Revista de Economía Aplicada E A *Número 50 (vol. XVII), 2009, págs. 77 a 96*

LA CONTRIBUCIÓN DE LAS INFRAESTRUCTURAS A LA PRODUCCIÓN: ESTIMACIÓN POR MÁXIMA ENTROPÍA*

JORGE RODRÍGUEZ-VÁLEZ
Servicio de Estudios de BBVA

ANTONIO ÁLVAREZ PINILLA
Universidad de Oviedo

CARLOS ARIAS SAMPEDRO
Universidad de León

ESTEBAN FERNÁNDEZ VÁZQUEZ
Universidad de Oviedo

El análisis empírico de la productividad de las infraestructuras se ha enfrentado a múltiples problemas econométricos que parecen estar detrás de la gran variabilidad en los resultados obtenidos en la literatura. Uno de esos problemas es la multicolinealidad existente al estimar los parámetros de una función de producción regional que incluye entre los *inputs* la dotación de capital público. En este trabajo se aborda el problema de la multicolinealidad introduciendo información a priori sobre los parámetros de interés. Para ello, empleamos el método de máxima entropía para estimar una función de producción con datos de las regiones españolas. Los resultados de las estimaciones señalan que las infraestructuras tienen una influencia relevante en la producción.

Palabras clave: Infraestructuras, productividad, máxima entropía.

Clasificación JEL: C13, C51, H54, R11, O47.

(*) Agradecemos los comentarios y sugerencias recibidos de dos evaluadores anónimos y del Editor de REA, que han contribuido de forma notable a la mejora del trabajo. Versiones previas de este artículo fueron presentadas en North American Productivity Workshop, European Workshop on Efficiency and Productivity Analysis, Simposio de Análisis Económico y Congreso de Eficiencia y Productividad, a cuyos participantes agradecemos igualmente los comentarios y sugerencias recibidas. Este trabajo se ha beneficiado de ayudas a la investigación de la Universidad de León (Proyecto ULE2005_02) y de la Junta de Castilla y León (Proyecto LE001B06).

El análisis empírico en economía se ve limitado con frecuencia por las características de los datos disponibles. Así ocurre cuando la correlación existente entre las variables explicativas de un modelo provoca un problema de multicolinealidad. La multicolinealidad causa una elevada varianza del estimador de mínimos cuadrados reduciendo, por tanto, su precisión. Como resultado, se produce una elevada sensibilidad de los parámetros estimados a la especificación del modelo, bajos niveles de significatividad, así como estimaciones poco razonables en signo o magnitud [Greene (2000), pág. 256]. En estas condiciones los resultados obtenidos pueden ser razonablemente cuestionados.

Estimar un modelo en presencia de multicolinealidad es equivalente a tratar con un problema de escasez de datos, puesto que los datos correlacionados no aportan, de hecho, información adicional para la estimación [Goldberger (1991), pág. 246]. Una solución trivial a este problema de escasez de información consiste en ampliar la muestra [Judge *et al.* (1988), pág. 874]. Pero cuando no se dispone de más información muestral, o ésta no reduce la multicolinealidad, una alternativa consiste en el uso de algún tipo de información no-muestral, materializada en *priors* sobre el valor de los parámetros. La estimación por máxima entropía (ME) proporciona un método riguroso pero operacionalmente simple para introducir en la estimación información a priori sobre los parámetros del modelo. Por tanto, el método de ME, como cualquier método de tipo bayesiano, puede mejorar el problema de multicolinealidad, al reducir la varianza del estimador.

En este trabajo se utiliza el método de ME para obtener evidencia sobre la contribución de las infraestructuras al crecimiento del *output* de las regiones españolas estimando una función de producción agregada. Cuando se estiman funciones de producción regionales la correlación entre los *inputs* suele ser alta. Ai y Cassou (1997) y Vijverberg, Vijverberg y Gamble (1997) achacan la multicolinealidad existente (junto a otros problemas econométricos no siempre bien tratados) al amplio rango de estimaciones que la literatura encuentra para la productividad de las infraestructuras[1]. Frente a trabajos que no obtienen evidencia a favor de la contribución de las infraestructuras al crecimiento [Holtz-Eakin (1994), Baltagi y Pinnoi (1995), Garcia-Milà, McGuire y Porter (1996)], otros atribuyen un papel importante a las mismas [Aschauer (1989), Munnell (1990) o Garcia-Milà y McGuire (1992)].

Dado que la estimación por ME se basa en el uso de información sobre el rango de valores que pueden tomar los parámetros del modelo, las estimaciones resultantes pueden ser sensibles a estos valores. Por este motivo, hemos utilizado diferentes rangos con el objetivo de analizar la sensibilidad de las estimaciones de la elasticidad *output* de las infraestructuras a cambios en la información a priori utilizada. Estos cambios producen variaciones en las estimaciones de las elasticidades, pero éstas se mantienen en valores plausibles y en ninguna de las alternativas empleadas la elasticidad ha resultado menor que 0,14.

(1) La literatura empírica sobre esta línea de investigación es muy amplia. Para una revisión pueden consultarse los trabajos de Gramlich (1994) y Draper y Herce (1994) o los más recientes de Gil (2001) y de la Fuente (2002).

En este trabajo, además de aplicar un método de estimación innovador comparando sus resultados con los obtenidos por métodos econométricos habituales, exploramos con cierto detalle las particularidades del método (uso de información a priori y cambios en la estimación ante variaciones en esta información) para el análisis de la productividad de las infraestructuras. Los resultados de esta exploración apuntan a la estimación por ME como un método que ofrece grandes oportunidades para la investigación empírica cuando las bases de datos presentan multicolinealidad.

El trabajo se organiza de la siguiente forma. En la primera sección se presentan los fundamentos de la estimación por máxima entropía. En la sección segunda se especifica una función de producción dentro del enfoque de ME. En la sección tercera se describen los datos y los resultados obtenidos. Por último, se presentan las principales conclusiones.

1. Estimación por máxima entropía: una visión general

El uso de información no muestral o “a priori” puede ayudar a reducir los problemas derivados de la escasez de información de una muestra con multicolinealidad, permitiendo extraer evidencia empírica relevante. Es importante destacar que el uso de este tipo de información es una práctica relativamente corriente. Por ejemplo, la práctica habitual de eliminar una variable de un modelo econométrico para resolver un problema de multicolinealidad es equivalente a usar una información no muestral sobre la falta de relevancia de esa variable en la explicación del fenómeno, es decir, sobre el valor nulo del parámetro correspondiente a esa variable. Ahora bien, la idoneidad de esta estrategia depende de la evidencia empírica existente sobre la restricción paramétrica impuesta (suponer que el parámetro es igual a cero). Además, la información a priori sobre los parámetros puede no ser tan precisa. Es decir, es posible que se conozca un intervalo posible para los valores de los parámetros en vez de su valor. En este último caso, es necesario usar en la estimación la idea de que el parámetro se encuentra acotado en un determinado intervalo. En definitiva, la lógica de usar ME para estimar con muestras con multicolinealidad no se aleja sustancialmente de las prácticas corrientes, pero permite tratar de forma explícita, rigurosa y operacionalmente simple casos más sofisticados y realistas de información no muestral.

Golan, Judge y Miller (1996) analizan el uso de máxima entropía para estimar con multicolinealidad. En concreto, estos autores plantean una simulación numérica con técnicas de Monte Carlo para comparar el comportamiento de los estimadores de máxima entropía con el de otros estimadores alternativos en la estimación de una función de producción [Golan, Judge y Miller (1996), págs. 133-137]. El experimento se lleva a cabo bajo diferentes grados de multicolinealidad (varios escenarios con diferentes números de condición), observándose que los estimadores de máxima entropía presentaban en todos los casos los niveles más reducidos de error cuadrático medio. En concreto, esta mejora relativa en el error cuadrático se incrementaba especialmente cuando se imponía un nivel de multicolinealidad elevado (números de condición iguales o mayores a 30).

Supongamos que se quieren estimar los parámetros de un modelo lineal, en el que una variable y depende de H variables explicativas x_h. El modelo se puede escribir en forma matricial como:

$$y = X\theta + e \qquad [1]$$

donde y es un vector $(T \times 1)$ de observaciones, X es la matriz $(T \times H)$ de variables explicativas, θ es el vector $(H \times 1)$ de parámetros a estimar y, finalmente, e es un vector $(T \times 1)$ que recoge la perturbación aleatoria del modelo. Para estimar este modelo, en este trabajo se utiliza el estimador de máxima entropía generalizada [Golan, Judge y Miller (1996)][2]. El método parte de una reparametrización del modelo original en la que cada uno de los parámetros θ_h se modeliza como una variable aleatoria discreta con $M \geq 2$ posibles realizaciones, cada una de las cuales tiene una determinada probabilidad de aparición, p_{hm}. Las realizaciones de estas variables aleatorias discretas se determinan a partir de información a priori sobre los valores posibles que puede tomar cada parámetro. En algunos casos, esta información a priori permite establecer un intervalo de valores factibles para el parámetro estimado. Una vez determinado ese intervalo, un cierto número M de valores contenidos en ese rango constituye el llamado vector de soporte, que es el medio utilizado para introducir esta información a priori en la estimación[3]. Por tanto, para cada uno de los parámetros θ_h se elige un vector de soporte, compuesto por un número finito (M) de posibles valores para el parámetro, utilizando información no muestral sobre valores plausibles del parámetro que se pretende estimar[4]. El vector de soporte se especifica como $b_h = (b_{h1}, b_{h2},..., b_{hM})$. El siguiente paso consiste en suponer que existen unas probabilidades asociadas a estos valores, las cuales vienen recogidas en un vector $p'_h = (p_{h1}, p_{h2},..., p_{hM})$, tales que $\sum_{m=1}^{M} p_{hm} = 1, \forall h$. De esta forma, cada parámetro a estimar se puede expresar como una combinación lineal de los valores del vector de soporte ponderados por la probabilidad desconocida de cada uno de ellos:

$$\theta_h = b_h p_h = \sum_{m=1}^{M} b_{hm} p_{hm} \qquad [2]$$

(2) Varios trabajos aplicados se han basado en este estimador. Entre ellos cabe señalar los de Paris y Howitt (1998), Fraser (2000), Golan, Perloff y Shen (2001) o Gardebroek y Oude Lansink (2004).

(3) Golan, Judge y Miller (1996), pág. 138, señalan que, en general, cuando el conocimiento a priori del parámetro es limitado, pueden considerarse mayores amplitudes para estos vectores sin consecuencias importantes sobre las propiedades del estimador.

(4) El uso de los vectores de soporte (información no-muestral) es la clave para poder extraer información de muestras con multicolinealidad en la estimación ME. Una manera de ilustrar la relación que existe entre la estimación clásica y la de máxima entropía surge de la comparación de la distinta forma de responder a una pregunta de examen en función de que se incluyan o no varias opciones posibles como respuesta. Con un nivel escaso de conocimientos (muestras de información escasa o con multicolinealidad), las diversas opciones de respuesta ayudan a seleccionar la verdadera.

Generalizando la ecuación [2] a los *H* parámetros a estimar se tiene:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \ldots \\ \theta_H \end{bmatrix} = \mathrm{Bp} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \mathrm{b}_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \mathrm{b}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \ldots \\ \mathrm{p}_H \end{bmatrix} \qquad [3]$$

Un procedimiento similar se lleva a cabo para el término aleatorio del modelo (e). Se asumirá para cada uno de los elementos e_t la existencia de $J \geq 2$ valores[5] $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_J)$ con probabilidades $\mathrm{w}'_t = (w_{t1}, w_{t2}, \ldots, w_{tJ})$, de forma que el vector e se puede escribir como:

$$\mathrm{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_T \end{bmatrix} = \mathrm{Vw} = \begin{bmatrix} \mathrm{v} & 0 & . & 0 \\ 0 & \mathrm{v} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \mathrm{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{w}_1 \\ \mathrm{w}_2 \\ \ldots \\ \mathrm{w}_T \end{bmatrix} \qquad [4]$$

mientras que el valor de la perturbación aleatoria para una observación concreta *t* será:

$$e_t = \mathrm{vw}_t = \sum_{j=1}^{J} v_j w_{tj} \qquad [5]$$

Las anteriores definiciones permiten escribir la ecuación [1] como:

$$\mathrm{y} = \mathrm{XBp} + \mathrm{Vw} \qquad [6]$$

De esta forma, el problema de estimar el vector de parámetros desconocidos θ se transforma en la estimación de las $(M \times H) + (J \times T)$ probabilidades de los valores escogidos para los vectores de soporte: p_h y w_t. La obtención de estas probabilidades permite la estimación de los parámetros, al poder ser expresados como:

$$\hat{\theta}_h = \sum_{m=1}^{M} \hat{p}_{hm} b_{hm}; \quad \forall h = 1, \ldots, H \qquad [7]$$

La estimación por ME de estas probabilidades se basa en la maximización de una función de entropía. Esta función es una medida de la incertidumbre o falta

(5) Habitualmente se supone una distribución simétrica y centrada alrededor de 0, por lo que $v_1 = -v_J$.

de conocimiento asociada a un fenómeno representado por una variable aleatoria. La función de entropía definida por Shannon (1948) es:

$$EF(\mathrm{p}) = -\sum_{m=1}^{M} p_m \ln p_m \qquad [8]$$

donde EF es el valor de la función de entropía y p = [p_1, p_2,..., p_M] son las probabilidades asociadas a las M posibles realizaciones x_1, x_2,...,x_M de una variable aleatoria x, tales que $\sum_{m=1}^{M} p_m = 1$.

La función de entropía EF(p) puede interpretarse como una medida de la ignorancia sobre un determinado fenómeno. En primer lugar, la función EF(p) tiende a cero cuando la probabilidad de una de las posibles realizaciones de la variable tiende a uno y la del resto a cero. Por otra parte, la función toma un valor positivo para cualquier otra distribución de probabilidad. Por tanto, la función alcanza su valor más bajo cuando apenas existe incertidumbre (ignorancia) sobre un fenómeno. El valor máximo de la función de entropía se alcanza cuando la distribución de probabilidad es uniforme. Es decir, cuando todas las posibles realizaciones de la variable tienen la misma probabilidad:

$$\left(p_m = \frac{1}{M}, \; \forall m = 1,...,M \right)$$

Resulta intuitivo que cuando no se sepa nada sobre un determinado fenómeno se atribuya la misma probabilidad a todas las realizaciones de la variable aleatoria. Por tanto, la maximización de la función de entropía define la distribución de probabilidad que describe perfectamente nuestro nivel de conocimiento sobre el fenómeno (nulo en este caso).

Esta idea de caracterizar un fenómeno por la distribución de probabilidad de máxima entropía se traslada al caso en que existan observaciones buscando la máxima entropía de las distribuciones de probabilidad que pueden haber generado los datos. Por ejemplo, múltiples observaciones de varias realizaciones diferentes de la variable aleatoria hacen que quede descartada la distribución que asigna la probabilidad uno a una realización y cero al resto. Por lo tanto, cuando se dispone de información muestral se busca la distribución de probabilidad capaz de generar los datos que dé lugar a la máxima entropía. Desde un punto de vista operativo, esta distribución se obtiene maximizando la función de entropía sujeta a la información muestral disponible.

La intuición sobre el principio de máxima entropía es que describe un fenómeno usando los datos con gran precaución pero con gran eficacia. Por una parte, se busca una distribución de probabilidad que reconozca la ignorancia sobre el fenómeno que se analiza (se maximiza la entropía entendida como medida de ignorancia). En otras palabras, se busca una distribución tan cercana a la uniforme como sea posible. Pero, por otra parte, no se desprecia la información que proporcionan los datos ya que se maximiza la entropía sujeta a que la distribución que se elija sea compatible con los datos observados.

Para la estimación de modelos como el recogido en la expresión [1], es decir, para la estimación de las probabilidades de los vectores de soporte de cada parámetro y del término de error, se plantea el siguiente programa de maximización restringida:

$$\underset{\mathbf{p},\mathbf{w}}{Max}\, EF(\mathrm{p,w}) = -\sum_{h=1}^{H}\sum_{m=1}^{M} p_{hm} \ln p_{hm} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} w_{tj} \ln w_{tj} \qquad [9a]$$

Sujeto a:

$$\sum_{h=1}^{H}\sum_{m=1}^{M} x_{ht} b_{hm} p_{hm} + \sum_{j=1}^{J} v_j w_{tj} = y_t, \quad \forall t = 1,...,T \qquad [9b]$$

$$\sum_{m=1}^{M} p_{hm} = 1, \quad \forall h = 1,...,H \qquad [9c]$$

$$\sum_{j=1}^{J} w_{tj} = 1, \quad \forall t = 1,...,T \qquad [9d]$$

La ecuación [9a] es la función de entropía de Shannon adaptada para la estimación de las (M×H) + (J×T) probabilidades a estimar. La ecuación [9b] contiene la información muestral en los términos del modelo reparametrizado en [6]. Estas restricciones garantizan que las probabilidades estimadas se ajusten a las T observaciones disponibles. Finalmente, las ecuaciones [9c] y [9d] son restricciones que normalizan las probabilidades estimadas haciendo que tengan suma unitaria. El Lagrangiano correspondiente será:

$$\begin{aligned} L = &-\sum_{h=1}^{H}\sum_{m=1}^{M} p_{hm} \ln p_{hm} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} w_{tj} \ln w_{tj} + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left[y_t - \sum_{h=1}^{H}\sum_{m=1}^{M} x_{ht} p_{hm} b_m - \sum_{j=1}^{J} w_{tj} v_j \right] \\ &+ \sum_{h=1}^{H} \mu_h \left[1 - \sum_{m=1}^{M} p_{hm} \right] + \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \left[1 - \sum_{j=1}^{J} w_{tj} \right] \end{aligned} \qquad [10]$$

La resolución del programa de optimización [9] permite la obtención de estimaciones para las probabilidades de los vectores de soporte. Con estas probabilidades se estiman los parámetros de interés θ de la forma expresada en [7].

La ecuación [6] se puede reescribir como:

$$y = XBp + Vw = X\theta_{ME} + e \qquad [11]$$

Se puede demostrar que el estimador de ME es $\hat{\theta}_{ME} = [X'X]^{-1} X'(y - \hat{e})$, donde ê es el vector que contiene los errores ME del modelo. En esta expresión se observa que el estimador de ME, a diferencia del de mínimos cuadrados, se ajusta a una recta que pasa por la media de (y-ê) en lugar de por el valor medio de y. A medida que se reduce la amplitud en el vector de soporte v para el término de error, $\hat{e} \rightarrow 0$ por lo que el estimador ME acaba coincidiendo con el estimador de mínimos cuadrados en el límite. La inclusión del término Vw = e en [9b] afecta a las características del estimador. Concretamente, la matriz de varianzas-covarianzas del estimador ME está relacionada inversamente con la matriz de varianzas-covarianzas de w (Σ_v), por lo que la presencia del término Vw = e reduce la varianza del estimador de ME [Golan, Judge y Miller (1996), pág. 108][6].

2. Modelo empírico

El papel de las infraestructuras en el crecimiento económico se ha abordado habitualmente mediante la estimación de funciones de producción que incluyen el capital público como un factor de producción más junto a los *inputs* privados habituales, trabajo y capital:

$$Y = f(A, K, L, G) \qquad [12]$$

donde Y es la producción; K, el stock de capital privado; L, el nivel de empleo; G, el stock de capital público; y A recoge la productividad total de los factores. En este trabajo se utiliza una función de producción Cobb-Douglas, cuya expresión para un panel de datos sería:

$$\ln Y_{it} = \theta_i + \theta_\tau t + \theta_{\tau\tau} t^2 + \theta_K \ln K_{it} + \theta_L \ln L_{it} + \theta_G \ln G_{it} + e_{it} \qquad [13]$$

donde el subíndice i indica la región, t el momento del tiempo[7] y e es una perturbación aleatoria. El progreso técnico exógeno se introduce en el modelo como una función cuadrática del tiempo. La productividad de las infraestructuras depende del valor del parámetro θ_G. Si este parámetro es significativamente mayor que cero indica que existe evidencia empírica a favor de la contribución de la dotación de infraestructuras a la producción regional.

(6) Las propiedades de los estimadores de ME pueden verse en Golan, Judge y Miller (1996: págs. 96-123 y 131-133). En muestras grandes se demuestra que son consistentes y asintóticamente normales. Nótese que en presencia de multicolinealidad la matriz $[X'X]^{-1}$ puede tomar valores muy elevados, lo que incrementa la varianza de los estimadores de mínimos cuadrados. La presencia de Σ_v en la matriz de varianzas-covarianzas del estimador ME limita la magnitud de este problema. Aunque el estimador puede presentar un comportamiento sesgado en caso de que el vector de soporte no esté centrado en torno al verdadero valor del parámetro, la inclusión de restricciones como la [9b] limita este problema de sesgo [Golan, Judge y Miller (1996), pág. 109].

(7) En la sección anterior se utilizaba *t* para indicar las observaciones. En ésta se sigue la convención habitual al tratar datos de panel y se utiliza como subíndice del tiempo.

El modelo [13] se estima usando datos de las 17 Comunidades Autónomas españolas durante 19 años (1980-1998). La estimación de los 22 parámetros del modelo requiere la elección de otros tantos vectores de soporte (17 efectos individuales, tres elasticidades *output* y dos parámetros para el cambio técnico). Bajo rendimientos constantes a escala y competencia perfecta, los parámetros de los logaritmos de los *inputs* de una función de producción Cobb-Douglas se corresponden con la tasa de participación en el *output* de la remuneración del *input* correspondiente. De esta forma, esta proporción puede ser utilizada como información a priori sobre las elasticidades. Por ello, los vectores de soporte del capital privado y del empleo se han escogido tomando un intervalo entorno a esas tasas de participación. Concretamente, cada vector de soporte toma 3 valores: (0,3; 0,4; 0,5) para el capital privado y (0,5; 0,6; 0,7) para el empleo. Sin embargo, para el vector de soporte del capital público no se cuenta con unos valores de referencia semejantes. Por ello, los valores del vector de soporte de la elasticidad *output* de las infraestructuras se han tomado a partir de dos supuestos ampliamente aceptados: que no puede ser negativa ni superior a la del capital privado[8]. Como resultado, este vector de soporte se define como (0,0; 0,15; 0,3).

Por otra parte, los vectores de soporte correspondientes a los efectos individuales y la tendencia se han obtenido a partir de una estimación preliminar del modelo [13] usando el estimador intragrupos. Para el vector de soporte de los errores utilizamos 3 valores, J=3, centrados en cero, como es habitual en la literatura. Golan, Judge y Miller (1996, pág. 88) proponen referenciar este vector a la distribución de la variable dependiente, obteniendo los extremos del intervalo como ±3 veces la desviación típica muestral de la variable dependiente[9]. En definitiva, los vectores de soporte son:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{b}_i = (-12,5;\ 0,0;\ 12,5) \qquad \forall i = 1,2,\ldots 17\\
&\mathrm{b}_\tau = (0,0;\ 0,05;\ 0,1)\\
&\mathrm{b}_{\tau\tau} = (-0,05;\ 0,0;\ 0,05)\\
&\mathrm{b}_K = (0,3;\ 0,4;\ 0,5)\\
&\mathrm{b}_L = (0,5;\ 0,6;\ 0,7)\\
&\mathrm{b}_G = (0,0;\ 0,15;\ 0,3)\\
&\mathrm{v} = (-2,6;\ 0,0;\ 2,6)
\end{aligned} \qquad [14]$$

(8) El resultado contrario, obtenido entre otros por Aschauer (1989), supone que la dotación de capital público contribuye a la producción privada en mayor medida que el propio capital privado. Este resultado dio origen a multitud de trabajos que cuestionaron su estimación. Véanse los *surveys* anteriormente citados: Gramlich (1994), Gil (2001) y de la Fuente (2002).

(9) Una razón para utilizar esta regla es que en la distribución normal este intervalo delimita el 99% de la variación de la variable correspondiente. De esta forma, el rango de variación dado al error incluiría incluso el caso extremo en el cual los regresores del modelo no tuvieran ningún poder explicativo en la variable dependiente y la variación de ésta se debiera íntegramente al error. Para más detalles sobre la llamada ‘regla de 3 σ’ ver Pukelsheim (1994).

En el cuadro 1 se recogen los resultados obtenidos en la estimación de las elasticidades por aquellos trabajos empíricos previos que por sus características (enfoque primal, datos de las regiones españolas, especificación Cobb-Douglas con efectos individuales y tendencia) pueden compararse con el presente trabajo. Puede observarse la notable variabilidad en las estimaciones de los parámetros debida, en parte, a diferentes definiciones de las variables, la elección de distintos períodos temporales o el uso de bases de datos diferentes.

Cuadro 1: ELASTICIDADES ESTIMADAS CON DATOS DE LAS REGIONES ESPAÑOLAS

Trabajo	RCE[1]	θ_K	θ_L	θ_G
Mas, Maudos, Pérez y Uriel (1994)	*K, L*	0,63	0,37	0,24
Mas, Maudos, Pérez y Uriel (1994)	*K, L, G*	0,44	0,37	0,19
García-Fontes y Serra (1994)	--	0,49	0,46	0,06
Mas, Maudos, Pérez y Uriel (1996)	*K, L*	0,42	0,58	0,07
Mas, Maudos, Pérez y Uriel (1996)	*K, L, G*	0,40	0,53	0,07
Dabán y Murgüi (1997)	--	0,06*	0,44	0,05*
Moreno, Artís, López-Bazo y Suriñach (1997)	*K, L, G, Gs*	0,51	0,35	0,05
Delgado y Álvarez (2000)	--	0,29	0,40	0,20
Freire y Alonso (2002)	*K, L, G*	0,31	0,57	0,13
Álvarez, Orea y Fernández (2003)	--	0,07*	0,5	0,00*
Cantos, Gumbau-Albert y Maudos (2005)	--	0,34	0,32	0,04

1. Rendimientos constantes a escala. En la columna se indican, en su caso, los *inputs* en los que se toma la restricción (*Gs*: Capital público social).

* Coeficientes que no son significativamente distintos de cero.

Fuente: Elaboración propia a partir de los trabajos señalados.

La reparametrización del modelo implica que la estimación de los 22 parámetros requiere la estimación de las probabilidades de los valores de los vectores de soporte (3 probabilidades para cada parámetro). Por otra parte, es necesario estimar 3 probabilidades más por cada una de los 323 errores (17 regiones observadas desde 1980 a 1998). Por tanto, el programa definitivo consiste en la maximización de la siguiente función de entropía:

$$\begin{aligned} EF(\mathrm{p,w}) = & -\sum_{i=1}^{17}\sum_{m=1}^{3} p_{im}\ln p_{im} - \sum_{m=1}^{3} p_{\tau m}\ln p_{\tau m} - \sum_{m=1}^{3} p_{\tau\tau m}\ln p_{\tau\tau m} - \\ & -\sum_{m=1}^{3} p_{Km}\ln p_{Km} - \sum_{m=1}^{3} p_{Lm}\ln p_{Lm} - \sum_{m=1}^{3} p_{Gm}\ln p_{Gm} - \sum_{i=1}^{17}\sum_{t=1}^{19}\sum_{m=1}^{3} w_{itm}\ln w_{itm} \end{aligned} \qquad [15a]$$

Sujeto a:

a) 323 restricciones correspondientes a la información muestral derivada de la expresión [13]:

$$\ln Y_{it} = \sum_{m=1}^{3} b_{im} p_{im} + \sum_{m=1}^{3} b_{\tau m} p_{\tau m} t + \sum_{m=1}^{3} b_{\tau\tau m} p_{\tau\tau m} t^2 + \sum_{m=1}^{3} b_{Km} p_{Km} \ln K_{it} + \\ + \sum_{m=1}^{3} b_{Lm} p_{Lm} \ln L_{it} + \sum_{m=1}^{3} b_{Gm} p_{Gm} \ln G_{it} + \sum_{m=1}^{3} v_m w_{itm} \quad [15b]$$

b) 22 restricciones de suma a la unidad de las probabilidades de los valores del vector de soporte de cada parámetro:

$$\sum_{m=1}^{3} p_{hm} = 1 \qquad h = 1,\ldots,22 \quad [15c]$$

c) 323 restricciones de suma a la unidad de las probabilidades de los valores del vector de soporte del error:

$$\sum_{m=1}^{3} w_{itm} = 1 \qquad i = 1,\ldots,17;\ t = 1,\ldots,19 \quad [15a]$$

3. Datos y estimación

Para la estimación del programa definido por las ecuaciones en [15] se han utilizado los siguientes datos: la producción (Y), medida por el VAB, se obtiene a partir de la Contabilidad Regional de España [INE (2003)] enlazada con los datos recogidos en Cordero y Gayoso (1997). Del VAB total se resta la parte de la producción correspondiente a los servicios no destinados a la venta, para obtener una medida de la producción privada. Las dotaciones de capital privado (K) y de infraestructuras (G) se han obtenido de los datos elaborados por el Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas (IVIE), recogidos en Fundación BBVA (1998). Del total del *stock* de capital privado, se descuenta la partida correspondiente al alquiler de inmuebles y capital residencial, como es habitual en los trabajos empíricos, para obtener una medida del *stock* de capital privado productivo. En el capital público no se incluyen los conceptos vinculados al llamado capital público social (educación y sanidad)[10]. Por último, el nivel de empleo (L) es el

(10) Varios trabajos han analizado la influencia de este tipo de capital público en la productividad. Pedraja, Ramajo y Salinas (1999) afirman que su efecto inmediato es prácticamente irrelevante. Baltagi y Pinnoi (1995) señalan que, probablemente, la dotación de capital público social no sea la mejor manera de recoger los efectos que la educación y la sanidad tienen sobre el factor trabajo.

número de ocupados en el sector privado (total de ocupados menos ocupados en el sector servicios no destinados a la venta), y ha sido obtenido del estudio realizado por Mas, Pérez, Serrano, Soler y Uriel (2000).

La estimación del modelo [13] con estos datos (habituales en esta línea de investigación en España) está afectada por la multicolinealidad de las variables explicativas. La magnitud de este problema se analiza en este trabajo utilizando el número de condición de la matriz de información muestral [Belsley, Kuh y Welsch (1980)]. En presencia de multicolinealidad no exacta, al menos uno de los regresores del modelo es aproximadamente una combinación lineal del resto, razón por la cual el determinante de la matriz X'X toma un valor que se aproxima a cero. Ello implicaría que al menos uno de los valores propios ψ_r de la matriz X'X es muy pequeño, ya que el determinante es el producto de los valores propios. Por ello, para la detección de multicolinealidad potencialmente perjudicial para la estimación, Belsley, Kuh y Welsch (1980) sugieren utilizar el número de condición de la matriz X'X, que se define como la raíz cuadrada de la ratio entre el mayor y el menor de los valores propios:

$$\eta = \sqrt{\frac{\psi_{\max}}{\psi_{\min}}} \qquad [16]$$

Para evitar el efecto de las unidades de medida, los valores propios se calculan una vez normalizada cada columna de X, dividiendo cada observación de la respectiva variable por $\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=i}^{T} X_{hit}^{2}}$. Estos autores señalan que valores superiores a 20 ó 30 son indicio de problemas de multicolinealidad. El número de condición para el modelo en [13] es de 1.112, muy superior a esos valores de referencia. De igual forma, las correlaciones entre las variables que recogen las dotaciones de los 3 *inputs* son superiores a 0,9. Estos resultados muestran la presencia de un problema de multicolinealidad en la muestra usada para la estimación.

La estimación de los parámetros de la ecuación [13] utilizando el estimador intragrupos se recoge en la tercera columna del cuadro 2[11]. Como se observa, ni el capital privado ni el público serían variables relevantes en la explicación de la producción privada, resultado claramente anómalo. En la cuarta columna del cuadro 2 se muestran los resultados de estimar el modelo por máxima entropía utilizando la información sobre su posible rango de valores definida en los vectores [14][12]. Para poder realizar contrastes de hipótesis sobre las estimaciones ME de

(11) El test de Hausman permite rechazar la hipótesis nula de ausencia de correlación entre los efectos individuales y las variables explicativas con un nivel de significatividad de 0,01. Este resultado implica que el modelo de efectos aleatorios produciría estimaciones sesgadas de los parámetros.

(12) Se ha utilizado el programa GAMS, empleando el algoritmo CONOPT2 para problemas de optimización no lineal.

los parámetros, en este trabajo hemos seguido el procedimiento descrito en trabajos previos como Mittelhammer y Cardell (1997), Fraser (2000) o Golan *et al*. (2001) para obtener varianzas de los estimadores de ME[13]. Tal y como se puede ver en la penúltima columna del cuadro 2, al contrario que en la estimación intragrupos, en la estimación por ME la dotación de infraestructuras se muestra como una variable relevante en la explicación de la producción privada, con un valor estimado para la elasticidad *output* próximo a 0,18.

Cuadro 2: ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

Variable	Parámetro	Intragrupos	ME[1]	ME[2]
Infraestructuras	θ_G	-0,046	0,175	0,308
		(-1,88)	(3,91)	(6,89)
Empleo	θ_L	0,483	0,605	0,667
		(13,24)	(9,57)	(9,43)
Capital privado	θ_K	0,014	0,413	0,342
		(0,35)	(5,84)	(4,09)
t^2	$\theta_{\tau\tau}$	-0,0003	-0,002	-0,002
		(-3,39)	(-4,94)	(-12,56)
t	θ_τ	0,029	0,044	0,042
		(12,97)	(10,83)	(9,45)

t-ratios entre paréntesis

1. Estimación con vectores de soporte [14]

2. Estimación con vectores de soporte [17]

Fuente: Elaboración propia.

Una fuente razonable de críticas a la estimación por ME se basa en que los resultados dependen de la información a priori introducida, por lo que parece posible "orientar" la estimación seleccionando convenientemente los vectores de soporte. Aunque la información recogida en los vectores de soporte juega un papel importante en la estimación (y ése es, precisamente, el aspecto que da interés al método), las estimaciones también dependen del otro tipo de información utilizada en la estimación: la información muestral contenida en los datos. Por ello, una pregunta apropiada en la aplicación de esta metodología es: ¿cuánto varían las estimaciones ante cambios en el vector de soporte? Con ello se trata de analizar si la evidencia empírica obtenida (en nuestro caso, una contribución relevante de las infraestructuras a la producción) depende de la selección inicial del soporte. Para analizar en qué medida la evidencia empírica obtenida depende de acotar de forma restringida el rango posible de los parámetros (tal y como se hizo al utilizar

(13) Véase el anexo para los detalles del cálculo de la varianza de los estimadores.

los vectores en [14]), estimamos de nuevo el modelo ampliando el rango de los vectores de soporte hasta el punto en que la información que contienen no parece determinante para el resultado obtenido. Con este fin, para las tres elasticidades *output* se utiliza un mismo vector con un intervalo definido en forma muy amplia (entre cero y dos). Aunque cabe esperar que la elasticidad *output* con respecto al empleo sea mayor que con respecto al capital privado y que éstas, a su vez, sean superiores a la elasticidad del capital público, se renuncia a introducir esa información sobre los parámetros. El resto de los vectores de soporte son los mismos que en [14]. Los vectores de soporte utilizados son, por tanto:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{b}_i = (-12,5;\ \ 0,0;\ \ 12,5) \qquad \forall i = 1,2,...17\\
&\mathrm{b}_\tau = (0,0;\ \ 0,05;\ \ 0,1)\\
&\mathrm{b}_{\tau\tau} = (-0,05;\ \ 0,0;\ \ 0,05)\\
&\mathrm{b}_K = (0,0;\ \ 1,0;\ \ 2,0)\\
&\mathrm{b}_L = (0,0;\ \ 1,0;\ \ 2,0)\\
&\mathrm{b}_G = (0,0;\ \ 1,0;\ \ 2,0)\\
&\mathrm{v} = (-2,6;\ \ 0,0;\ \ 2,6)
\end{aligned} \qquad [17]$$

En la última columna del cuadro 2 se muestran los resultados. A pesar del amplio vector de soporte utilizado, se obtienen estimaciones para las tres elasticidades *output* que se aproximan bastante a las expectativas sobre el valor de esos parámetros implícitas en el vector de soporte [14] utilizado en la estimación anterior. De este modo, aunque la información contenida en los soportes es la misma para los tres *inputs*, el método ME es capaz de proporcionar una estimación de la elasticidad *output* del trabajo mayor que la del capital privado y ésta, a su vez, es mayor que la del capital público. Las elasticidades estimadas para el capital privado y el empleo no han resultado muy sensibles al vector de soporte utilizado. Por otra parte, la variación del parámetro de las infraestructuras es de 0,13, cuando la amplitud del vector de soporte pasó de 0,3 a 2. El valor estimado para esta elasticidad ha aumentado notablemente con el cambio de vector de soporte, estando entre las estimaciones más elevadas de la literatura empírica internacional [ver de la Fuente (2002)]. Las estimaciones por ME recogidas en el cuadro 2 apoyan, por tanto, la idea de una productividad de las infraestructuras positiva y sustancial bajo dos marcos muy distintos de información a priori. En la primera estimación se hace un uso “intensivo” de la posibilidad de la estimación ME para acotar los valores de los parámetros con un rango de parámetros muy restringido. En la segunda estimación, el rango es tan amplio que la información que incorpora no parece que pueda determinar los resultados obtenidos. Sin embargo, en ambos casos se obtiene evidencia empírica favorable a una contribución relevante de las infraestructuras en la producción.

Estas estimaciones también muestran claramente que en el método de ME la estimación puntual de los parámetros depende de los vectores de soporte elegidos. Este hecho suele verse como un problema de esta metodología. Sin embargo, la evidencia empírica obtenida no queda totalmente determinada por estos vectores. Usando este resultado, una novedad del presente trabajo es la utilización de la variación de las estimaciones ante cambios en el vector de soporte para comprobar la firmeza de la evidencia obtenida. Nuestra propuesta consiste en mostrar que los datos no apoyan una determinada hipótesis aun cuando la posibilidad de la misma se incluye en los vectores de soporte.

La hipótesis que confrontaremos con los datos es que las infraestructuras no tienen influencia en la producción. Se trata de un resultado bastante contraintuitivo que ha aparecido en algunos estudios empíricos [Evans y Karras (1994), Baltagi y Pinnoi (1995), Garcia-Milà, McGuire y Porter (1996)]. Para ello se estima el modelo usando tres vectores de soporte para las infraestructuras que se definen manteniendo fijo el límite superior del intervalo dado al capital público en 0,3 y permitiendo que el inferior tome valores negativos. El resto de vectores son los recogidos en [14]. Como se observa en el cuadro 3, para todas las estimaciones de la elasticidad *output* con respecto a las infraestructuras se obtiene un valor que en ningún caso ha resultado inferior a 0,14, a pesar de los cambios en el vector de soporte. Es decir, el método no proporciona una estimación nula o negativa de la elasticidad *output* de las infraestructuras aun cuando el vector de soporte permite claramente esa posibilidad. Este resultado se puede interpretar como evidencia adicional favorable al efecto positivo (y de cierta relevancia) de las infraestructuras sobre la producción.

Cuadro 3: ESTIMACIÓN POR ME CON DIFERENTES VECTORES DE SOPORTE

Variable	Parámetro	Soporte a	Soporte b	Soporte c
Infraestructuras	θ_G	0,157 (3,51)	0,147 (3,29)	0,142 (3,18)
Empleo	θ_L	0,606 (9,58)	0,607 (9,60)	0,607 (9,60)
Capital privado	θ_K	0,416 (5,88)	0,418 (5,91)	0,419 (5,93)
t^2	$\theta_{\tau\tau}$	-0,002 (-13,87)	-0,002 (-13,94)	-0,002 (-13,97)
t	θ_τ	0,045 (11,18)	0,045 (11,24)	0,045 (11,26)

Entre paréntesis *t-ratios* (ver anexo)

Soporte a: b_G = (-0,1; 0,1; 0,3)

Soporte b: b_G = (-0,2; 0,05; 0,3)

Soporte c: b_G = (-0,7; -0,2; 0,3)

Fuente: Elaboración propia.

La comparación de las estimaciones ME y *within* recogidas en el cuadro 2 no permite ilustrar con precisión la distinta capacidad de ambos métodos de estimación para tratar muestras con multicolinealidad. La principal razón es que la estimación por ME incorpora información sobre los posibles valores de los parámetros que la estimación *within* no recoge. Por tanto, para analizar esta cuestión, la comparación de los resultados obtenidos con los dos métodos debe hacerse en las condiciones más similares posibles. En este sentido, la estimación imponiendo rendimientos constantes a escala (RCE) proporciona un buen marco de comparación.

La estimación econométrica se hace bajo el supuesto de que las elasticidades de los *inputs* privados suman uno ($\theta_K + \theta_L = 1$). En máxima entropía, esta restricción puede ser usada directamente para estimar estos parámetros considerándolos como probabilidades que suman uno y sin necesidad de especificar un vector de soporte para ellos. Es decir, bajo RCE ambos métodos recogen la misma información a priori sobre los parámetros de K y L. Por tanto, incluyendo la restricción: $\theta_K + \theta_L = 1$, la función de entropía a maximizar se convierte en:

$$\begin{aligned} \underset{p,w}{Max}\, EF(\mathrm{p,w}) = & -\sum_{i=1}^{17}\sum_{m=1}^{3} p_{im} \ln p_{im} - \sum_{m=1}^{3} p_{\tau m} \ln p_{\tau m} - \sum_{m=1}^{3} p_{\tau\tau m} \ln p_{\tau\tau m} - \\ & - \theta_K \ln \theta_K - \theta_L \ln \theta_L - \sum_{m=1}^{3} p_{Gm} \ln p_{Gm} - \sum_{i=1}^{17}\sum_{t=1}^{19}\sum_{m=1}^{3} w_{itm} \ln w_{itm} \end{aligned} \qquad [18]$$

En el cuadro 4 se muestran los resultados de estimar la ecuación [13] imponiendo RCE en ambos métodos. Los vectores de soporte de los efectos individuales se han tomado de la estimación intragrupos imponiendo RCE (-5,5; 0,0; 5,5). Se ha mantenido el vector de soporte amplio para las infraestructuras (entre 0 y 2) del que, como se señaló anteriormente, cabe esperar a priori que no contenga información determinante para la estimación por ME. Los vectores de la tendencia y el error son los utilizados en [14] y [17].

Cuadro 4: ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN IMPONIENDO RCE

Variable	Parámetro	ME	Within
Infraestructuras	θ_G	0,290	-0,035
		(6,48)	(-1,07)
Empleo	θ_L	0,656	0,653
		(9,28)	(7,54)
Capital privado	θ_K	0,344	0,347
		(4,44)	(7,54)
t^2	$\theta_{\tau\tau}$	-0,002	-0,0005
		(-12,79)	(-5,10)
t	θ_τ	0,043	0,024
		(9,86)	(8,06)

t-ratios entre paréntesis (ver anexo)

Fuente: Elaboración propia.

Como se observa, imponiendo RCE las estimaciones de las elasticidades para el capital privado y para el empleo son muy parecidas en ambos métodos. Sin embargo, difieren notablemente en la estimación de la elasticidad de las infraestructuras: mientras que en la estimación intragrupos tampoco es significativamente distinta de cero al imponer RCE, la estimación ME muestra una contribución muy sustancial de las infraestructuras a la producción.

Los resultados en esta sección ilustran, por un lado, las oportunidades de investigación empírica que abre el método de ME en modelos con problemas de multicolinealidad. Por otro, aportan nueva evidencia empírica sobre la productividad de las infraestructuras en las regiones españolas.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos explorado la utilidad de la estimación por máxima entropía para el estudio de fenómenos caracterizados por datos con multicolinealidad. Aplicando este enfoque se han estimado funciones de producción Cobb-Douglas para las regiones españolas en el período 1980-1998. El elemento clave del método ME es que permite introducir información sobre los valores que pueden tomar los parámetros. Por ello, es necesario analizar la robustez de la estimación ante cambios en la información a priori utilizada sobre los parámetros. Con ese fin, se ha estimado la función de producción usando distintos vectores de soporte del capital público, definidos de forma que recojan información a priori muy distinta, incluida la posibilidad de que las infraestructuras no tengan influencia o incluso influyan negativamente sobre la producción. En todos los casos la elasticidad *output* con respecto a la dotación de infraestructuras toma un valor sustancial. Por tanto, las estimaciones obtenidas muestran que no es posible encontrar evidencia empírica contraria a un efecto positivo y de cierta relevancia de las infraestructuras en la producción.

Aunque los resultados obtenidos con el método ME requieren un análisis de sensibilidad adecuado, esta metodología se perfila como un procedimiento de estimación útil para obtener evidencia empírica sobre aquellos fenómenos económicos que, al estar caracterizados por muestras de información limitada, no son fácilmente tratables con los métodos econométricos más habituales. Así lo ilustra la comparación realizada entre la estimación ME y la estimación *within*. Al contrario que en la estimación ME, la multicolinealidad no permite obtener evidencia favorable a la productividad de las infraestructuras al estimar un modelo de efectos fijos. Este tipo de muestras de información limitada son frecuentes, por lo que la estimación por ME proporciona una alternativa de interés para el análisis empírico.

Anexo: Obtención de errores estándar de los estimadores de máxima entropía

Para calcular los errores estándar de los estimadores de ME se ha seguido el proceso descrito en trabajos previos, como Mittelhammer y Cardell (1997), Fraser (2000) o Golan *et al*. (2001). Bajo ciertos supuestos sobre el comportamiento del modelo y = Xθ+e, que garantizan que los estimadores ME son al mismo tiempo consistentes y asintóticamente normales, la estimación por ME de los parámetros cumple que $\hat{\theta} \to N\left[\theta\ , \frac{\sigma_{\lambda}^{2}}{\kappa^{2}}\left(X'X\right)^{-1}\right]$, donde σ_{λ}^{2} es la varianza de los multiplicadores de Lagrange del conjunto de restricciones [9b]. Es posible estimar consistentemente σ_{λ}^{2} mediante la expresión $\hat{\sigma}_{\lambda}^{2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\lambda}_{t}^{2}}{T}$, siendo $\hat{\lambda}_{t}$ el multiplicador de Lagrange asociado a la observación muestral *t*.

Por otro lado, κ^2 es un escalar relacionado con la varianza del error aleatorio. El parámetro κ puede ser estimado consistentemente mediante la expresión $\hat{\kappa} = \frac{1}{T\sum_{t=1}^{T} \mathrm{Var}(\hat{e}_t)}$; donde $\mathrm{Var}\ (\hat{e}_t) = \left[\sum_{j=1}^{J} v_j^2 \hat{w}_{tj}\right] - \hat{e}_t^2$, y $\hat{e}_t$ es el estimador del error para cada observación *t* definido por la expresión $\hat{e}_t = \sum_{j=1}^{J} v_j \hat{w}_{tj}$.

A partir de las estimaciones de estos parámetros es posible estimar la varianza de los estimadores ME y obtener los t-ratios como $\frac{\hat{\theta}}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\theta}\right)}}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ai, C. y S. Cassou (1997): "On public capital analysis with state data", *Economics Letters*, vol. 57, págs. 209-212.

Álvarez, A., L. Orea y J. Fernández, (2003): "La productividad de las infraestructuras en España", *Papeles de Economía Española*, n.º 95, págs. 125-136.

Aschauer, D.A. (1989): "Is public expenditure productive?", *Journal of Monetary Economics*, vol. 23, n.º 2, págs. 177-200.

Baltagi, B.H. y N. Pinnoi (1995): "Public Capital Stock and State Productivity Growth: Further Evidence from an Error Components Model", *Empirical Economics*, vol. 20, págs. 351-359.

Belsley, D.A., E. Kuh y R.E. Welsch (1980): *Regression Diagnostics*, Wiley, Nueva York, USA.

Cantos, P., M. Gumbau-Albert y J. Maudos (2005): "Transport infrastructure and regional growth: Evidence of the Spanish case", *Transport Reviews*, vol. 25, n.º 1, págs. 25-50.

Cordero, G. y A. Gayoso (1997): *Evolución de las economías regionales en los primeros 90*, Dirección de Análisis y Programación Presupuestaria, Ministerio de Economía y Hacienda, noviembre, Madrid.

Dabán, M.T. y M.J. Murgui (1997): “Convergencia y rendimientos a escala en las regiones españolas: La base de datos BD. MORES”, *Información Comercial Española*, n.º 762, págs. 66-86.

de la Fuente, Á. (2002): “Infraestructuras y productividad: un panorama de la literatura”, en de la Fuente, A., *Fondos Estructurales, inversión en infraestructuras y crecimiento regional*, Centro de Investigación Económica y Financiera, Documentos de Economía, n.º 18, Fundación Caixa Galicia, págs. 81-142.

Delgado, M.J. y I. Álvarez (2000): “Las infraestructuras productivas en España: Estimación del *stock* en unidades físicas y análisis de impacto en la producción privada regional”, *Revista Asturiana de Economía*, n.º 19, págs. 155-180.

Draper, M. y J.A. Herce (1994): “Infraestructuras y crecimiento: un panorama”, *Revista de Economía Aplicada*, vol. II, n.º 6, págs. 129-168.

Evans, P. y G. Karras (1994): “Are government activities productive? Evidence from a panel of U.S. States”, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 76, n.º 1, feb., págs. 1-11.

Fraser, I. (2000): “An application of maximum entropy estimation: the demand for meat in the United Kingdom”, *Applied Economics*, vol. 32, n.º 1, págs. 45-59.

Freire, M.J. y J. Alonso (2002): “Infraestructuras Públicas y desarrollo económico de Galicia”, en de La Fuente, Á., Freire, M.J. y J. Alonso, *Infraestructuras y desarrollo regional*, Doc. de Economía, n.º 15, Fundación Caixa Galicia, págs. 37-67.

Fundación BBVA (1998): *El stock de capital en la economía española y su distribución territorial*, Bilbao.

García-Fontes, W. y D. Serra (1994): “Capital público, infraestructura y crecimiento”, en Esteban, J.M. y X. Vives, (dirs.): *Crecimiento y Convergencia Regional en España y Europa*, vol. 2, Instituto de Análisis Económico, Barcelona, págs. 451-477.

Garcia-Milà, T. y T.J. McGuire (1992): “The contribution of publicly provided inputs to states' economies”, *Regional Science and Urban Economics*, vol. 22, págs. 229-241.

Garcia-Milà, T., T. McGuire y H. Porter (1996): “The effect of public capital in state-level production functions reconsidered”, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 78, n.º 1, págs. 177-180.

Gardebroek, C. y A. Oude Lansink (2004): “Farm-specific Adjustment Costs in Dutch Pig Farming”, *Journal of Agricultural Economics*, vol. 55, n.º 1, págs. 3-24.

Gil, C. (2001): *Capital Público y Convergencia en las Regiones Europeas*, Madrid, Civitas.

Golan, A., G. Judge y D. Miller (1996): *Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data*, Nueva York, John Wiley & Sons.

Golan, A., J.M. Perloff y E.Z. Shen (2001): “Estimating a Demand System with Nonnegativity Constraints: Mexican Meat Demand”, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 83, n.º 3, págs. 541-550.

Goldberger, A.S. (1991): *A Course in Econometrics*, Cambridge-USA, Harvard University Press.

Gramlich, E. M. (1994): “Infrastructure Investment: A Review Essay”, *Journal of Economic Literature*, vol. XXXII, set., págs. 1176-1196.

Greene, W. (2000): *Econometric analysis*, New Jersey, Prentice Hall.

Holtz-Eakin, D. (1994): “Public-sector capital and the productivity puzzle”, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 76, n.º 1, feb., págs. 12-21.

INE (2003): *Contabilidad Regional de España. Base 1995*, Madrid.

Judge, G.C., R.C. Hill, W.E. Griffiths, H. Lütkepohl y T.C. Lee (1988): *Introduction to the theory and practice of econometrics*, Wiley, Nueva York.

Mas, M., J. Maudos, F. Pérez y E. Uriel (1994): "Capital público y productividad en las regiones españolas", *Moneda y Crédito*, n.º 198, págs. 163-192.

Mas, M., J. Maudos, F. Pérez y E. Uriel (1996): "Infrastructures and Productivity in the Spanish Regions", *Regional Studies*, vol. 30, n.º 7, págs. 641-649.

Mas, M., F. Pérez, L. Serrano, A. Soler y E. Uriel (2000): *Capital humano, series históricas 1964-2001*, Valencia, BanCaja.

Mittelhammer, R. y N.S. Cardell (1997): "On the consistency and asymptotic normality of data-constrained GME estimators in the general linear model", Mimeo, University of Washington.

Moreno, R. M. Artís, E. López-Bazo y J. Suriñach (1997): "Evidence on the complex link between infrastructure and regional growth", *International Journal of Development Planning Literature*, n.º 20, págs. 81-108.

Munnell, A. (1990): "How does public infrastructure affect regional economic performance?", *New England Economic Review*, Federal Reserve Bank of Boston, set.-oct., págs. 11-32.

Paris, Q. y R.E. Howitt (1998): "An Analysis of Ill-Posed Production Problems Using Maximum-Entropy", *American Journal of Agricultural Economics*, vol. 80, págs. 124-138.

Pedraja, F. J. Ramajo y Salinas (1999): "Eficiencia productiva del sector industrial español: Un análisis espacial y sectorial", *Papeles de Economía Española*, n.º 80, págs. 51-68.

Pukelsheim, F. (1994): "The three sigma rule", *The American Statistician*, vol. 48, n.º 4, págs. 88-91.

Shannon, C.E. (1948): "A Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, vol. 27, págs. 379-423.

Vijverberg, W.P.M., C.P.C. Vijverberg, y J.L. Gamble (1997): "Public capital and private productivity", *The Review of Economics and Statistics*, vol. 79, n.º 2, págs. 267-278.

Fecha de recepción del original: septiembre, 2005
Versión final: noviembre, 2007

ABSTRACT

The empirical analysis of public infrastructure productivity has been limited by several econometric problems. These problems are probably the cause of the great variability in results reported in the literature. One of these econometric problems is the existence of multicollinearity when infrastructure is included as an input in a production function. In this paper, we propose to deal with multicollinearity by using priors on parameter values. For this purpose, we explore the use of maximum entropy econometrics to estimate the parameters of a regional production function in Spain. Our estimates show that infrastructure plays an important role in production.

Key words: Infrastructure, productivity, maximum entropy.

JEL classification: C13, C51, H54, R11, O47.