado en las consecuencias de la supresión de estas condiciones sobre la teoría del equilibrio general.[1] Por lo que toca a la teoría del consumidor, aparte de algunas ecuaciones de demanda propuestas *a guisa de ejemplos* por Shafer (1974), no hay trabajos que conduzcan a proposiciones sustantivas de esta teoría, ni trabajo empírico o modelos empirizables para consumidores con preferencias no ordenadas o no convexas. Este artículo se refiere a algunos esfuerzos iniciales en tal dirección.

La formulación del artículo se restringe a la demanda de un número finito de bienes, de modo que el dominio de la relación de preferencia es el cono positivo $\mathbf{R}^n_+$ del espacio euclideano n-dimensional $\mathbf{R}^n$.

Se sugiere un punto de partida para una teoría axiomática de la demanda de un consumidor que escoge (canastas de bienes) maximales respecto a preferencias en un conjunto factible (demanda walrasiana generalizada)[2] o bien canastas que minimizan costo, sujetas a condiciones de un "mínimo aceptable de satisfacción" (demanda hicksiana generalizada). En esta forma, la diferencia con la teoría tradicional (neoclásica) está en los supuestos sobre las preferencias del consumidor que uno esté dispuesto a hacer.

En lugar de suponer la transitividad de la relación de preferencia *como definitoria de la racionalidad del consumidor*, se supone su aciclicidad. Esto tiene que ver con la totalidad, esto es, la completez de las preferencias. En efecto, es obvio que una relación completa y no transitiva debe ser cíclica; D. Schmeidler (1971) demostró que una relación transitiva y continua (la relación estricta con imágenes abiertas y la débil con imágenes cerradas) en un espacio topológico conexo *debe ser completa*. En esta forma, debilitar la transitividad en aciclicidad implica una preferencia *parcial*.

Se pueden imaginar muchas instancias de preferencias parciales, tanto desde un punto de vista estrictamente teórico, como la multidimensionalidad del espacio de opciones o la presencia de elementos estocásticos, como desde el experimental, con los llamados "efectos de marco" (*framing effects*) estudiados, entre otros, por Kahneman y

[1] Véase una revisión de la literatura de los años setenta en Florenzano (1981); ejemplos del trabajo posterior son Yannelis y Prabhakar (1983), Aliprantis y Burkinshaw (1988), Werner (1989).

[2] He tomado la sugerencia de llamarla así en lugar de "demanda marshaliana", de Mas-Colell, Whinston y Green (1995); nota 7, p. 51.

Tversky (1984). En este artículo no se discute la "fuente" de la parcialidad de las preferencias, pero la formulación es consistente con la no comparabilidad de canastas de bienes *en la frontera* del cono positivo del espacio euclideano de dimensión n; dos canastas interiores son comparables en el sentido de que *un múltiplo de una es estrictamente preferible a la otra*. De aquí se derivan otras afirmaciones elementales de comparabilidad, que no llegan, sin embargo, a implicar la completez de la preferencia para canastas interiores.

La sección 2 presenta un sistema de axiomas, que no incluyen supuestos de transitividad, completez o libre eliminación de las preferencias.[3] La monotonía se supone solamente a lo largo de semi-rayos;[4] para preferencias convexas la no saciedad local es una consecuencia inmediata.[5]

La sección 3 construye un modelo de demanda para un consumidor con preferencias no ordenadas pero convexas, utilizando la *calibradora exterior* de los conjuntos de preferencias. La introducción por parte de Shephard (1970), del *calibre* de un vector de insumos respecto al conjunto de insumos capaces de producir un vector dado de productos determinó la posibilidad de un análisis sistemático de la producción multi-producto. En este artículo, la calibradora exterior que se usa es la del vector de demanda respecto al conjunto de opciones preferidas a una *canasta de referencia*. En el caso en que exista una función utilidad homogénea de primer grado, la calibradora exterior es el cociente de la utilidad de la canasta elegida (demandada) entre la utilidad de la canasta de referencia.[6] Para preferencias no convexas la teoría procede en forma idéntica, al utilizar la cápsula convexa del conjunto de opciones preferidas a la canasta de referencia. Las ecuaciones de estática comparada respecto a precios, ingreso y canasta de referencia se derivan aquí

[3] El supuesto de convexidad se emplea como una aproximación cómoda; las proposiciones obtenidas bajo este supuesto valen si en lugar del conjunto de opciones preferidas a una dada se usa su cápsula convexa. Son, entonces, aproximaciones que se refieren a la "verdadera" demanda. Desde luego, está por desarrollarse una teoría que prescinda por completo de la convexidad; véase el comentario más adelante.

[4] Esto es, para canastas de bienes con la misma composición.

[5] Para preferencias no convexas hay una forma diferente de propiedad local de no saciedad, que también se deduce inmediatamente de la monotonía a lo largo de semi-rayos.

[6] Nótese la semejanza con las *regret functions à la* Loomes y Sugden (1982), como las usan bajo certidumbre Shafer (1974) o Border (1984).

generalizando la derivación *à la* Barten (1964) y Theil (1965) a partir de la optimización de preferencias.[7]

Las ecuaciones *completas* de estática comparada respecto a precios e ingreso incluyen efectos directos, que coinciden con los neoclásicos, y efectos indirectos en la demanda de cada bien, de las variaciones en precios e ingreso: estos últimos se dan vía las variaciones *inducidas en la canasta de referencia.* Cuando ésta no depende de precios e ingreso, se está en la teoría neoclásica, puesto que la calibradora exterior relativa a una canasta de referencia *constante* es una función utilidad.

La sección 4 sugiere una versión, para preferencias no ordenadas, de la utilidad indirecta, esto es, del valor máximo de la calibradora exterior como función de los precios, la canasta de referencia y el ingreso. Se muestra así, que el multiplicador de Lagrange del problema maximización es la *aportación marginal del ingreso* al valor de la función objetivo del consumidor, en forma análoga a la utilidad marginal del ingreso cuando existe función utilidad. Los teoremas de Roy y Wold tienen análogos inmediatos para preferencias no ordenadas; el primero se presenta al final de la sección y el segundo es trivial.

La sección 5 se ocupa de las propiedades de la correspondencia de demanda walrasiana generalizada, relevantes para el equilibrio general. La continuidad es una consecuencia relativamente fácil de obtener a partir de la aciclicidad y las imágenes abiertas; la ley de Walras es un corolario del teorema local de no saciedad. Así, aun prescindiendo del supuesto de convexidad de las preferencias, los axiomas de la sección 2 son suficientes para garantizar la existencia de un equilibrio general competitivo de intercambio, aproximado, del tipo propuesto por R. M. Starr[8] para economías finitas. Bajo supuestos apropiados de convexidad, el equilibrio de intercambio es Arrow-Débreu.

Las formas de supuestos de convexidad son la materia de la sección 6. Se discuten dos de ellas, equivalentes si las preferencias son completas. Una de esas formas afecta a la determinación del equilibrio del consumidor, la otra a la convexidad de las imágenes de la correspondencia de demanda walrasiana generalizada. Desde luego, es importante

[7] Para una derivación a partir de las funciones (correspondencias) de elección, usando homogeneidad de grado cero y la ley de Walras, véase Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

[8] Véase Starr (1969).

desarrollar una teoría de la demanda con preferencias no convexas. Para la teoría Hicks, el camino parece estar en el análisis de los soportes y gradientes generalizados *à la* Clarke (1983), como se han empezado a usar en teoría de la producción; véanse, por ejemplo, Cornet (1991) y Jouni (1988), entre otros.

En la sección 7 se considera una generalización de la demanda Hicks: el consumidor minimiza gasto en la cerradura del conjunto de las opciones preferidas a la canasta de referencia, que toma el lugar del nivel "prescrito" mínimo de utilidad en la demanda Hicks ordinaria. De las ecuaciones de estática comparada se obtienen algunas consecuencias acerca de la estructura del costo del consumidor. Entre los hechos posiblemente interesantes está, en primer lugar, que la función costo del consumidor no es, en general, homogénea de primer grado en los precios. Por otra parte, el teorema de Shephard que establece que la demanda (Hicks) es el gradiente de la función costo no se puede extender al caso general del que nos ocupamos.

2. Axiomas sobre las preferencias

Como es usual, un consumidor es (se representa por) una pareja $(P, \bar{x})$, donde P es una relación binaria en el cono positivo $\mathbf{R}^n_+$ de $\mathbf{R}^n$. P se llamará *preferencia*. Por su parte, $\bar{x}$ es un n-vector semipositivo, al que se llama *dotación inicial* del consumidor. El ingreso del consumidor a precios p es el valor de su dotación inicial, el escalar $p'\bar{x}$.[9]

P se entiende como preferencia "estricta" (asimétrica). Se le verá también como una correspondencia de $\mathbf{R}^n_+ \setminus \{0\}$ en sí mismo. $x \in P(y)$, $y \in P^{-1}(x)$, $(x, y) \in gr\, P$ son expresiones sinónimas; quieren decir que el consumidor prefiere estrictamente la canasta de consumo x a la canasta de consumo y, ambas representadas por puntos en $\mathbf{R}^n_+$.

En lo que sigue, para cualquier $S \subset \mathbf{R}^n$, $\overset{\circ}{S}$ denota el interior, $\bar{S}$ la cerradura y *conv* S la cápsula convexa de S.

Los axiomas propuestos son los siguientes:

I. Aciclicidad. P es acíclica.

II. Regularidad. Para todo x, $P(x)$ y $P^{-1}(x)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$.

[9] Las primas denotan trasposición.

III. Monotonía lo largo de un semirrayo. Para todo $x \in \mathbf{R}^n_+$, $\lambda > \mu$ implica $\lambda x \in P(\mu x)$.

IV. Propiedad arquimedea. Si $x > 0$, entonces para todo y existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in P(y)$.

V. Convexidad. Para todo $x \in \mathbf{R}^n_+$, el conjunto $P(x)$ es convexo.

Los teoremas siguientes se demuestran en el apéndice.

TEOREMA 1. *Si valen los axiomas I-V, la función*

$$g(x, y) = sup\{\lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda}x \in P(y)\} \tag{1}$$

está bien definida para $x > 0$, $y \geq 0$.

TEOREMA 2 (*Propiedad local de no saciedad para preferencias convexas*). *Para todo* $x \in dom\ P$ *y toda vecindad* U_x *de x,* $U_x \cap P(x) \neq \emptyset$.

Para preferencias no convexas, la propiedad local de no saciedad dice que $U_x \cap conv\ P(x) \neq \emptyset$.

La función definida en la ecuación (1) se llama *calibradora exterior* de $P(y)$.[10]

No hay tal cosa como una relación de indiferencia. En su lugar, consideramos una relación de *frontera*: $x \in \partial P(y)$. La demostración del teorema 2 implica que ∂P es una relación reflexiva.

Los *sistemas de precios* son funcionales lineales semipositivas. Consideramos sólo sistemas de precios positivos (ningún bien es gratuito).[11] **P** denotará al conjunto de sistemas de precios positivos.

DEFINICIÓN 1. *La correspondencia de presupuesto para un consumidor se define como* $\beta : \mathrm{P} \times \mathbf{R} \twoheadrightarrow \mathbf{R}^n_+$, *de imágenes*[12]

$$\beta(p, w) = \{x \in \mathbf{R}^n_+ \mid p'x \leq \omega\}$$

[10] $g(x, y)$ es el recíproco de la *función distancia* de Shephard; véase Shephard (1970), p. 65 y Me Fadden (1978) p. 24. Mc Fadden llama "función distancia" a la calibradora g, con sus argumentos intercambiados. La terminología que se adopta en este trabajo procura ser más cercana a la que se usa en la literatura de análisis convexo.

[11] En caso contrario, el conjunto factible para el consumidor no es compacto y su problema de óptimo no es soluble.

[12] '$\varphi : S \twoheadrightarrow T$' denota que φ es una correspondencia de S a T: para $x \in S$, $\varphi(x) \subset T$.

Desde luego, β tiene imágenes convexas y compactas para precios positivos. Es un hecho bien conocido que β es continua (en la topología de Vietoris) y que su gráfica $gr\ \beta = \{(p, x) \in \mathbf{P} \times \mathbf{R}^n_+ \mid p'x \leq \omega\}$ es cerrada en la topología producto (ordinaria). [13]

Establecemos el supuesto convencional de subsistencia, de modo que las imágenes de β tengan interior no vacío. Dados precios positivos, es suficiente que el consumidor tenga dotación inicial positiva de al menos un bien (digamos, tiempo de trabajo).

3. La demanda walrasiana generalizada

DEFINICIÓN 2. *La correspondencia de demanda walrasiana generalizada se define como* $\xi : \mathbf{P} \times \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}^n_+$, *de imágenes*

$$\xi(p, \omega) = \{x \in \beta(p, \omega) \mid P(x) \cap \beta(p, \omega) = \varnothing\}$$

Una selección de ξ es una *función de demanda walrasiana generalizada.*

Dados los axiomas I) a V), x^0 es un P–maximal en $\beta(p, \omega)$ si y sólo si maximiza a $g(x, y)$ respecto a x bajo $p'x = \omega$.

Consideramos entonces la maximización de $g(x, y)$ respecto a x bajo la restricción $p'x = \omega$, donde ω es el ingreso del consumidor, exógeno y por tanto independiente de precios y de la canasta de referencia. Ésta a su vez, depende de precios e ingreso: el consumidor "reacomoda" sus aspiraciones al cambiar los precios y el ingreso. Si la canasta de referencia no depende de los precios ni del ingreso, como la calibradora para y constante es una función utilidad, la teoría coincide con la neoclásica.

La demanda walrasiana generalizada definida en esta forma es el punto en el que el plano de presupuesto es tangente a la frontera del conjunto de preferencias, subconjunto del de opciones preferidas a la canasta de referencia que sea "más interior" a este último: es decir, se

[13] Débreu (1959), pp. 63-65.

trata de buscar un $z \in P(y)$, el "más alto posible" (el más lejano de $\partial P(y)$), tal que el plano de presupuesto, $p'x = \omega$ sea tangente a $\partial P(z)$.

Considérense las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lambda p_i \qquad (2)$$

$$p'x = \omega \qquad (3)$$

Las derivadas anteriores existen y son funciones continuas de x, puesto que g es cóncava en x: una función cóncava en $\mathbf{R}^n$ es de clase C^1 en el interior de su dominio, salvo por un conjunto de medida cero.[14] Sin embargo, para proseguir con el análisis de estática comparada necesitamos hacer explícito un supuesto mínimo de suavidad:

Supuesto de suavidad: g es de clase C^2 en x en casi todo el interior de su dominio.

Usaremos una notación cercana a la de Barten (1964): G es la matriz hessiana de g respecto a x, H la matriz de derivadas parciales mixtas: $h_{ij} = \partial g / \partial x_i \partial y_j$. En lo demás, los subíndices denotarán derivación: por ejemplo, X_p es la matriz jacobiana de x respecto a p manteniendo y constante. Se procura que, dentro de este uso, las minúsculas denoten vectores y las mayúsculas matrices: x_ω es el vector de derivadas de la demanda respecto a ingreso. El único escalar es λ_ω, la derivada respecto a ingreso de lo que veremos será la aportación marginal del ingreso al valor máximo de g.

Antes de proceder, nótese que en la demanda walrasiana $\lambda_x = 0$. En efecto, como g es homogénea de primer grado en x, (2) implica que:

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = \lambda p'x = \lambda\omega$$

Al derivar, $\lambda_x = \dfrac{(\lambda\omega - g(x, y))}{\omega^2} p = 0$.

Si derivamos ahora (2) y (3) respecto a precios, canasta de referencia e ingreso, se obtienen las ecuaciones:

[14] Véase Rockafellar (1970), p. 246.

$$\begin{pmatrix} G & p \\ p' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_p + X_y Y_p & X_y & x_\omega + X_y y_\omega \\ -(\lambda'_p + \lambda'_y Y_p) & -\lambda'_y & -(\lambda_\omega + \lambda'_y y_\omega) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I - HY_p & -H & -Hy_\omega \\ -x' & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

de donde se obtiene:

$$X_p = \lambda G^{-1} - \frac{\lambda G^{-1}pp'G^{-1}}{p'G^{-1}p} - \frac{G^{-1}px'}{p'G^{-1}p} \tag{5}$$

$$X_y = -G^{-1}H + \frac{G^{-1}pp'G^{-1}H}{p'G^{-1}p} \tag{6}$$

$$x_\omega = \frac{G^{-1}p}{p'G^{-1}p} \tag{7}$$

$$\lambda_p = -\frac{\lambda G^{-1}p}{p'G^{-1}p} - \frac{x}{p'G^{-1}p} \tag{8}$$

$$\lambda y = \frac{HG^{-1}p}{p'G^{-1}p} \tag{9}$$

$$\lambda_\omega = \frac{-1}{p'G^{-1}p} \tag{10}$$

Por otra parte, al usar (7), se puede escribir (5) como:

$$X_p = \lambda G^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda_\omega} x_\omega x'_\omega - x_\omega x' \tag{11}$$

que no es sino la ecuación clásica de Slutski-Barten, con la hessiana de la calibradora en lugar de la hessiana de la función utilidad. En la misma forma, la derivada respecto a ingreso λ_ω es la misma que en la teoría neoclásica; véase ecuación (8).

Desde luego, el cambio en la demanda por un cambio de precios *no* es $X_p dp$, sino $(X_p + X_y Y_p)dp$, y por un cambio en el ingreso es $(x_\omega + X_y y_\omega)d_\omega$.

Al denotar por S a la matriz correspondiente a la de Slutski $\lambda G^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda_\omega} x_\omega x'_\omega$ y notar que:

$$\lambda y = Hx_\omega \tag{12}$$

se puede escribir

$$dx = S(I - \frac{1}{\lambda} HY_p)dp - x_\omega x' dp + (x_\omega + \frac{1}{\lambda} SHy_\omega)d\omega \tag{13}$$

ecuación que difiere de su correspondiente neoclásica en los términos que involucran en H.

Los términos a la derecha de la igualdad en (13) se pueden considerar como sigue:

1) *Para y dado*, S es la matriz de efectos sustitución de los cambios en los precios. Los llamaremos *efectos directos* de sustitución.

2) Los elementos de SHY_p / λ son *efectos indirectos* de sustitución; el efecto indirecto de sustitución de un cambio en el precio de j sobre la demanda de i se da *vía* el cambio en la canasta de preferencia inducido por el cambio en p_j. *Un consumidor que no modifica su canasta de referencia con los cambios en los precios* equivale a uno con preferencias ordenadas, puesto que y es un vector constante.

3) El término $x_\omega x'$ es el *efecto ingreso* de los cambios en los precios, que desaparecen en la demanda Hicks (demanda compensada).

4) Un cambio en el ingreso ω tiene el vector de efectos *directos* x_ω y el de indirectos $- H_y y_\omega$. El segundo tiene lugar *vía* la adaptación que el consumidor hace de su canasta de referencia ante los cambios en su ingreso.

4. Dualidad y el teorema de Roy con preferencias no ordenadas

Considérese el valor máximo de la calibradora exterior de $P(y)$ bajo $p'x = \omega$:

$$v(p, y, \omega) = \max_{p'x = \omega} g(x, y) \tag{14}$$

ue es el análogo de la utilidad indirecta de la demanda walrasiana rdinaria. Como máximo de una función cóncava en x para cada y, v es uasiconvexa y monótona no creciente en p. La demostración es idéntica la correspondiente a la utilidad indirecta y lo mismo sucede para su ontinuidad en el interior del octante positivo dual; véase, por ejemplo, Avriel *et al.* (1988), teorema 4.9.

Defínase la *aportación marginal del ingreso* como la aportación de a unidad marginal de ingreso al valor (máximo) de $g(x, y)$, *i.e.* la erivada de $v(p, y, \omega)$ respecto a ω. Como en el caso de la demanda valrasiana ordinaria:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \omega} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \omega} \\ &= \lambda p' x_\omega \\ &= \lambda\end{aligned}$$

londe se ha usado (7).

Para finalizar esta sección, considérese el gradiente de v respecto a recios:

$$(D_p v)' = (D_{x^0} g)' D_p x^0 \tag{15}$$

ue, al tomar en cuenta que $D_p x = X_p + X_y Y_p$ y al usar (5) y (6), conduce a:

$$\begin{aligned}D_p v &= \lambda p' S(I - \frac{1}{\lambda} H Y_p) - \lambda p' x_\omega x' \\ &= -\lambda x'\end{aligned}$$

uesto que $S_p = 0$ y $p' x_\omega = 1$. Las derivadas se evalúan, desde luego, en l maximizador de g respecto a x. Excepto por la escala, la expresión nterior es análoga al teorema de Roy.[15]

[15] Nótese que $D_p\, v \leq 0$ por ser v monótona no creciente en p.

5. Demanda walrasiana generalizada y equilibrio general

Para efectos de la teoría del equilibrio general nos interesan la existencia y las propiedades de continuidad de la correspondencia de demanda walrasiana generalizada ξ. El teorema de existencia (no vacuidad de las imágenes) es una consecuencia inmediata de los teoremas de Rader (1972)[16] y Bergstrom (1975). En pro de la completez de este tratamiento, se demuestra en detalle en el apéndice.

TEOREMA 3. *Si S es compacto y P satisface los axiomas I y II, entonces existe un P-maximal en S.*

En esta sección $p \in$ P se escalará con la condición $\omega = p'\bar{x} = 1$, de modo que los argumentos ω o $\bar{x}$ se omitirán en las correspondencias de presupuesto y de demanda.

El siguiente teorema vale para los maximales sobre un compacto de cualquier relación binaria con imágenes inferiores y superiores (inversas y directas) abiertas. Lo que es importante para la teoría de la demanda es que se aplica igualmente a la preferencia $P(.)$ y a su cápsula convexa. Se demuestra para $P(.)$.

TEOREMA 4. *Si vale el axioma II, ξ es (Vietoris)-continua en precios positivos.*

El teorema anterior implica la existencia de un cuasiequilibrio del tipo caracterizado por Starr (1969) o Arrow y Hahn (1971).

6. Convexidad

En la teoría neoclásica, en la que las preferencias son completas, el complemento de $P(x)$ es la cerradura de $P^{-1}(x)$; en la misma forma, $P^{-1c}(x) = \overline{P(x)}$. En tal caso, el axioma IV equivale al siguiente:

[*Va*) Convexidad de P^{-1c}.] $P^{-1c}(x)$ es convexo para todo x.

El axioma V implica que $g(., y)$, como se define en (1) es la calibradora exterior de $P(y)$. Por su parte, *Va*) implica que P^{-1} es cuasicón-

[16] Véase p. 134.

cava como correspondencia; de este modo P es cuasiconvexa, de donde se obtiene la convexidad de las imágenes de la correspondencia de demanda walrasiana generalizada ξ. Esto, junto con el teorema de continuidad, implica, por el teorema de selección de Michael, la existencia de *funciones continuas* de demanda generalizada Marshall.

Considérese el conjunto de nivel

$$S_\alpha = \{y \mid g(x, y) \leq \alpha\} = \{y \mid g(x/\alpha, y) \leq 1\}.$$

Entonces $y \in S_\alpha$ si y sólo si $x/\alpha \notin P(y)$, de modo que $S_\alpha = P^{-1c}(x/\alpha)$. Por el axioma II, g debe ser semicontinua inferior en y, y si vale *IVa*) o las preferencias son completas, g es también cuasiconvexa en y.

En la próxima sección se discuten algunas consecuencias de la no convexidad de las preferencias, ya no para el equilibrio general sino al nivel del consumidor.

7. Demanda Hicks generalizada y la función costo del consumidor

DEFINICIÓN 3. $x \in \mathbf{R}^n_+$ *es una demanda Hicks generalizada a precios p y canasta de referencia y si* $p'x = \inf p'z$ *bajo* $z \in P(y)$.

DEFINICIÓN 4. $C(p, y) = \inf_{z \in P(y)} p'z$ *es la función costo del consumidor*

Denotamos la demanda Hicks generalizada a precios p y canasta de referencia y por $x(p, y)$. Finalmente, para cualquier conjunto $S \subset \mathbf{R}^n_+$, $N(S)$ es el *cono normal* de S : $N(S) = \{p \mid x \in S \Rightarrow p'x < +\infty\}$.

TEOREMA 5. *Si* $P(y)$ *es convexo,* $x \in \mathbf{R}^n_+$ *es una demanda Hicks generalizada a precios p y canasta de referencia y si y sólo si es un p-subgradiente de C en el punto* (p, y). *Bajo el mismo supuesto de convexidad, el conjunto* $\{p \in -N(P(y)) \cap \mathbf{P} \mid x(p, y)\}$ *no es único tiene medida cero.*

Nos interesa la diferencia entre una demanda Hicks generalizada $x(p, y)$ cuando $P(y)$ es convexo *vs.* cuando no lo es. Por lo pronto, para una canasta de referencia dada, supondremos única la demanda Hicks generalizada a precios p; véase teorema 5.

Como

$$\inf_{x \in \, conv \, P(y)} p'x \leq \inf_{x \in P(y)} p'x,$$

el consumidor con preferencias convexas es "más eficiente" que el que no las tiene. Podría verse la diferencia como un costo de no desear ciertas mezclas (¿costo del buen gusto?).[17]

Sea x^0 el minimizador de $p'x$ en $\overline{P(y)}$. El minimizador en $\overline{conv\ P(y)}$ es z^0, la proyección ortogonal de x^0 en $\partial\ conv\ P(y)$ que, como coincide con la proyección ortogonal de x^0 en el plano $\{z \mid p'z = \text{constante}\}$, tangente a (soporte de) $\overline{conv\ P(y)}$ en z^0, es de la forma $z^0 = x^0 + \theta p$, donde $g(x^0 + \theta p, y) = 1$. Ciertamente:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{p'(z^0 - x^0)}{\| p \|^2} \\ &= \frac{C(p, y(p)) - px^0}{\| p \|^2} \\ &< 0\end{aligned}$$

$\theta = \theta(p, x^0)$ se puede ver como una medida de la "ineficiencia" del consumidor a precios p.

Bajo la hipótesis de convexidad, $x(p, y)$ es una demanda Hicks generalizada a precios p y canasta de referencia y si y sólo si:

$$p'x(p, y) = \min_{g(z, y) = 1} p'z \tag{16}$$

Si y es independiente de p, el análisis formal de la función costo del consumidor sería idéntico al (neoclásico) de la función costo del productor con producción conjunta.[18] En tal caso, C sería una representación dual de preferencias *ordenadas*. En efecto, C es la función soporte por abajo de $P(y)$, cóncava en p para cada y. Así, $g(., y)$ es la función soporte del polar superior de $P(y)$, cuya calibradora exterior es

[17] Véase Me Fadden (1978) acerca de la "pérdida de información" debida al hecho de que la misma estructura de costos corresponde a varias tecnologías de producción bajo supuestos más débiles de convexidad.

[18] Véase, por ejemplo, Me Fadden (1978).

precisamente $C(., y)$. Pero sabemos que, si y es independiente de los precios, para cada y, $g(., y)$ es una función utilidad.

Considérense ahora las condiciones de primer orden para el mínimo de $p'x$ bajo $g(x, y) = 1$.

$$p_i = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$g(x, y) = 1$$

Antes de derivarlas respecto a p y a y, nótese que, como el mínimo $C(p, y)$ es una función homogénea de primer grado en p, el teorema de Euler implica que su valor es λ y, por tanto, $\lambda_x = p$, para $x = x(p, y)$. Si usamos esto, se obtienen las ecuaciones de estática comparada:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 G + pp' & p \\ p' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p + X_y Y_p & X_y \\ -(\lambda'_p + \lambda'_y Y_p) & -\lambda'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I - \lambda^2 H Y_p & -\lambda^2 H \\ -\lambda g'_y Y_p & -\lambda g'_y \end{pmatrix} \tag{17}$$

Obviamente, las derivadas se evalúan en el minimizador de $p'x$ bajo $g(x, y) = 1$

La homogeneidad de primer grado de la calibradora g en x implica que $\lambda = C(p, y(p))$, lo que a su vez implica que $\lambda_x = p$. Sustituyendo en (17) se puede proceder a obtener las soluciones:

$$X_p = \frac{1}{\lambda} G^{-1} - \frac{G^{-1} pp' G^{-1}}{\lambda p' G^{-1} p} \tag{18}$$

$$X_y = -G^{-1} H + \frac{G^{-1} pp' G^{-1} H}{p' G^{-1} p} - \frac{\lambda G^{-1} p g'_y}{p' G^{-1} p} \tag{19}$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda G^{-1} p}{p' G^{-1} p} \tag{20}$$

$$\lambda_y = -\frac{\lambda^2 H G^{-1} p}{p' G^{-1} p} + \frac{\lambda^3 g_y}{p' G^{-1} p} \tag{21}$$

de donde a su vez se obtienen las relaciones fundamentales:

$$X_y = -(\lambda X_p H + \lambda_p g'_y HXya) \tag{22}$$

$$\lambda_y = -\lambda(H\lambda_p + \alpha g_y) \tag{23}$$

$$p'X_p = 0 \tag{24}$$

$$p'X_y = -\lambda g'_y \tag{25}$$

(24) es la condición de homogeneidad de grado cero de la demanda respecto a precios *para cada canasta de referencia.* La demanda Hicks generalizada *no es*, en general, homogénea de grado cero en precios:

$$p'(X_p + X_y Y_p) = -\lambda g'_y Y_p$$

La ecuación (18) dice que, *dada una canasta de referencia*, la demanda Hicks generalizada es demanda compensada, lo que no es de extrañar porque no se está tomando en cuenta explícitamente la dependencia de y respecto a los precios y la ecuación coincide entonces con la correspondiente de Barten para una demanda Hicks ordinaria. El efecto *completo* de un cambio en los precios sobre la demanda de los bienes, $X_p + X_y Y_p$ es ahora:

$$\begin{aligned} D_p X &= X_p + X_y Y_p \\ &= X_p - \lambda(X_p H + \frac{\lambda_p}{\lambda} g'_y) Y_p \end{aligned}$$

El segundo término a la derecha de ambas ecuaciones es el *efecto indirecto* de sustitución, *vía* el cambio que el consumidor hace en su canasta de referencia cuando cambian los precios. Recuérdese que también en la demanda Marshall aparece un efecto indirecto de sustitución *aparte* del efecto ingreso.

Como parte de la descripción de la racionalidad de un consumidor, el cambio en la canasta de referencia ante un cambio en los precios parece razonable, más que lo que sería un análogo literal en la demanda Hicks ordinaria, esto es, un cambio en el nivel deseable de utilidad, que llevaría a minimizar $p'x$ bajo $u(x) \geq \alpha(p)$. La formulación Hicks ordinaria parece más bien una (buena) metáfora de la formulación generaliza-da objeto de este trabajo.

La derivada completa de λ respecto a p es:

$$D_p\lambda = \lambda_p + Y_p'\lambda_y = \frac{\lambda G^{-1}p}{p'G^{-1}p} - \frac{\lambda^2 Y_p'}{p'G^{-1}p}(HG^{-1}p - \lambda g_y) \qquad (26)$$

y se concluye que C es homogénea de primer grado en p, si, $Y_p p = 0$ o bien $\frac{1}{\lambda}(HG^{-1}p) = g_y$. La primera es una condición económica que se explora en seguida. La segunda es una condición sobre la forma de la calibradora; y no nos ocuparemos de ella.

Otro punto importante es el siguiente: el teorema de Shephard que dice que la derivada de la función costo respecto a p_j es la demanda del bien j *no* vale en este contexto. En efecto:

$$\begin{aligned} D_pC(p, y(p)) &= x(p, y(p)) + (X_p + X_yY_p)'p \\ &= x(p, y(p)) - \lambda Y_p' g_y \qquad (27) \end{aligned}$$

si usamos (19) y (24). El teorema de Shephard vale si $Y_p' g_y = 0$, que refiere al caso neoclásico, en donde $Y_p = 0$, o bien impone de nuevo una condición sobre la forma de la calibradora cuando y depende de los precios.

7.1. *Un caso especial*

Puede ser tentador hacer, en pro de la simplicidad, el supuesto de que cuando los precios cambian, *el consumidor cambia la canasta de referencia y la canasta realmente demandada en la misma forma.* Por ejemplo, en un modelo empírico en el que la canasta de referencia es el consumo desfasado, el supuesto implica que las derivadas respecto a precios permanecen constantes en el tiempo.

Una primera consecuencia de la igualdad $Y_p = X_p$ es que $p'Y_p = 0$ y por lo tanto que la función costo del consumidor es homogénea de primer grado en los precios. Otra es que (27) toma la forma:

$$D_pC(p, y(p)) = x(p, y(p)) - G^{-1}\left(I - \frac{pp'G^{-1}}{p'G^{-1}p}\right)g_y$$

y vale el teorema de Shephard si g_y evaluada en $y(p)$ es proporcional a p. En este caso, g_y es vector característico de $pp'G^{-1}$, asociado a su única raíz no cero, $p'G^{-1}p$.

7.2. *Integrabilidad*

Se muestra que, en general, $\lambda_{py} \neq \lambda yp'$, y entonces la función costo no se puede obtener integrando las ecuaciones de estática comparada.

Al derivar en (20) respecto a y y en (21) respecto a p se obtiene:

$$\begin{aligned}\lambda_{py} &= \frac{\lambda^2}{(p'G^{-1}p)^2}(G^{-1}pp'G^{-1}H + \lambda G^{-1}pg_y') \\ &= \frac{-\lambda^2}{p'G^{-1}p}(X_y + G^{-1}H) \qquad (28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{yp} &= \frac{\lambda^2}{(p'G^{-1}p)^2}(-HG^{-1}pp'G^{-1} + \lambda g_y p'G^{-1}) + \lambda^3 KY_p \\ &= \lambda'_{py} + \lambda^3 KY_p \qquad (29)\end{aligned}$$

donde K es la matriz hessiana de g respecto a y. Así, $\lambda_{yp} = \lambda'_{py}$ si $Y_p = 0$, *i.e.*, en el caso equivalente al de preferencias ordenadas.

Apéndice

Demostraciones de los teoremas

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Sean $x > 0$ y $y \geq 0$. Por el axioma III, $0 \in P^{-1}(y)$, abierto por el axioma I. De este modo, para algún $\varepsilon > 0$ se tiene que $\varepsilon x \in P^{-1}(y) \subset P(y)^c$. Por el axioma IV, $\lambda x \in P(y)$ para algún $\lambda > 0$. Entonces, el segmento $[\varepsilon x, \lambda x]$ contiene puntos en *pre f*(y) y puntos fuera de $P(y)$ y, por tanto, intersecta a la frontera de $P(y)$. Por una propiedad bien conocida de los conjuntos convexos,[19] el punto de intersección es único, obviamente de la forma $\lambda_0 x$. Ciertamente, $g(x, y) = \lambda_0^{-1}$. ∎

[19] Véase Nikaidô (1970), p. 185.

Demostración del teorema 2. Por el axioma III, si $\lambda < 1$, $\lambda x \in P^{-1}(x) \subset P(x)^c$, y si $\lambda > 1$ entonces $\lambda x \in P(x)$. Por el mismo argumento que demostró el teorema 1, algún $\lambda_0 x$ es punto de frontera de $P(x)$. Las primeras aserciones de esta demostración y el axioma II implican que $\lambda_0 = 1$. ■

Demostración del teorema 3. Necesitamos dos lemas previos:

Lema 1. *Si las imágenes de P son abiertas, también lo son las de su cápsula transitiva* P^*.

Demostración. Como $gr\, P^2 = \cup_y P(y) \times P^{-1}(y)$ es un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}^n_+$, como proyección de un abierto, $P^2(x)$ es abierto para todo x. Por inducción, $P^n(x)$ es abierto para todo x y todo n. Como $y \in P^*(x)$ si y sólo si $y \in P^n(x)$ para algún n y, para todo n, $P^n(x) \subset P^*(x)$, si $y \in P^*(x)$ existe un subconjunto abierto de $P^*(x)$ que contiene a y, de donde, para todo x, $P^*(x)$ es abierto. La demostración para P^{*-1} es idéntica. ■

Lema 2. *Si* $x^0 \in S$ *es un* P^**–maximal en* S*, entonces es un* P^n*–maximal en* S *para todo* n.

La demostración es evidente.

Demostración del teorema. Por el lema 2, si el teorema se demuestra para P^* queda demostrado para P. Procedemos entonces a demostrarlo para P^*. Supóngase que el teorema es falso para P^*. Entonces, para todo $x \in S$ hay al menos un $y \in P(x) \cap S$, esto es, existe $y \in S$ tal que $x \in P^{*-1}(y)$. Se concluye que $\{P^{*-1}(y) \mid y \in S\}$ es una cubierta abierta de S. Como S es compacto, existen $y^1, \ldots, y^r$, tales que $\{P^{*-1}(y^k) \mid k = 1, \ldots, r\}$ cubre a S, o sea, para todo $x \in S$ existe k, $1 \leq 1\ k \leq r$, tal que $x \in P^{*-1}(y^k)$, lo que vale en particular para $x = y^1, \ldots, x = y^r$.

Esto último se puede poner como sigue: para todo k existe j tal que $y^j \in P^*(y^k)$. Como P^* es transitiva y acíclica, es irreflexiva y, por tanto, en la frase anterior $j \neq k$. Como r es finito, $y^j \in P^*(y^k)$ para $j \neq k$ implica que, eventualmente, $y^j \in (P^*)^n(y^j)$ para algún $n \leq r$. Pero $(P^*)^n = P^*$, de modo que se viola la irreflexibilidad de P^*.

Se concluye que al menos un $x^0 \in S$ no está contenido en ninguno de los conjuntos P^{*-1}, esto es, $P^*(x^0)$ no contiene a ningún elemento de S. Ciertamente, x^0 es un P^*–maximal en S. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.[20] 1. *Semicontinuidad inferior*. Supóngase lo contrario. Entonces existe un conjunto cerrado $S \subset \mathbf{R}^n_+$, tal que $\xi^+(S) = \{p \in \mathbf{P} \mid \xi(p) \subset S\}$ no es cerrado. Sea $\{p^k\}$ una sucesión convergente de vectores de precios cuyas imágenes están contenidas en $S : \xi(p^k) \subset S$ para todo k, $p^k \to p^0$, pero $\xi(p^0) \cap S^c \neq \varnothing$. Sea $x^0 \in \xi(p^0) \cap S^c$.

Desde luego, $S^c \subset \xi(p^k)^c$ para todo k, de modo que $x^0 \notin \xi(p^k)$, *i.e.*, $P(x^0) \cap \beta(p^k) \neq \varnothing$ vale para todo $k \neq 0$. Como $\mathring{\beta}(p^k) \neq \varnothing$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para todo $k \neq 0$ existe $y^k \in P(x^0)$ tal que $p'^k y^k < 1$. Como y^k es una funcional lineal continua en $\mathbf{P}$, $p^k \to p^0$ implica que $p'^0 y^k \leq 1$, *i.e.*, $y^k \in \beta(p^0)$ para todo k. Pero $y^k \in P(x^0!)$, así que $\beta(p^0) \cap P(x^0) \neq \varnothing$ *i. e.*, $x^0 \notin \xi(p^0)$, contrario a su definición.

2. *Semicontinuidad superior*. β es continua y

$$\xi(p) = \{x \in \mathbf{R}^n_+ \mid P(x) \cap \beta(p) = \varnothing\} \cap \beta(p),$$

de modo que para todo p, $\xi(p) \subset \beta(p)$. Esto implica: *i)* ξ tiene imágenes compactas para precios positivos y *ii)* para todo p, $\xi(p) = \xi(p) \cap \beta(p)$. Como la intersección de una correspondencia de gráfica cerrada e imágenes compactas con una semicontinua superior es semicontinua superior[21] si se hacen $\Gamma = \{(p, x) \in \mathbf{P} \times \mathbf{R}^n_+ \mid P(x) \cap \beta(p) = \varnothing\}$, será suficiente demostrar que Γ^c es abierto.

Sea $(p, x) \in \Gamma^c$, es decir, $P(x) \cap \beta(p) \neq \varnothing$. Como β es semicontinua inferior y $P(x)$ es un conjunto abierto,

$$\beta_+(P(x)) = \{p \in \mathbf{P} \mid \beta(p) \cap P(x) \neq \varnothing\}$$

[20] Se recuerda al lector que una correspondencia φ es continua en el sentido de Vietoris si es semicontinua superior e inferior, *i.e.* si los conjuntos $\varphi^+(S) = \{x \mid \varphi(x) \subset S\}$ y $\varphi_+(S) = \{x \mid \varphi(x) \cap S \neq \varnothing\}$, respectivamente, son abiertos para S abierto. En la demostración se usa el hecho de que $(\varphi^+(S))^c = \varphi_+(S^c)$ y $(\varphi_+(S))^c = \varphi^+(S^c)$. Para detalles véase, por ejemplo, Klein y Thompson (1984), capítulo 7.

[21] Véase una demostración en Ichiishi (1982), pp. 35-36.

es abierto, de modo que, para todo $p \in \beta_+(P(x))$ existe una vecindad W_p tal que $q \in W_p$ implica $P(x) \cap \beta(q) \neq \emptyset$ y, como $\mathring{\beta}(p) \neq \emptyset$ y $P(x)$ es abierto, esto a su vez implica que $\mathring{\beta}(q) \cap P(x) \neq \emptyset$, *i.e.*, $x \in P_+(\mathring{\beta}(q))$ para todo $q \in W_p$.

Como P es semicontinua inferior, $P_+(\mathring{\beta}(q))$ es abierto y existe una vecindad de x, digamos U_x, tal que $y \in U_x$ implica $y \in P_+(\mathring{\beta}(q))$ si es que $q \in W_p$. De esta manera, para cada pareja $(q, y) \in W_p \times U_x$, $P(y) \cap \beta(q) \neq \emptyset$, *i. e.*, $(q, y) \in \Gamma^c$. ■

Demostración del teorema 5. Como $x(p, y)$ minimiza $p'z$ para z en la cerradura de $P(y)$, un hiperplano de normal p soporta a $P(y)$ en x.[22] Por dualidad, un hiperplano de normal x soporta al polar superior de $P(y)$ en p. Pero este último no es sino el conjunto de nivel $\alpha = p'x(p, y)$ de la función costo. Esto demuestra la primera aserción.

La segunda se deriva, para cada y, del hecho de que C es cóncava en p, por lo tanto derivable salvo por un conjunto de medida cero.[23] ■

Bibliografía

Aliprantis, C. D., y O. Burkinshaw (1988). "The Fundamental Theorems of Welfare Economics without Proper Preferences", *Journal of Mathematical Economics*, 17, pp. 41-54.

Arrow, K. J., y F. H. Hahn (1971). *General Competitive Analysis*, San Francisco, Holden Day.

Avriel, M., *et al.* (1988). *Generalized Concavity*, Nueva York, Plenum Press.

Barten, A. P. (1964). "Consumer Demand Equations under Conditions of Almost Additive Preferences", *Econometrica*, 32, pp. 1-38.

Bergstrom, T. C. (1975). "Maximal Elements of Acyclic Relations on Compact Sets", *Journal of Economic Theory*, 10, pp. 403-404.

Border, K. (1984). "A Core Existence Theorem for Games without Ordered Preferences", *Econometrica*, 52, pp. 1537-1542.

Clarke, F. H. (1983). *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Nueva York, Wiley & Sons.

Cornet, B. (1991). "Marginal Cost Pricing and Pareto Optimality", en P. Champsaur (comp.), *Essays in Honor of Édmond Malinvaud*, North Holland, Amsterdam, pp. 13-52.

[22] Diremos que H soporta al abierto C en $x \in \partial C$ si soporta a su cerradura en ese punto.

[23] Véase por ejemplo Rockafellar (1970), p. 244.

Débreu, G. (1959). *Theory of Value*, Cowles Foundation for Research in Economics, Monografía núm. 17, Wiley & Sons, Nueva York.
Florenzano, M. (1981). *L'Équilibre Économique Général, Transitif et Intransitif*, Paris, Centre National de la Recherche Scientifique.
Ichiishi, T. (1982). *Game Theory for Economie Analysis*, Academic Press, Nueva York.
Jouini, E. (1988). "A Remark on Clarke's Normal Cone and the Marginal Cost Pricing Rule", *Journal of Mathematical Economics*, 17, pp. 149-178.
Kahneman, D., y A. Tversky (1984). "Choices, Values and Frames", *American Psychologist*, 39, pp. 341-350.
Klein, E., y A. C. Thompson (1984). *Theory of Correspondeces*, Wiley & Sons, Nueva York.
Loomes, G. C., y R. Sugden (1982). "Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty", *Economic Journal*, 92, pp. 805-824.
Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. Green (1995). *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York.
Mc Fadden, D. (1978). "Cost, Revenue and Profit Functions", en M. Fuss y D. Mc Fadden (comps.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, vol. I, North Holland, Amsterdam.
Nikaidô, H. (1970). *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, North Holland, Amsterdam.
Rader, T. (1972). *Theory of Microeconomics*, Academic Press, Londres.
Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
Schmeidler, D. (1971). "A Condition for the Completeness of a Partial Preference Relation", *Econometrica*, 39, pp. 403-404.
Shafer, W. (1974). "The Non-transitive Consumer", *Econometrica*, 42, pp. 913-919.
Shephard, R. W. (1970). *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton.
Starr, R. M. (1969). "Quasi-equilibria in Markets with Nonconvex Preferences", *Econometrica*, 37, pp. 25-38.
Theil, H. (1965). "The Information Approach to Demand Analysis", *Econometrica*, pp. 67-87.
Werner, J. (1989). "Equilibrium with Incomplete Markets without Ordered Preferences", *Journal of Economic Theory*, pp. 379-382.
Yannelis, N. C., y N. D. Prabhakar (1983). "Existence of Maximal Elements and Equilibria in Linear Topological Spaces", *Journal of Mathematical Economics*, pp. 233-245.