

UN PROCEDIMIENTO PARA LA SIMULACIÓN DE MODELOS LINEALES EN TIEMPO CONTINUO CON PREVISIÓN PERFECTA E HISTÉRESIS

Carlo Graziani
Universidad Católica del Uruguay

Andrés Almansa*
Universidad de la República

Resumen: Se presenta un procedimiento para la simulación de modelos lineales, en tiempo continuo, con previsión perfecta e histéresis. El procedimiento, que constituye la base del algoritmo LPFH, parte de una generalización de la forma estructural estándar, introducida por Austin y Buiter (1982) y Buiter (1984), y permite la solución numérica de modelos con muchas variables de estado.

Abstract: This work presents a procedure to simulate continuous linear models with perfect foresight and histeresis. The procedure, which constitutes the basis of the LPFH algorithm, is based on a generalization of the standard structural form introduced by Austin and Buiter (1982) and Buiter (1984), and allows for the numerical solution of models with many state variables.

1. Introducción

Muchos análisis de dinámica macroeconómica se efectúan con base en modelos dinámicos que, en el contexto de una formulación en tiempo

* Se agradecen los comentarios de Roberto Suárez Antola y Daniel Vaz, así como de los participantes en seminarios de las Universidades de San Andrés, CEMA (Buenos Aires), Universidad de la República (Montevideo), del Banco Central de Uruguay, sobre versiones anteriores del presente trabajo. Asimismo se agradecen los comentarios de los dictaminadores anónimos para su revisión final. Los errores que puedan quedar, son responsabilidad de los autores.

continuo, pueden escribirse —por lo menos al cabo de algunas transformaciones— como sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, siendo frecuente la linealización de los modelos no lineales en un entorno apropiado.

El problema de la inestabilidad que surge al introducir expectativas racionales que, en un contexto no estocástico como el del presente trabajo, se convierte en el supuesto de previsión perfecta, se trata generalmente con base en la sugerencia de Sargent y Wallace (1973) y Calvo (1977), al dejar saltar las variables no predeterminadas en el instante en el que ocurre un choque no anticipado o se anuncia uno futuro, y suponiendo que después tales variables siguen sendas continuas que convergen hacia el nuevo equilibrio a largo plazo.

Cuando el sistema de ecuaciones diferenciales no supera el orden de dos y cuando se buscan sólo implicaciones cualitativas, se suelen aplicar los métodos conocidos del análisis dinámico cualitativo (véase, por ejemplo, Begg (1982)). Sin embargo, cuando el modelo que se desea analizar es de orden superior, o se busca obtener órdenes de magnitud cuantitativos para los efectos estudiados, es cada vez más común la utilización de la simulación numérica.

En un trabajo reciente se presentó un procedimiento para la simulación de modelos lineales en tiempo continuo bajo previsión perfecta, incorporado en la rutina llamada LPF, Linear Perfect Foresight, Graziani y Almansa (1997). Esa rutina se inspiró en los trabajos de Austin y Buitter (1982) y Buitter (1984) y requiere que la matriz de transición de la forma reducida del modelo sea invertible y diagonalizable. Como consecuencia, la matriz mencionada no puede tener ni raíces nulas ni, en general, raíces múltiples.

En este contexto también vale la pena mencionar que Buitter (1986) mostró cómo utilizar el algoritmo de Austin y Buitter (1982) para simular políticas óptimas y consistentes en el tiempo, suponiendo una función objetivo cuadrática. Obviamente, el algoritmo LPF permite efectuar el mismo tipo de simulaciones. Asimismo, van der Ploeg y Markink (1991) presentaron un paquete de rutinas que permiten simular modelos lineales con previsión perfecta bajo distintas constelaciones estratégicas. Tanto el algoritmo de Austin y Buitter (1982) como las rutinas de van der Ploeg y Markink (1991) fueron escritas en FORTRAN, en tanto que la rutina LPF está escrita en el lenguaje MATLAB, más sencillo para utilizar.

Ahora, no es poco común en la literatura encontrar modelos que poseen histéresis, es decir, cuyo equilibrio de largo plazo depende de las condiciones iniciales y de las velocidades de ajuste del modelo (véase Giavazzi y Wyplosz, 1984; 1985). Concretamente, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes presenta histéresis cuando la matriz de transición es singular. Esto se da cuando hay por lo menos un valor propio nulo. En este caso, la matriz de transición no es más invertible y, como consecuencia, los algoritmos arriba mencionados no funcionan.

En este trabajo se expone un primer paso hacia un procedimiento de simulación más general, incorporando las sugerencias de Giavazzi y Wyplosz (1984; 1985), al procedimiento de Graziani y Almansa (1997), dando así lugar a la rutina llamada LPFH, Linear Perfect Foresight with Hysteresis. Esta nueva rutina contempla todas las opciones de Austin y Buitter (1982), ya contenidas en la rutina LPE, admitiendo además la posibilidad de histéresis, debida a (por lo menos) un valor propio nulo, lo que lleva a una matriz de transición no invertible. Pero el procedimiento todavía no es completamente general ya que la matriz mencionada aún debe ser diagonalizable.

Finalmente, mientras que los algoritmos mencionados anteriormente fueron escritos para sistemas denominados autónomos, el nuevo procedimiento se aplica también a sistemas no autónomos ya que prevé la posibilidad de una dependencia directa del tiempo.

Al igual que el algoritmo LPE, también el algoritmo LPFH está escrito en el lenguaje MATLAB.¹ La forma estructural estándar del modelo que se pretende simular, es una generalización de la utilizada por Austin y Buitter (1982), Buitter (1984) y van der Ploeg y Markink (1991). Se mantiene el supuesto que las variables exógenas son constantes en cada subintervalo, pero que pueden cambiar de valor, pasando de un subintervalo a otro. Por tanto, también la nueva rutina admite sólo funciones constantes en escalón para las variables exógenas. Por medio de esta opción es posible simular los efectos de choques no anticipados o anticipados, así como permanentes o transitorios.

El plan del trabajo es el siguiente. En la sección 2 se presenta, a modo de ilustración, un modelo sencillo admitido por el nuevo procedi-

¹ Se pone a disposición de los lectores interesados un diskette con los archivos del algoritmo LPFH en el lenguaje MATLAB, así como el manual correspondiente.

miento y que no puede ser simulado por medio de las rutinas mencionadas anteriormente. En la 3 se caracteriza, de manera general, la clase de modelos que pueden ser simulados con el nuevo procedimiento. En la 4 se explica la solución matemática adoptada y en la sección 5 se presenta un ejemplo más elaborado que contiene una raíz positiva y dos raíces nulas. La última sección brinda algunos comentarios finales.

2. Un ejemplo sencillo

Antes de presentar la formulación general del tipo de modelos admitidos por el procedimiento desarrollado en este trabajo, parece conveniente discutir un ejemplo ilustrativo sencillo. Para ello, se elige una versión log-lineal del así llamado "coherence model" empleado por Fernández (1985) para analizar la dinámica del tipo real de cambio y la cantidad de dinero real, así como la coherencia entre la pauta cambiaria y el déficit fiscal en el ámbito de un plan de estabilización basado en una regla cambiaria.

En su forma estructural, el modelo puede ser escrito en términos de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{h} = \frac{1}{H_0} \dot{R} + d - \varepsilon, \quad H_0 > 0, \quad (1)$$

$$\dot{R} = \tau (x - \bar{x}) + \kappa (\pi - \varepsilon), \quad \tau, \kappa > 0 \quad (2)$$

$$\dot{x} = \varepsilon - \pi, \quad (3)$$

$$h + x = \lambda_0 - \lambda_1 \pi, \quad \lambda_1 > 0 \quad (4)$$

donde d = déficit público como fracción de la base monetaria, h = logaritmo de la base monetaria en términos de divisas,² R = reservas internacionales de la autoridad monetaria en términos de divisas, x = logaritmo del tipo real de cambio, \bar{x} = logaritmo del tipo real de cambio de equilibrio (de largo plazo), ε = tasa de devaluación preanunciada por

² H_0 indica el valor de la base monetaria en términos de divisas en el equilibrio inicial y proviene de la linealización de la ecuación original.

la autoridad monetaria, π = tasa de inflación doméstica. Las variables h , R , x y π son endógenas: las primeras tres son variables de estado, donde h y R son predeterminadas y x no predeterminada orientada hacia el futuro, en tanto que la cuarta es una variable de salida de corto plazo. Las variables d y ε son exógenas. El punto sobre una variable indica su derivada respecto del tiempo.

Antes de discutir las propiedades del modelo desde el punto de vista de su estructura formal, conviene dar una breve explicación intuitiva para cada ecuación.³ La ecuación (1) describe el aumento de la base monetaria en términos de divisas en función: del aumento de las reservas internacionales del Banco Central, del déficit público (que se supone es financiado enteramente por emisión de dinero) y de la pauta cambiaria. De esta ecuación se desprende, además, que en el estado estacionario (donde las derivadas respecto del tiempo son cero) el déficit fiscal debe ser coherente con la pauta cambiaria, formalmente $d = \varepsilon$. Según la ecuación (2) las reservas internacionales aumentan con base en el superávit comercial y la entrada de capitales. Se supone que el saldo de la balanza comercial, $\tau(x - \bar{x})$, depende positivamente de la diferencia entre el tipo de cambio real y su nivel de equilibrio de largo plazo. En cambio, la entrada neta de capitales, $\kappa(\pi - \varepsilon)$, se supone que depende positivamente del diferencial de tasas de interés, corregido por la tasa de devaluación preanunciada. La expresión contenida en (2) surge de aproximar la tasa de interés interna por la tasa de inflación esperada, poniendo la tasa de interés extranjera igual a cero y haciendo uso del supuesto de previsión perfecta para la tasa de inflación doméstica, igualando las tasas de inflación esperada y observada. La ecuación (3) se obtiene al derivar logarítmicamente la definición del tipo real de cambio respecto del tiempo. Finalmente, la expresión (4) corresponde a la versión logarítmica de la ecuación de equilibrio en el sector monetario, incorporando una demanda de dinero semi-logarítmica del tipo de Cagan (1956).

Por medio de unas pocas manipulaciones, el sistema compuesto por las ecuaciones (1)-(4) puede escribirse en la siguiente forma reducida:

³ Para explicaciones más detalladas, conviene consultar el trabajo original de Fernández (1985).

$$\begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{R} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{H_0\lambda_1} & 0 & \frac{\tau - \kappa/\lambda_1}{H_0} \\ -\frac{\kappa}{\lambda_1} & 0 & \tau - \frac{\kappa}{\lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ R \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\tau\bar{x}}{H_0} + \frac{\kappa\lambda_0}{H_0\lambda_1} & 1 - \left(1 + \frac{\kappa}{H_0}\right) \\ -\tau\bar{x} + \frac{\kappa\lambda_0}{\lambda_1} & 0 & -\kappa \\ -\frac{\lambda_0}{\lambda_1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} & 0 & -\frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ R \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda_0}{\lambda_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad (6)$$

La característica que nos importa en este contexto y que se desprende de la ecuación diferencial matricial (5), es que la matriz de transición posee una columna de elementos iguales a cero y es por tanto singular. Ello implica que no es posible obtener una expresión relativa al estado estacionario, poniendo las derivadas respecto del tiempo iguales a cero y despejando el vector de variables de estado. Al tener un valor propio nulo, el modelo es histórico,⁴ lo que implica que el equilibrio final depende de las condiciones iniciales y de las velocidades de ajuste, incorporadas en el modelo. Debido a esta característica, el modelo expuesto no puede ser simulado por medio de las rutinas de Austin y Buitter (1982), van der Ploeg y Markink (1991) o Graziani y Almansa (1997). En cambio, el procedimiento que se presentará a continuación, permite la simulación de modelos de esta categoría, siempre que la matriz de transición sea diagonalizable. El nuevo procedimiento admite, además, una dependencia directa del tiempo.

⁴ De hecho se puede mostrar que la matriz de transición posee las raíces características

$$\mu_1 = 0, \mu_{2,3} = \frac{i}{2\lambda_1} \left(i - \frac{\kappa}{H_0} \right) \pm \frac{i}{2\lambda_1} \sqrt{\left(i - \frac{\kappa}{H_0} \right)^2 + \frac{4\tau\lambda_1}{H_0}}$$

siendo $\mu_2 > 0 > \mu_3$.

3. Formas estructural y reducida del modelo

El nuevo procedimiento parte de un modelo dinámico lineal, con coeficientes constantes, que pueda ser escrito como un sistema de ecuaciones diferenciales para las variables de estado,

$$G_1 \dot{x}(t) + G_2 x(t) + G_3 y(t) + G_4 z(t) + G_5 t = 0, \tag{7}$$

aumentado por un sistema de ecuaciones para las variables de salida,

$$G_6 x(t) + G_7 \dot{x}(t) + G_8 y(t) + G_9 z(t) + G_{10} t = 0, \tag{8}$$

donde x = vector columna con n variables de estado, y = vector columna con m variables de salida (o endógenas de corto plazo), z = vector columna con q variables exógenas o constantes y t = variable tiempo. Las matrices constantes G_1 a G_{10} deben tener las dimensiones: $G_1: n \times n$, $G_2: n \times n$, $G_3: n \times m$, $G_4: n \times q$, $G_5: n \times 1$, $G_6: m \times n$, $G_7: m \times n$, $G_8: m \times m$, $G_9: m \times q$, $G_{10}: m \times 1$.⁵

Al suponer que G_8 y $G_2 - G_3 G_8^{-1} G_7$ sean invertibles, se obtiene la forma reducida del modelo⁶

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bz(t) + Ct, \tag{9}$$

$$y(t) = Dx(t) + Ez(t) + Ft. \tag{10}$$

Contrariamente al algoritmo de Austin y Buitter (1982), la matriz de transición A no necesita ser invertible, sólo se requiere que sea diagonalizable. Por tanto, puede tener raíces con parte real negativa o positiva, o bien raíces nulas. En este último caso el modelo presenta histéresis.

Como en Austin y Buitter (1982) y Buitter (1984), el vector x contiene, en el caso general, n_1' variables de estado predeterminadas, $n_1'' = n_1 - n_1'$ variables de estado no predeterminadas, orientadas al pasado y $n_2 = n - n_1$ variables de estado no predeterminadas, orientadas al

⁵ La forma estructural (7)-(8) puede ser fácilmente identificada como una generalización de la forma utilizada por Austin y Buitter (1982), Buitter (1984) y van der Ploeg y Markink (1991).

⁶ Las expresiones relativas a las matrices de la forma reducida (9)-(10) se encuentran en el apéndice 1.

futuro, cuyos vectores columna se denominan, x_1' , x_1'' y x_2 , respectivamente.⁷

Se supone que el modelo será simulado a lo largo del intervalo $[t_0, t_N]$ y que las variables exógenas tendrán valores constantes en cada subintervalo, aunque pueden cambiar de valor de un subintervalo a otro:

$$z(t) = \begin{cases} z_1, & t_0 < t < t_1, \\ z_2, & t_1 < t < t_2, \\ \dots & \\ z_N, & t_{N-1} < t < t_N, \end{cases} \quad (11)$$

donde z_i = vector z con los valores constantes relativos al i -ésimo subintervalo y N = número de conjuntos de valores (distintos) para z . En otras palabras, se admiten sólo funciones constantes en escalón para las variables contenidas en z .

Para poder obtener en forma unívoca la solución convergente del modelo, la matriz A debe tener exactamente n_2 raíces con parte real positiva. Además, se necesitan exactamente $n - n_2 = n_1' + n_1''$ condiciones iniciales. Las variables de estado predeterminadas proporcionan n_1' condiciones

$$x_1'(t_0) = x_{10}', \quad (12)$$

donde x_{10}' contiene los valores iniciales de x_1' en t_0 . Las restantes condiciones iniciales deberán escribirse (como en Austin y Buiter (1982) y Buiter (1984)) por medio de una restricción lineal n_1'' -dimensional del tipo

$$F_1 x_1''(t_0) + F_2 x_1'(t_0) + F_3 x_2(t_0) = f. \quad (13)$$

Las matrices F_1 , F_2 y F_3 , y el vector f deberán tener las dimensiones $F_1: n_1'' \times n_1''$, $F_2: n_1'' \times n_1'$, $F_3: n_1'' \times n_2$, $f: n_1'' \times 1$. Además, F_1 debe ser invertible, es decir, tener rango completo.

⁷ Se requiere que las variables de estado contenidas en x estén ordenadas de la manera indicada.

4. Solución matemática

El punto de partida para calcular las sendas dinámicas de las variables endógenas es la forma reducida del modelo, dada por (9)-(10). Sin embargo, en lo que sigue nos concentraremos en la ecuación diferencial matricial (9) para x . Una vez que se tienen los valores de x , los valores de y pueden calcularse fácilmente con la ayuda de la expresión (10).

Como primer paso desarrollamos la solución de (9), suponiendo que z es constante a lo largo del intervalo de simulación. En el caso de un modelo sin histéresis en el que A es invertible, se puede mostrar que la solución de (9) es

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} [x(t_0) - \bar{x}(t_0)] + \bar{x}(t) \tag{14}$$

con

$$\bar{x}(t_0) = -A^{-1}(Bz + A^{-1}C) - A^{-1}Ct_0, \tag{15}$$

$$\bar{x}(t) = -A^{-1}(Bz + A^{-1}C) - A^{-1}Ct. \tag{16}$$

De hecho, esta solución surge también de la solución general en ausencia de histéresis.

En el caso general se supondrá, sin embargo, que A no es invertible, aunque sí diagonalizable, es decir, que puede ser escrita como

$$A = SAS^{-1}, \tag{17}$$

donde S es una matriz de dimensión $n \times n$ cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de A y donde Λ es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de A . Al introducir la nueva variable

$$X = S^{-1}x \tag{18}$$

la ecuación diferencial matricial (9) puede transformarse en

$$\dot{X} = \Lambda X + bz + ct, \tag{19}$$

donde $b = S^{-1}B$, $c = S^{-1}C$. Obsérvese que (19) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales lineales "desacopladas".

Si suponemos, sin pérdida de generalidad, que Λ puede ser particionada como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

donde $\tilde{\Lambda}$ contiene los valores propios no nulos de A , al reordenar las columnas de la matriz S de manera correspondiente y particionando también X , b y c conforme a Λ , podemos reescribir (19) como

$$\dot{X}_1 = b_1 z + c_1 t, \quad (21)$$

$$\dot{X}_2 = \tilde{\Lambda} X_2 + b_2 z + c_2 t \quad (22)$$

Las soluciones de (21) y (22) son:

$$X_1(t) = X_1(t_0) + b_1 z(t - t_0) + \frac{1}{2} c_1 (t^2 - t_0^2), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} X_2(t) = e^{\tilde{\Lambda}(t-t_0)} [X_2(t_0) + \tilde{\Lambda}^{-1}(b_2 z + \tilde{\Lambda}^{-1} c_2 + c_2 t_0)] \\ - \tilde{\Lambda}^{-1}(b_2 z + \tilde{\Lambda}^{-1} c_2 + c_2 t) \end{aligned} \quad (24)$$

Al combinar (23) y (24), se obtiene la siguiente expresión para X :

$$X(t) = e^{\Lambda(t-t_0)} [X(t_0) - u_0 - u_1 t_0 - u_2 t_0^2] + u_0 + u_1 t + u_2 t^2, \quad (25)$$

donde

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\Lambda}^{-1}(b_2 z + \tilde{\Lambda}^{-1} c_2) \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} b_1 z \\ -\tilde{\Lambda}^{-1} c_2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Al aplicar a (25) la transformación inversa de (18) para volver a las variables originales x , encontramos

$$x(t) = S e^{\Lambda(t-t_0)} S^{-1} [x(t_0) - U_0 - U_1 t_0 - U_2 t_0^2] + U_0 + U_1 t + U_2 t^2 \quad (27)$$

donde $U_i = Su_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. La expresión (27) constituye el resultado central utilizado en la solución numérica de (9).

Con la ayuda de (27) es posible obtener también una expresión matemática para la condición de convergencia del modelo hacia su (senda de) equilibrio a largo plazo. Para ello, es necesario y suficiente eliminar el efecto de las raíces inestables sobre la dinámica del modelo (en el último subintervalo), lo que se alcanza por medio de la restricción

$$\Pi_p S^{-1} [x(t_0) - U_0 - U_1 t_0 - U_2 t_0^2] = 0, \tag{28}$$

donde Π_p es la matriz de dimensión $n_2 \times n$ que selecciona las filas que corresponden a los elementos de Λ con parte real positiva.

El siguiente paso consiste en mostrar cómo se simula el modelo a lo largo del intervalo de simulación $[t_0, t_N]$ que, conforme a los N conjuntos de valores (distintos) para las variables exógenas, se divide en los N subintervalos $[t_0, t_1], \dots, [t_{N-1}, t_N]$. A estos efectos se tomarán en cuenta, además de las condiciones iniciales y las condiciones de convergencia, las condiciones de continuidad al pasar de un intervalo al siguiente.⁸

De (27) se deduce la siguiente solución general relativa al intervalo j :

$$x(t) = S e^{\Lambda(t-t_{j-1})} S^{-1} [x(t_{j-1}) - U_0^{(j)} - U_1^{(j)} t_{j-1} - U_2^{(j)} t_{j-1}^2] + U_0^{(j)} + U_1^{(j)} t + U_2^{(j)} t^2, \quad t_{j-1} \leq t < t_j, \tag{29}$$

donde $U_i^{(j)}$ indica el vector U_i perteneciente al intervalo j . Para obtener la solución de x desde t_0 hasta t_N , se necesitan los valores de los N vectores $x(t_{j-1})$, $j = 1, \dots, N$, correspondientes a las variables de estado al comienzo de cada intervalo. Dado que cada vector $x(t_{j-1})$ posee n elementos, ello significa que se necesitan nN restricciones linealmente independientes. Para ello se tienen:

a) n_1' condiciones correspondientes a los valores iniciales de las variables de estado predeterminadas:

⁸ El número mínimo de subintervalos debe ser igual que el número de conjuntos distintos de z . Sin embargo, cuando un subintervalo es relativamente largo, es conveniente —por razones de precisión numérica— dividirlo en subintervalos más cortos con los mismos valores para las variables exógenas o constantes.

$$x_1'(t_0) = x_{10}' \quad (30)$$

b) n_1'' condiciones para determinar los valores iniciales de las variables de estado no predeterminadas, orientadas al pasado:

$$F_1 x_1''(t_0) + F_2 x_1'(t_0) + F_3 x_2(t_0) = f \quad (31)$$

c) $n(N-1)$ condiciones de continuidad para las variables de estado:

$$x(t_j) = x(t_j^-), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (32)$$

donde:

$$\begin{aligned} x(t_j^-) = & S e^{\Lambda(t_j - t_{j-1})} S^{-1} [x(t_{j-1}) - U_0^{(j)} - U_1^{(j)} t_{j-1} - U_2^{(j)} t_{j-1}^2] \\ & + U_0^{(j)} + U_1^{(j)} t_j + U_2^{(j)} t_j^2 \end{aligned} \quad (33)$$

d) n_2 condiciones de convergencia para las variables de estado no predeterminadas orientadas al futuro:

$$\Pi_p S^{-1} [x(t_{N-1}) - U_0^{(N)} - U_1^{(N)} t_{N-1} - U_2^{(N)} t_{N-1}^2] = 0 \quad (34)$$

En resumen, las expresiones (30)-(34) forman un sistema de

$$n_1' + n_1'' + n_2 + n(N-1) = nN$$

restricciones lineales en

$$\xi = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \dots \\ x(t_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \text{con } x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ x_1''(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix},$$

que puede escribirse en forma compacta como

$$M\xi = L, \quad (35)$$

donde M es una matriz de dimensión $nN \times nN$ y L un vector columna de $nN \times 1$ elementos, ambos con coeficientes constantes. Si M tiene rango

completo,⁹ entonces (35) posee una solución única que proporciona los valores de las variables de estado al inicio de cada intervalo. Al introducir estos valores en la solución general (29), correspondiente a cada intervalo, se obtienen finalmente los valores numéricos de las sendas dinámicas de todas las variables de estado a lo largo de todo el periodo de simulación.

5. Un ejemplo más elaborado

En esta sección se presenta como ejemplo más elaborado, el modelo utilizado por Ambler y Cardia (1992) en su estudio sobre programas anti-inflacionarios óptimos en países semi-industrializados. Se trata de un modelo bastante estándar para una pequeña economía abierta con salarios escalonados según la formulación propuesta por Calvo (1983), con imperfecta movilidad de capitales, y en la que el gasto público se financia por medio de la emisión de dinero y los intereses de las reservas internacionales de la autoridad monetaria.

Al cabo de algunas transformaciones que incluyen la linealización de algunas ecuaciones, el modelo puede ser escrito en términos del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\dot{w} = \delta(v - w) + \theta \dot{p} + \dot{z} \quad (36)$$

$$\dot{v} = \delta(v - w) - \delta\beta y + \theta \dot{p} \quad (37)$$

$$p = \alpha w + (1 - \alpha)(e + p^*) \quad (38)$$

$$y = \gamma_1(e + p^* - w) - \gamma_2(i - \dot{p}) + g + \gamma_3 y^* \quad (39)$$

$$m - p = y - \lambda_i \quad (40)$$

$$m = \omega d + (1 - \omega)f \quad (41)$$

$$\dot{f} = (r_0^*)\psi(e + r^* - f) + \psi r^* \quad (42)$$

⁹ En el apéndice 2 se explicitan las condiciones bajo las cuales la matriz M es invertible.

$$\dot{r}^* = (\pi_1/R_0^*)(i - \dot{e}) + (\pi_2/R_0^*)(e - w) + (\pi_3/R_0^*)y - (f_0/R_0^*)r^* \quad (43)$$

$$\varphi_1 g - \varphi_1(e - w) = \varphi_2 \dot{d} + \varphi_2 \dot{d}_0(d - e) + \varphi_3 r^* \quad (44)$$

$$\dot{g} = \eta \quad (45)$$

donde d = componente doméstico de la base monetaria, e = tipo de cambio nominal (unidades de moneda nacional por unidad de moneda extranjera), f = componente externo de la base monetaria, g = gasto público, i = tasa de interés doméstica nominal, m = cantidad de dinero nominal, p = nivel de precios interno, p^* = nivel de precios internacional, r^* = reservas de la autoridad monetaria en términos de moneda extranjera, v = salario contractual, w = salario promedio en la economía, y = producto real doméstico, y^* = producto real del resto del mundo y z = variable de control salarial. Con excepción de la tasa de interés, una letra minúscula indica el logaritmo de la variable correspondiente. Asimismo, el punto sobre una variable indica su derivada respecto del tiempo.

Las ecuaciones (36)-(37) describen la dinámica salarial y surgen de una formulación de salarios escalonados del tipo de la propuesta por Calvo (1983). La (38) define el nivel de precios doméstico como promedio ponderado entre los precios de los bienes no transables (cuyo precio es aproximado por medio del salario) y de los bienes transables internacionalmente. La (39) especifica la demanda agregada, en tanto que la (40) corresponde a la demanda real de dinero. La (41) abre la base monetaria en sus componentes interno y externo, ambos en moneda nacional. La (42) describe la dinámica del componente externo en moneda nacional en función de las reservas en términos de moneda extranjera. La (43) corresponde a la ecuación de la balanza de pagos, en tanto que la (44) surge de la restricción presupuestaria del gobierno. Las (41)-(44) son linealizaciones de expresiones no lineales. Finalmente, la (45) especifica la tasa de variación del gasto público como variable de control.

Si reordenamos adecuadamente las ecuaciones, eliminamos las variables m y p por medio de sustituciones apropiadas, e igualamos las variables del exterior a cero, el modelo puede ser llevado a la forma estructural estándar, indicada en Ambler y Cardia (1992), en términos de las seis variables de estado: r^* = reservas internacionales, $d - w$ =

componente interno de la base monetaria real, $f - w =$ componente externo de la base monetaria real, $g =$ gasto público real, $e - w =$ tipo real de cambio y $v - w =$ salario contractual real. De las dos variables de salida de corto plazo: $y =$ ingreso real e $i =$ tasa de interés doméstica; y de las tres variables exógenas: $\dot{z} =$ parámetro de control salarial, $\eta =$ tasa de variación del gasto público y $\dot{e} =$ tasa de devaluación (véase el apéndice 3). Las primeras cinco variables de estado son predeterminadas, mientras que la sexta es no predeterminada. Al hacer uso de los valores numéricos básicos para los parámetros del modelo, contenidos en Ambler y Cardia (1992) se confirma que la matriz de transición posee tres valores propios negativos, dos valores propios nulos y un valor propio positivo,¹⁰ siendo por tanto singular.¹¹ Pero dado que la matriz mencionada es diagonalizable, se puede efectivamente simular el modelo numéricamente por medio del procedimiento expuesto.¹²

¹⁰ Los valores propios son: -5.8103, -0.8829, -0.5744, 0, 0, 0.1729.

¹¹ Dado que el número de variables no predeterminadas, orientadas al futuro, equivale al número de raíces inestables, el modelo puede además considerarse bien especificado.

¹² Merece la pena mencionar que, en su versión actual, el algoritmo LPFH permite simular distintos tipos de modelos, siempre que puedan escribirse en la forma estructural estándar (o directamente en la forma reducida) indicada y siempre que su matriz de transición sea diagonalizable. El número de cualquiera de los tres tipos de variables de estado puede ser cero.

Si el número de variables no predeterminadas, orientadas al futuro (n_2) es cero, no se imponen las condiciones de convergencia a largo plazo y la simulación se ejecuta de la forma tradicional. Si todas las raíces tienen parte real negativa, el modelo es estable; si hay alguna raíz nula, el modelo presenta histéresis; y si hay raíces con parte real positiva, el modelo es inestable.

Por otra parte, si hay $n_2 > 0$ variables no predeterminadas, orientadas al futuro, e igual número de raíces con parte real positiva, entonces se supone que se tiene un modelo con previsión perfecta bien especificado, cuya simulación se lleva a cabo, al dejar "saltar" las variables orientadas al futuro en el instante del (anuncio del) choque considerado e imponiendo al mismo tiempo la convergencia a largo plazo. Si el número de variables no predeterminadas, orientadas al futuro, difiere del número de raíces con parte real positiva, la simulación no se puede ejecutar. También bajo previsión perfecta, el algoritmo admite histéresis y funciona incluso en el caso extremo en que las variables de estado son todas no predeterminadas y orientadas al futuro.

Finalmente cabe mencionar que el algoritmo puede ser aplicado tanto en el caso de un modelo lineal *ad-hoc*, como en el de un modelo con fundamentación microeconómica explícita. Lo que se requiere en este último caso es que, al cabo de las necesarias manipulaciones algebraicas, que pueden incluir una aproximación lineal a un sistema

6. Comentarios finales

En este trabajo se expuso un procedimiento para la simulación numérica de modelos lineales en tiempo continuo con previsión perfecta e histéresis. Este procedimiento es una generalización del contenido en Graziani y Almansa (1997), que a su vez se inspira en los trabajos de Austin y Buitier (1982) y Buitier (1984). La generalización expuesta se basa en los trabajos de Giavazzi y Wyplosz (1984), (1985) y consiste en admitir, además, modelos con matrices de transición no necesariamente invertibles, aunque sí diagonalizables, así como modelos con una dependencia directa del tiempo. Como en los procedimientos anteriores, se mantiene el supuesto que las variables exógenas sean constantes sólo por subintervalos, lo que permite simular los efectos de choque no anticipados, o anticipados, como también permanentes o transitorios.

Sin embargo, el procedimiento expuesto todavía no es del todo general, al exigirse que la matriz de transición siga siendo diagonalizable. Por lo tanto, la próxima generalización consistiría en permitir matrices de transición que no sean necesariamente invertibles ni diagonalizables. Luego quedarían, obviamente, ulteriores posibilidades de extensión que incluyen —entre otras— la consideración de funciones más generales para las variables exógenas y la incorporación de varios tipos de incertidumbre. Finalmente, cabe la consideración de procedimientos para modelos no lineales.

En cuanto a la simulación de modelos con expectativas racionales o previsión perfecta en tiempo discreto, existe una literatura bastante más amplia, pudiéndose obtener una panorámica general con base en los trabajos de Cuthbertson, Hall y Taylor (1992), McKibbin (1987), McKibbin y Sachs (1991) y Taylor (1986), entre otros. En este contexto merece mencionarse que el algoritmo de McKibbin y Sachs, expuesto en su versión básica (y con dos generalizaciones) en Graziani (1997), resulta ser particularmente sencillo y rápido para la simulación de modelos lineales.

originalmente no lineal, el modelo resultante pueda ser escrito como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en la forma estructural o reducida, indicadas arriba, con una matriz de transición diagonalizable.

Bibliografía

- Ambler, St. y E. Cardia (1992). "Optimal Anti-Inflation Programs in Semi-Industrialized Economies: Orthodox Versus Heterodox Policies", *Journal of Development Economics*, núm. 38, pp. 41-61.
- Austin, G.P. y W.H. Buiter (1982). *Saddlepoint: A Program for Solving Continuous Time Linear Rational Expectations Models*, LSE Econometrics Programme Discussion Paper A.37, noviembre.
- Begg, D.K.H. (1982). *The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics, Theories and Evidence*, Oxford University Press, Oxford.
- Buiter, W.H. (1984). "Saddlepoint Problems in Continuous Time Rational Expectations Models: A General Method and Some Macroeconomic Examples", *Econometrica*, núm. 52, pp. 665-680.
- (1986). "Policy Evaluation and Design for Continuous Time Linear Rational Expectations Models: Some Recent Developments", en M.H. Preston y R.E. Quandt (comps.), *Prices, Competition and Equilibrium*, Barnes & Noble Books.
- Calvo, G.A. (1977). "The Stability of Models of Money and Perfect Foresight: A Comment", *Econometrica*, núm. 45, pp. 1737-1739.
- (1983). "Staggered Contracts and Exchange Rate Policy", en J. A. Frenkel (comp.), *Exchange Rates and International Macroeconomics*, University of Chicago Press, Chicago, pp. 235-258.
- Cuthbertson, K., St. G. Hall y A.P. Taylor (1992). *Applied Econometric Techniques*, Philip Allan, Nueva York.
- Fernández, R.B. (1985). "The Expectations Management Approach to Stabilization in Argentina during 1976-1982", *World Development*, núm. 13, pp. 871-892.
- Giavazzi, F. y Ch. Wyplosz (1984). "The Real Exchange Rate, the Current Account, and the Speed of Adjustment", en J.F.O. Bilson y R.C. Marston (comps.), *Exchange Rate Theory and Practice*, University of Chicago Press, Chicago, pp. 335-356.
- (1985). "The Zero Root Problem: A Note on the Dynamic Determination of the Stationary Equilibrium in Linear Models", *Review of Economic Studies*, núm. 52, pp. 353-357.
- Graziani, C. (1998). "La simulación de modelos lineales en tiempo discreto bajo previsión perfecta: exposición del procedimiento básico de McKibbin y Sachs y dos generalizaciones", *International Review of Economics and Business* (por aparecer).
- y A. Almansa (1997). "Un algoritmo para la simulación de modelos lineales en tiempo continuo bajo previsión perfecta", *Estudios de Economía*, núm. 24, pp. 185-196.
- Math Works, Inc. (1985-1991). *MATLAB: High-Performance Numeric Computation Software, User's Guide*.
- McKibbin, W.J. (1987). *Numerical Solutions of Rational Expectations Models with and without Strategic Behavior*, Research Discussion Paper 8706, Reserve Bank of Australia, agosto.

- y J. D. Sachs (1991). *Global Linkages: Macroeconomic Interdependence and Cooperation in the World Economy*, Brookings Institution, Washington.
- Ploeg, F. van der y A.J. Markink (1991). "Dynamic Policy in Linear Models with Rational Expectations of Future Events: A Computer Package", *Computer Science in Economics and Management*, núm. 4, pp. 175-199.
- Sargent, T.J. y N. Wallace (1973). "The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight", *Econometrica*, núm. 41, pp. 1043-1048.
- Taylor, J.B. (1986). "New Econometric Approaches to Stabilization Policy in Stochastic Models of Macroeconomic Fluctuations", en Z. Griliches y M.D. Intriligator (comps.), *Handbook of Econometrics*, vol. III, North-Holland, Amsterdam, pp. 1997-2055.

Apéndice 1

Las matrices de la forma reducida

A partir de la forma estructural estándar del modelo (7)-(8), se obtiene la forma reducida (9)-(10) cuyas matrices están dadas por las siguientes expresiones:

$$A = -(G_2 - G_3 G_8^{-1} G_7)^{-1} (G_1 - G_3 G_8^{-1} G_6) \quad (\text{A.1})$$

$$B = -(G_2 - G_3 G_8^{-1} G_7)^{-1} (G_4 - G_3 G_8^{-1} G_9) \quad (\text{A.2})$$

$$C = -(G_2 - G_3 G_8^{-1} G_7)^{-1} (G_5 - G_3 G_8^{-1} G_{10}) \quad (\text{A.3})$$

$$D = -G_8^{-1} (G_6 + G_7 A) \quad (\text{A.4})$$

$$E = -G_8^{-1} (G_9 + G_7 B) \quad (\text{A.5})$$

$$F = -G_8^{-1} (G_{10} + G_7 C) \quad (\text{A.6})$$

Estas expresiones permiten también justificar la condición de invertibilidad con respecto a G_8 y $G_2 - G_3 G_8^{-1} G_7$.

Apéndice 2

Las condiciones para la compatibilidad y determinación del sistema de restricciones (35)

Para obtener un único conjunto de valores de las variables de estado al inicio de cada etapa, el sistema de restricciones (35), formado por (30)-(34), debe ser compatible y determinado. A continuación se explicitarán las condiciones necesarias y suficientes para ello.

En primer lugar puede mostrarse, al hacer uso repetido de (32)-(33), que $x(t_i)$, para $i = 1, 2, \dots, N - 1$, puede escribirse en función de $x(t_0)$; en particular tenemos

$$x(t_{N-1}) = S e^{\Lambda(t_{N-1} - t_0)} S^{-1} x(t_0) + v_{N-1}, \tag{B.1}$$

donde v_{N-1} no depende de ninguna de las $x(t_i)$.

Al hacer uso de esta relación, el conjunto de restricciones se reduce al sistema de n ecuaciones en las n incógnitas en $x(t_0)$,¹³ formado por (30), (31) y

$$\begin{aligned} \Pi_p e^{\Lambda(t_{N-1} - t_0)} S^{-1} x(t_0) + \Pi_p S^{-1} [v_{N-1} - U_0^{(N)} \\ - U_1^{(N)} t_{N-1} - U_2^{(N)} t_{N-1}^2] = 0 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Particionando, sin pérdida de generalidad, la matriz $\tilde{\Lambda}$ como

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ con } \text{Re}(\Lambda_1) < 0 < \text{Re}(\Lambda_2), \tag{B.3}$$

y tomando en cuenta (20), se tiene

$$\Pi_p = [O_p \quad I_p], \tag{B.4}$$

¹³ En lugar de resolver el sistema (35) de dimensión $nN \times nN$, podría resolverse este sistema de dimensión $n \times n$. De esta manera se reduciría notablemente el número de operaciones cuando N es grande. Sin embargo, este procedimiento podría estar incrementando los errores numéricos.

donde O_p = matriz cero de dimensión $n_2 \times (n_1' + n_1'')$ e I_p = matriz identidad de dimensión n_2 , por lo que

$$\Pi_p e^{\Lambda(t_{N-1} - t_0)} = \begin{pmatrix} O_p & e^{\Lambda_2(t_{N-1} - t_0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Particionando ahora la matriz S^{-1} conforme a $x(t_0)$,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{13} \\ \overline{S}_{21} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{23} \\ \overline{S}_{31} & \overline{S}_{32} & \overline{S}_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

la expresión (B.2) se convierte en

$$\begin{aligned} & \overline{S}_{31}x_1'(t_0) + \overline{S}_{32}x_1''(t_0) + \overline{S}_{33}x_2(t_0) \\ & = -e^{-\Lambda_2(t_{N-1} - t_0)}\Pi_p S^{-1}(v_{N-1} - U_0^{(N)} - U_1^{(N)}t_{N-1} - U_2^{(N)}t_{N-1}^2) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Al hacer uso de (30), el conjunto de restricciones se reduce finalmente a un sistema de $n_1'' + n_2$ ecuaciones en $x_1''(t_0)$ y $x_2(t_0)$:

$$F_1x_1''(t_0) + F_3x_2(t_0) = f - F_2x_1'(t_0) \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} & \overline{S}_{32}x_1''(t_0) + \overline{S}_{33}x_2(t_0) = -\overline{S}_{31}x_1'(t_0) \\ & - e^{-\Lambda_2(t_{N-1} - t_0)}\Pi_p S^{-1}(v_{N-1} - U_0^{(N)} - U_1^{(N)}t_{N-1} - U_2^{(N)}t_{N-1}^2) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

A esta altura es conveniente distinguir los dos casos, contenidos también en Austin y Buitier (1982). En el primer caso, en donde no hay variables de estado no predeterminadas, orientadas al pasado, tenemos $n_1'' = 0$ y F_1, F_2, F_3, f y \overline{S}_{32} son vacías. En este caso la condición para que exista una única solución para $x_2(t_0)$ es que \overline{S}_{33} sea invertible.

En el caso general, con variables de estado no predeterminadas, orientadas al pasado, tenemos $n_1'' > 0$ y, restringiéndonos al caso en que

F_1 es invertible, la condición adicional para obtener una solución única para $x_1''(t_0)$ y $x_2(t_0)$ es que $\overline{S}_{33} - \overline{S}_{32} F^{-1} F_3$ sea invertible.

Apéndice 3

La forma estructural estándar del modelo ilustrativo

Al cabo de algunas manipulaciones, indicadas en el texto, el modelo de la sección 5, compuesto por las ecuaciones (36)-(45), puede ser escrito en la siguiente forma estructural:

$$\begin{pmatrix} \frac{f_0}{R_0^*} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi_2}{R_0^*} & 0 \\ \Phi_3 & \Phi_2 \dot{d}_0 & 0 & -\Phi_1 & (\Phi_1 - \Phi_2 \dot{d}_0) & 0 \\ -\dot{r}_0^* \Psi & 0 & \dot{r}_0^* \Psi & 0 & \dot{r}_0^* \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^* \\ d-w \\ f-w \\ g \\ e-w \\ v-w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & -\Phi_2 & 0 \\ -\Psi & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-\alpha\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}^* \\ \dot{d}-\dot{w} \\ \dot{f}-\dot{w} \\ \dot{g} \\ \dot{e}-\dot{w} \\ \dot{v}-\dot{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\pi_3}{R^{*0}} & -\frac{\pi_1}{R^{*0}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \delta\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\pi_1}{R^{*0}} \\ 0 & 0 & \Phi_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -(1-\theta) \\ 0 & 0 & 1-\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \eta \\ \dot{e} \end{pmatrix} = 0 \quad (C.1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & -\omega & -(1-\omega) & 0 & (1-\alpha) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^* \\ d-w \\ f-w \\ g \\ e-w \\ v-w \end{pmatrix} + \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}^* \\ \dot{d}-\dot{w} \\ \dot{f}-\dot{w} \\ \dot{g} \\ \dot{e}-\dot{w} \\ \dot{v}-\dot{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\eta} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.2})$$