Política monetaria óptima en un modelo con intermediación financiera

Esther Fernández Casillas

Departamento de Economía Cuantitativa
(Universidad Complutense de Madrid)[*,†]

8 de abril de 2002

Abstract

En este trabajo se analiza cuál es la política monetaria óptima bajo una regla de gasto público no habitual en la literatura: el gasto representa un porcentaje constante en la producción. En este caso, dado que el ritmo de crecimiento de la oferta monetaria y el coeficiente legal de caja influyen sobre el nivel de producción, el nivel de gasto dependerá del valor que tomen dichos instrumentos. Se muestra que la validez de la regla de Friedman depende del valor del ratio consumo público/output. Asimismo, cuando es óptimo utilizar el coeficiente legal de caja, éste resulta ser un instrumento equivalente al crecimiento monetario.

Código JEL: E4

Palabras clave: Impuesto inflacionario óptimo, coeficiente legal de caja

[*]Agradezco el apoyo y los valiosos comentarios y sugerencias de Alfonso Novales, así como el apoyo financiero del proyecto del Ministerio de Educación PB98-0831. Cualquier error es de mi exclusiva responsabilidad.

[†]Dirección para comentarios: Departamento de Economía Cuantitativa. Facultad de CC Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. Campus de Somosaguas. 28223 Madrid. Tlfn: 91 394 23 55; Fax: 91 394 26 13. E-mail: eccua19@sis.ucm.es

1 Introducción

Los trabajos pioneros en el estudio del impuesto inflacionario óptimo han sido Phelps (1973), Kimbrough (1986), y Lucas y Stokey (1983). Todos ellos supusieron que el gobierno realiza un determinado nivel exógeno de gasto público, que puede financiar mediante el impuesto inflacionario junto con algún otro impuesto distorsionante, como puede ser un impuesto que grava el consumo o las rentas del trabajo. El gobierno elige el mecanismo de financiación que maximiza la utilidad del agente representativo. Los trabajos citados muestran que la tasa de inflación óptima depende de la modelización de la demanda de dinero (ya sea incluyendo los saldos reales en la función de utilidad, suponiendo que los saldos reales reducen los costes de transacción o a través de una restricción de cash-in-advance). Posteriormente, Calvo y Végh (1993) y Chari, Christiano y Kehoe (1996) señalan otros dos elementos que influyen en el valor óptimo del impuesto inflacionario: i) el instrumento de financiación alternativo a dicho impuesto y, ii) las especificaciones de la función de utilidad y de la función de costes de transacción, cuando ésta existe. Las funciones de utilidad y costes de transacción habitualmente utilizadas en la literatura (para responder a otras cuestiones) cumplen las condiciones que garantizan que la regla de Friedman es válida. Según esta regla, enunciada en Friedman (1969), la tasa óptima de crecimiento monetario es aquella que da lugar a que el dinero no sea dominado en rentabilidad por activos alternativos.

También ha sido frecuente el análisis del nivel óptimo del coeficiente legal de caja, considerado éste como un instrumento de financiación del gobierno en la medida en que expande los ingresos por señoreaje (Romer (1985), Brock (1989), Freeman (1987), entre otros). Estos trabajos concluyen que si el gobierno desea financiar un nivel exógeno de gasto y el coeficiente legal de caja no cumple ninguna otra función en la economía (es decir, no existe creación de dinero por parte de los intermediarios financieros ni tampoco hay riesgo de que éstos quiebren), el nivel óptimo del coeficiente legal de caja es cero.

Como se ha mencionado, el análisis de la política monetaria óptima cuando ambos instrumentos (tasa de crecimiento de la oferta monetaria y coeficiente legal de caja) son utilizados como instrumentos de financiación del gasto público se ha efectuado siempre bajo el supuesto de que las necesidades públicas de financiación están dadas. Sin embargo, no parece que los gobiernos de las economías reales tengan objetivos a largo plazo sobre su nivel de gasto, sino más bien sobre el porcentaje que éste representa en la producción. Además, los gobiernos suelen adoptar objetivos a largo plazo en términos relativos en lugar de hacerlo en términos absolutos. Sirva como ejemplo los requisitos de deuda pública y déficit que fijaron los países europeos para poder adoptar el euro, que consistieron en un umbral máximo para los ratios deuda/output y déficit/output. Es más probable alcanzar estos requisitos si el gobierno diseña su política económica y fiscal teniendo un objetivo en mente para el ratio consumo público/output, en lugar de un objetivo para el nivel del consumo público dado que, de esta forma, el nivel del consumo público depende de las características específicas de la economía.

En este trabajo se caracterizan la tasa de crecimiento monetario y el coeficiente legal de caja óptimos en un modelo en el que el gobierno fija el ratio consumo público/output. Por tanto, el nivel de gasto es endógeno, y dependerá del valor concreto de los dos intrumentos monetarios, puesto que ambos influyen en las decisiones de los agentes económicos y, en consecuencia, en el nivel de actividad. En cuanto a la naturaleza del gasto público, se supone que el gobierno adquiere parte del bien producido en la economía, que posteriormente tira al mar. Por tanto, el gasto público no es un argumento de la función de producción ni de la función de utilidad. Además, este gasto se financia mediante ingresos por señoreaje, cuya composición dependerá del ritmo de crecimiento monetario y del nivel del coeficiente legal de caja, junto con un impuesto de suma fija. No se permite que el gobierno se endeude, siendo el impuesto de suma fija el que garantiza que el presupuesto esté balanceado en cada período.

El análisis se lleva a cabo en una versión del modelo descrito en Lucas (1990). Es un modelo dinámico de equilibrio general que se caracteriza porque explicita los fundamentos de la economía (preferencias, dotaciones iniciales y tecnología) pero también las restricciones existentes sobre las transacciones, que dan lugar a las diferentes necesidades de liquidez por parte de los agentes económicos. Se supone que existe una familia representativa cuyos distintos miembros (trabajador, empresario, banquero, consumidor) se separan al principio del período, ejecutan las funciones que les son propias, para reunirse de nuevo al final del período y agregar sus carteras. En el modelo la única actividad del intermediario financiero es canalizar fondos desde el consumidor hacia la empresa, quien los precisa para pagar los salarios.

En este modelo, si se supusiera que el gobierno fija el nivel de gasto, se obtendría el resultado estándar en la literatura: es óptimo que el gobierno sólo utilice el impuesto de suma fija. Además, es válida la regla de Friedman, que en nuestro modelo implica deflación. Respecto al coeficiente legal de caja, éste puede tomar cualquier valor, puesto que no introduce ninguna distorsión en las decisiones de los agentes cuando la oferta monetaria decrece a la tasa asociada con la regla de Friedman.

Sin embargo, en este trabajo mostramos que cuando el consumo público representa un porcentaje constante en la producción, existe un determinado tamaño del sector público a partir del cual es óptimo, a largo plazo, utilizar activamente la política monetaria. El valor crítico del ratio gasto público/output es específico de cada economía, pues depende de la elasticidad de la producción ante cambios en el stock de capital, la tasa de depreciación y el parámetro de descuento.

En la sección 2 se describe el modelo. En la sección 3 se caracteriza la política monetaria óptima de largo plazo. En la sección 4 se discuten las diferencias entre el mecanismo de propagación de la política monetaria cuando el gobierno fija el nivel de gasto respecto a cuando lo que fija es el ratio gasto/output. Por último, la sección 5 contiene las conclusiones del trabajo.

2 Modelo

Existe una única familia representativa cuyos miembros demandan dinero porque se enfrentan a restricciones de *cash-in-advance*. Esto motiva que cada período esté dividido en dos sesiones. La secuencia de apertura y cierre de los diferentes mercados, así como las transacciones que los agentes llevan a cabo en cada uno de ellos son las siguientes: al principio del período t, el gobierno decide la cuantía del impuesto de suma fija, el ritmo de expansión de la oferta monetaria, el coeficiente legal de caja y el volumen de gasto público. El consumidor posee todo el dinero existente en la economía en ese momento. En la primera sesión abren los mercados financieros. El consumidor divide su dinero en tres partes: la primera la mantiene para comprar el bien cuando abra el mercado, la segunda la utiliza para demandar depósitos que emite el intermediario financiero, y la tercera parte la necesita para pagar el impuesto de suma fija. La empresa demanda préstamos para pagar los salarios. El intermediario financiero emite depósitos, concede el préstamo a la empresa y mantiene efectivo para satisfacer el coeficiente de caja. El gobierno inyecta liquidez en el sistema.

Cuando los mercados financieros han cerrado, abren los mercados reales. En primer lugar, lo hace el mercado de trabajo. El consumidor ofrece trabajo. La empresa demanda trabajo, produce el único bien de la economía y remunera al trabajador. Posteriormente, abre el mercado de bien. El consumidor demanda el bien de consumo. La empresa vende el bien producido y demanda el bien de inversión. El gobierno adquiere el consumo público.

Por último, al final del período *t,* la empresa amortiza el préstamo y paga los intereses correspondientes. El intermediario financiero entrega al consumidor los intereses y el principal de los depósitos. El consumidor es propietario tanto de la empresa como del intermediario financiero, por lo que recibe los dividendos que éstos distribuyen.

2.1 Consumidor

En el período t, el consumidor adquiere C_t unidades del único bien de la economía. Tiene una dotación de tiempo que normalizamos a la unidad. Destina parte de su tiempo a trabajar (n_t) y el resto lo dedica a ocio $(h_t = 1 - n_t)$. La función de utilidad es la habitual, dependiendo del consumo y del ocio de la forma:

$$\begin{aligned} U(C_t,h_t) &= \frac{\left(C_t^{(1-\gamma)} h_t^{\gamma}\right)^{\psi} - 1}{\psi} \qquad \text{si} \qquad \psi \neq 0 \\ &= (1-\gamma)\ln C_t + \gamma \ln h_t \qquad \text{si} \qquad \psi = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

con $\psi < 1$. Por tanto, se trata de un individuo averso al riesgo.

El consumidor necesita efectivo para adquirir el bien de consumo, cuyo precio unitario es P_t. La restricción de *cash-in-advance* a la que se enfrenta es:

$$P_t C_t \leqslant M_t^c + W_t n_t \tag{2}$$

siendo M_t^c las unidades monetarias que demanda el consumidor cuando abre el mercado de dinero en el período t y W_t el salario nominal en t.

Al comienzo del período t, el consumidor posee todo el dinero existente en la economía en ese momento (M_t), que procede de las actividades que realizó en el período anterior. En concreto,

$$M_t = V_{t-1}^e + V_{t-1}^i + R_{t-1}^d D_{t-1} + \left(M_{t-1}^c + W_{t-1} n_{t-1} - P_{t-1} C_{t-1}\right) \tag{3}$$

donde V_{t-1}^e y V_{t-1}^i son los dividendos que repartieron la empresa y el intermediario financiero, respectivamente, en el período $t-1$. D_{t-1}denota los depósitos realizados por el consumidor en el intermediario financiero en el período $t-1$. Este activo financiero vence al final del período $t-1$, siendo su tipo de interés nominal bruto R_{t-1}^d. El paréntesis recoge las unidades monetarias que el consumidor reservó en el período $t-1$ para adquirir el bien de consumo pero que no utilizó.

El consumidor reserva una parte de M_t para adquirir el bien de consumo, otra parte para pagar el impuesto de cuantía fija TR_t y ahorra el resto en forma de depósitos. Es decir,

$$M_t = M_t^c + D_t + TR_t \tag{4}$$

Por tanto, al comienzo de cada período t, el consumidor resuelve el siguiente problema determinista de optimización:

$$\begin{aligned}
& \underset{\{C_t,n_t,D_t,M_t^c\}}{Max} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_{t,}1-n_t) \\
\text{sujeto a} \quad & : \\
P_t C_t & \leqslant M_t^c + W_t n_t \\
M_t^c + D_t + TR_t & = V_{t-1}^e + V_{t-1}^i + R_{t-1}^d D_{t-1} + \left(M_{t-1}^c + W_{t-1} n_{t-1} - P_{t-1} C_{t-1}\right) \\
D_t & \geqslant 0, \qquad C_t \geqslant 0, \qquad M_t^c \geqslant 0, \qquad n_t \geqslant 0
\end{aligned}$$

dada la condición inicial $M_{0.}$ El consumidor es precioaceptante. La segunda restricción se obtiene al combinar las ecuaciones (3) y (4).

Las condiciones de primer orden del problema de Khün-Tucker, una vez eliminados los multiplicadores de Lagrange, son:

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{U_{1-n,t}}{U_{C,t}} \tag{5}$$

$$R_t^d = \frac{U_{C,t}}{\beta U_{C,t+1}} (1 + \pi_{t+1}) \tag{6}$$

junto a las dos restricciones del problema de optimización. $U_{j,t}$, $j = C, 1-n$ son las utilidades marginales del consumo y ocio, respectivamente. La tasa de inflación en el período $t+1$ es $1 + \pi_{t+1} = P_{t+1}/P_t$.

Las ecuaciones (5) y (6) son las funciones habituales que definen: i) la oferta de trabajo del consumidor y ii) la decisión de ahorro, respectivamente.

Si $R_t^d > 1$ los depósitos dominan en rentabilidad al efectivo, por lo que la restricción de cash-in-advance (2) se verifica con igualdad. Si $R_t^d = 1$ tanto el dinero como los depósitos tienen la misma rentabilidad, por lo que el consumidor es indiferente entre ellos. A diferencia del caso anterior, la restricción (2) no se satura. Por último, si $R_t^d < 1$ el consumidor no demandará nunca depósitos ya que es un activo dominado en rentabilidad por el dinero. Como se verá, esto da lugar a que el intermediario financiero no pueda conceder préstamos a la empresa, provocando que ésta no produzca unidades de bien. Por tanto, esta posibilidad está excluida del análisis.

2.2 Productor

Al principio del período t, la empresa dispone de las K_t unidades de capital productivo existentes en la economía en ese momento. Utiliza éstas, junto con el trabajo n_t, para producir el único bien de la economía $Y_{t.}$ Se endeuda para remunerar al factor trabajo. L_t es la cuantía del empréstito en el período t y R_t^l es la rentabilidad nominal que paga por dichos fondos al final del período t. Por tanto,

$$L_t = W_t n_t \tag{7}$$

La función $F(.)$ denota la función de producción del bien:

$$F(K_t, n_t) = Y_t = K_t^{\alpha} (n_t)^{1-\alpha} \tag{8}$$

El problema determinista que resuelve la empresa es:

$$\underset{\{K_{t+1}, n_t\}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^{t+1} U_{C,t+1}}{P_{t+1}} \left[P_t F(K_t, n_t) - R_t^l W_t n_t - P_t (K_{t+1} - (1-\delta) K_t) \right]$$

dado K_0. La empresa, que es propiedad del consumidor, reparte dividendos cuando el mercado del bien ya ha cerrado. Por tanto, el consumidor tiene que esperar al período siguiente para poder gastar en la compra del bien de consumo dicho flujo de renta. Por este motivo, los beneficios de la empresa en el período t se descuentan por $\beta^{t+1} \frac{U_{c,t+1}}{p_{t+1}}$.[1].

La solución al problema está definida por las ecuaciones:

$$\frac{W_t}{P_t} R_t^l = F_{n,t} \tag{9}$$

$$\frac{\beta U_{C,t+2}}{(1+\pi_{t+2})} \left[F_{K,t+1} + (1-\delta) \right] = \frac{U_{C,t+1}}{(1+\pi_{t+1})} \tag{10}$$

donde $F_{n,t}$ y $F_{K,t}$ denotan la productividad marginal en el período t del trabajo y del capital, respectivamente.

Las ecuaciones (9) y (10) recogen las funciones que definen la demanda de trabajo y de capital productivo, respectivamente. La ecuación (9) indica que cuanto mayor es la rentabilidad nominal del préstamo, mayor es el coste total que soporta la empresa por alquilar una unidad de trabajo y, por tanto, menor es la cantidad de trabajo que contrata. La ecuación (10) es la regla de decisión habitual que sigue la empresa a la hora de elegir el stock de capital deseado para el siguiente período.

2.3 Intermediario financiero

El intermediario financiero es una empresa competitiva cuya única actividad consiste en tomar prestado D_t del consumidor que tiene un exceso de fondos y prestar L_t a la empresa que tiene una carencia de los mismos. No incurre en costes por llevar a cabo la intermediación de fondos. Por último, dispone de la misma información que la empresa en relación con la viabilidad de los proyectos de inversión de ésta y del estado de la tecnología. Este último supuesto garantiza que no existen imperfecciones en el mercado de capital que pudieran generar racionamiento de crédito.

En el período t, el intermediario financiero debe satisfacer un requisito legal: está obligado a mantener M_t^i activos líquidos que, como mínimo, han de ser una proporción ϕ de sus

[1] Esta es una forma habitual de descontar los beneficios de la empresa (Christiano (1991) y Christiano y Eichenbaum (1995), entre otros). Además, es la forma adecuada de hacerlo para que la solución descentralizada (que es la presentada en estas páginas) coincida con la solución centralizada del modelo. La solución centralizada o de planificación es aquella en que se plantea un único problema de optimización para la familia representativa en su conjunto; Lucas (1990) y Fuerst (1992), entre otros, son ejemplos de esta segunda forma de plantear el problema.

depósitos. La restricción de caja es: $D_t = L_t + M_t^i$. Los beneficios que obtiene en el período t son: $V_t^i = R_t^l L_t + M_t^i - R_t^d D_t$.

Si $R_t^l > 1$ el efectivo es un activo dominado en rentabilidad por los préstamos; por tanto, la restricción legal se verifica con igualdad: $M_t^i = \phi D_t$. Combinando esta expresión con la restricción de caja se obtiene que $L_t = (1-\phi)D_t$, lo que permite expresar el valor de los beneficios contemporáneos como: $V_t^i = D_t \left(R_t^l (1-\phi) + \phi - R_t^d \right)$. De la condición de beneficios cero se deduce:[2]

$$R_t^d = \phi + (1-\phi) R_t^l \qquad \Rightarrow R_t^d - 1 = (1-\phi)\left(R_t^l - 1\right) \tag{11}$$

que indica que, en equilibrio, el tipo de interés nominal de los depósitos es una media ponderada de la rentabilidad de los activos que componen la cartera del intermediario financiero. Cuando $R_t^l > 1$ se verifica que $R_t^d > 1$.

Si $R_t^l = 1$ el intermediario financiero es indiferente entre los dos activos (dinero y préstamos); en este caso concreto, los dividendos serían: $V_t^i = L_t + M_t^i - R_t^d D_t = (1 - R_t^d) D_t$ una vez sustituida la restricción de caja. La condición de beneficios cero implica: $R_t^d = 1$.

Si $R_t^l < 1$ el intermediario no presta a la empresa ya que recibe un tipo de interés mayor por los activos líquidos. Dado que la empresa no recibe ningún préstamo, no contrata trabajo y, por tanto, no produce. En consecuencia, esta posibilidad queda excluida del análisis.

2.4 Gobierno

En el período t, el gobierno realiza un gasto que no es un argumento ni de la función de utilidad ni de la función de producción. Adquiere G_t unidades de bien que tira al mar con efectivo (M_t^g). Consigue una parte de dichos fondos inyectando liquidez en la economía $(M_{t+1} - M_t)$; el resto los obtiene recaudando un impuesto de cuantía fija TR_t :

$$M_t^g = (M_{t+1} - M_t) + TR_t \tag{12}$$

$$M_t^g = P_t G_t \tag{13}$$

donde el gasto público está fijado como un porcentaje en la producción: $G_t = \tau Y_t$. La composición de los ingresos por señoreaje $\left(\frac{M_{t+1} - M_t}{P_t}\right)$ depende del valor del coeficiente legal de caja y del ritmo de crecimiento de la oferta monetaria. Ambos se suponen constantes e iguales a ϕ, x respectivamente.

Suponemos que el gobierno elige exógenamente el porcentaje que el gasto representa en la producción, la tasa de crecimiento monetario y el coeficiente legal de caja, de modo que la cuantía del impuesto de suma fija es aquella que garantiza que se verifica su restricción presupuestaria. Dado que $G_t = \tau Y_t$, el nivel de gasto se determina endógenamente, y depende de la política monetaria puesta en práctica [es decir, de la combinación (ϕ, x)] de igual forma que lo hace la producción.

[2]Nótese que $\frac{\partial V_t^i}{\partial D_t} = R_t^l(1-\phi) + \phi - R_t^d$. Si el intermediario financiero desea maximizar sus beneficios y $R_t^l(1-\phi) + \phi > R_t^d$, su demanda de depósitos no está acotada. Por el contrario, si $R_t^l(1-\phi) + \phi < R_t^d$, el intermediario financiero no demandaría depósitos, ni realizaría préstamos, por lo que la empresa no produciría.

2.5 Equilibrio competitivo

Un equilibrio competitivo es el conjunto de funciones $\{C_{t,}n_t, D_t, K_{t+1}, L_t, M_t^i, M_t^c\}_0^\infty$ que, dadas un conjunto de condiciones iniciales: $M_0 > 0, K_0 > 0$, verifican:

1. dados $P_{t,}R_t^d, TR_t, W_t, V_t^e, V_t^i$ y la condición inicial $M_{0,}$ entonces el vector de funciones $\{C_{t,}n_t, D_t, M_t^c\}$ resuelve el problema de maximización de la utilidad del consumidor,

2. dados $P_{t,}R_t^l, W_t$ y la condición inicial K_0, entonces las funciones $\{n_t, K_{t+1}, L_t\}$ resuelven el problema de maximización de la empresa,

3. dados R_t^d y R_t^l entonces las funciones $\{D_t, L_t, M_t^i\}$ resuelven el problema del intermediario financiero,

4. el mercado de dinero está en equilibrio: $M_{t+1} = M_t^c + M_t^i + L_t + M_t^g$, para todo t,

5. la restricción presupuestaria del gobierno.

Por tanto, las ecuaciones que caracterizan el equilibrio general dinámico de esta economía son: (5), (6), (7), (9)- (13), junto con: (i) las restricciones de cada uno de los problemas de optimización propuestos y (ii) las condiciones de equilibrio de los mercados de trabajo, préstamos, depósitos y dinero. Es fácil probar que estas condiciones, conjuntamente, garantizan que el mercado de bienes está en equilibrio:

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t + G_t. \tag{14}$$

3 Política monetaria óptima

La asignación de estado estacionario se define como aquel equilibrio en el que los valores de las variables reales y de las nominales (estas últimas una vez normalizadas por la cantidad de dinero existente al principio del período) se mantienen constantes a lo largo del tiempo. Los valores de estado estacionario del consumo, empleo, producción y stock de capital de estado estacionario se ofrecen en el apéndice.

Se define la política monetaria óptima como la combinación de una tasa de crecimiento de la oferta monetaria y un nivel del coeficiente legal de caja (x^*, ϕ^*) que maximizan el nivel de utilidad de estado estacionario, sujeto a que los tipos de interés nominales brutos de los préstamos y de los depósitos no sean inferiores a la unidad. Dado que en la sección 2.3 se discutió que $R_t^l > 1$ $\left(R_t^l = 1\right)$ implica que $R_t^d > 1$ $\left(R_t^d = 1\right)$, $\forall t$, el problema a resolver es:

$$(x^*, \phi^*) = \arg\max\{U(c^{ss}, 1 - n^{ss}) \text{ sujeto a: } (R^l)^{ss} \geq 1.$$

Los valores de estado estacionario de las distintas variables se denotan mediante el superíndice 'ss '. Los valores de estado estacionario de todas las variables, *bajo la política monetaria óptima*, se denotan mediante un asterisco.

Nótese que, por definición, la asignación resultante bajo la política monetaria óptima es un equilibrio. Además, la política monetaria óptima satisface siempre la restricción presupuestaria del gobierno dado que ésta es una de las ecuaciones que caracterizan el equilibrio en la economía.

La proposición 1 recoge que existe un umbral del ratio gasto público/output (τ^{crit}) por debajo del cual el ritmo óptimo de crecimiento monetario es $x^* = \beta - 1$. Las rentabilidades nominales de los préstamos y los depósitos bajo esta política coinciden con la rentabilidad nominal del dinero $\left[(R^l)^* = (R^d)^* = 1\right]$, para cualquier valor del coeficiente legal de caja. En consecuencia, si $\tau \in (0, \tau^{crit}]$ la regla de Friedman es válida. Por el contrario, si el ratio gasto público/output de la economía excede dicho umbral, entonces existen infinitas combinaciones óptimas (x^*, ϕ^*). Todas estas combinaciones de política generan la misma rentabilidad de los préstamos, pero distinta rentabilidad para los depósitos. Dado que ambos tipos de interés son mayores que la unidad, la regla de Friedman no es válida cuando $\tau \in (\tau^{crit}, \tau^{\max})$. $\tau^{\max}$ es el ratio gasto público/output para el cual el consumo privado es nulo. Valores mayores de este ratio dan lugar a consumos privados negativos, por lo que son excluidos del análisis. En concreto, $\tau^{\max} = 1 - \delta A^{1-\alpha}$, con $A = \left[\frac{\alpha}{\beta^{-1} - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Es trivial demostrar que $\tau^{\max} < 1$.

Proposición 1: Sea $\tau^{crit} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\delta)}$. Si $\tau \leq \tau^{crit}$ se tiene $x^* = \beta - 1$ y $(R^l)^* = 1$, independientemente del valor del coeficiente legal de caja. Si $\tau \in (\tau^{crit}, \tau^{\max})$ existen infinitas combinaciones (x^*, ϕ^*), tales que para cada $\phi^* \in (0,1)$, se verifica $x^* = \beta\left[(R^l)^* - \phi^*\left((R^l)^* - 1\right)\right] - 1$, donde $(R^l)^* = \frac{1-\alpha}{1-\tau-\delta A^{1-\alpha}} > 1$.
Demostración: Ver apéndice.■

El corolario 1 recoge que el umbral τ^{crit} a partir del cual la regla de Friedman no es óptima es específico de cada economía, cumpliendo que es tanto más bajo cuanto menor sea la participación de las rentas del capital sobre el total, mayor la tasa de depreciación del capital y mayor la preferencia relativa por el consumo futuro en relación con el consumo presente.
Corolario 1: $\frac{\partial \tau^{crit}}{\partial \alpha} > 0$, $\frac{\partial \tau^{crit}}{\partial \delta} < 0$ y $\frac{\partial \tau^{crit}}{\partial \beta} < 0$.■

A continuación mostramos que, bajo la política óptima, el comportamiento del individuo es distinto cuando la regla de Friedman es válida respecto a cuando no lo es.

Proposición 2: Cuando la regla de Friedman no es válida, bajo la política óptima, el agente se gasta toda su renta salarial en el bien de consumo, lo que implica que no participa en el mercado de dinero. Por el contrario, en los casos en los que la regla de Friedman es válida el consumo privado excede el valor de las rentas salariales, siendo óptimo que el consumidor participe activamente en el mercado de dinero.
Demostración: Ver apéndice.■

Por último, el siguiente corolario muestra que, cuando la regla de Friedman no es válida, cuanto mayor es el ratio gasto público/output, mayor es el tipo de interés nominal de los préstamos bajo la política óptima. Esto es compatible con: a) que sea únicamente mayor el ritmo óptimo de crecimiento monetario, manteniéndose constante o incluso disminuyendo el coeficiente legal de caja, b) que sea únicamente mayor el coeficiente legal de caja, con una tasa de crecimiento de la oferta monetaria constante o inferior, o c) que sean mayores ambos instrumentos. Esta multitud de posibilidades se debe a que para cada $\tau \in (\tau^{crit}, \tau^{\max})$ existen infinitas combinaciones (x^*, ϕ^*) óptimas.

Corolario 2: Si $\tau^{crit} < \tau < \tau^{\max}$, $\frac{\partial (R^l)^*}{\partial \tau} = \frac{1-\alpha}{(1-\tau-\delta A^{1-\alpha})^2} > 0$.■

Supongamos inicialmente que $\tau^{crit} < \tau < \tau^{\max}$, por lo que según la proposición 1 la regla de Friedman no es válida y, según la proposición 2, bajo la política monetaria óptima el gasto en consumo es igual a la renta salarial. A partir de esta situación, el gobierno aumenta el porcentaje que el consumo público representa en la producción. Esto estimula la producción (véase ecuación (17) en el apéndice y téngase en cuenta que, puesto que $\tau < \tau^{\max}$ se verifica que $1-\tau-\delta A^{1-\alpha} > 0$) y dado que el nivel de gasto público es ahora un porcentaje del output mayor que antes, también aumenta el gasto público. Se produce más porque se utiliza más cantidad de ambos factores productivos (como se puede observar en las ecuaciones (15) y (18)). Sin embargo, el salario real no se ve afectado por el incremento en τ. Por último, se observa que el nivel de consumo privado disminuye (véase ecuación (16)). Por tanto, el incremento en τ da lugar a que el gasto en consumo sea inferior a las rentas del trabajo. La política monetaria existente deja de ser óptima pues según la proposición 2, el bienestar del agente es máximo cuando ambos coinciden. El corolario 2 recoge que el gobierno debe aumentar la tasa de crecimiento monetario, el coeficiente legal de caja, o ambos instrumentos, para que aumente el tipo de interés de los préstamos. Esto provoca un desplazamiento hacia la izquierda de la curva de demanda de trabajo y, por tanto, una reducción en el valor de las rentas del trabajo debida tanto a una caída en el empleo (véase (15)) como en el salario real (véase (27)). También provoca una ligera reducción del consumo privado (véase ecuación (16)). Sin embargo, éste disminuye a menor ritmo que la masa salarial dado que, bajo la nueva política óptima, ambos vuelven a coincidir.

4 ¿Por qué difieren los resultados respecto a cuando el gobierno tiene un objetivo de nivel de gasto?

Hasta ahora se ha caracterizado cuál es la política monetaria óptima bajo el supuesto de que el gobierno fija el porcentaje que el consumo público representa en la producción. A continuación se discute la diferencia entre el mecanismo de propagación de la política monetaria cuando el gobierno fija el nivel de gasto respecto a cuando lo que fija es el ratio gasto/output. En el primer caso la regla de Friedman es siempre óptima mientras que no ocurre lo mismo en el segundo caso.

La proposición 3 recoge los efectos que provoca un aumento del tipo de interés de los préstamos (que puede estar provocado tanto por un aumento de la tasa de crecimiento monetario como del coeficiente legal de caja) sobre los niveles de producción, consumo, empleo y utilidad, cuando el gobierno fija el nivel de gasto. El subíndice 'g' denota la asignación de equilibrio bajo esta nueva regla de gasto.

Proposición 3: $\frac{\partial y_g^{ss}}{\partial \left(R^l\right)_g^{ss}} < 0, \; \frac{\partial c_g^{ss}}{\partial \left(R^l\right)_g^{ss}} < 0, \; \frac{\partial n_g^{ss}}{\partial \left(R^l\right)_g^{ss}} < 0, \; \frac{\partial U_g^{ss}}{\partial \left(R^l\right)_g^{ss}} < 0$.

Demostración: Ver apéndice.■

El incremento en el ritmo de expansión monetaria induce un incremento en los tipos de interés nominales de los depósitos y de los préstamos, pues $\left(R^l\right)_g^{ss} = \frac{(1+x)\beta^{-1}-\phi}{1-\phi}$. El aumento de este último tipo de interés encarece el factor trabajo, por lo que el nivel de empleo disminuye. También lo hacen la producción y el consumo. Dado que incrementos sucesivos en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria provocan siempre caídas en el nivel de utilidad, el valor óptimo de x es su menor nivel factible: $\beta - 1$ que implica que los distintos tipos de interés nominales $(\left(R^d\right)^*_g, \left(R^l\right)^*_g)$ sean iguales a la unidad, independientemente del valor del coeficidente legal de caja, por lo que la regla de Friedman es válida.

La proposición 4 recoge que una caída en el nivel de gasto público provoca una reducción en el nivel de empleo y en la producción de estado estacionario y un aumento en el consumo privado y en el nivel de utilidad.

Proposición 4: $\frac{\partial y_g^{ss}}{\partial \bar{g}} > 0$ $\frac{\partial c_g^{ss}}{\partial \bar{g}} < 0$, $\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial \bar{g}} > 0$, $\frac{\partial U_g^{ss}}{\partial \bar{g}} < 0$.
Demostración: Ver apéndice.■

Cuando el gobierno fija el porcentaje que el consumo público representa en la producción, en lugar de fijar el nivel de gasto, y aumenta el ritmo de expansión de la oferta monetaria, se producen conjuntamente los efectos recogidos en las proposiciones 3 y 4. Por una parte, el aumento en la tasa de crecimiento monetario encarece el factor trabajo, lo que provoca una reducción en los niveles de empleo y producción. Además, el nivel de gasto disminuye debido a que lo hizo la producción, y el ratio gasto/output es fijo. Según la proposición 4 la caída en el nivel de gasto contribuye a aumentar el nivel de utilidad. Si la reducción del gasto no es suficientemente grande como para que el aumento de utilidad que genera compense la caída en el nivel de utilidad que se produce cuando el nivel de gasto es fijo, entonces la regla de Friedman será válida. La proposición 1 mostró que esto sucede sólo si el ratio gasto/output es inferior al umbral τ^{crit}.

5 Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado que cuando el gobierno fija el porcentaje que el gasto público representa en la producción, existe un único tipo de interés nominal de los préstamos óptimo para cada valor del citado ratio. Sin embargo, existen múltiples combinaciones del crecimiento de la oferta monetaria y del coeficiente legal de caja capaces de generar dicho tipo de interés óptimo, lo que provoca que existan infinitos valores óptimos del tipo de interés nominal de los depósitos. A pesar de esto, los niveles de consumo, empleo y producción de estado estacionario son los mismos bajo cualquiera de estas combinaciones óptimas de instrumentos monetarios.

La validez de la regla de Friedman depende del valor del ratio gasto público/producción, siendo tanto más probable que sea óptimo expandir la cantidad de dinero cuanto mayor sea el valor de dicho ratio. Además, puede ser óptimo utilizar el coeficiente legal de caja; cuando tal cosa sucede, es irrelevante cuál sea el par escogido por la tasa de crecimiento monetario y el coeficiente legal de caja siempre y cuando la combinación de políticas garantice el tipo de interés de los préstamos óptimo. Por último, el comportamiento del consumidor bajo la política monetaria óptima es distinto según sea óptima o no la regla de Friedman. En el primer caso, el consumidor elige participar en el mercado de dinero, de modo que su nivel de consumo excede su renta salarial real. En el segundo caso, no participa en el mismo pues su nivel de consumo coincide con su renta salarial real.

Referencias

Brock, P. L. (1989): "Reserve Requirements and the Inflation Tax". *Journal of Money, Credit and Banking,* vol 21, págs. 106-121.

Calvo G. y C. A. Végh (1996): "Disinflation and Interest-Bearing Money". *The Economic Journal,* 106, págs 1546-1563.

Chari, V.V, L. J. Christiano y P. Kehoe (1996): "optimality of the Fridman Rule in Economies With distorting Taxes", *Journal of Monetary Economics,* vol 37, págs 203-223.

Christiano, L (1991): "Modeling the Liquidity Effect of a Money Shock". *Quarterly Review.* Federal Reserve Bank of Minneapolis, 15, págs 1-34.

Christiano, L y Eichenbaum (1995): "Liquidity Effects, Monetary Policy, and the Business Cycle", *Journal of Money, Credit and Banking,* 27, 4, Part 1. págs 1113-1136.

Freeman, S. (1987): "Reserve Requirements and Optimal Seigniorage". *Journal of Monetary Economics,* vol. 19, págs 307-314.

Friedman, Milton (1969): "The Optimum Quantity of Money", *The Optimum Quantity of Money and Other Essays,* Chicago: Aldine.

Fuerst, T. (1992): "Liquidity, Loanable Funds, and Real Activity". *Journal of Monetary Economics,* 29, págs 3-24.

Kimbrough, K. (1986): "The Optimum Quantity of Money Rule in the Theory of Public Finance", *Journal of Monetary Economics,* 18, págs 277-284. North-Holland.

Kimbrough, K. (1989): "Optimal Taxation in a MOnetary Economy with financial Intermediaries", *Journal of Macroeconomics,* 11, n^{o}4, págs 493-511

Lucas, R. y N. L. Stokey (1983): "Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital", *Journal of Monetary Economics,* vol. 12, págs 55-93.

Lucas, R. (1990): "Liquidity and Interest Rates". *Journal of Economic Theory,* 50, págs 237-264.

Phelps, E. S. (1973): "Inflation in the Theory of Public Finance". *Swedish Journal of Economics,* vol. 75, págs 67-82.

Romer, D. (1985): "Financial Intermediation, Reserve Requirements and Inside Money: A General Equilibrium Analysis", *Journal of Monetary Economics,* vol. 16, págs 175-194.

5.1 Apéndice

Estado estacionario

Los valores de estado estacionario del consumo, empleo, producción y stock de capital de estado estacionario son, respectivamente:

$$n^{ss} = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(\frac{(R^l)^{ss}}{1-\alpha}\right)(1-\tau-\delta A^{1-\alpha})+1} \tag{15}$$

$$c^{ss} = \frac{A^{\alpha}(1-\tau-\delta A^{1-\alpha})}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(\frac{(R^l)^{ss}}{1-\alpha}\right)(1-\tau-\delta A^{1-\alpha})+1} \tag{16}$$

$$y^{ss} = \frac{A^{\alpha}}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(\frac{(R^l)^{ss}}{1-\alpha}\right)(1-\tau-\delta A^{1-\alpha})+1} \tag{17}$$

$$k^{ss} = \frac{A}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(\frac{(R^l)^{ss}}{1-\alpha}\right)(1-\tau-\delta A^{1-\alpha})+1} \tag{18}$$

donde:

$$A = \left[\frac{\alpha}{\beta^{-1}-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} > 0 \tag{19}$$

y el tipo de interés de los préstamos de estado estacionario es:

$$(R^l)^{ss} = \frac{(1+x)\beta^{-1}-\phi}{1-\phi}. \tag{20}$$

Estas expresiones se han obtenido a partir de las ecuaciones (5), (6), (8)-(11) y (14), particularizadas en el estado estacionario. El análisis se restringe a $\tau < \tau^{\max} = 1-\delta A^{1-\alpha}$, lo que garantiza que $n^{ss}, c^{ss}, y^{ss}, k^{ss} > 0$.

Demostración proposición 1:

La política monetaria óptima está caracterizada por las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial c^{ss}}\frac{\partial c^{ss}}{\partial (R^l)^{ss}} + \frac{\partial U}{\partial n^{ss}}\frac{\partial n^{ss}}{\partial (R^l)^{ss}} - \lambda\right)\frac{\partial (R^l)^{ss}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \left(\frac{\partial U}{\partial c^{ee}}\frac{\partial c^{ss}}{\partial (R^l)^{ss}} + \frac{\partial U}{\partial n^{ss}}\frac{\partial n^{ss}}{\partial (R^l)^{ss}} - \lambda\right)\frac{\partial (R^l)^{ss}}{\partial \phi} = 0$$

$$\lambda\left((R^l)^{ss}-1\right) = 0, \qquad (R^l)^{ss} \geq 1$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

Sea $\tau^{crit} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\delta)}$.

a) Si $\tau^{crit} < \tau < \tau^{\max}$ y $\lambda = 0 \Rightarrow (R^l)^{ss} \geq 1$, y como $\frac{\partial (R^l)^{ss}}{\partial x} > 0$ en (20), entonces bajo la política óptima, el tipo de interés $(R^l)^*$ verifica:

$$\frac{\partial U}{\partial c^{ss}} \frac{\partial c^{ss}}{\partial (R^l)^{ss}} + \frac{\partial U}{\partial n^{ss}} \frac{\partial n^{ss}}{\partial (R^l)^{ss}} = 0,$$

que implica que:

$$\frac{\partial c^{ss} / \partial (R^l)^{ss}}{\partial n^{ss} / \partial (R^l)^{ss}} = -\frac{\partial U / \partial n^{ss}}{\partial U / \partial c^{ss}}. \tag{21}$$

De (16) y (15) se obtiene:

$$\frac{\partial c^{ss} / \partial (R^l)^{ss}}{\partial n^{ss} / \partial (R^l)^{ss}} = A^{\alpha} \left(1 - \tau - \delta A^{1-\alpha}\right). \tag{22}$$

Además, de la función de utilidad descrita en (1), se deduce:

$$\frac{\partial U / \partial n^{ss}}{\partial U / \partial c^{ss}} = -\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(\frac{c^{ss}}{1-n^{ss}}\right) \tag{23}$$

Combinando las ecuaciones (5) y (9), particularizadas en el estado estacionario del modelo, se obtiene:

$$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(\frac{c^{ss}}{1-n^{ss}}\right) = \frac{(1-\alpha)A^{\alpha}}{(R^l)^{ss}} \tag{24}$$

Combinando las ecuaciones (21) a (24), se obtiene que, bajo la política óptima, el tipo de interés de los préstamos es:

$$(R^l)^* = \frac{1-\alpha}{1-\tau-\delta A^{1-\alpha}}. \tag{25}$$

$\tau < \tau^{\max} \Rightarrow (R^l)^* > 0$. $\tau > \tau^{crit}$ garantiza que:

$$(R^l)^* = \frac{1-\alpha}{1-\tau-\delta A^{1-\alpha}} > \frac{1-\alpha}{1-\tau^{crit}-\delta A^{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\delta)}-\frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}},$$

donde se ha sustituido τ^{crit} y A por su valor. Es fácil comprobar que el denominador $1-\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\delta)}-\frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)} = 1-\alpha$, por lo que $(R^l)^* > 1$.

Para cada $\phi \in [0,1)$, existe una tasa de crecimiento monetario que permite obtener $(R^l)^*$ recogido en (25). Despejando x de (20) se obtiene:

$$x^* = \beta\left[(R^l)^* - \phi\left((R^l)^* - 1\right)\right] - 1.$$

Como $(R^l)^* > 1$, de (20) se deduce que $x^* > \beta - 1$.

De modo análogo se demuestra que:

1) si $\tau = \tau^{crit}$, entonces $(R^l)^* = 1$ y $x^* = \beta - 1$.

2) si $\tau < \tau^{crit}$, entonces $(R^l)^* < 1$, lo cual viola la restricción del problema de optimización que resuelve el gobierno. Por tanto, en este caso se verifica que $\lambda \neq 0$.

b) Si $\tau < \tau^{crit}$ y $\lambda \neq 0 \Rightarrow (R^l)^* = 1 \Rightarrow x^* = \beta - 1$ en (25), para cualquier $\phi \in [0,1)$. ■

Demostración proposición 2:
De (14), en estado estacionario se verifica que el ratio consumo privado-output:

$$\frac{c^{ss}}{y^{ss}} = 1 - \tau - \delta A^{1-\alpha} \tag{26}$$

La ecuación que define la demanda de trabajo (9), particularizada en el estado estacionario, es:

$$\left(\frac{\omega}{p}\right)^{ss} = \frac{(1-\alpha)}{R^{l^*}} A^{\alpha}. \tag{27}$$

Por tanto, la masa salarial real es igual a:

$$\left(\frac{\omega}{p}\right)^{ss} n^{ss} = \frac{(1-\alpha)}{(R^l)^{ss}} A^{\alpha} n^* = \frac{(1-\alpha)}{(R^l)^{ss}} y^{ss}. \tag{28}$$

En este último paso se ha utilizado la función de producción (8), particularizada en el estado estacionario.

Si $\tau^{crit} < \tau < \tau^{\max}$, el tipo de interés óptimo de los préstamos está recogido en (25). Sustituyendo esta expresión en (28), se obtiene que, bajo la política monetaria óptima:

$$\left(\frac{\omega}{p}\right)^{*} n^* = \left(1 - \tau - \delta A^{1-\alpha}\right) y^*,$$

que coincide con el nivel de consumo privado que se deduce de (26).

$\left(R^l\right)^* > 1 \Rightarrow \left(R^d\right)^* > 1$ (véase sección 2.3) $\Rightarrow$ (2) se verifica con igualdad. Dado que $c^* = \left(\frac{\omega}{p}\right)^* n^*$, de (2) se deduce que el consumidor no interviene en el mercado de dinero.

Por el contrario, si $\tau < \tau^{crit}$ se verifica que $1 - \tau - \delta A^{1-\alpha} > 1 - \alpha$ (véase la demostración de la proposición 1). De (28) y (26) se deduce que, bajo la política óptima (que, en este caso, es $\left(R^l\right)^* = 1$), se satisface: $c^* > \left(\frac{\omega}{p}\right)^* n^*$. Este resultado, junto con (2), implica que el consumidor interviene en el mercado de dinero. ■

Demostración proposición 3
Las ecuaciones que caracterizan el estado estacionario cuando el nivel de gasto está fijo son: (5), (6), (8)-(11) y (14), particularizadas en el estado estacionario. De (6): $\left(R^d\right)_g^{ss} = \frac{1+x}{\beta}$, que sustituido en (11) permite obtener: $\left(R^l\right)_g^{ss} = \frac{\frac{1+x}{\beta} - \phi}{1-\phi}$. De (10):

$$\frac{k_g^{ss}}{n_g^{ss}} = A = \left[\frac{\alpha}{\beta^{-1} - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{29}$$

Combinando (5) y (9):

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{c_g^{ss}}{1 - n_g^{ss}} = \frac{(1-\alpha) A^{\alpha}}{\left(R^l\right)_g^{ss}}, \tag{30}$$

y puesto que de (14):

$$c_g^{ss} = A^{\alpha}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right) n_g^{ss} - \bar{g}, \tag{31}$$

donde se ha utilizado que $\frac{k_g^{ss}}{n_g^{ss}} = A$, se tiene que:

$$n_g^{ss} = \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) A^{-\alpha}\left(R^l\right)_g^{ss} \bar{g} + (1-\alpha)}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(R^l\right)_g^{ss}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right) + (1-\alpha)}. \tag{32}$$

De (32):

$$\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} = \frac{-\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\alpha) A^{-\alpha}\left(A^{\alpha} - \delta A - \bar{g}\right)}{\left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(R^l\right)_g^{ss}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right) + (1-\alpha)\right]^2} < 0, \tag{33}$$

puesto que: $A^{\alpha} - \delta A - \bar{g} > 0$. Esta desigualdad se debe a que: $A^{\alpha} - \delta A - \bar{g} > A^{\alpha}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right) - \frac{\bar{g}}{n_g^{ss}}$ al ser $n_g^{ss} \in (0,1)$ por definición, y de (31): $\frac{c_g^{ss}}{n_g^{ss}} = A^{\alpha}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right) - \frac{\bar{g}}{n_g^{ss}} > 0$ por definición.

De (31):

$$\frac{\partial c_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} = A^{\alpha}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right)\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} < 0, \tag{34}$$

puesto que $1-\delta A^{1-\alpha} > 0$ y de (33) $\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} < 0$.

De (1) :

$$\frac{\partial U_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} = U_c(.)\frac{\partial c_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} - U_{1-n}(.)\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} = U_c(.)H\left(R^l\right)\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}},$$

donde $H\left(R^l\right) = \left[A^{\alpha}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right) - \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{c_g^{ss}}{1-n_g^{ss}}\right]$.

Utilizando (30), $H\left(R^l\right)$ se puede reescribir:

$$H\left(R^l\right) = A^{\alpha}\left(1-\delta A^{1-\alpha}\right) - \frac{(1-\alpha)A^{\alpha}}{\left(R^l\right)_g^{ss}} = A^{\alpha}\left[1-\delta A^{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{\left(R^l\right)_g^{ss}}\right],$$

con $\frac{\partial H}{\partial R^l} > 0$ y $H(1) = A^{\alpha}\left(\alpha - \delta A^{1-\alpha}\right) = \alpha A^{\alpha}\left(\frac{\beta^{-1}-1}{\beta^{-1}-(1-\delta)}\right) > 0$, donde se ha utilizado (29). Por tanto, $H\left(R^l\right) > 0, \forall R^l$.

Puesto que $U_c(.) > 0$, $\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} < 0$ y $H\left(R^l\right) > 0$, se verifica que: $\frac{\partial U_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} < 0$.

De (8) y (29):

$$y_g^{ss} = A^{\alpha} n_g^{ss} \Rightarrow \frac{\partial y_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} = A^{\alpha}\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial\left(R^l\right)_g^{ss}} < 0. \blacksquare$$

Demostración proposición 4.
De (32):

$$\frac{\partial n_g^{ss}}{\partial \bar{g}} = \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) A^{-\alpha} \left(R^l\right)_g^{ss}}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) (R^l)_g^{ss} \left(1 - \delta A^{1-\alpha}\right) + (1-\alpha)} > 0. \tag{35}$$

De (31):

$$\frac{\partial c_g^{ss}}{\partial \bar{g}} = A^{\alpha} \left(1 - \delta A^{1-\alpha}\right) \frac{\partial n_g^{ss}}{\partial \bar{g}} - 1 = \frac{-(1-\alpha)}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) (R^l)_g^{ss} \left(1 - \delta A^{1-\alpha}\right) + (1-\alpha)} < 0. \tag{36}$$

De (1):

$$\frac{\partial U_g^{ss}}{\partial \bar{g}} = U_c(.) \frac{\partial c_g^{ss}}{\partial \bar{g}} - U_{1-n}(.) \frac{\partial n_g^{ss}}{\partial \bar{g}} < 0,$$

puesto que $U_c(.) > 0, U_{1-n}(.) > 0$ y se verifica (35)-(36).
De (8):

$$y_g^{ss} = A^{\alpha} n_g^{ss} \Rightarrow \frac{\partial y_g^{ss}}{\partial \bar{g}} = A^{\alpha} \frac{\partial n_g^{ss}}{\partial \bar{g}} > 0.$$

■